

Themen der diskreten Geometrie motiviert durch Anwendungen

Geometrietagung Strobl

Christian Müller | TU Wien

Nov 10 2023 | BIFEB Strobl

Koautor:innen

Michael Jimenez

Oleg Karpenkov

Martin Kilian

Davide Pellis

Martin Peternell

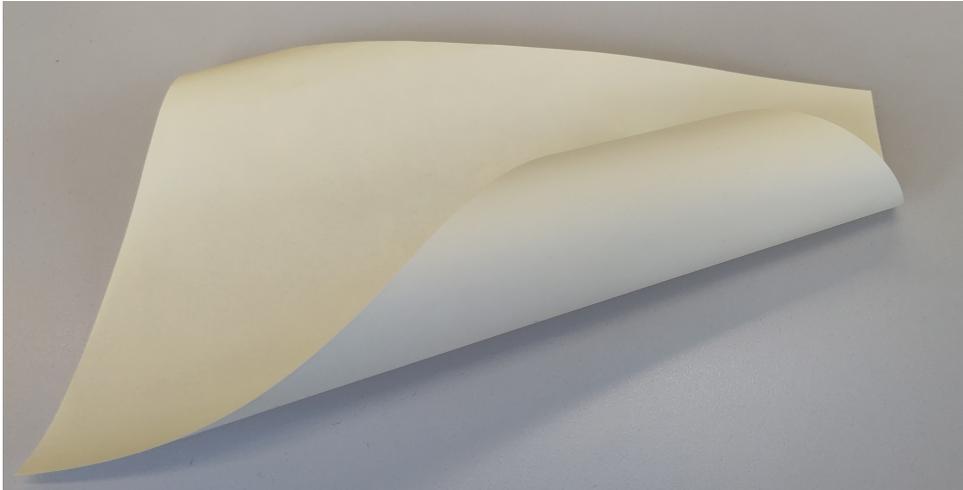
Helmut Pottmann

Florian Rist

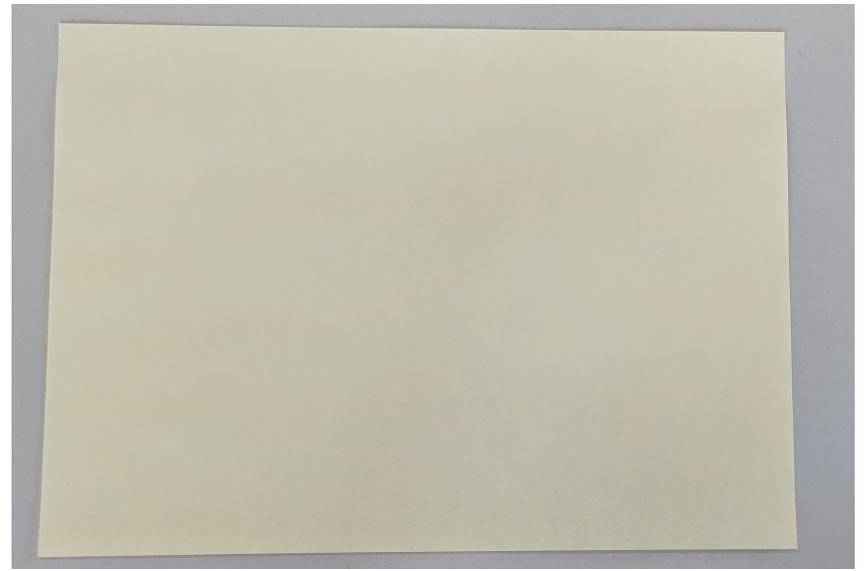
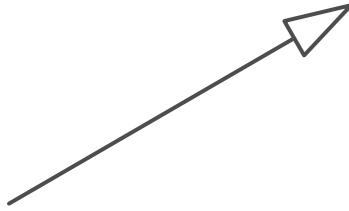
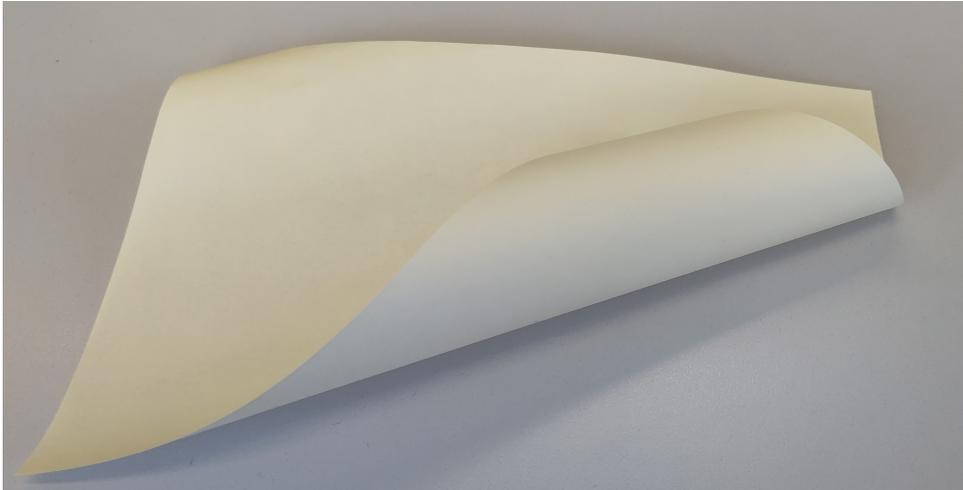
Hui Wang

[Frank Gehry. Walt Disney Concert Hall]

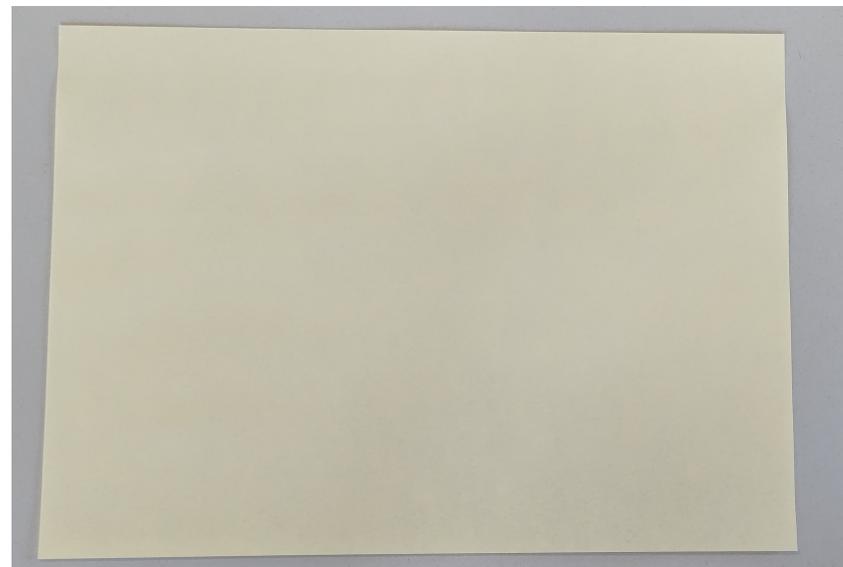
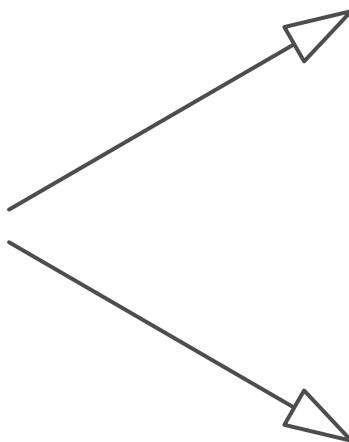
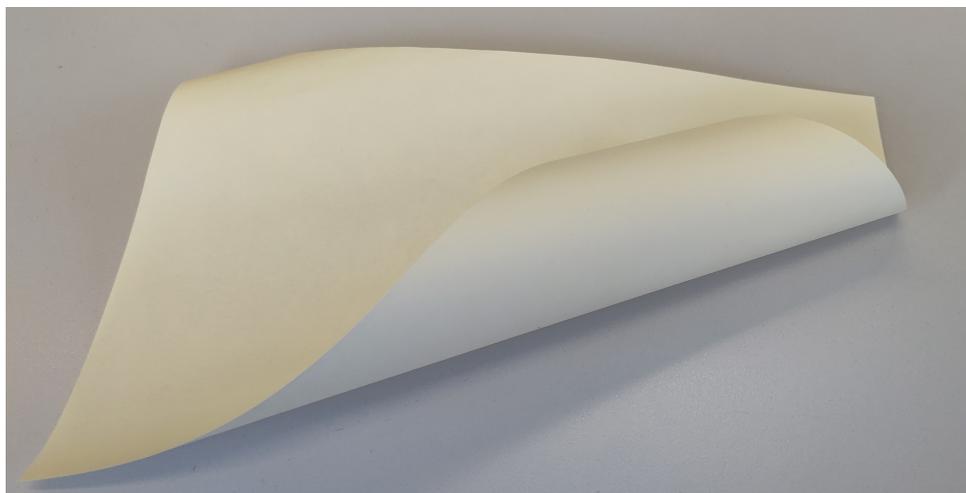
Abwickelbare Flächen



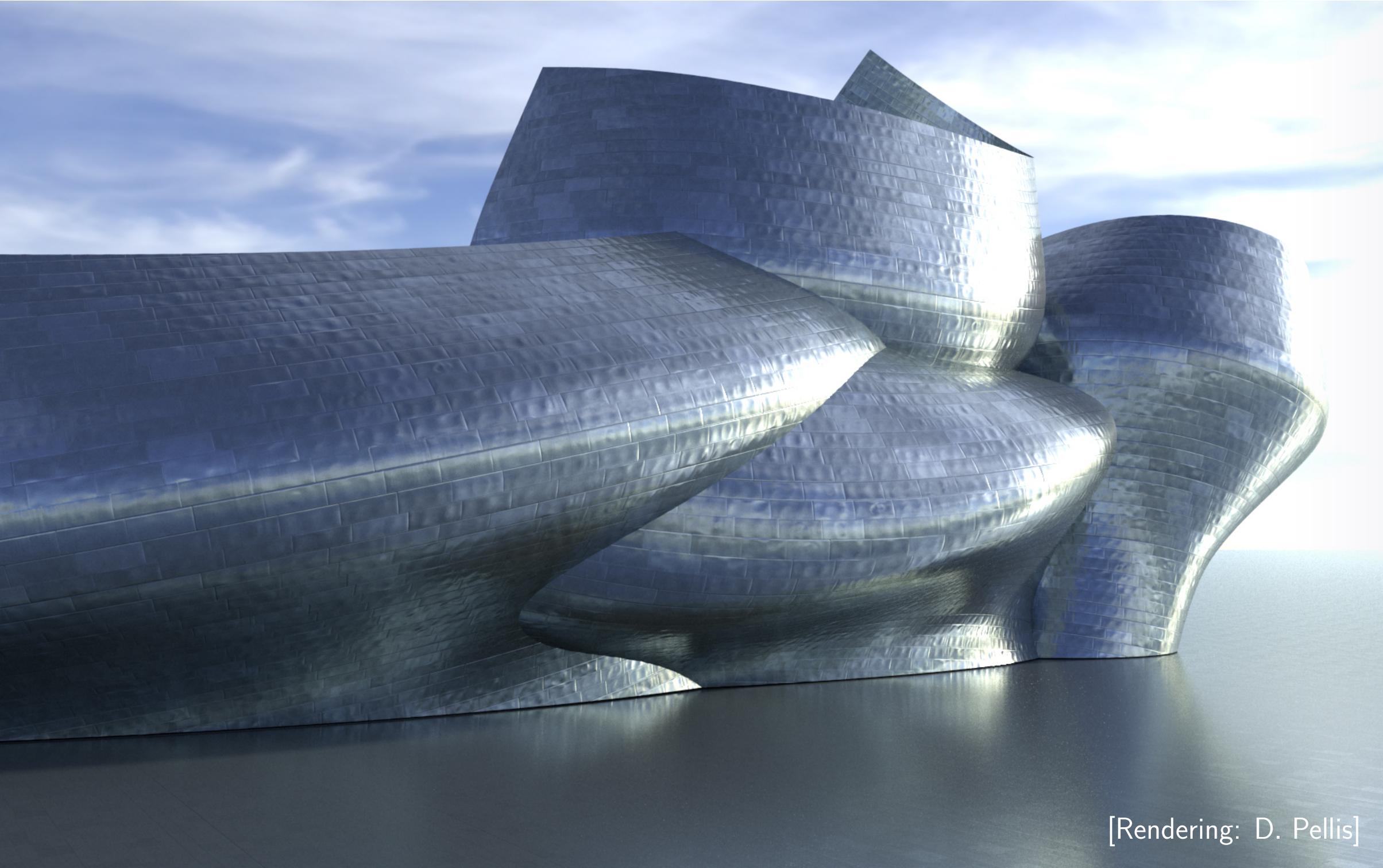
Abwickelbare Flächen



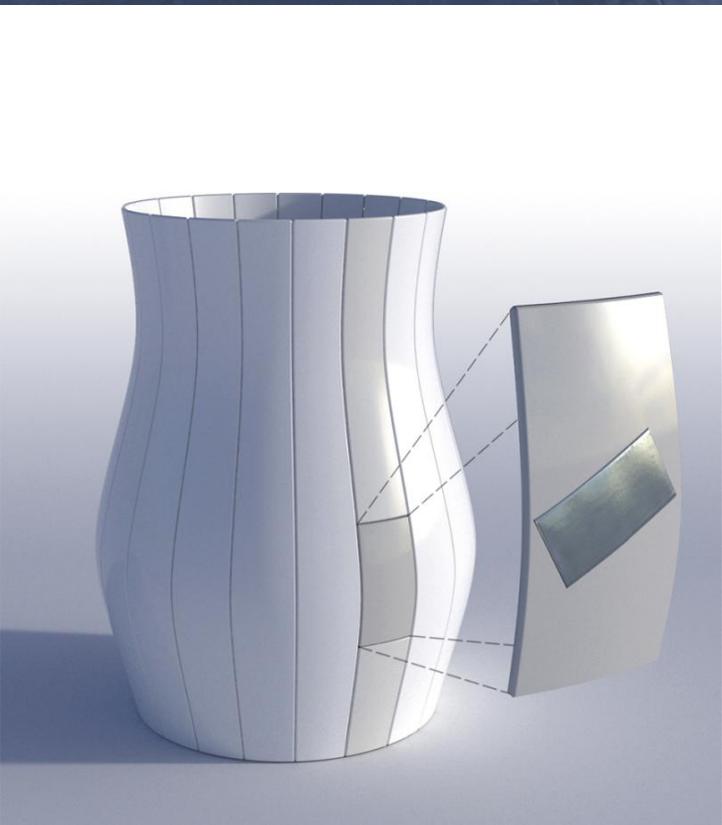
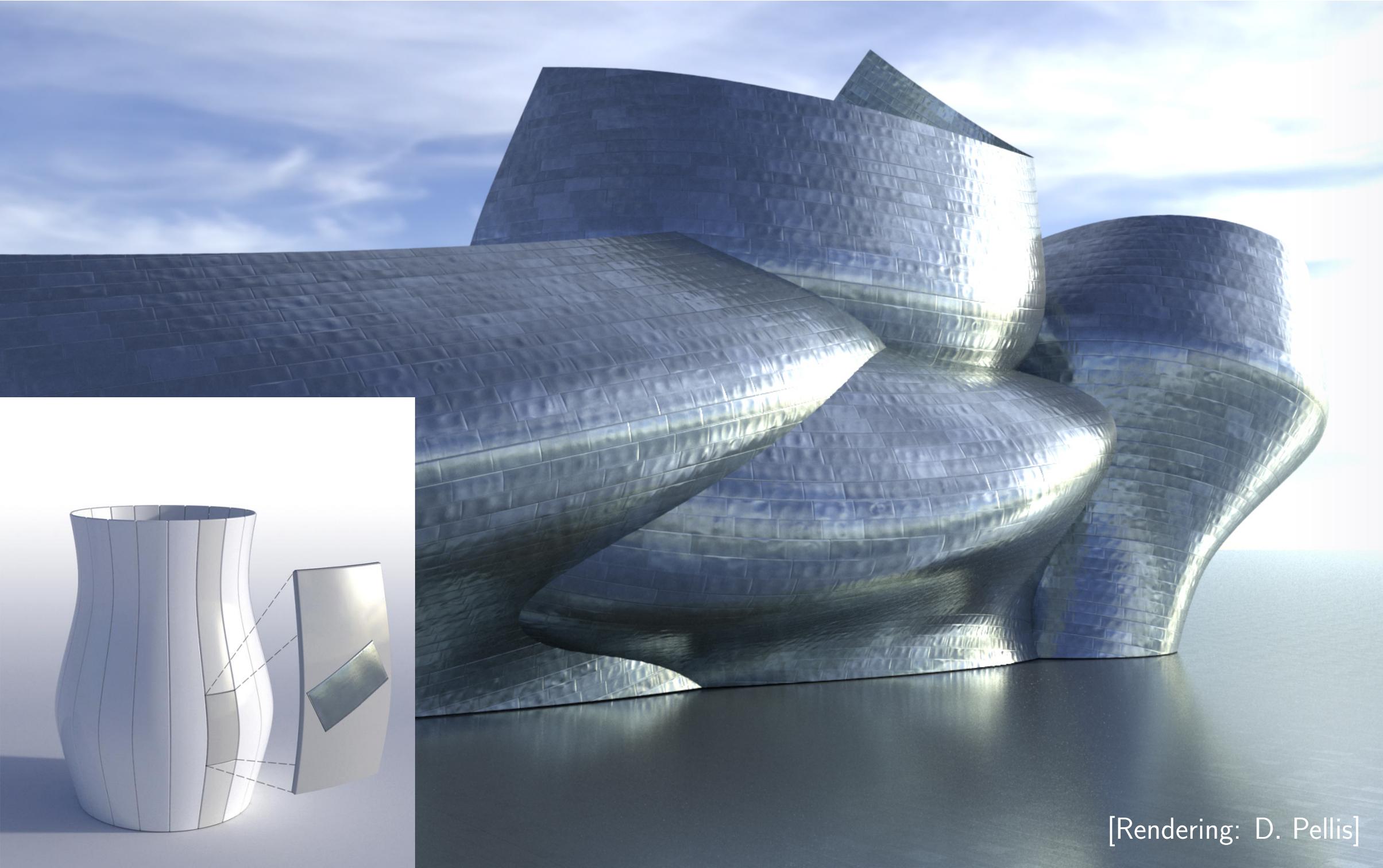
Abwickelbare Flächen



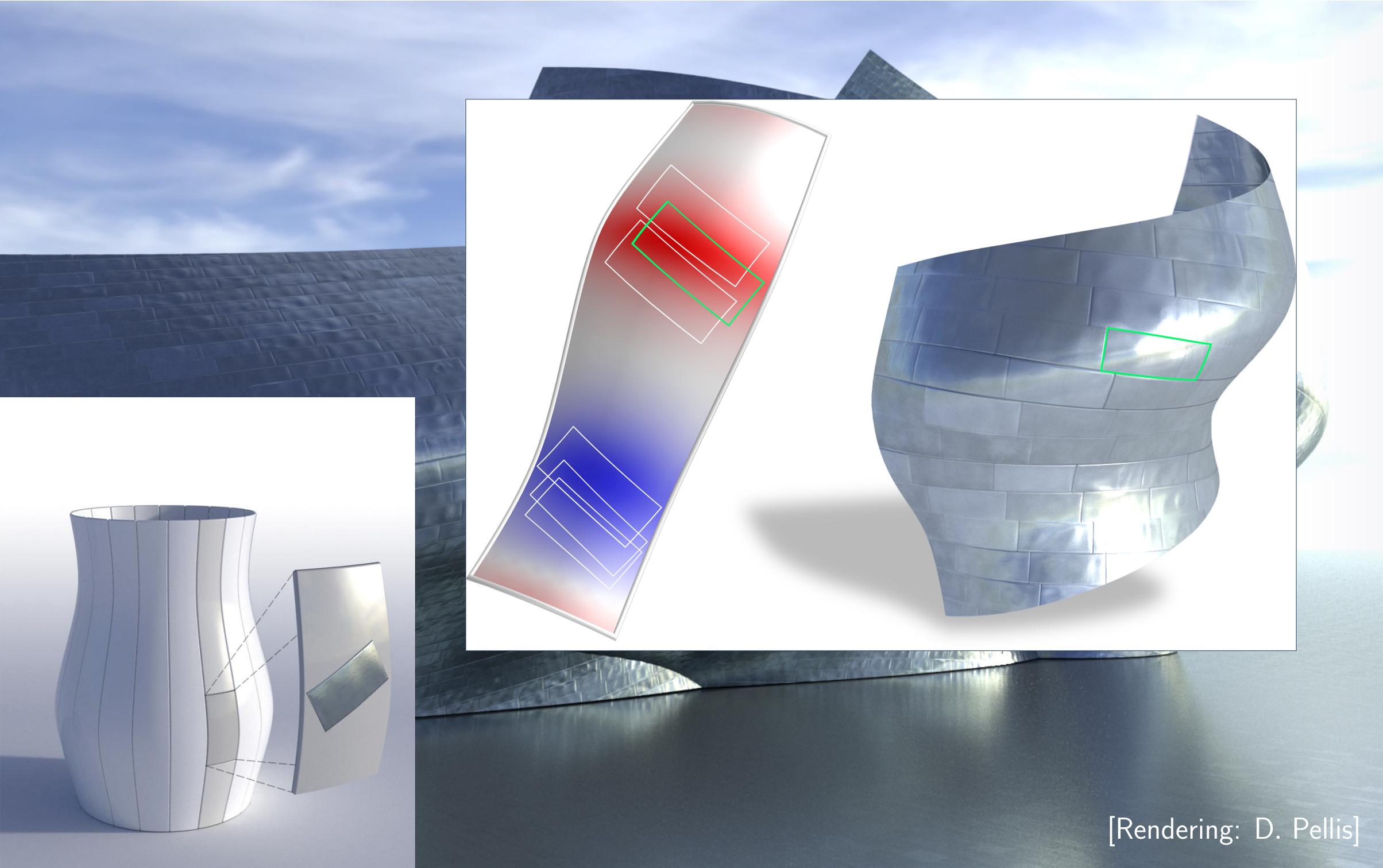




[Rendering: D. Pellis]



[Rendering: D. Pellis]



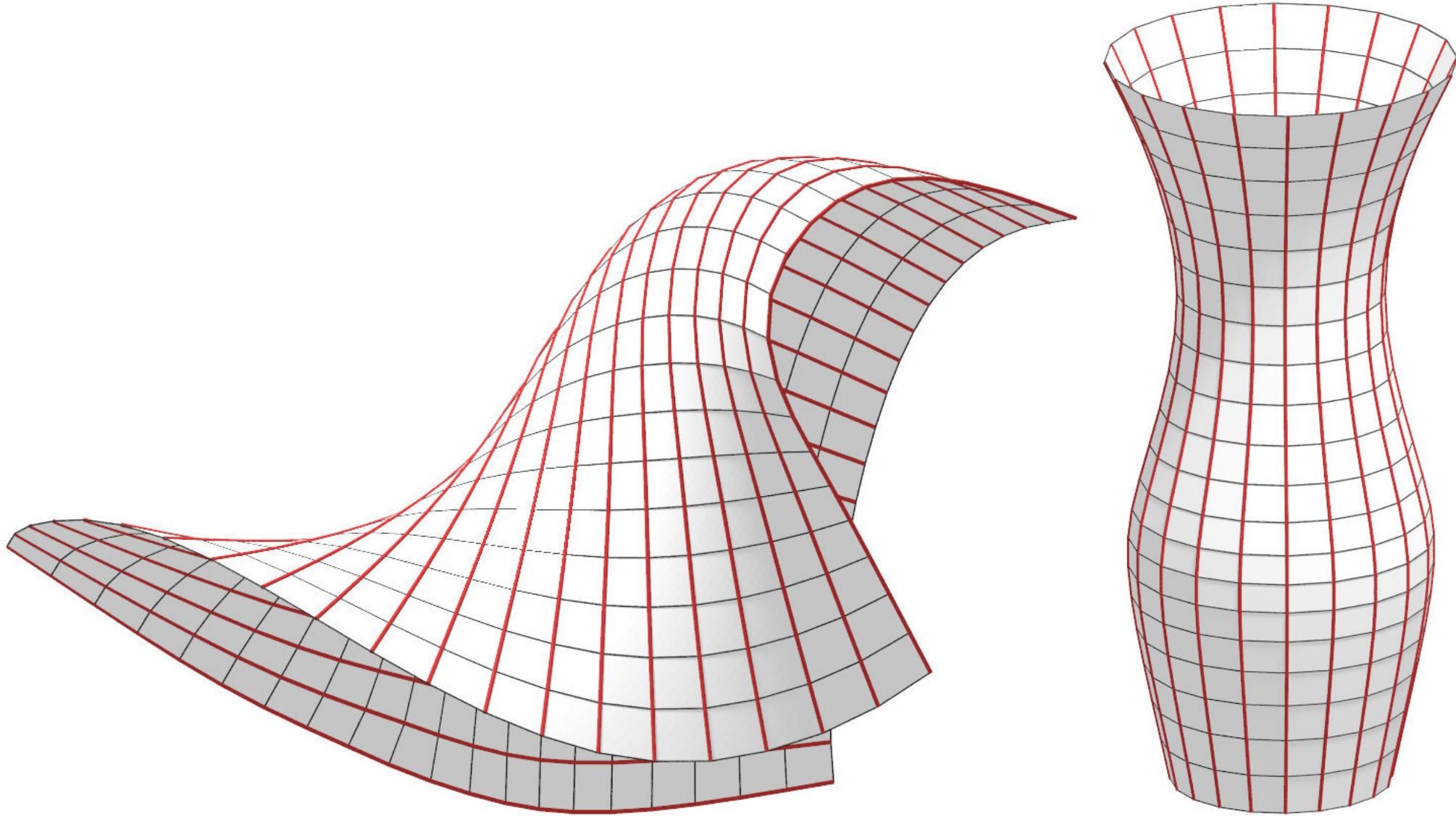
[Rendering: D. Pellis]

(Diskrete) geodätische Parallelkoordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f_u \perp f_v$$

rote Linien sind Geodätische



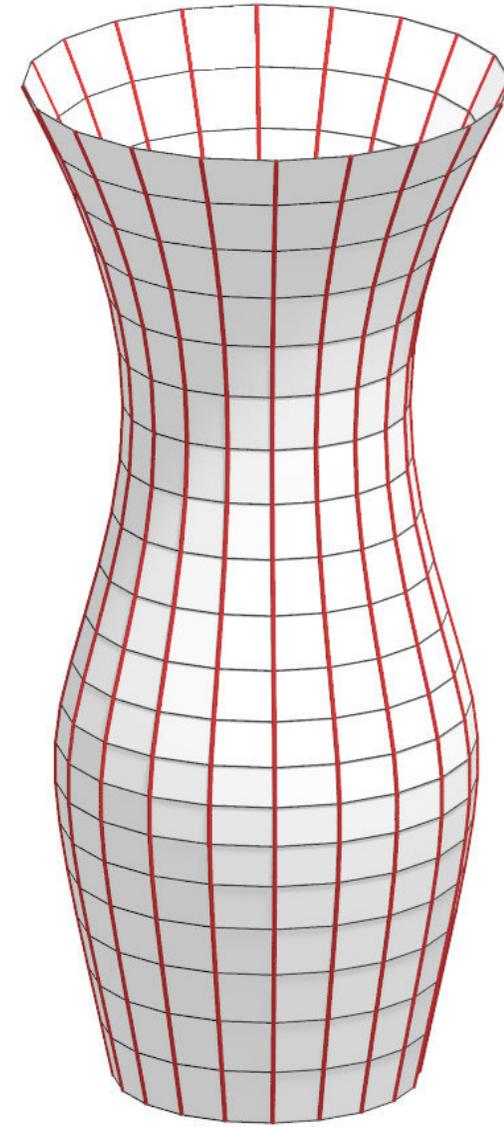
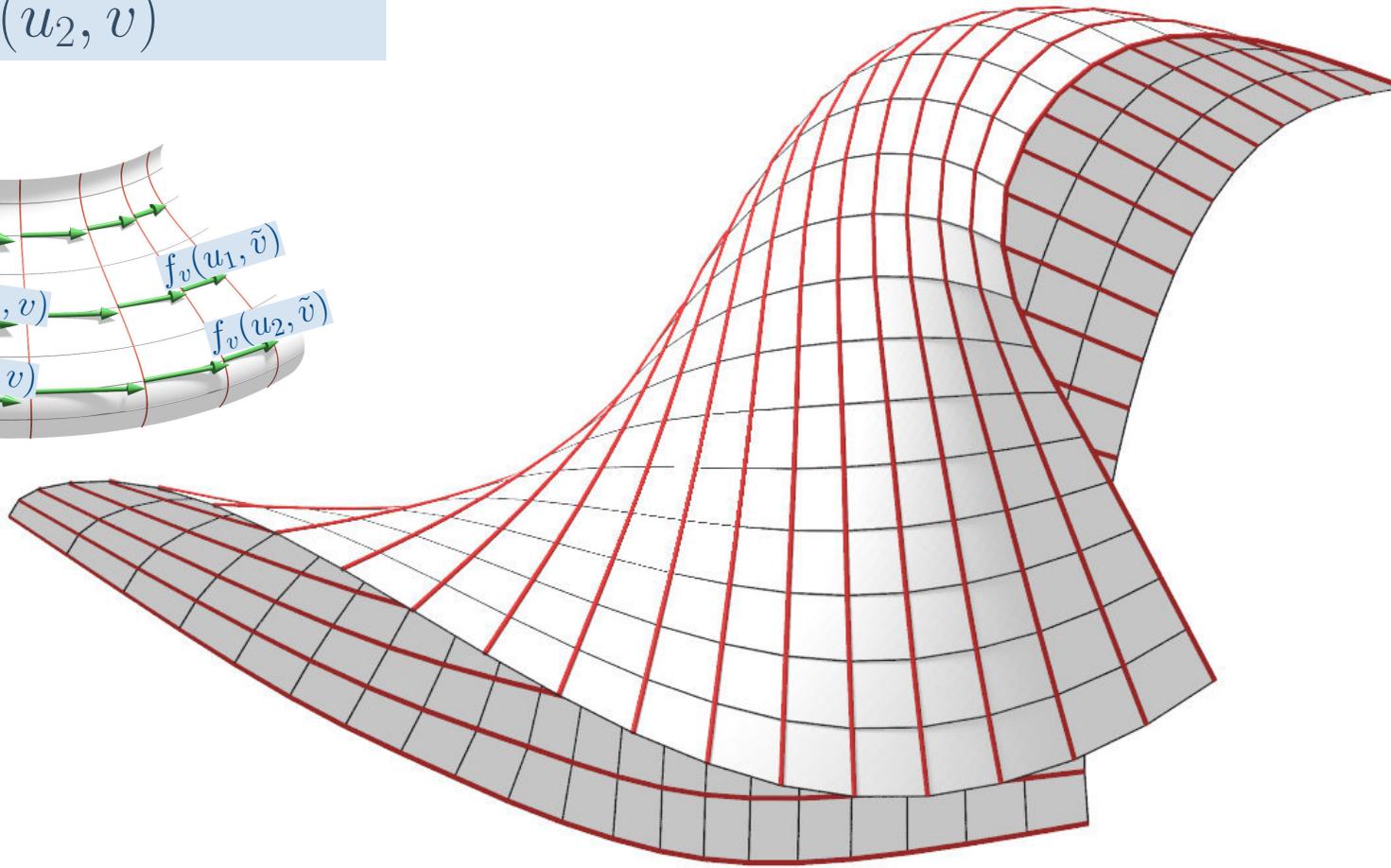
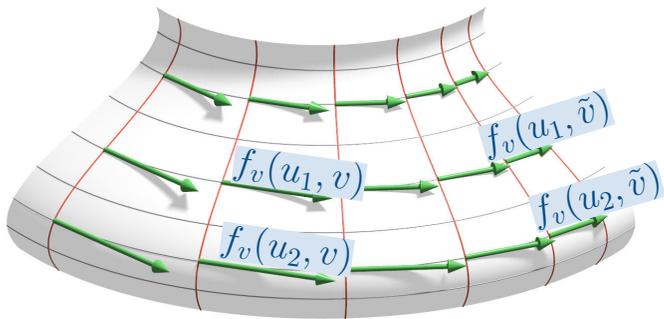
(Diskrete) geodätische Parallelkoordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f_u \perp f_v$$

rote Linien sind Geodätische

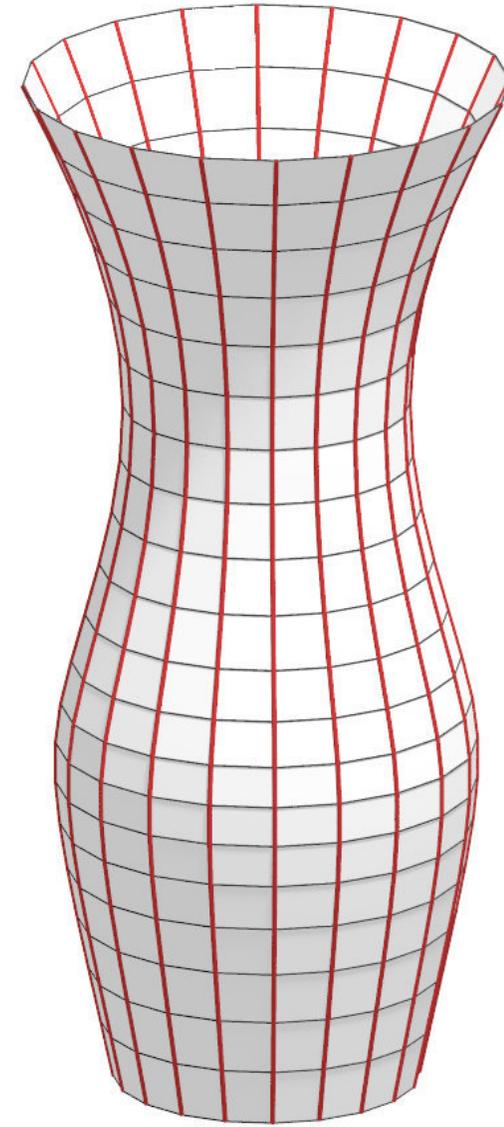
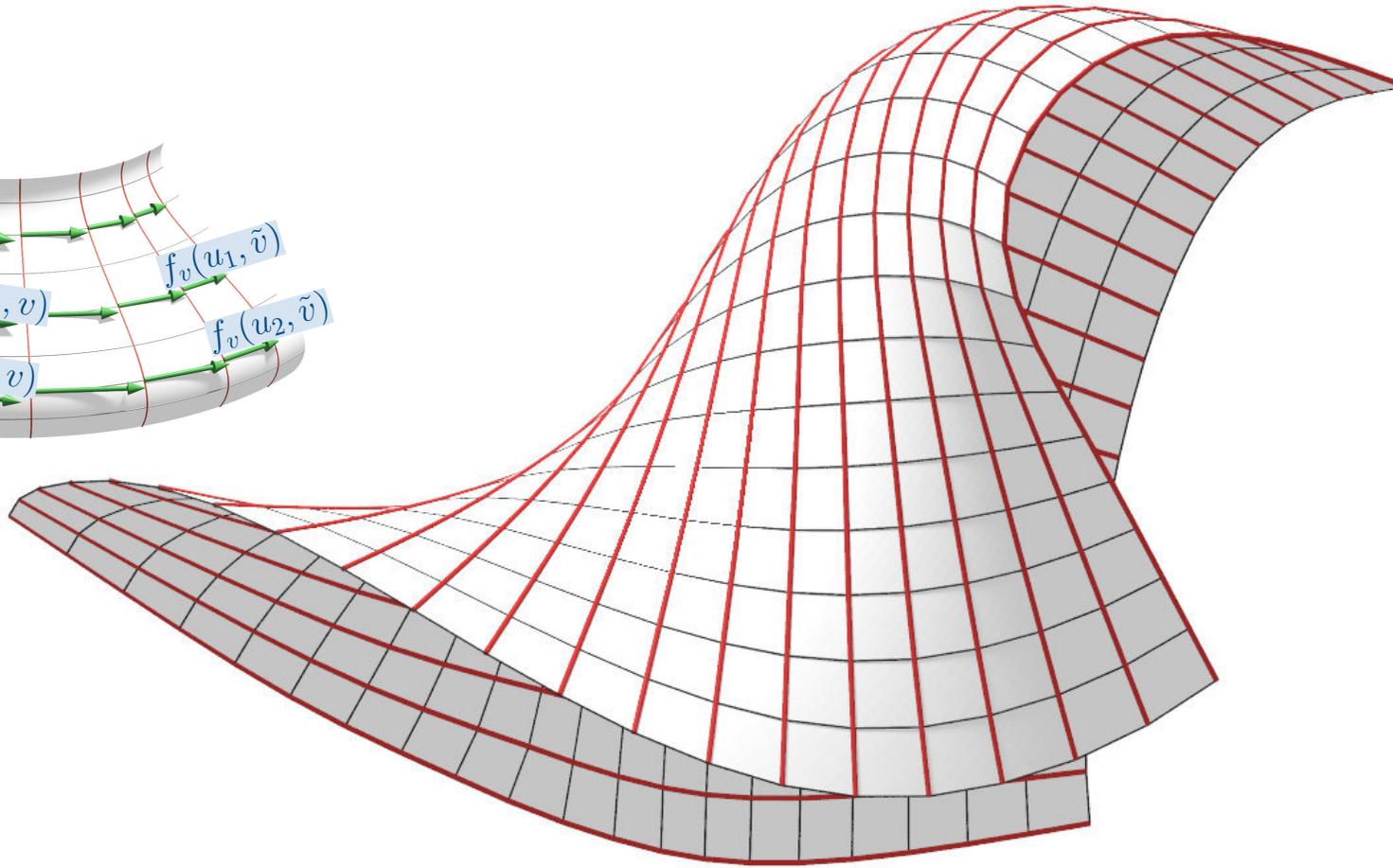
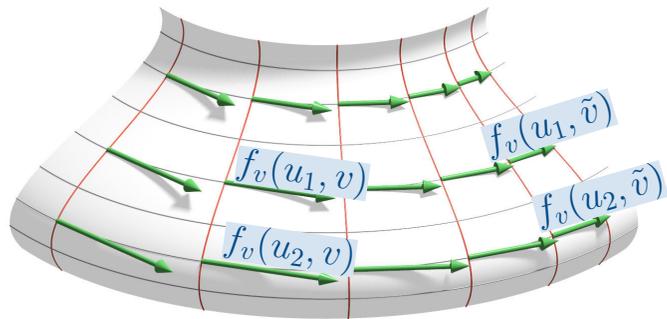
und
$$\frac{\partial_v f(u_1, v)}{\partial_v f(u_2, v)} = \text{const}$$



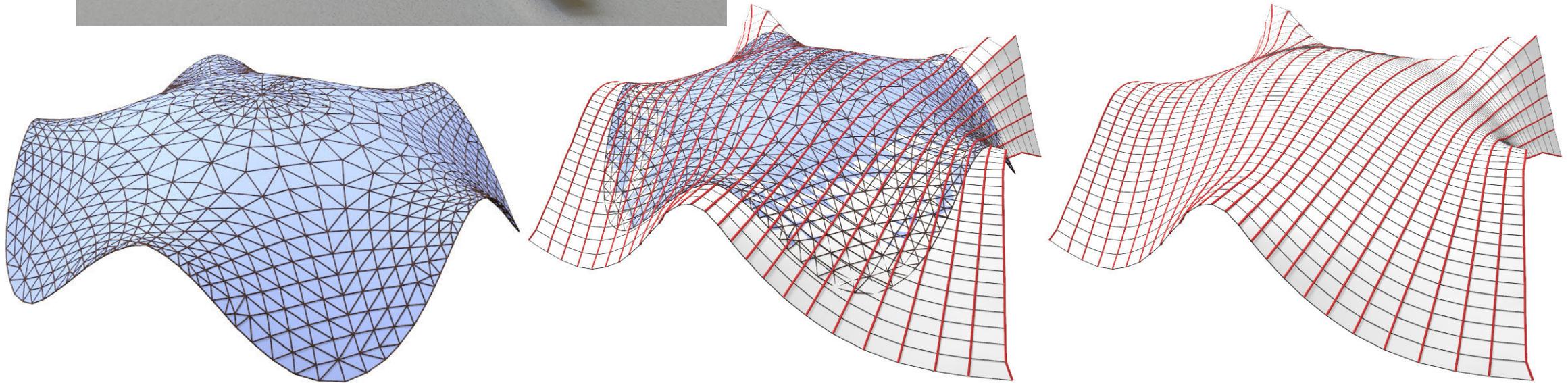
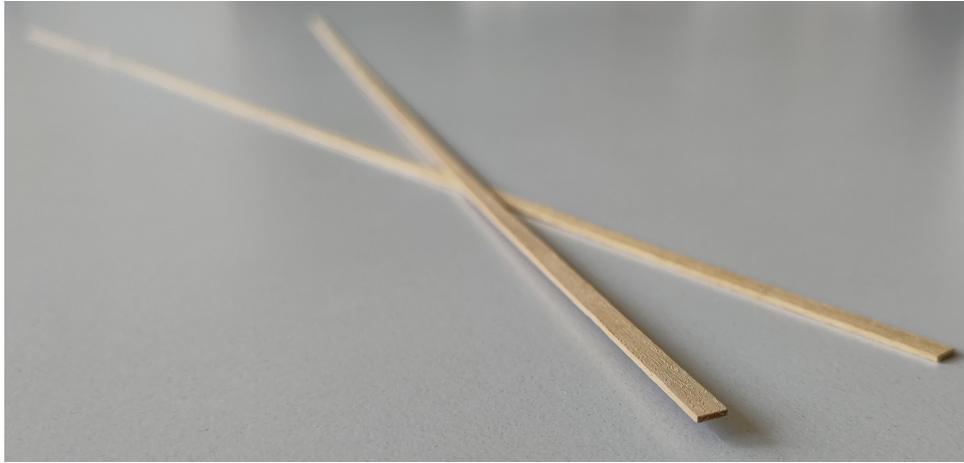
(Diskrete) geodätische Parallelkoordinaten

Satz. Geodätische Parallelkoordinaten + $\frac{\|\partial_v f(u_1, v)\|}{\|\partial_v f(u_2, v)\|} = \text{const}$

\Rightarrow isometrisch zu Drehfläche

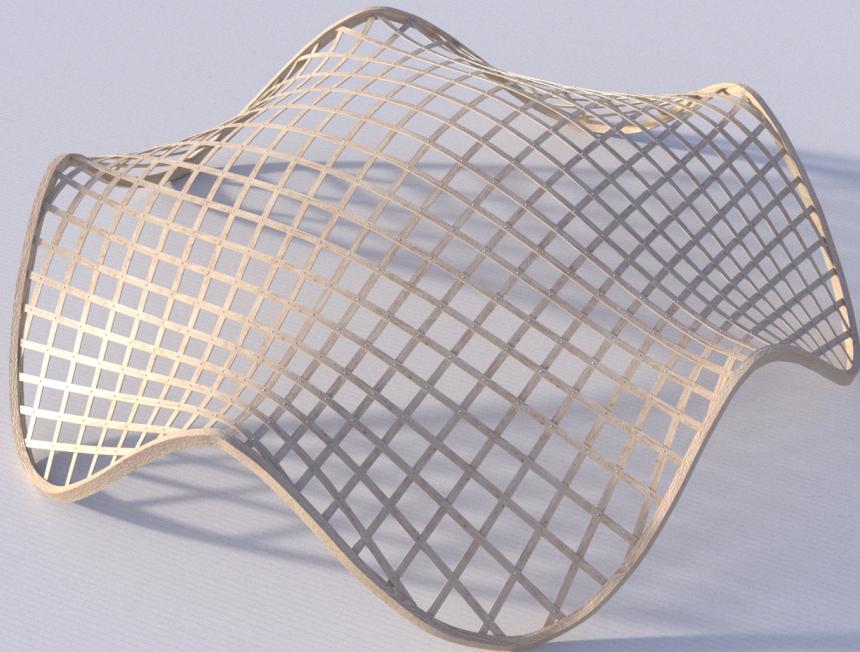
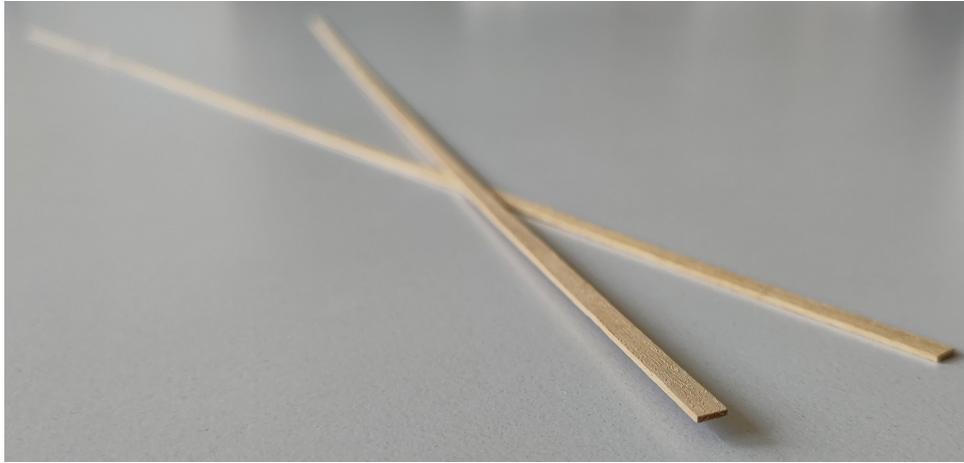


Geodätische Gitterschalen



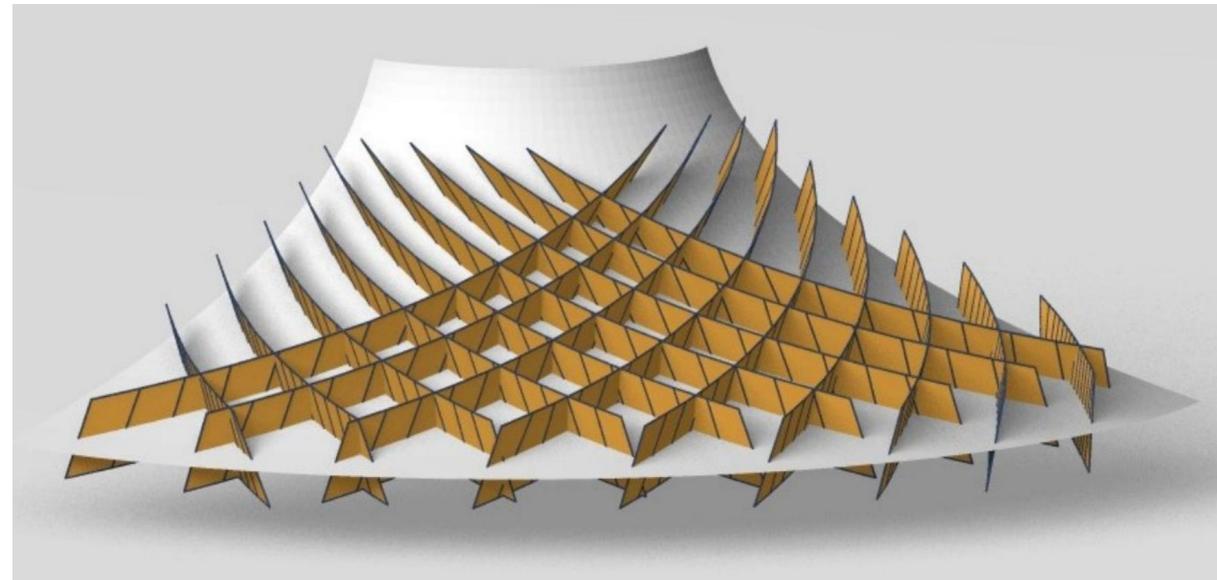
Verbiegen rechteckiger (Holz)streifen \rightarrow Geodätische

Geodätische Gitterschalen



Gekrümmte Tragstruktur

- rechteckige abwickelbare Streifen
- orthogonal zur Fläche
- konstanter Schnittwinkel

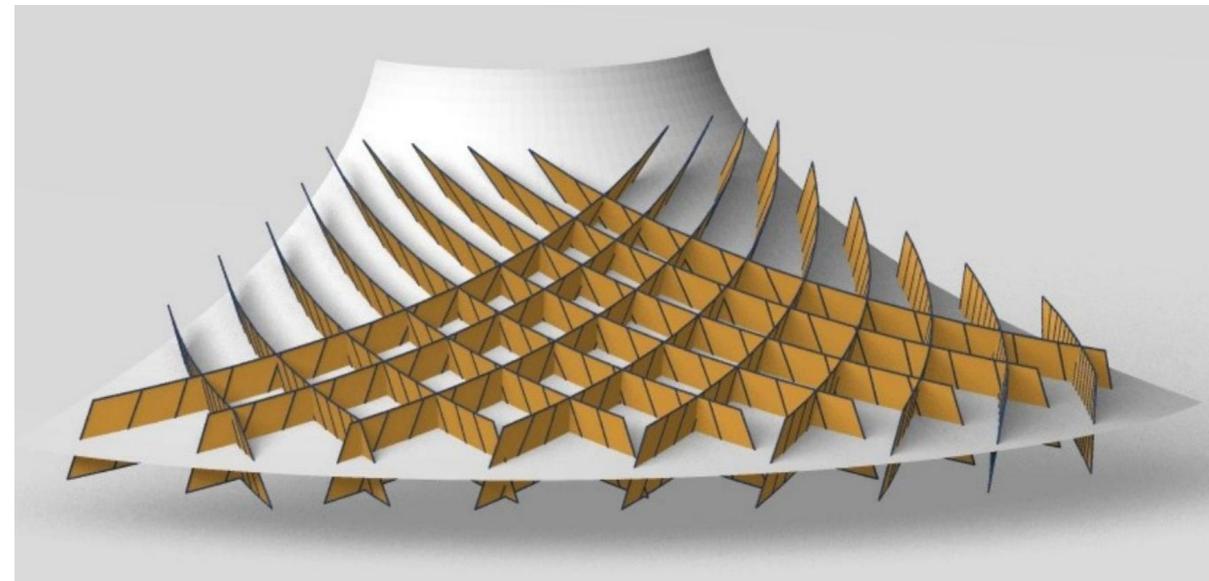


Gekrümmte Tragstruktur

- rechteckige abwickelbare Streifen
- orthogonal zur Fläche
- konstanter Schnittwinkel

⇒ Flächen mit konst. Verhältnis der Hauptkrümmungen

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\text{const}^2$$



Gekrümmte Tragstruktur

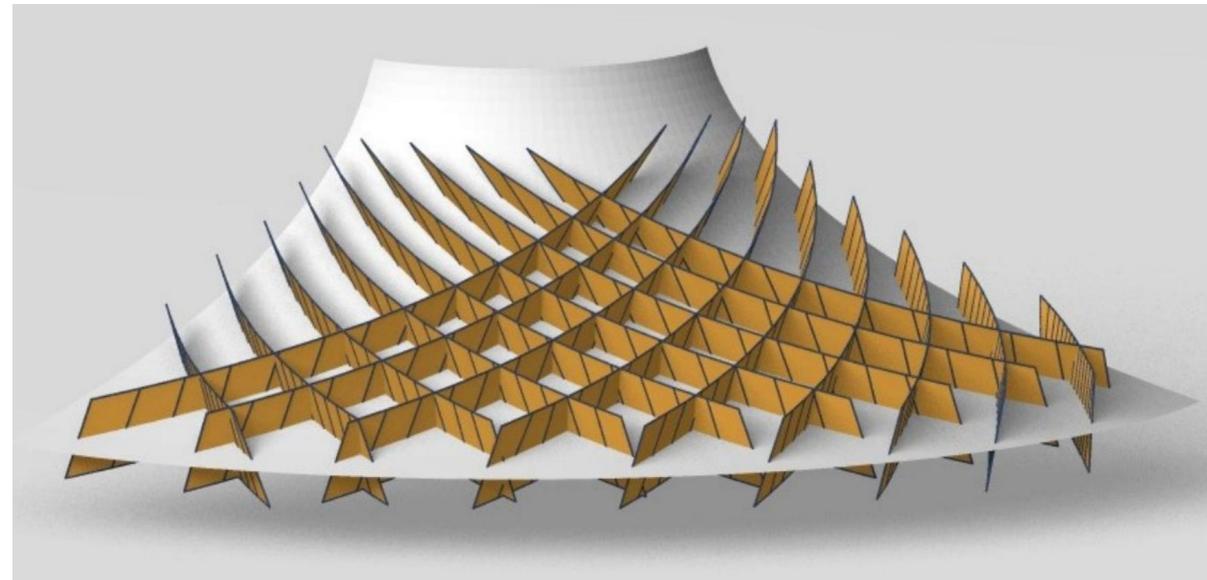
- rechteckige abwickelbare Streifen
- orthogonal zur Fläche
- konstanter Schnittwinkel

⇒ Flächen mit konst. Verhältnis der Hauptkrümmungen

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\text{const}^2$$

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -1 \Rightarrow H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$$

⇒ Minimalflächen



Gekrümmte Tragstruktur

- rechteckige abwickelbare Streifen
- orthogonal zur Fläche
- konstanter Schnittwinkel

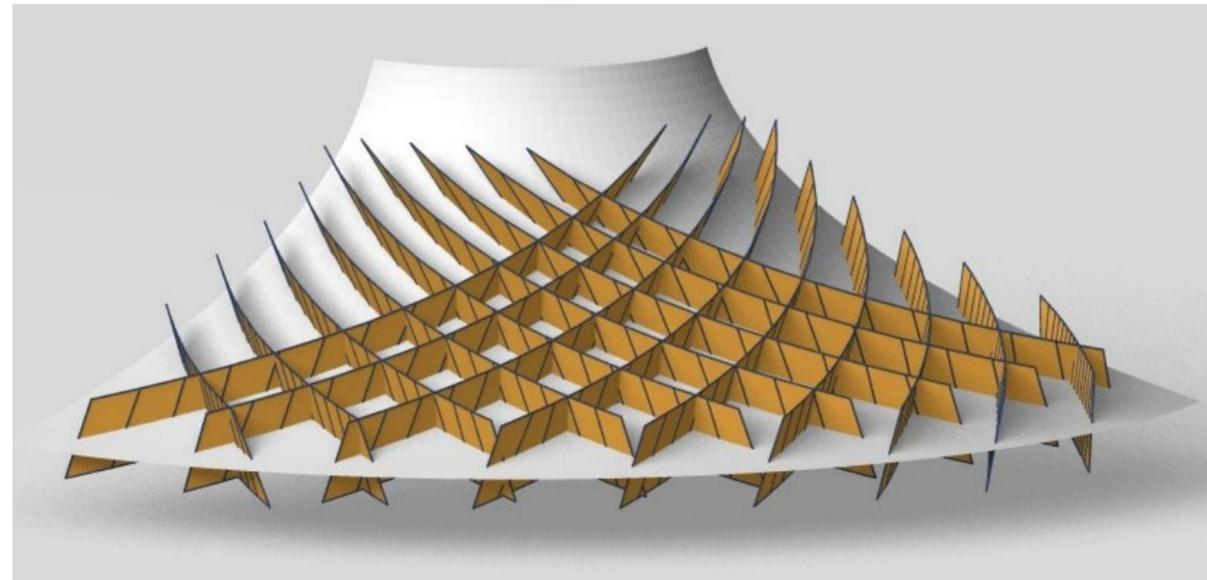
⇒ Flächen mit konst. Verhältnis der Hauptkrümmungen

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\text{const}^2$$

Streifen folgen den Asymptotenlinien (= Schmieglinien)

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -1 \Rightarrow H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$$

⇒ Minimalflächen

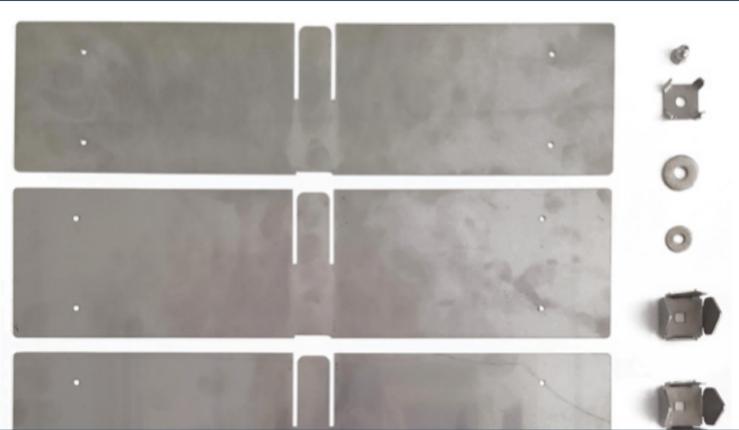




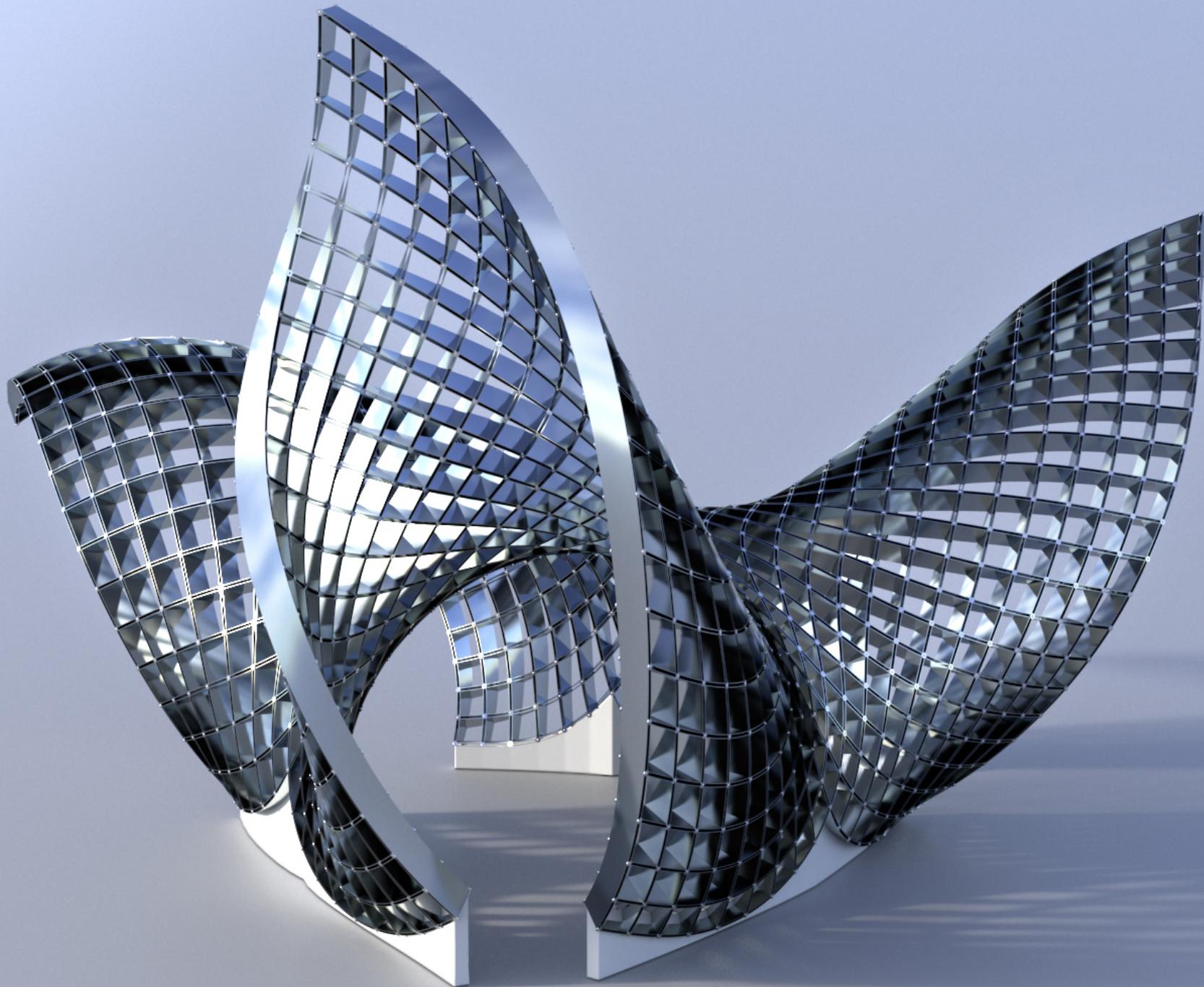
[Eike Schling. INSIDE/OUT Pavillion]

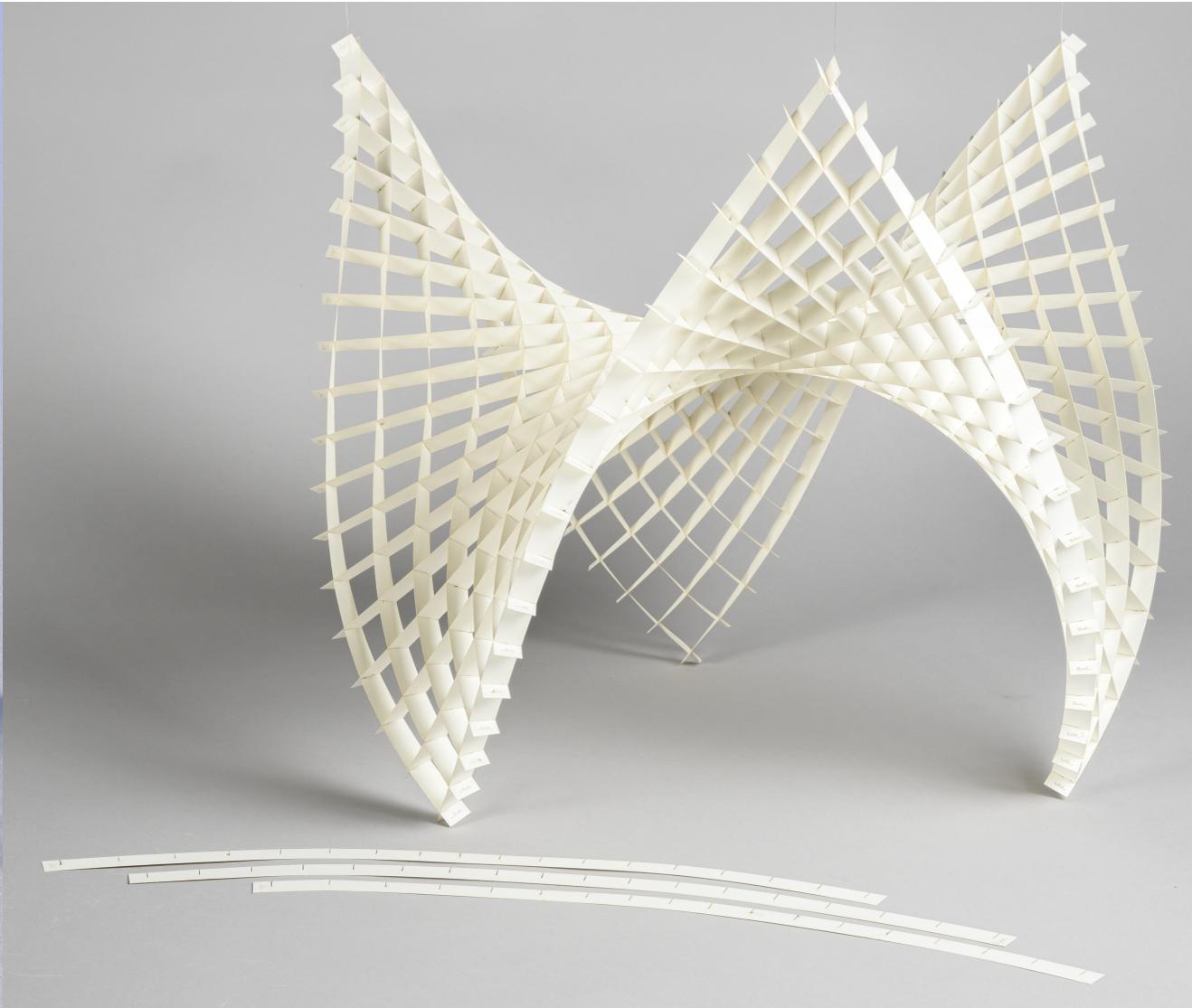
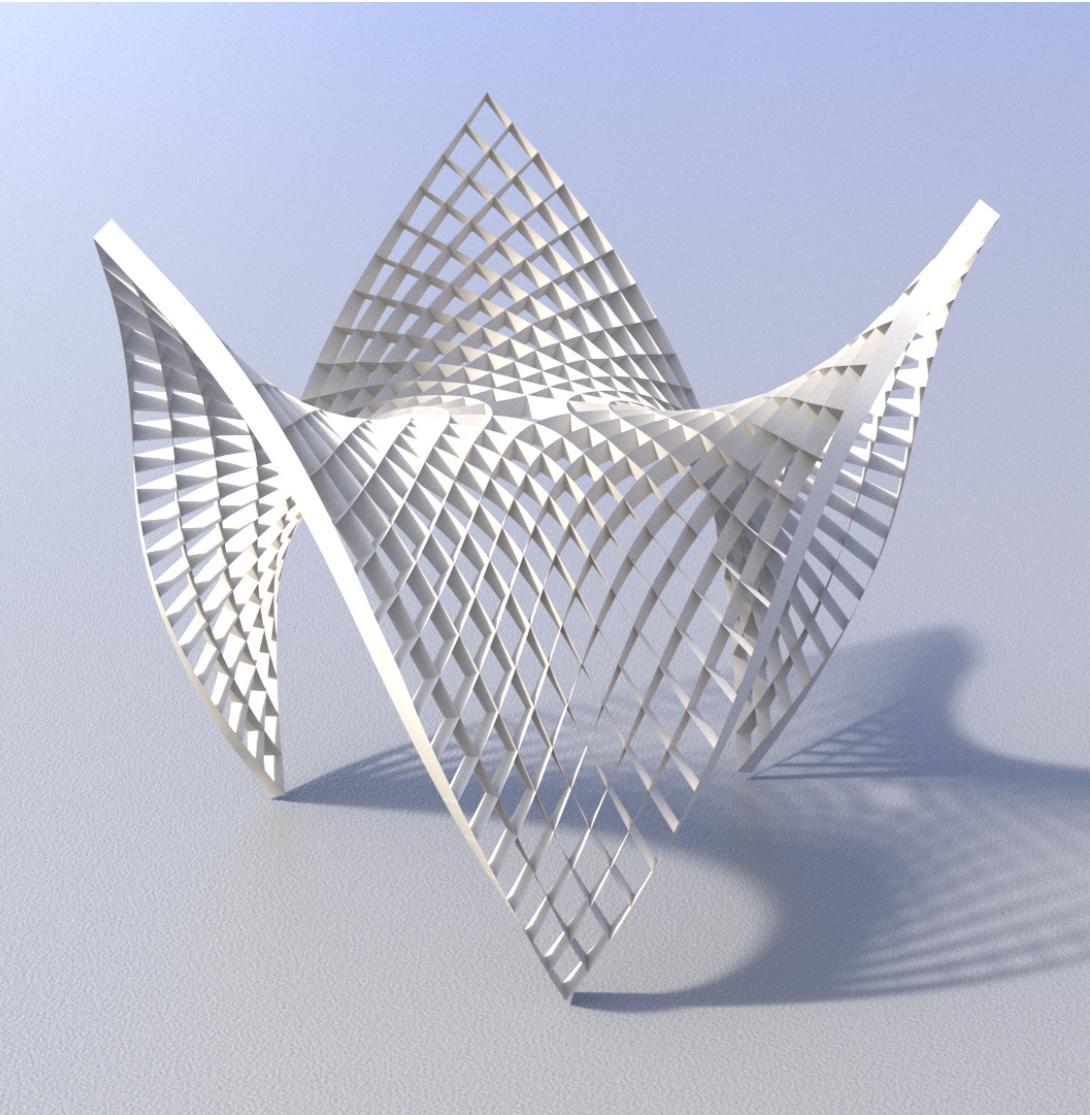


[Eike Schling. INSIDE/OUT Pavillion]

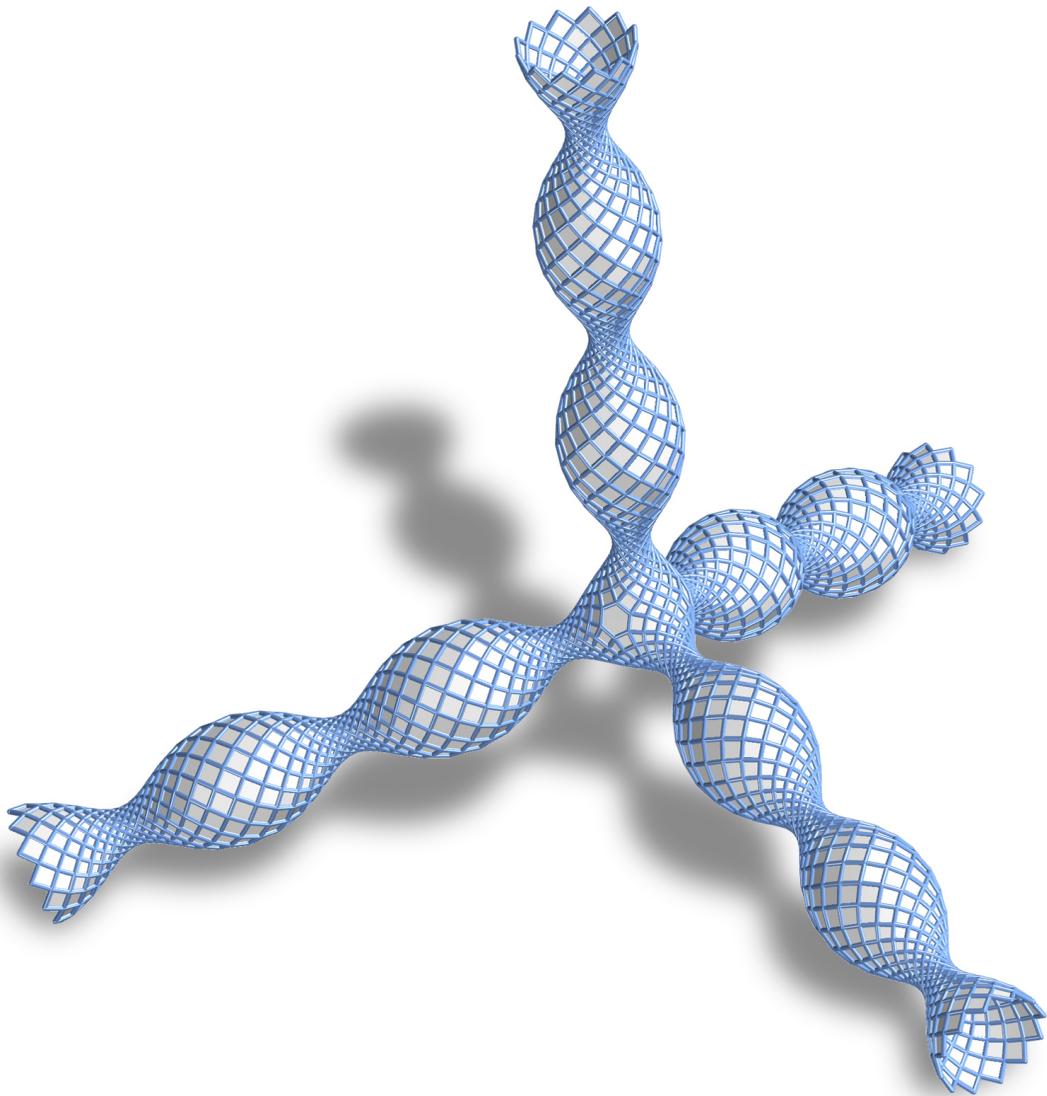


[Eike Schling. INSIDE/OUT Pavillion]

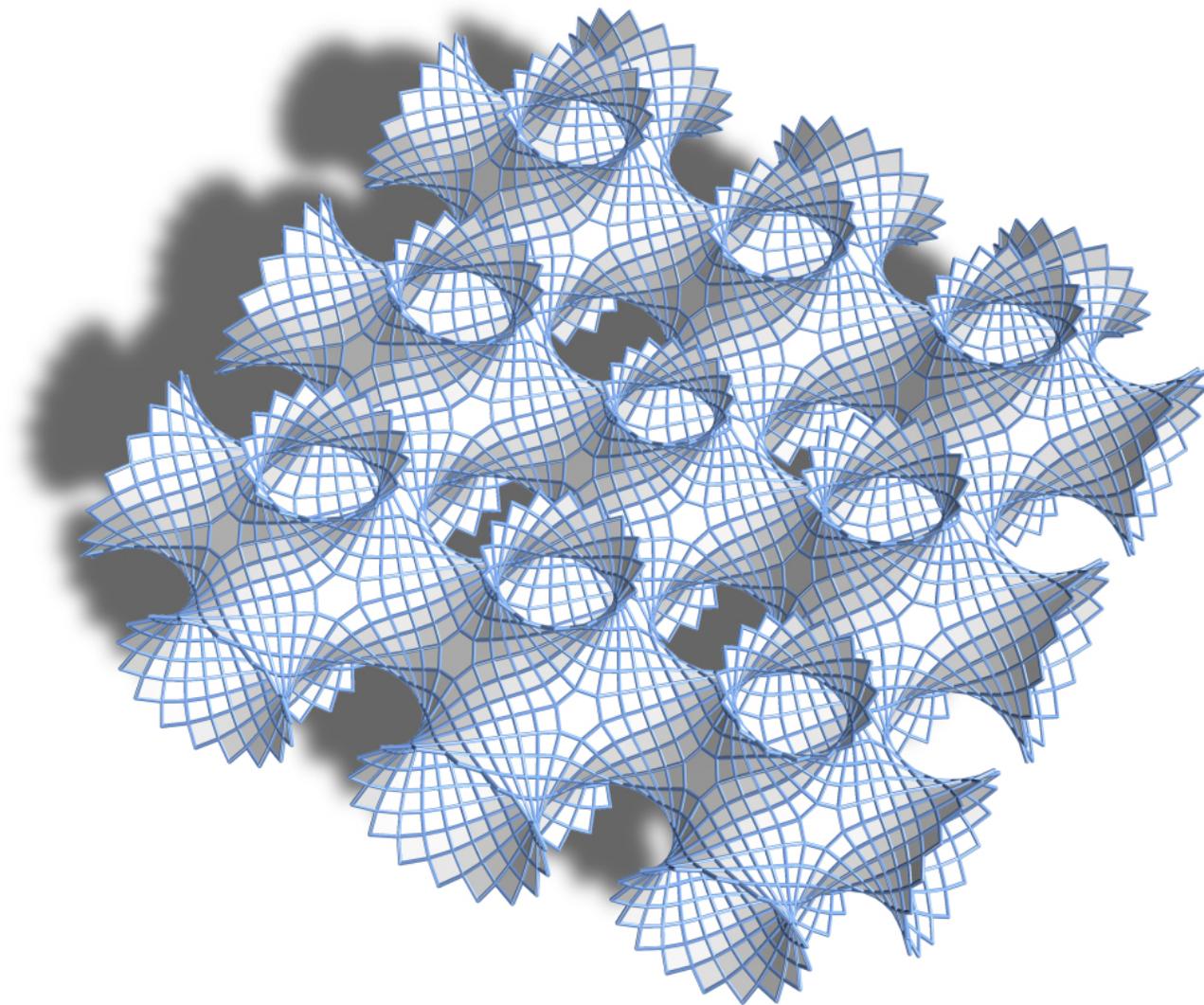




diskrete CMC Fläche



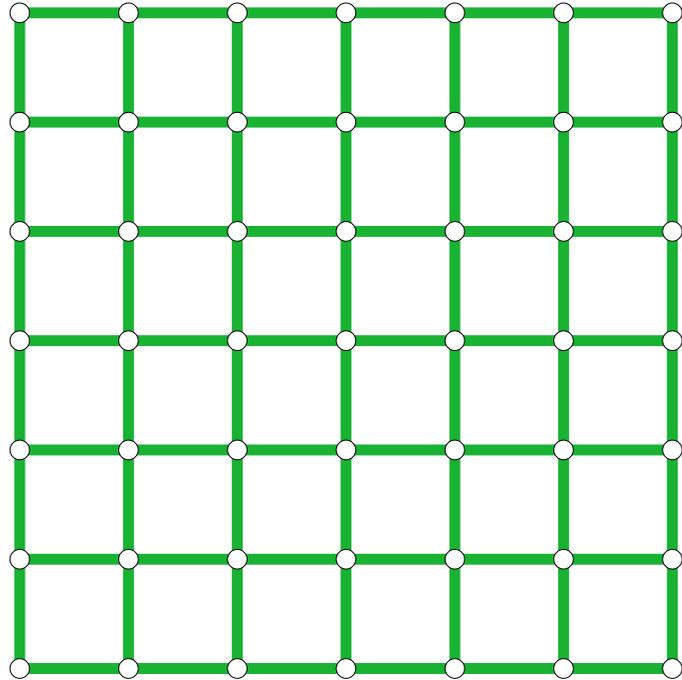
diskrete Minimalfläche



Rechteckige Streifen *tangential* zur Fläche \Rightarrow Geodätische

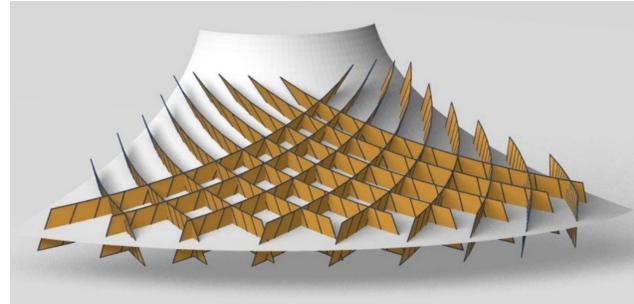


Geodätische

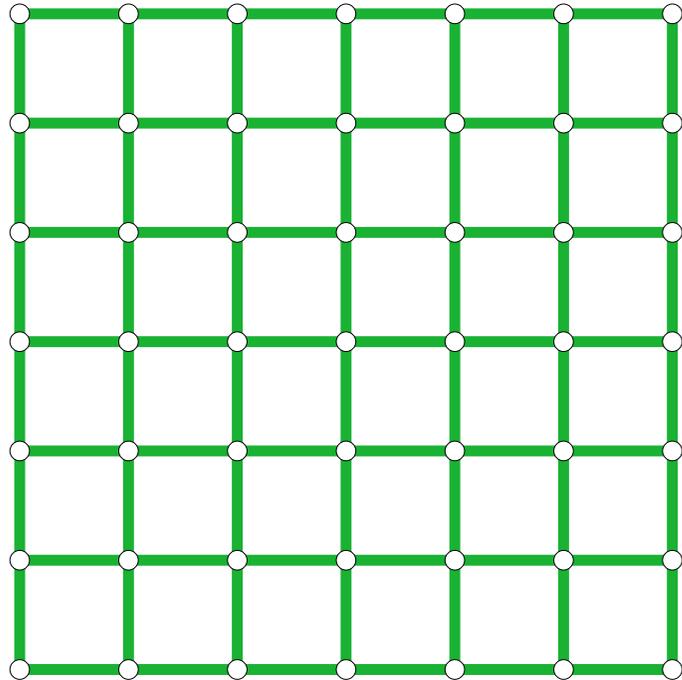


Rechteckige Streifen *tangential* zur Fläche \Rightarrow Geodätische

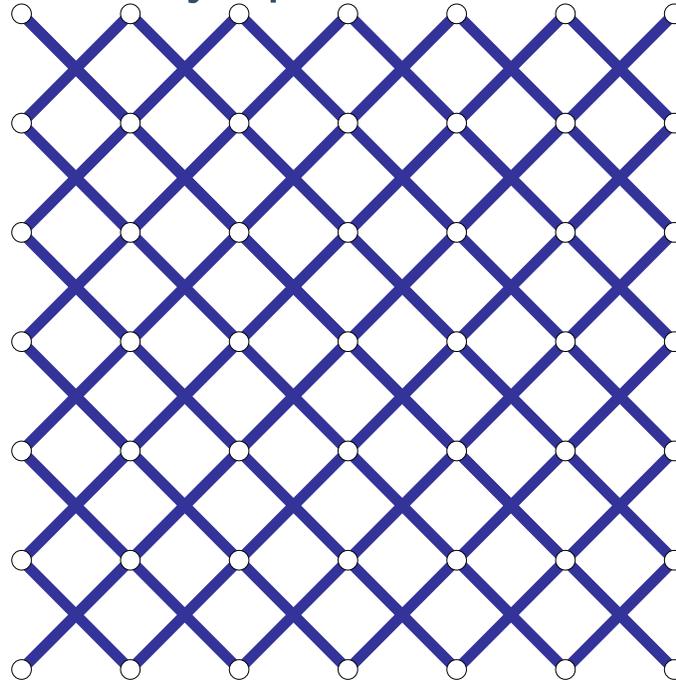
Rechteckige Streifen *orthogonal* zur Fläche \Rightarrow Asymptotenlinien



Geodätische

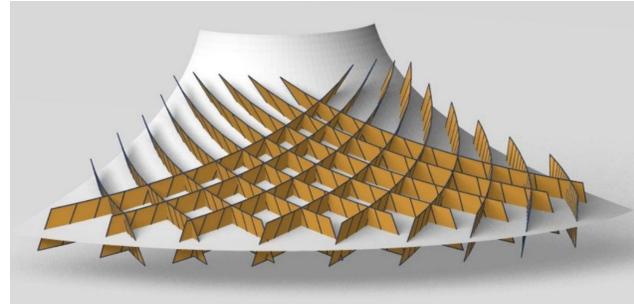


Asymptotenlinien



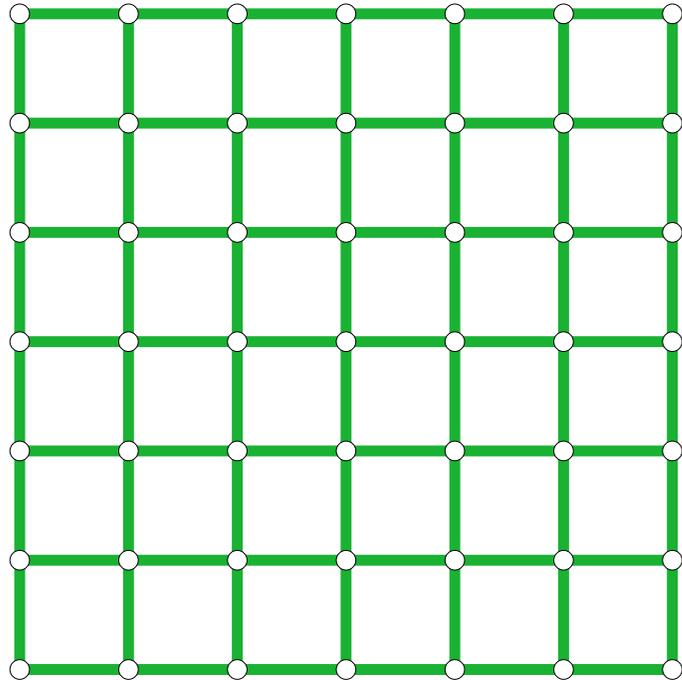
Rechteckige Streifen *tangential* zur Fläche \Rightarrow Geodätische

Rechteckige Streifen *orthogonal* zur Fläche \Rightarrow Asymptotenlinien

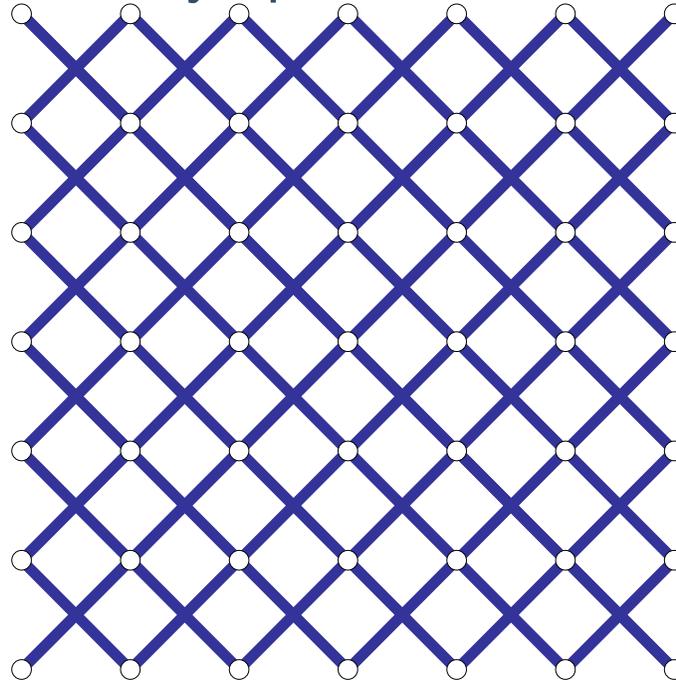


???

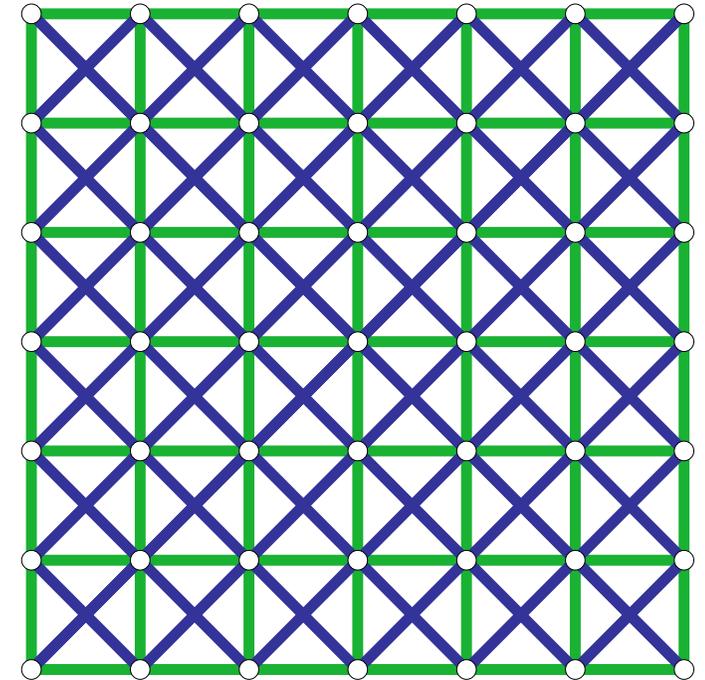
Geodätische



Asymptotenlinien



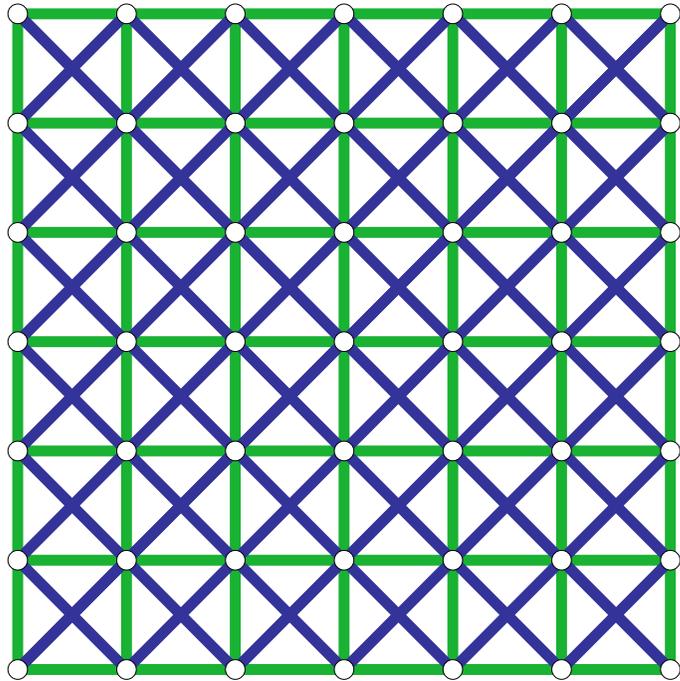
beides



Gibt es Flächen mit “4-Geweben” aus Geodätischen und Asymptotenlinien?

???

beides

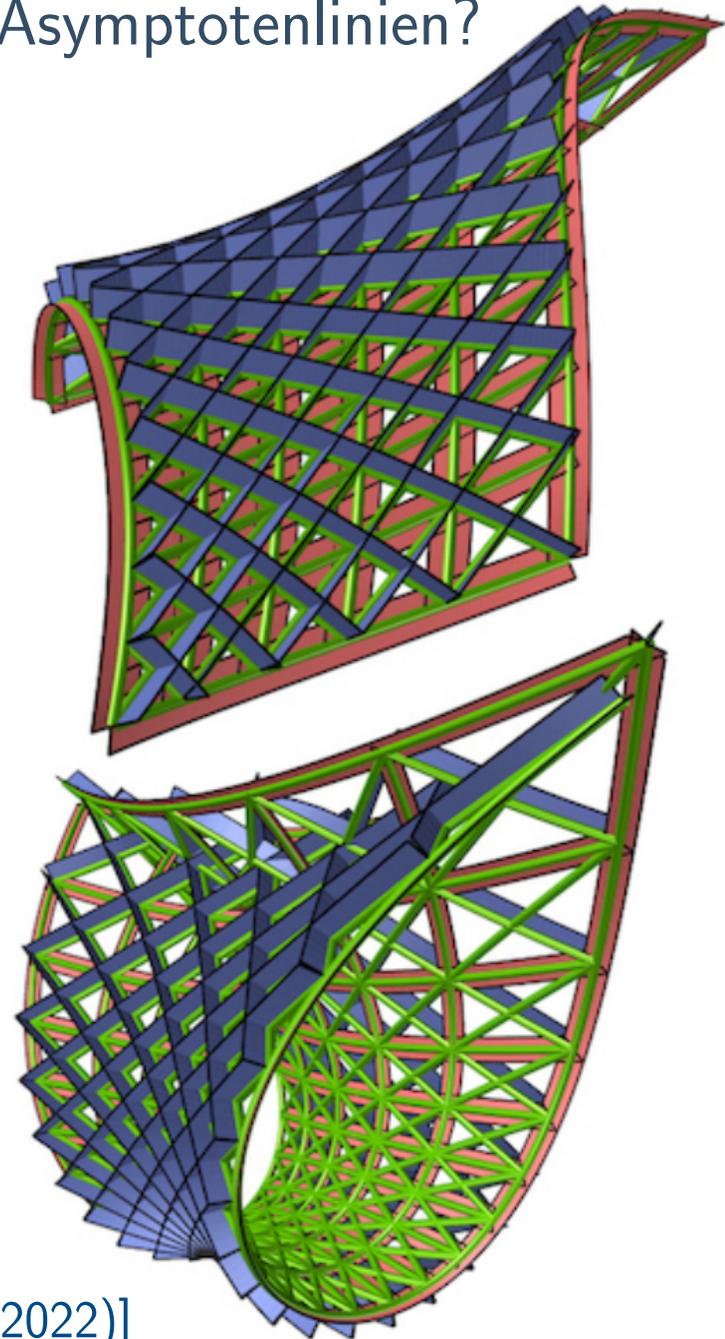
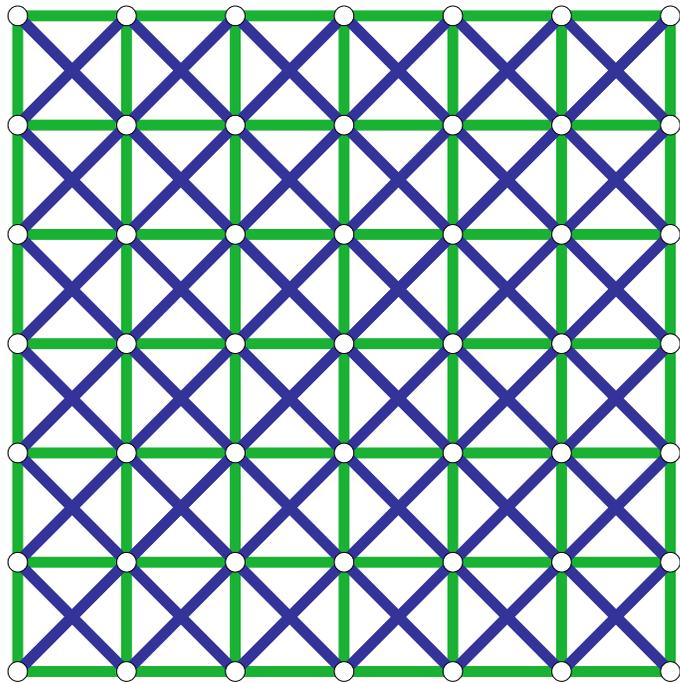


Gibt es Flächen mit “4-Geweben” aus Geodätischen und Asymptotenlinien?

Es ist eine Fläche bekannt aber noch viel unklar...

???

beides



[Schling et al. (2022)]

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN
BAND XLIX

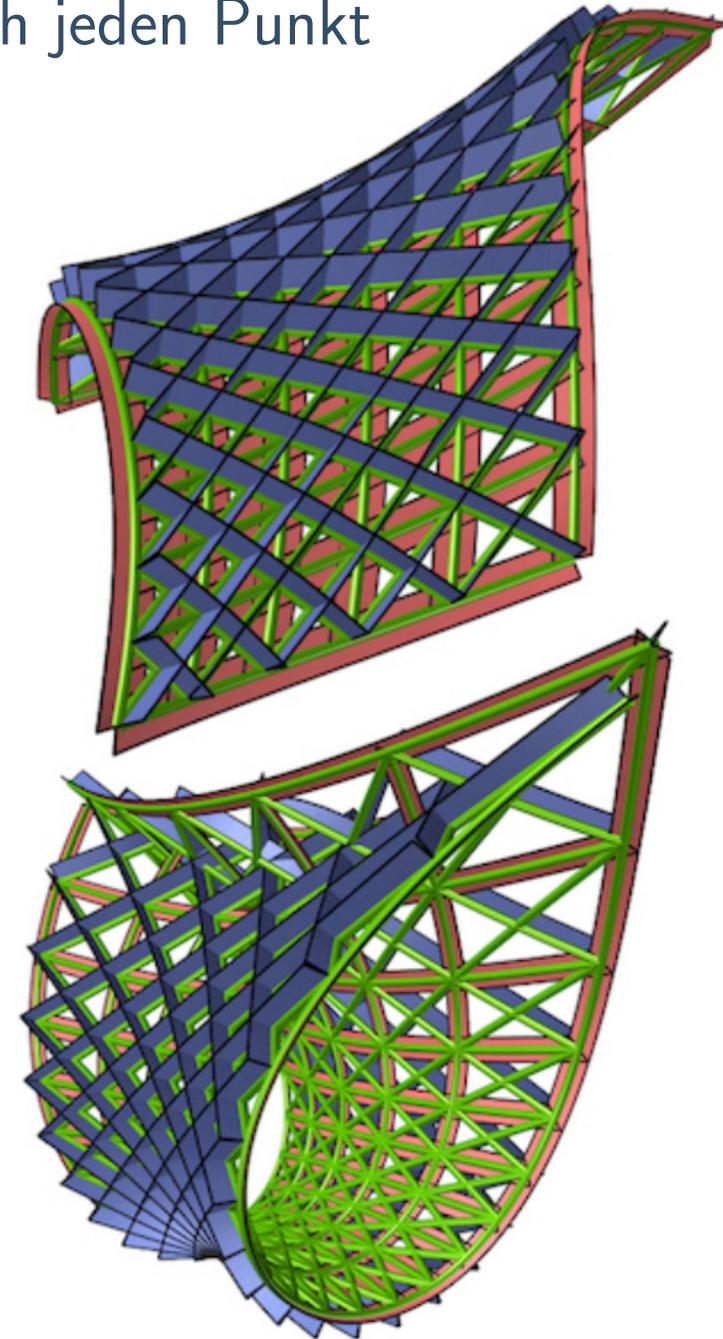
W. BLASCHKE UND G. BOL

GEOMETRIE DER GEWEBE

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

vier Kurven durch jeden Punkt

⇒ 4-Gewebe



Beschreibung/Konstruktion solcher 4-Gewebe in \mathbb{R}^3 ist offenes Problem.

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Abstand in \mathbb{R}^3

Beschreibung/Konstruktion solcher 4-Gewebe in \mathbb{R}^3 ist offenes Problem.

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Abstand in \mathbb{R}^3

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Beschreibung/Konstruktion solcher 4-Gewebe in \mathbb{R}^3 ist offenes Problem.

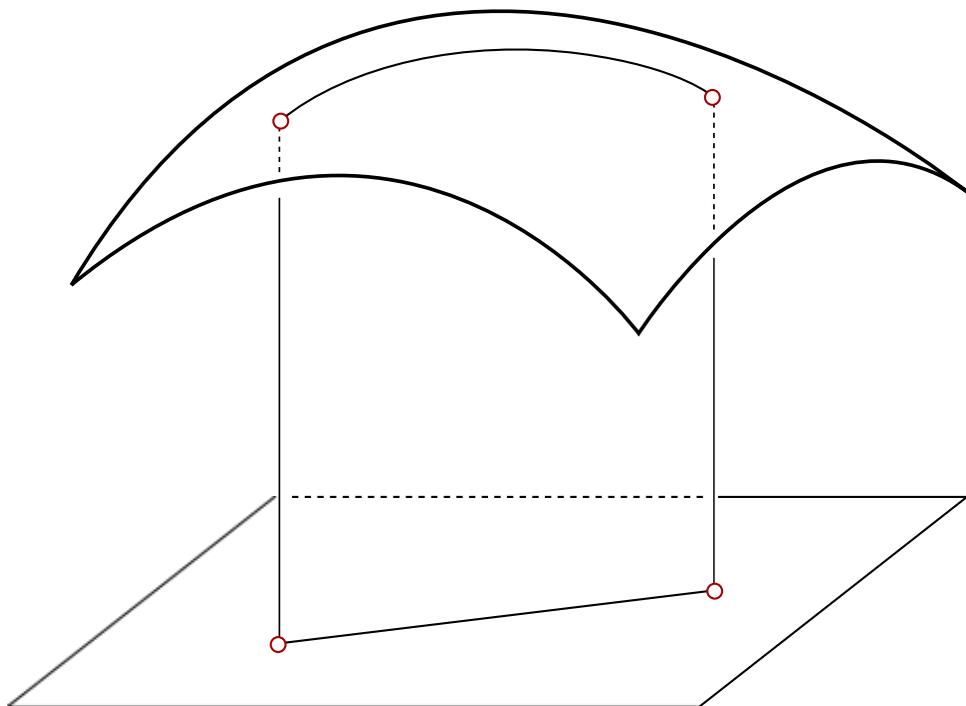
$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \quad \text{Abstand in } \mathbb{R}^3$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad \text{Abstand im } \textit{isotropen Raum } I^3$$

Beschreibung/Konstruktion solcher 4-Gewebe in \mathbb{R}^3 ist offenes Problem.

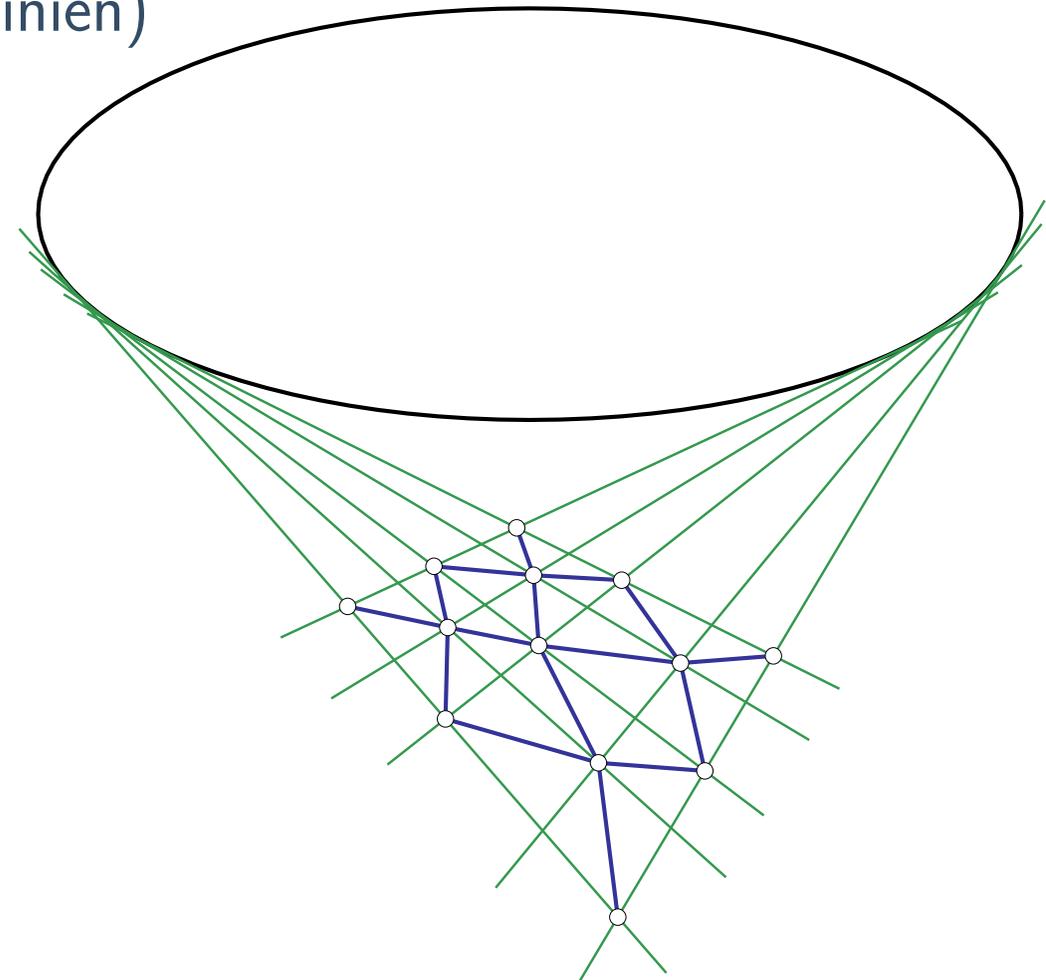
$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \quad \text{Abstand in } \mathbb{R}^3$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad \text{Abstand im isotropen Raum } I^3$$



Satz: Die Projektion eines solchen 4-Gewebes in I^3 in den Grundriss bildet ein ebenes 4-Gewebe bestehend aus:

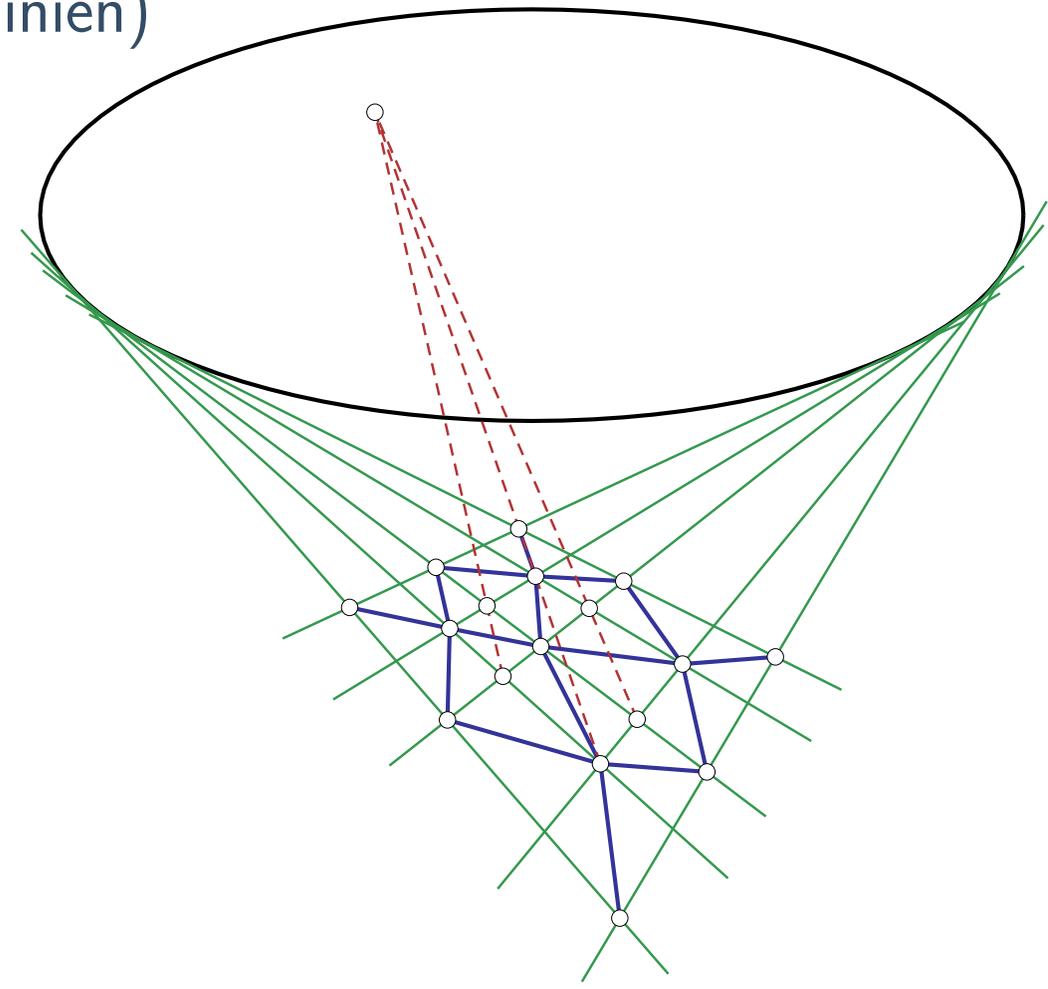
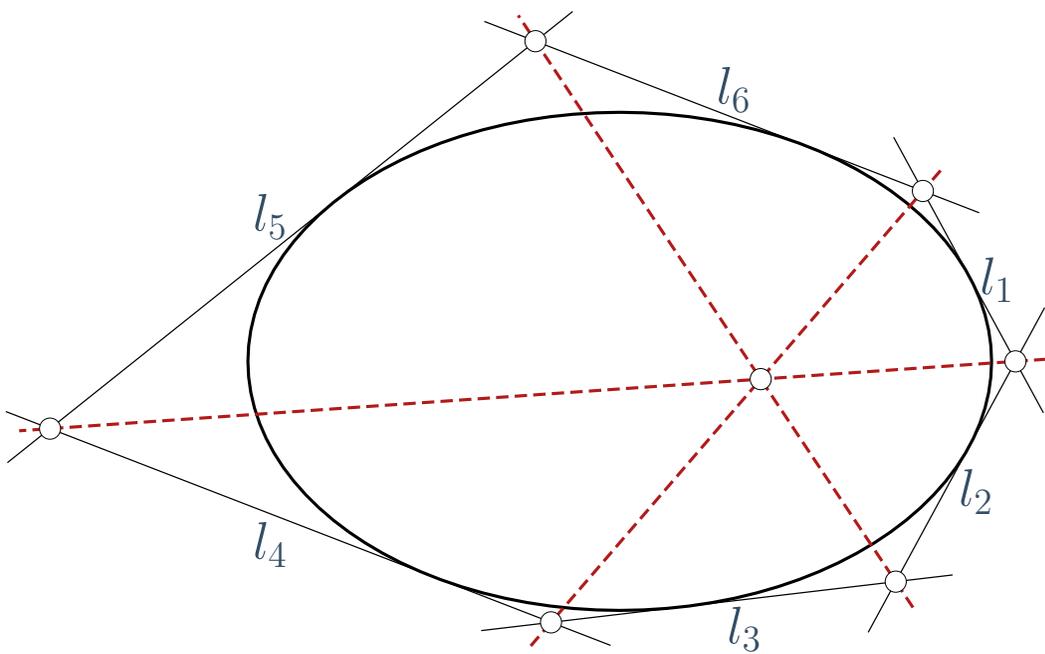
- Tangenten an einen Kegelschnitt (= Grundriss der Geodätischen)
- Kœnigs-Netz (= Grundriss der Asymptotenlinien)



Satz: Die Projektion eines solchen 4-Gewebes in I^3 in den Grundriss bildet ein ebenes 4-Gewebe bestehend aus:

- Tangenten an einen Kegelschnitt (= Grundriss der Geodätischen)
- Kœnigs-Netz (= Grundriss der Asymptotenlinien)

Beweis: Satz von Brianchon \square



Was ist ein Königs-Netz?

Diskretes Konjugiertes Netz

Satz: Parameter Vierecke $f(\pm\varepsilon, \pm\varepsilon)$ sind in einem konjugierten Netz “planarer” als für jede andere Parametrisierung. [Sauer (1970)]

Diskretes Konjugiertes Netz

Satz: Parameter Vierecke $f(\pm\varepsilon, \pm\varepsilon)$ sind in einem konjugierten Netz “planarer” als für jede andere Parametrisierung. [Sauer (1970)]

Def. *Diskrete konjugierte Netze* haben \mathbb{Z}^2 Kombinatorik und ebene Facetten.

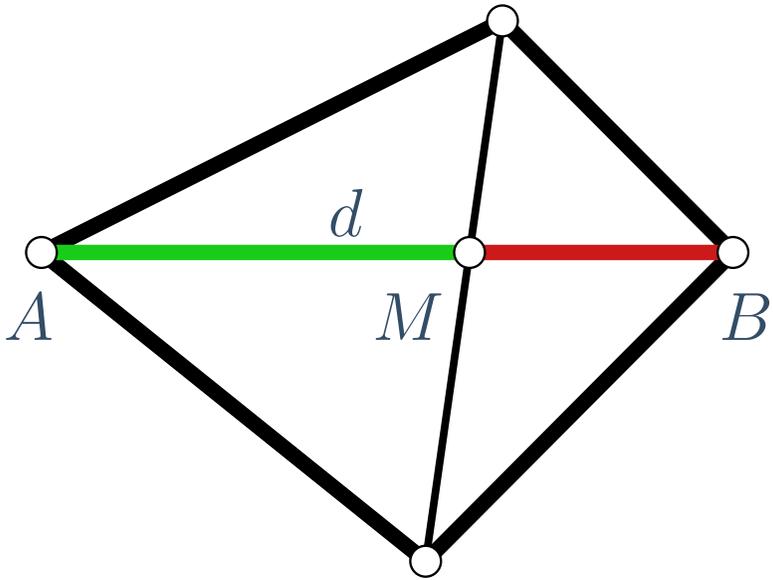
Diskretes Konjugiertes Netz

Satz: Parameter Vierecke $f(\pm\varepsilon, \pm\varepsilon)$ sind in einem konjugierten Netz “planarer” als für jede andere Parametrisierung. [Sauer (1970)]

Def. *Diskrete konjugierte Netze* haben \mathbb{Z}^2 Kombinatorik und ebene Facetten.

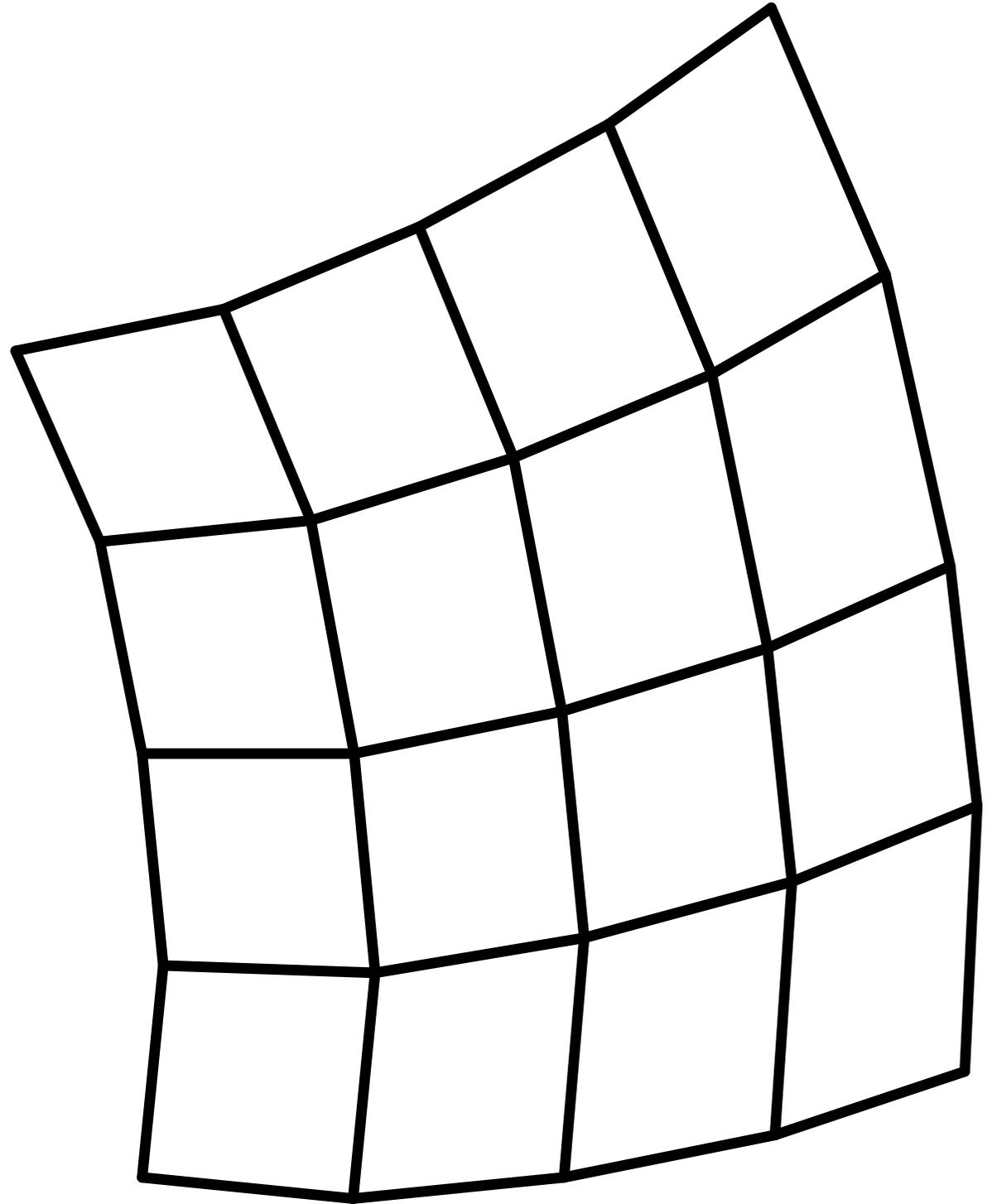
⇒ praktische Anwendung: viereckige Stahl-Glas Panele

Diskretes Koenigs Netz

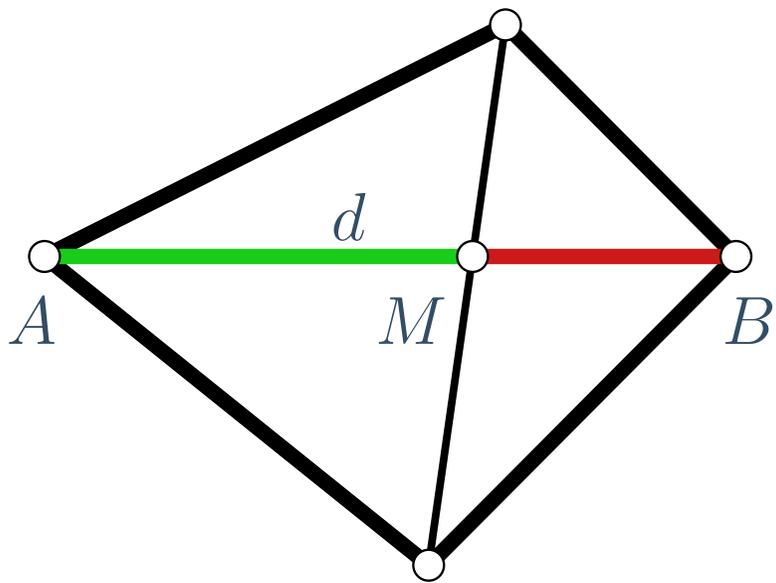


$$q_d = (A - M) : (B - M)$$

diskrete multiplikative 1-Form



Diskretes Koenigs Netz

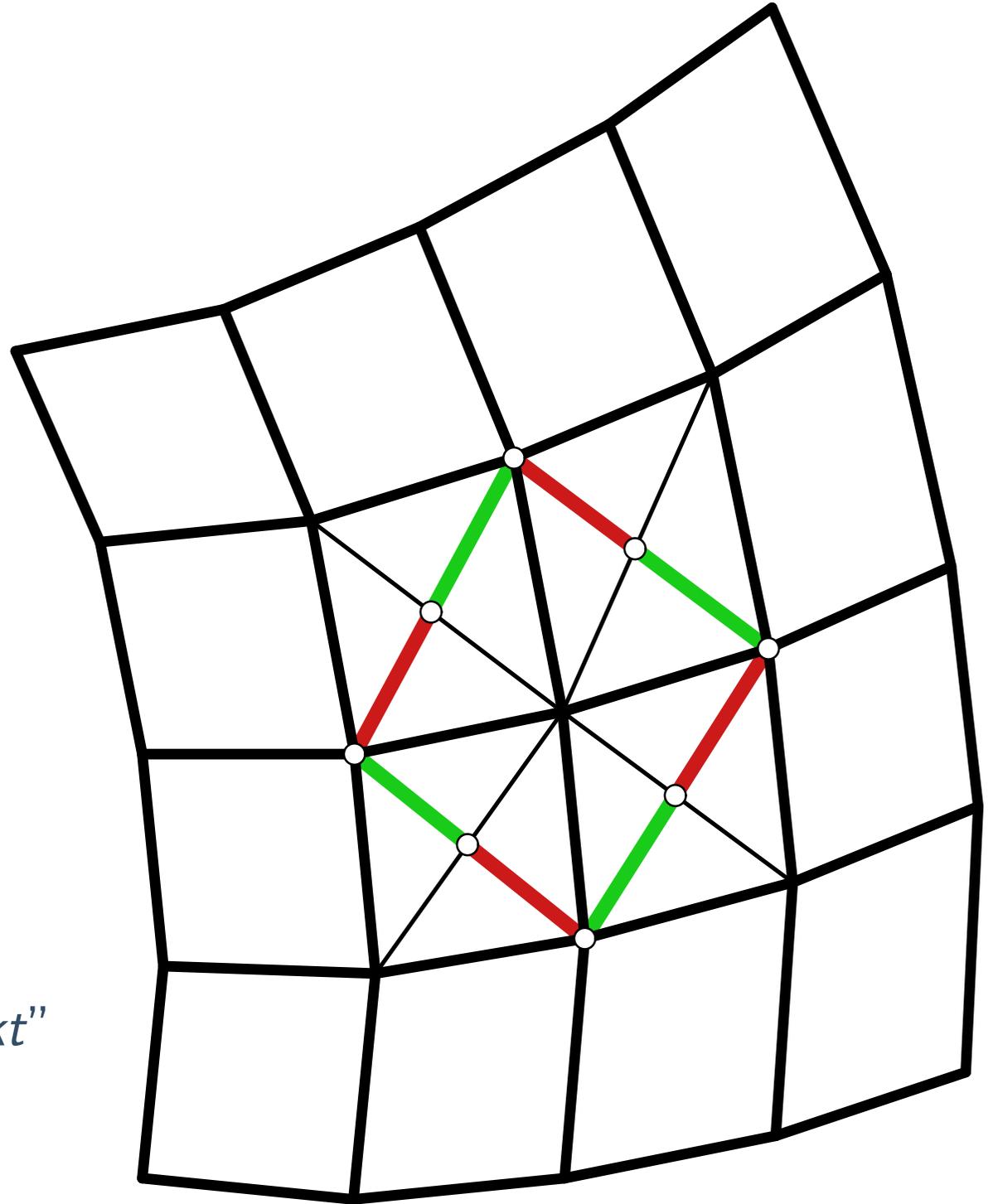


$$q_d = (A - M) : (B - M)$$

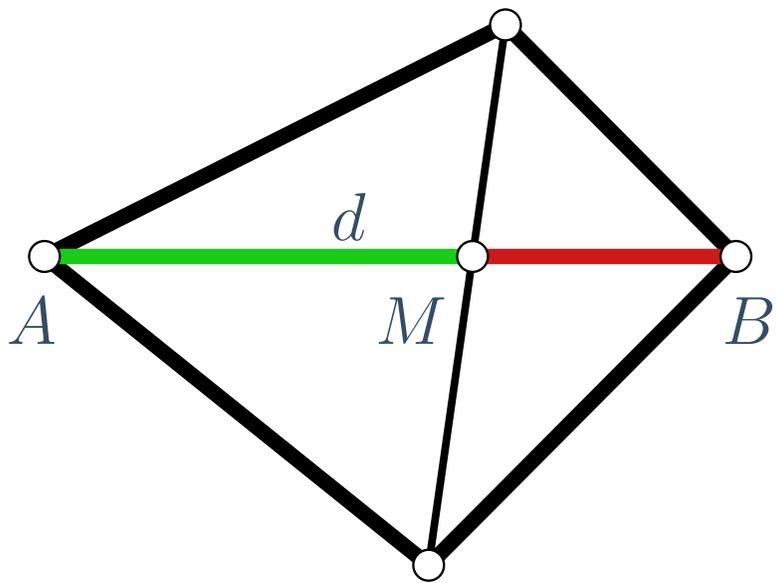
diskrete multiplikative 1-Form

Koenigs $\Leftrightarrow \prod_{d_i} q_{d_i} = 1$ d.h. q_d ist "exakt"

[Bobenko, Suris (2008)]



Diskretes Koenigs Netz

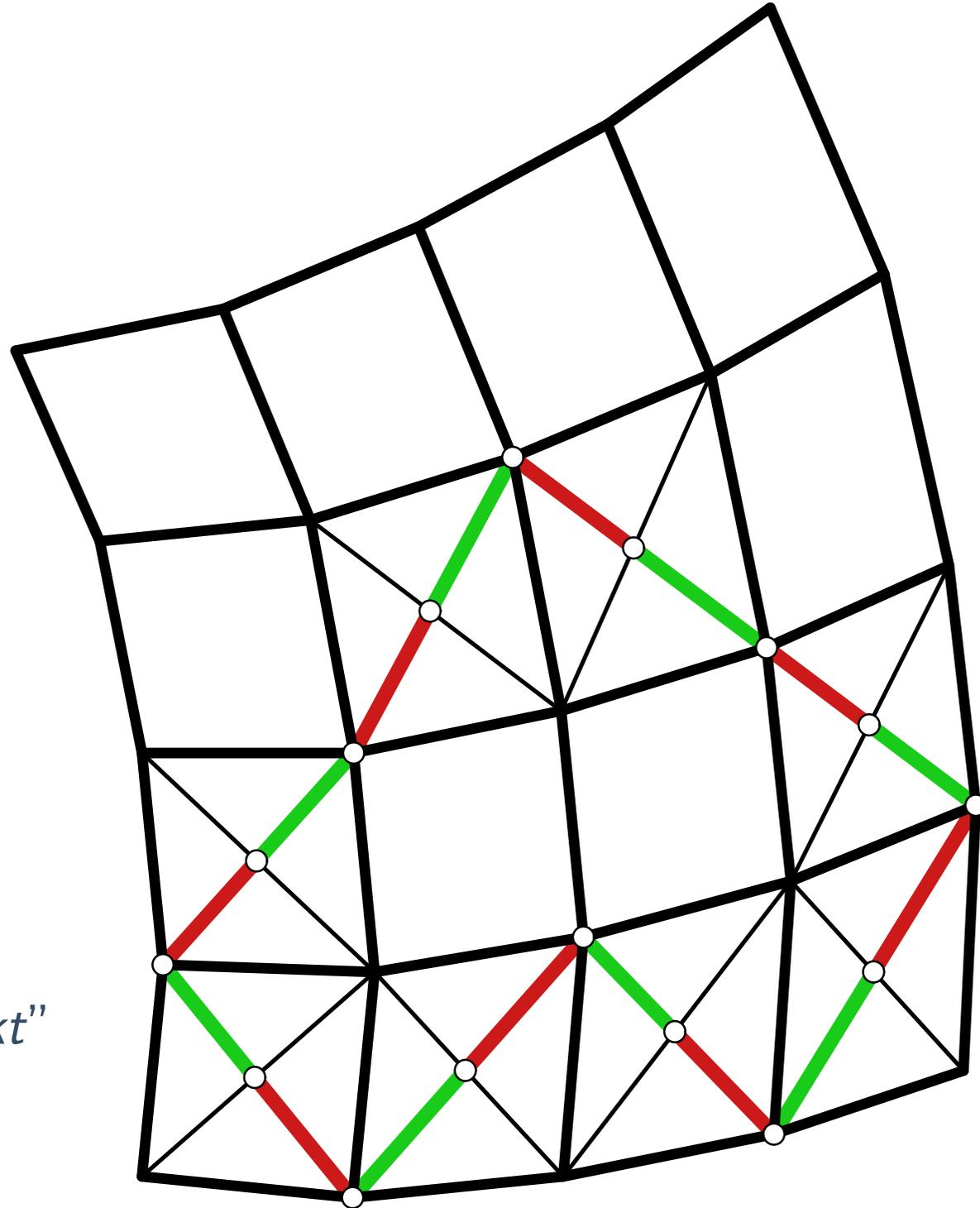


$$q_d = (A - M) : (B - M)$$

diskrete multiplikative 1-Form

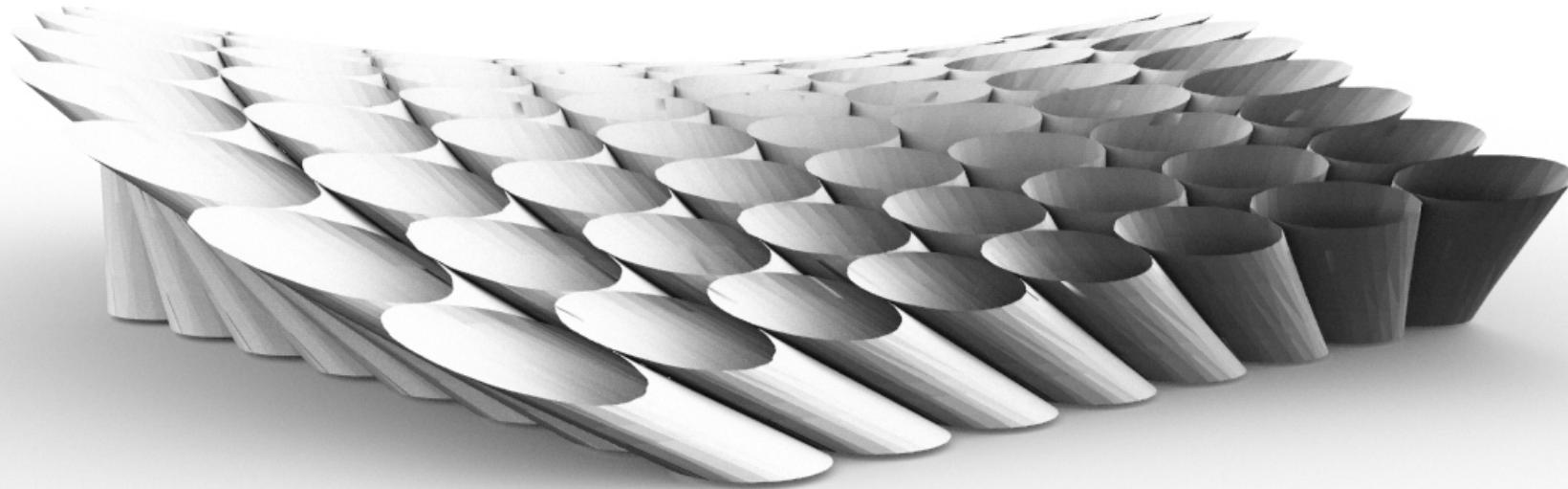
Koenigs $\Leftrightarrow \prod_{d_i} q_{d_i} = 1$ d.h. q_d ist "exakt"

[Bobenko, Suris (2008)]



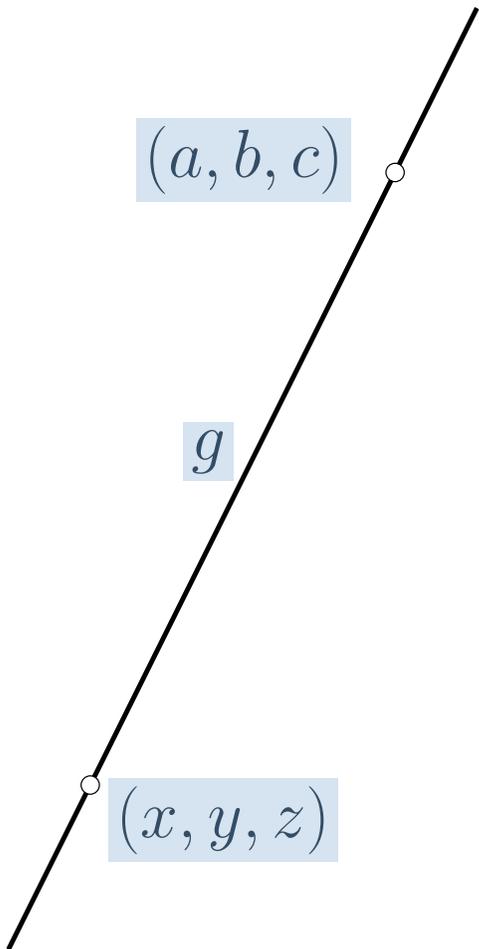
Netz Tangentialer Quadriken

- einschalige Hyperboloide
- berühren sich entlang Erzeugenden



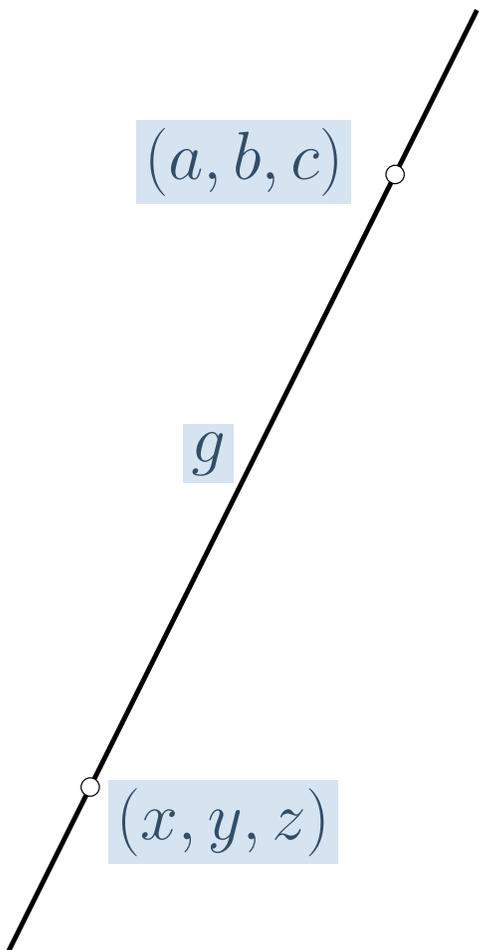
Klein Quadrik — Linien Geometrie

$$\{\text{Geraden in } \mathbb{R}^3\} \rightarrow \mathbb{R}^6: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right]$$



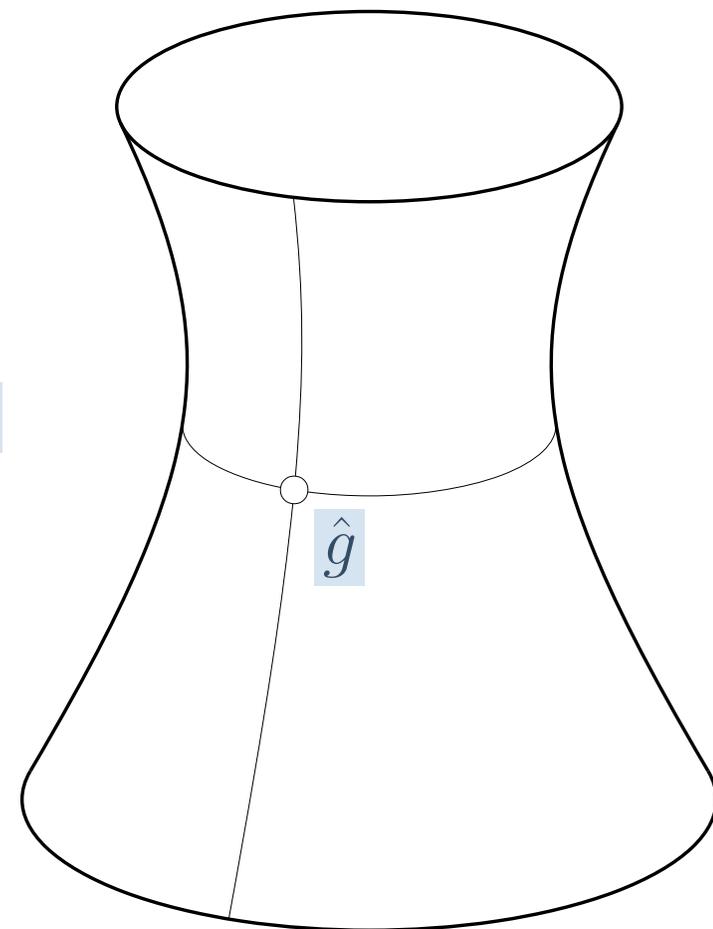
Klein Quadrik — Linien Geometrie

$$\{\text{Geraden in } \mathbb{R}^3\} \rightarrow \mathbb{R}^6: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right]$$



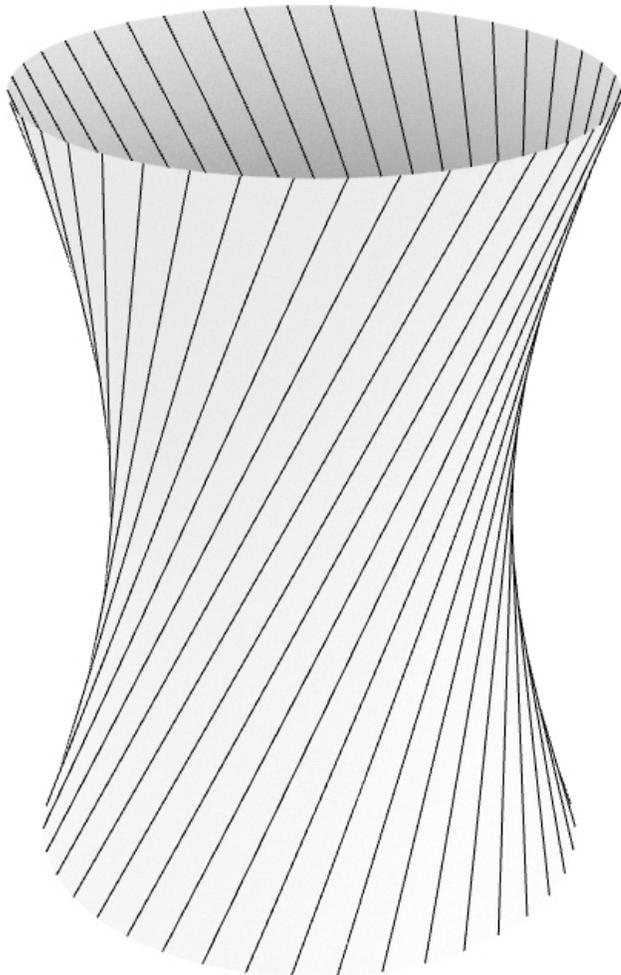
$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0$$

Klein Quadrik
in $\mathbb{R}P^5$

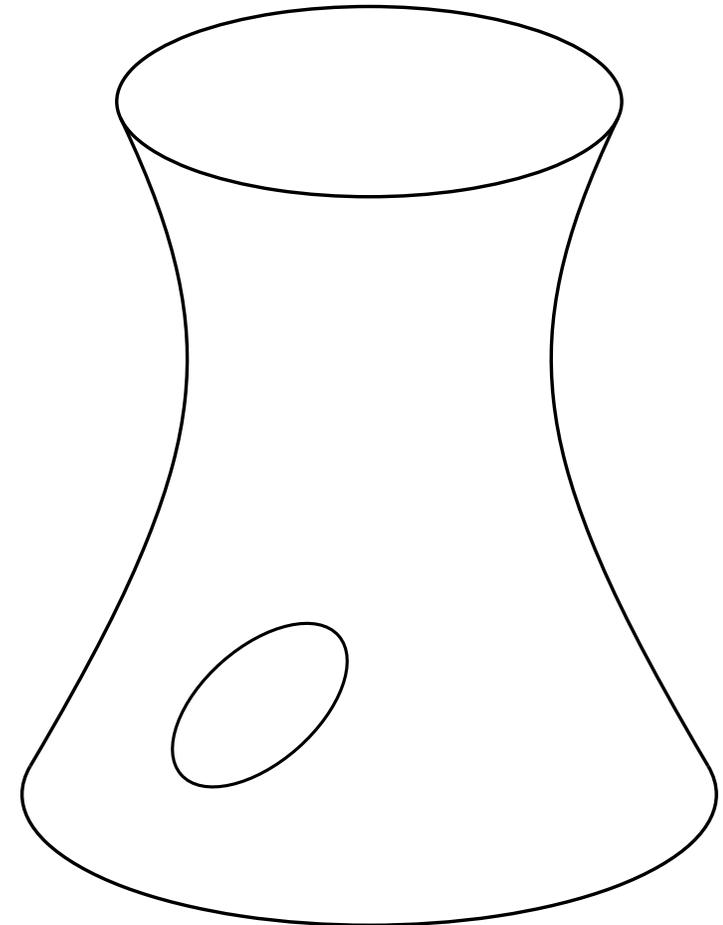


Klein Quadrik — Linien Geometrie

einschaliges Hyperboloid \mapsto Kegelschnitt

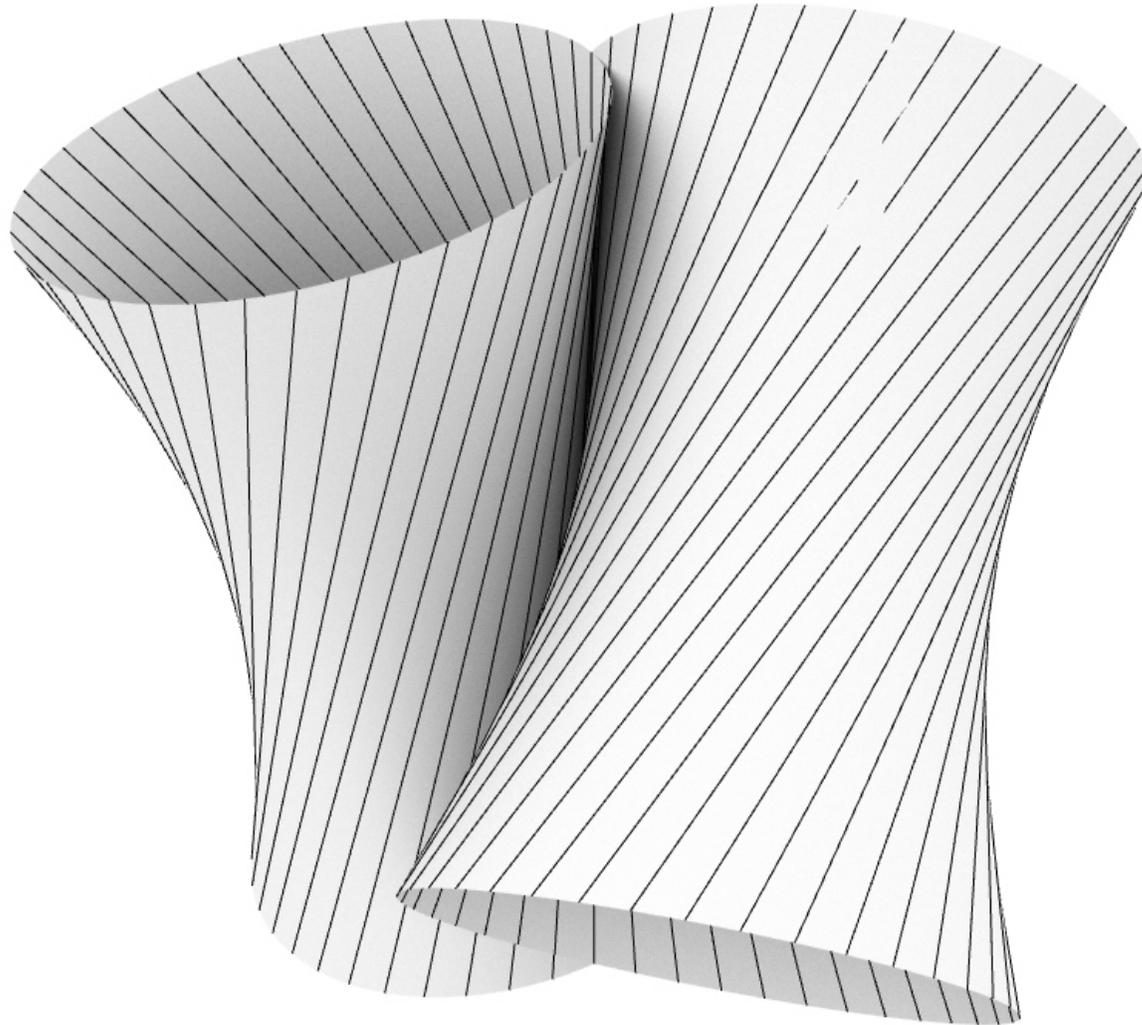


Klein Quadrik
in $\mathbb{R}P^5$

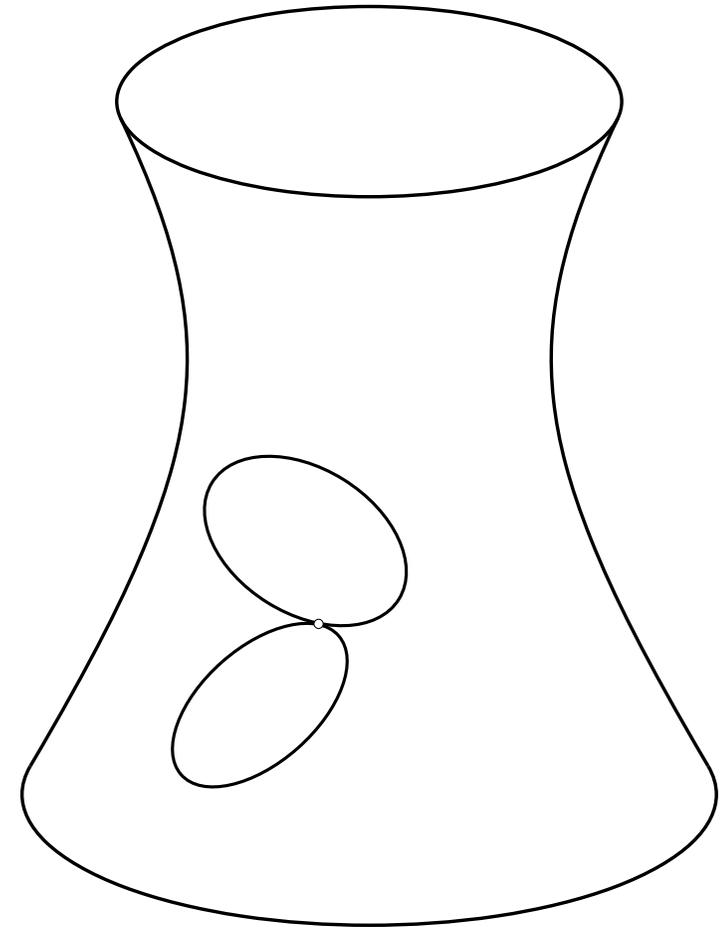


Klein Quadrik — Linien Geometrie

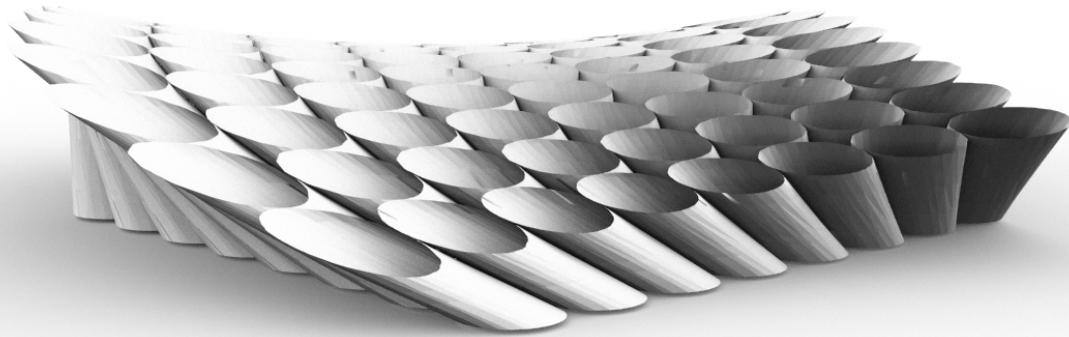
tangentiale Quadriken \mapsto tangentiale Kegelschnitte



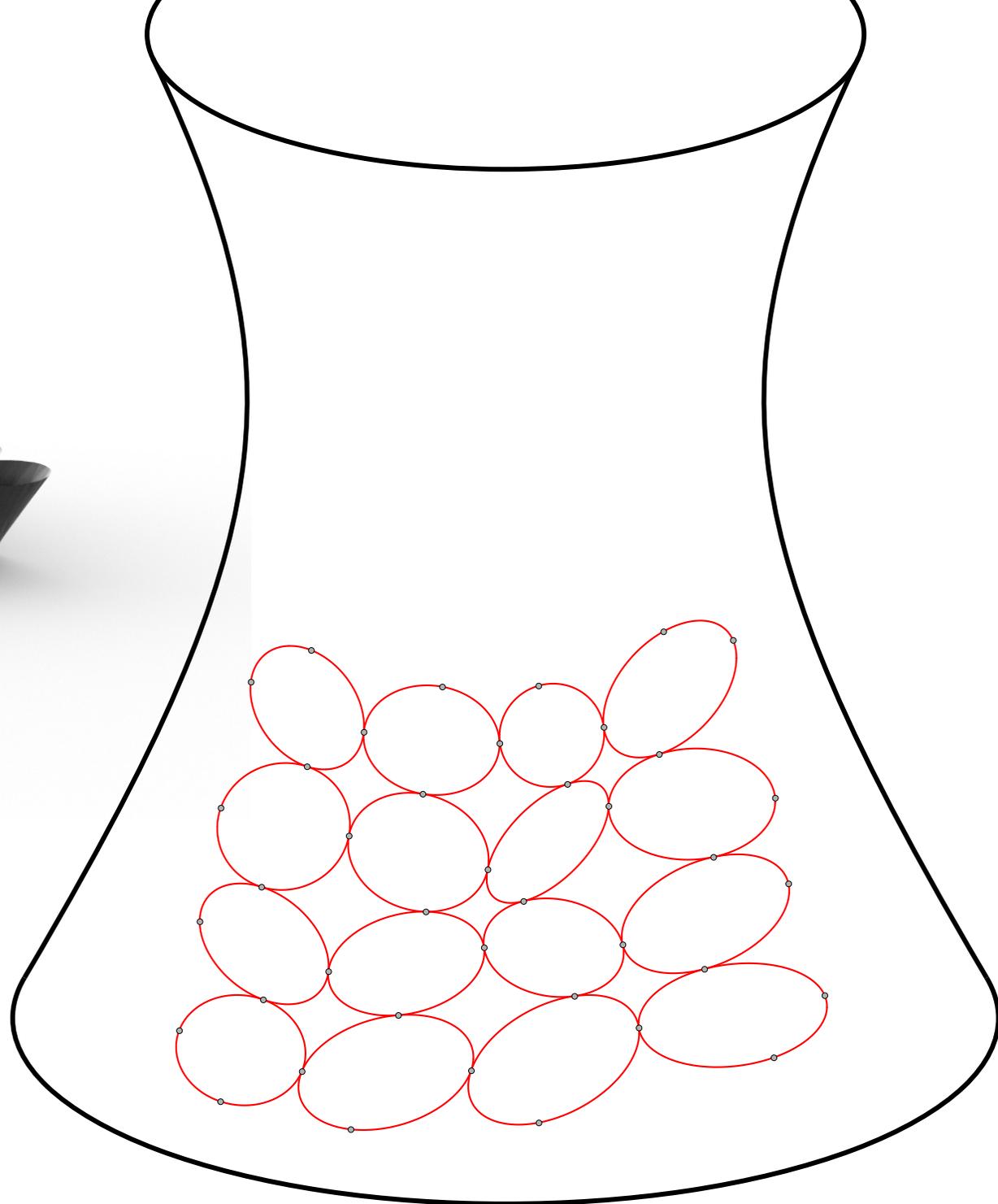
Klein Quadrik
in $\mathbb{R}P^5$



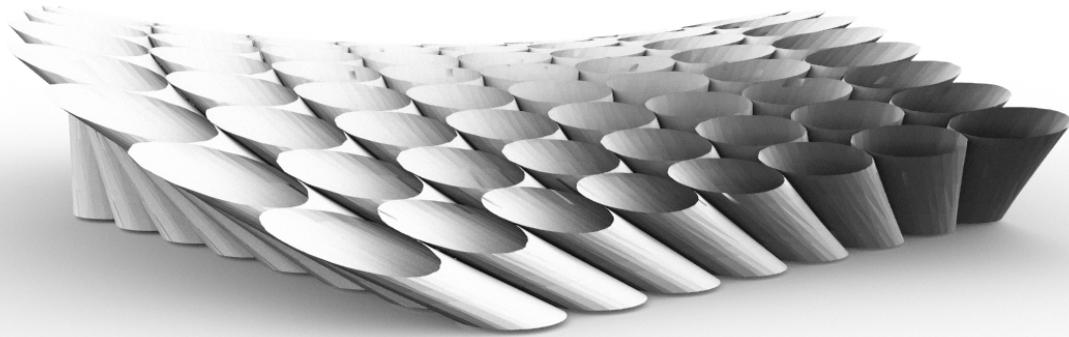
Netz Tangentialer Quadriken



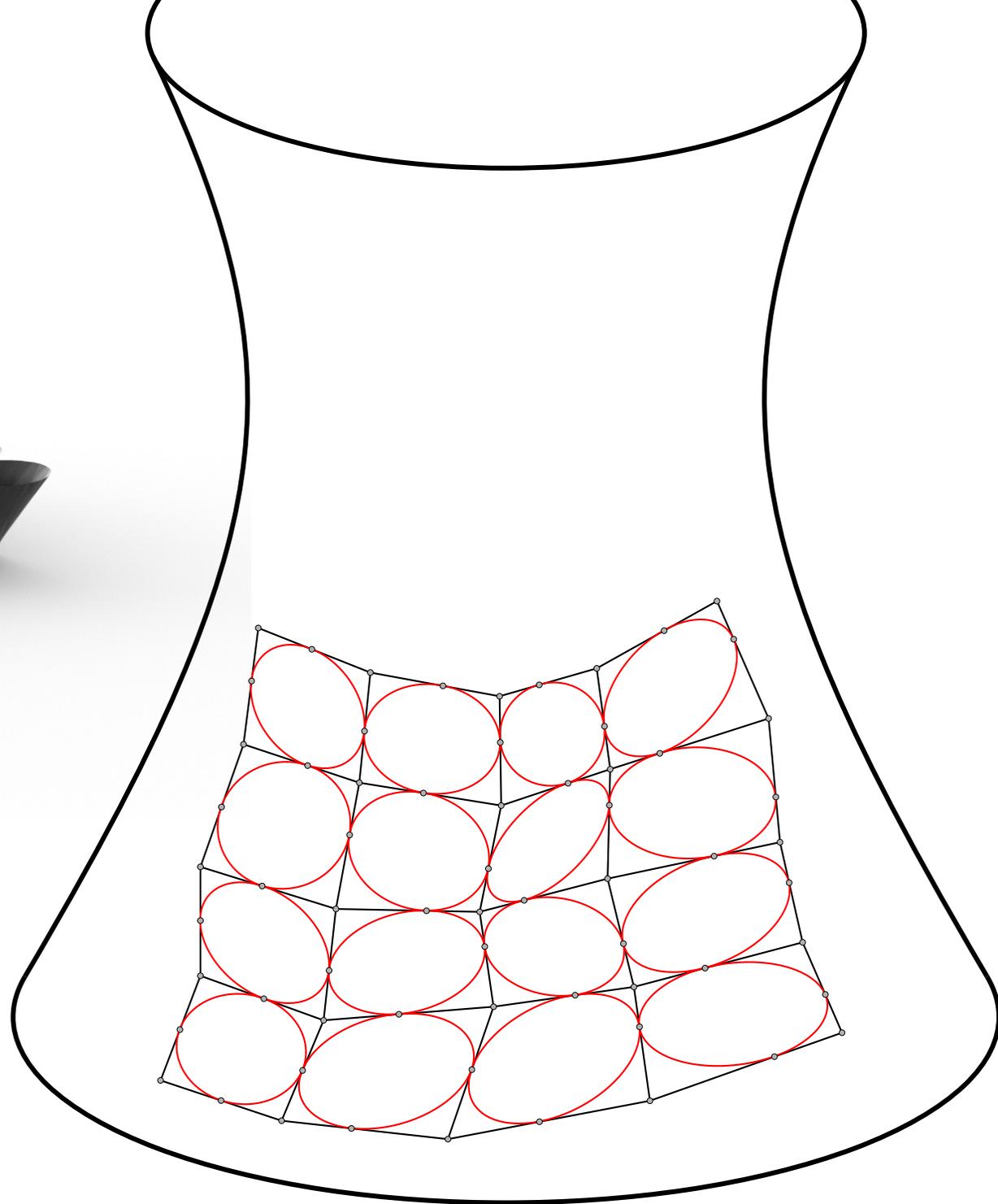
Klein Quadrik
in $\mathbb{R}P^5$



Netz Tangentialer Quadriken



Klein Quadrik
in $\mathbb{R}P^5$



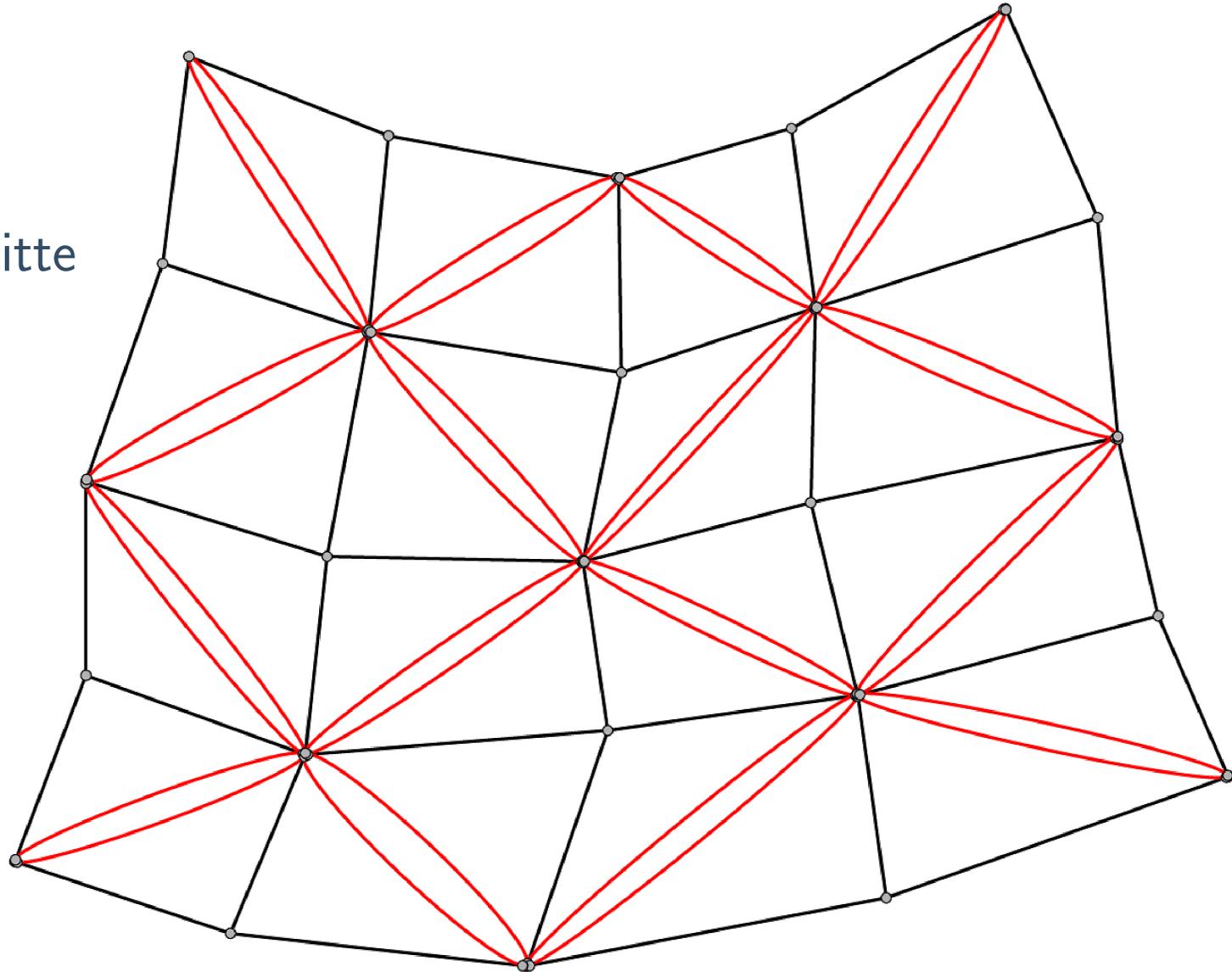
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



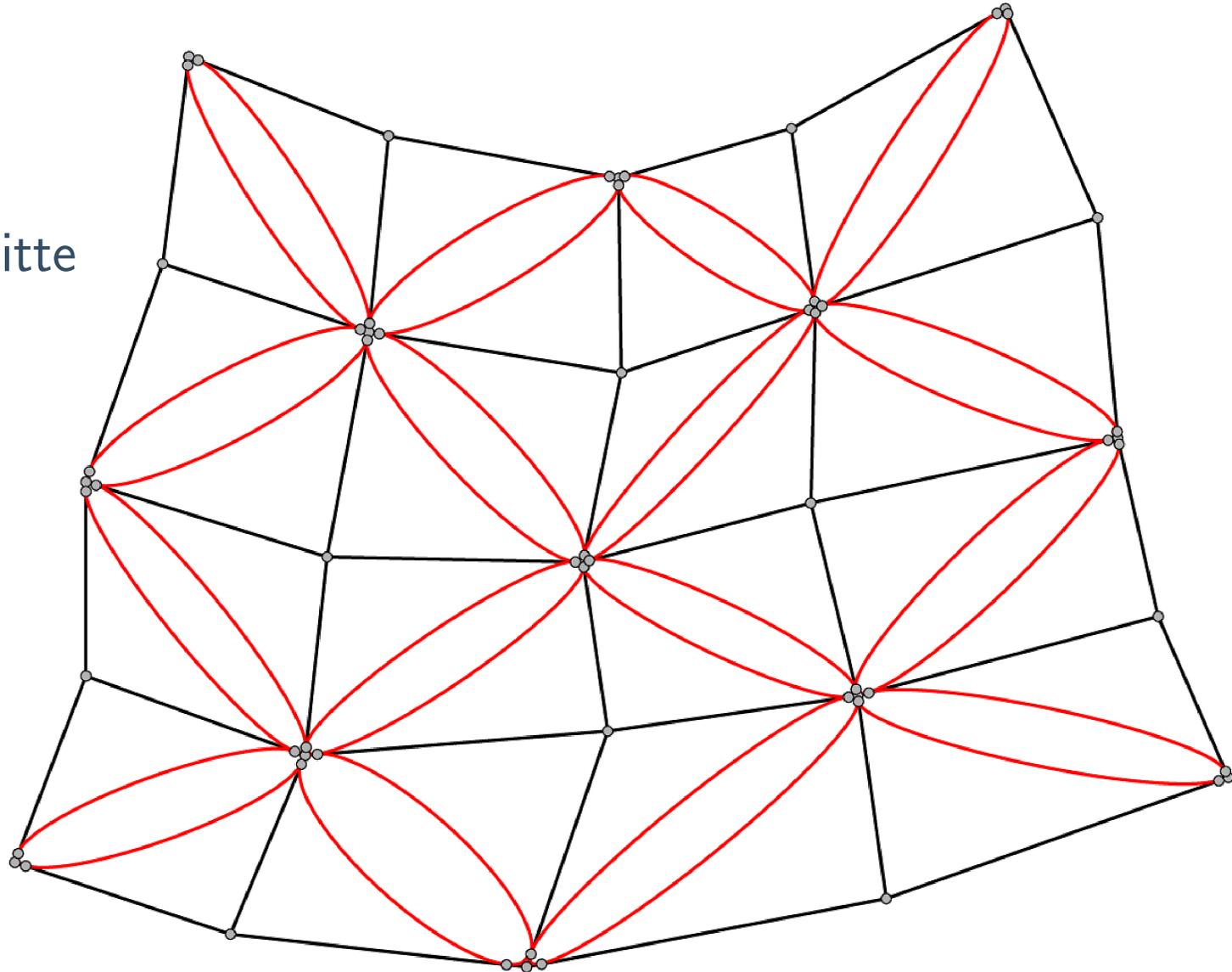
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



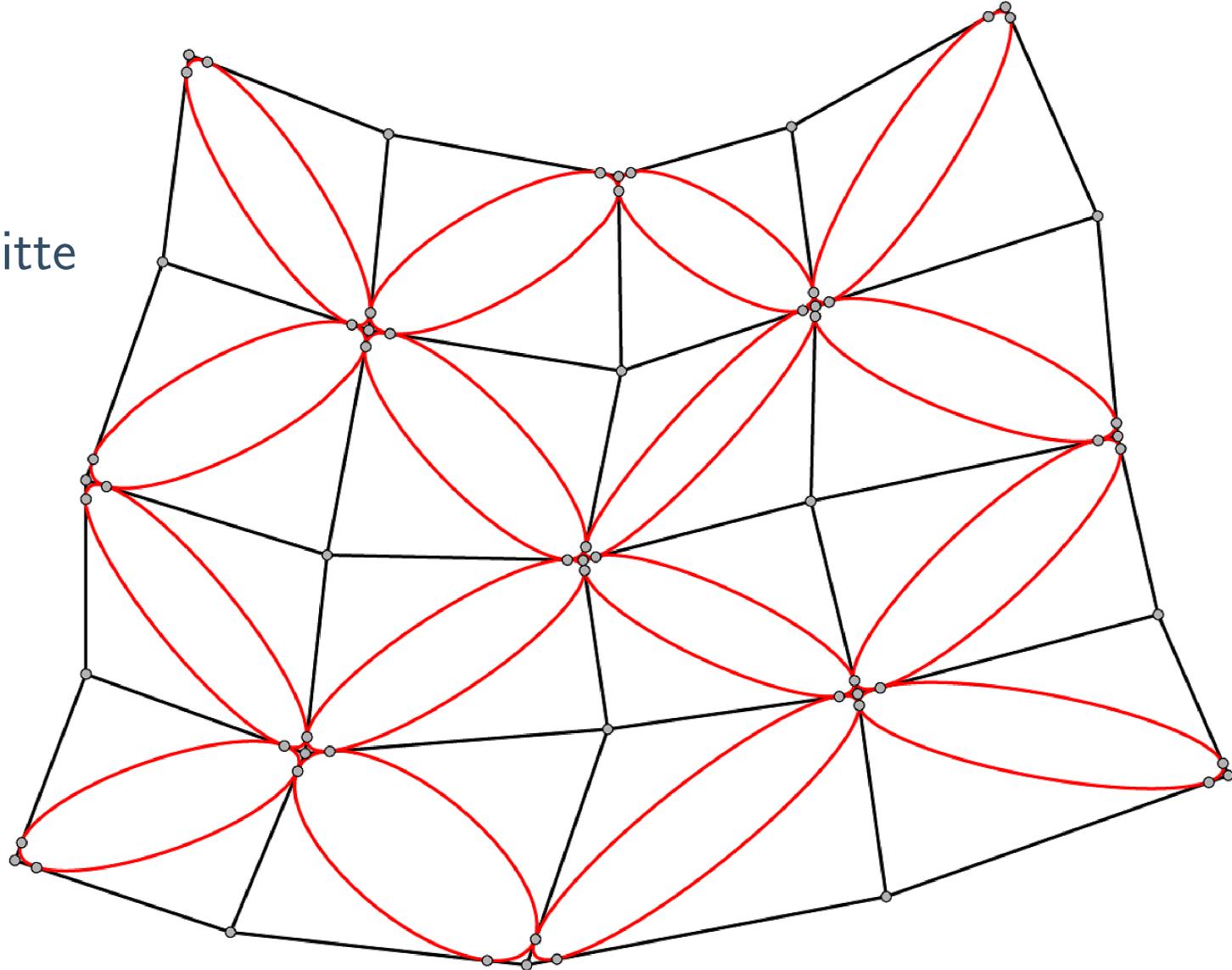
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



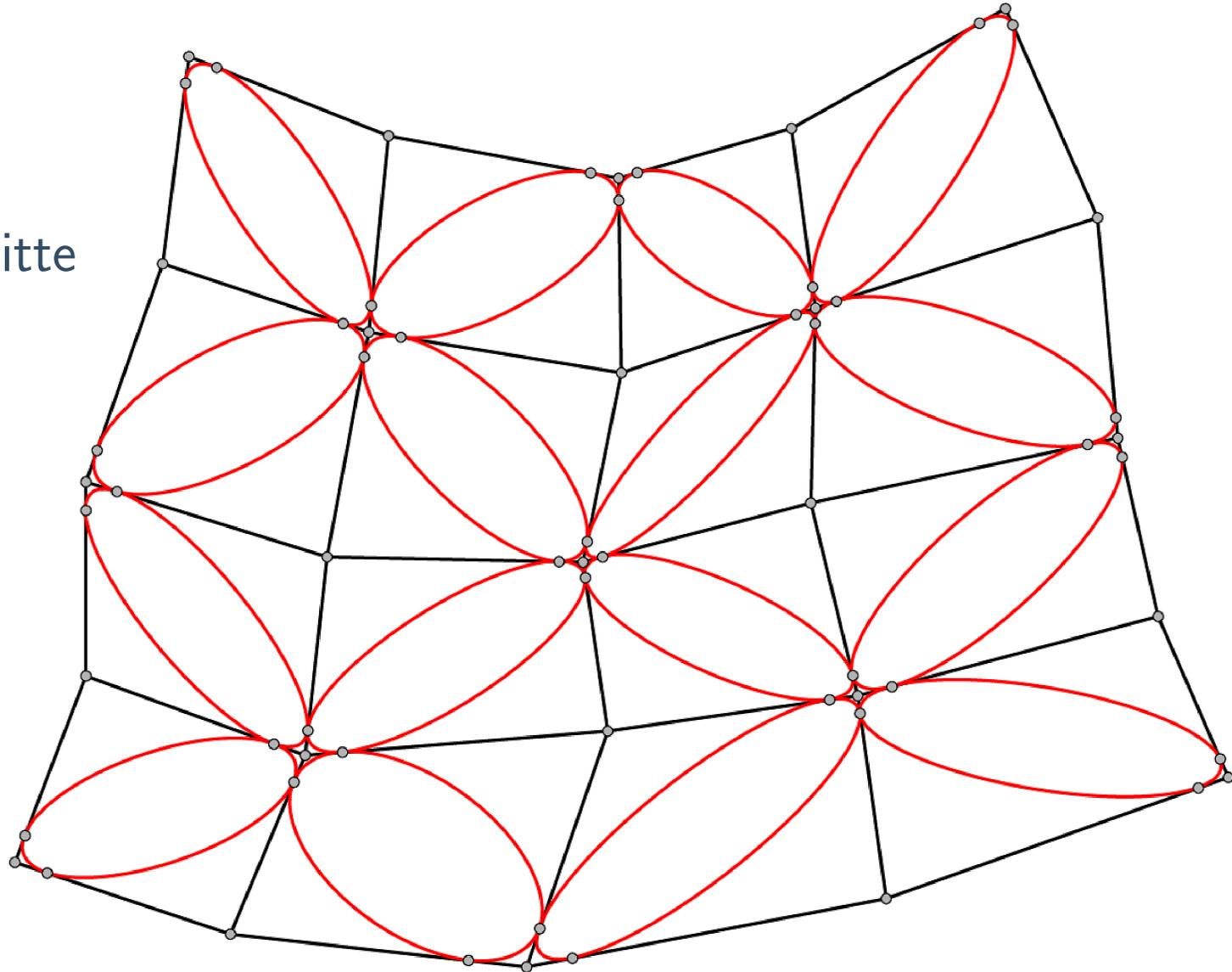
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



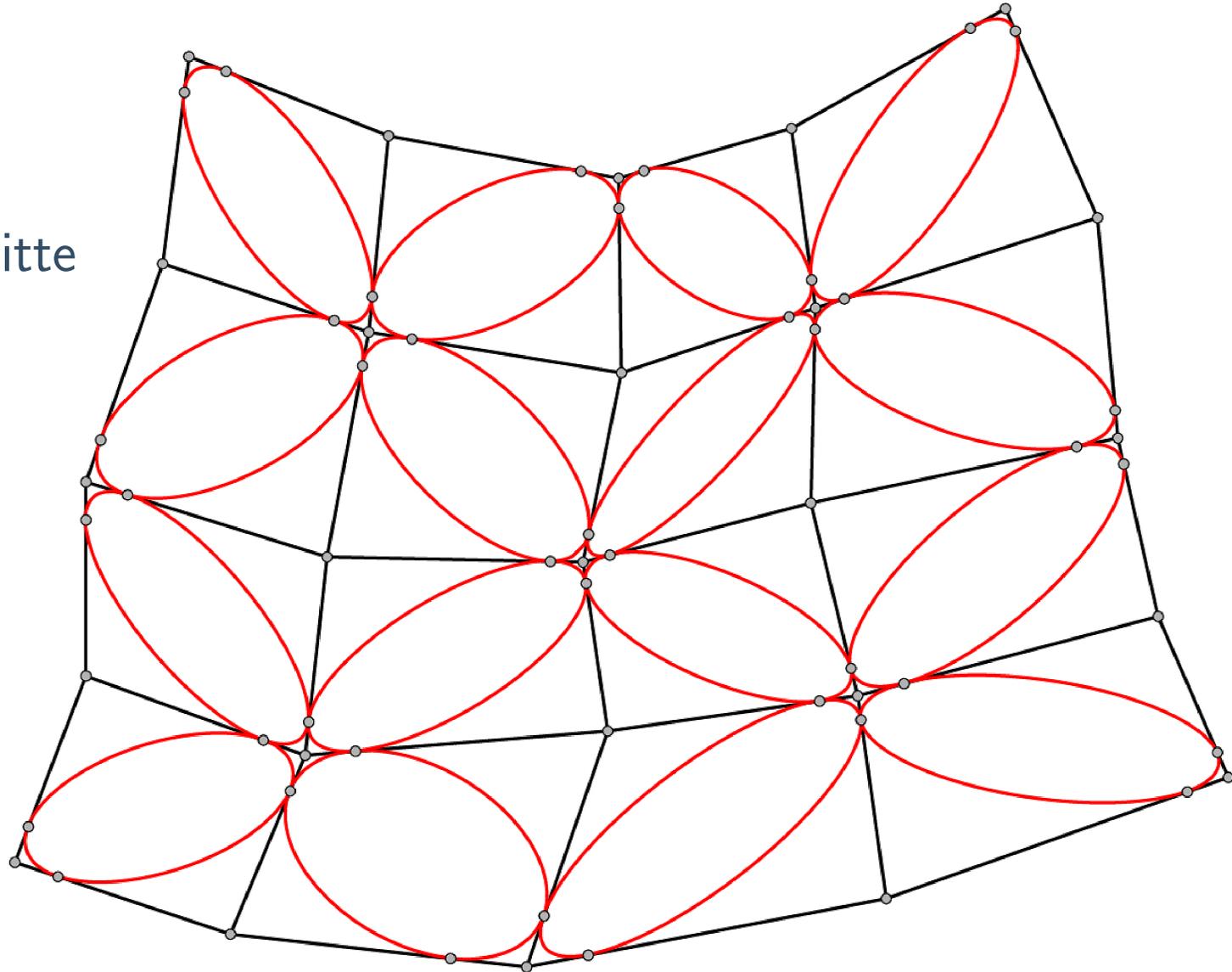
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



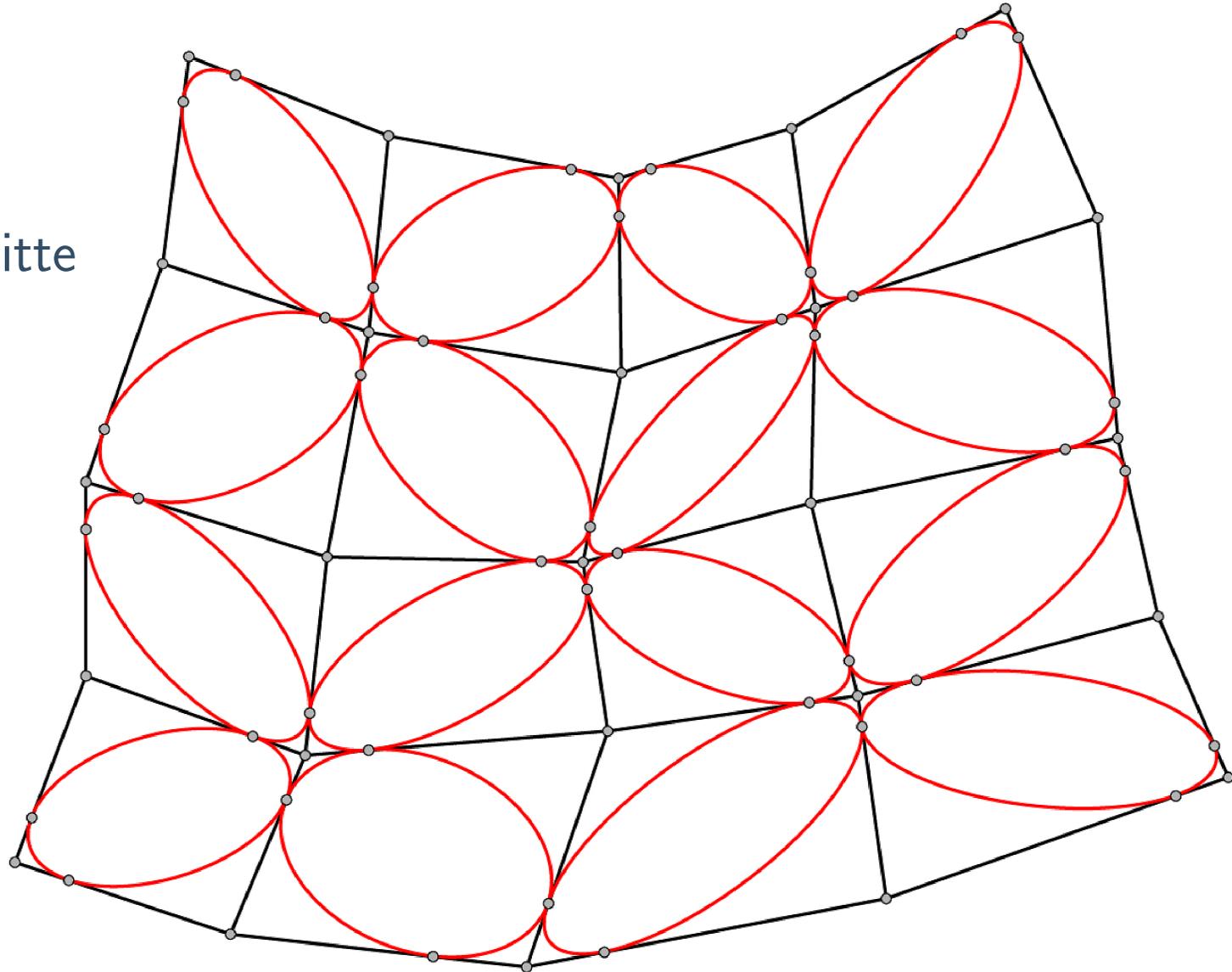
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



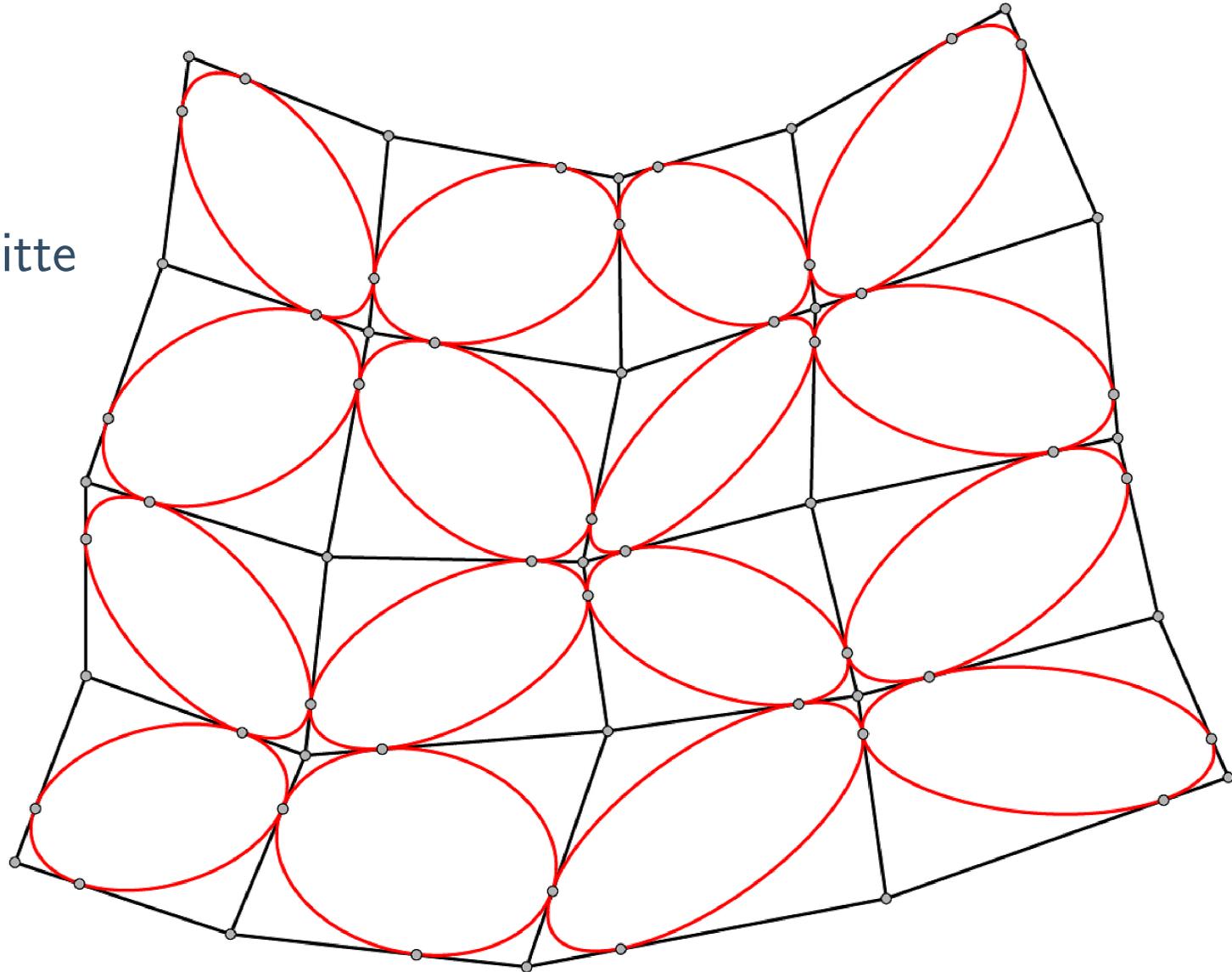
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



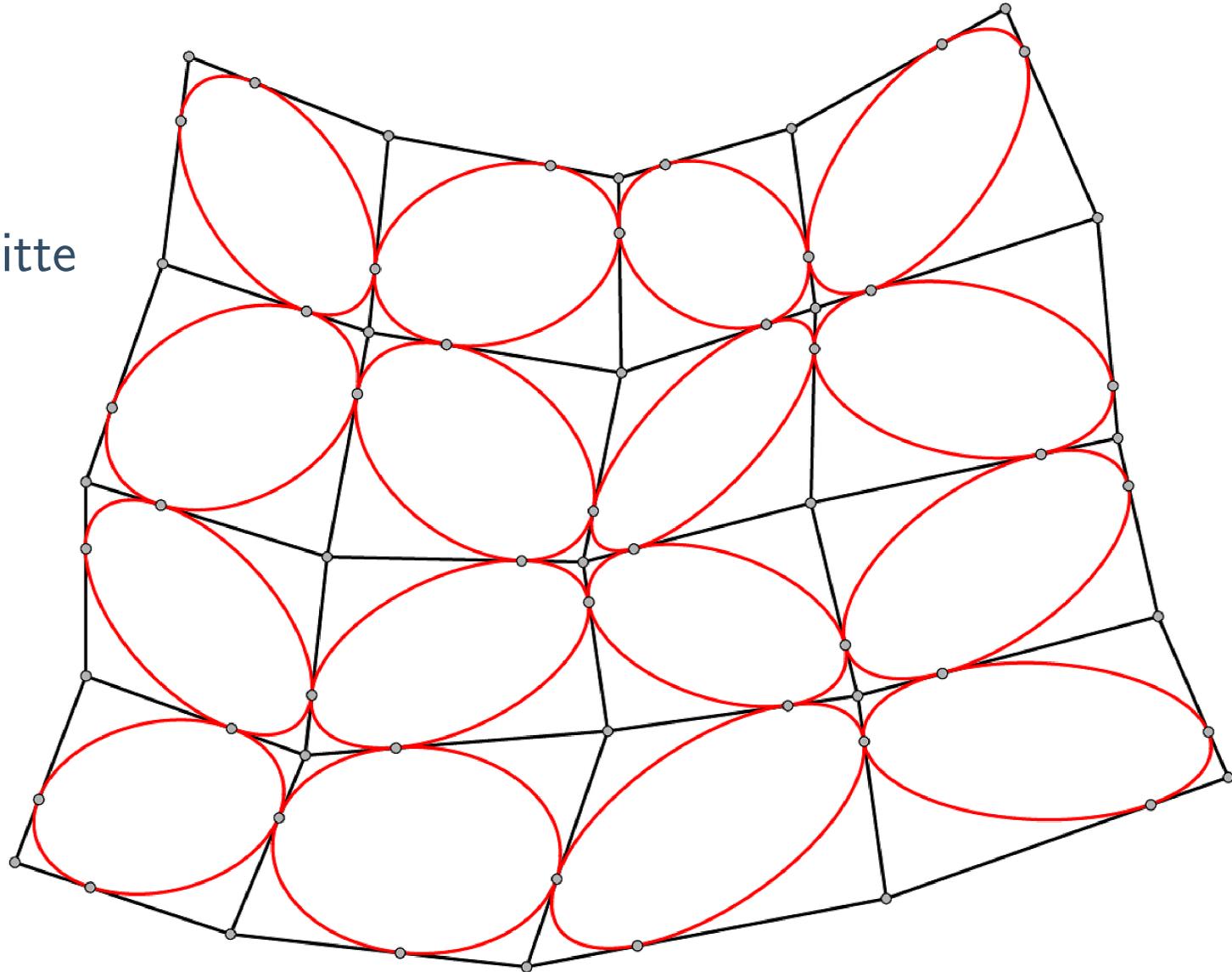
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



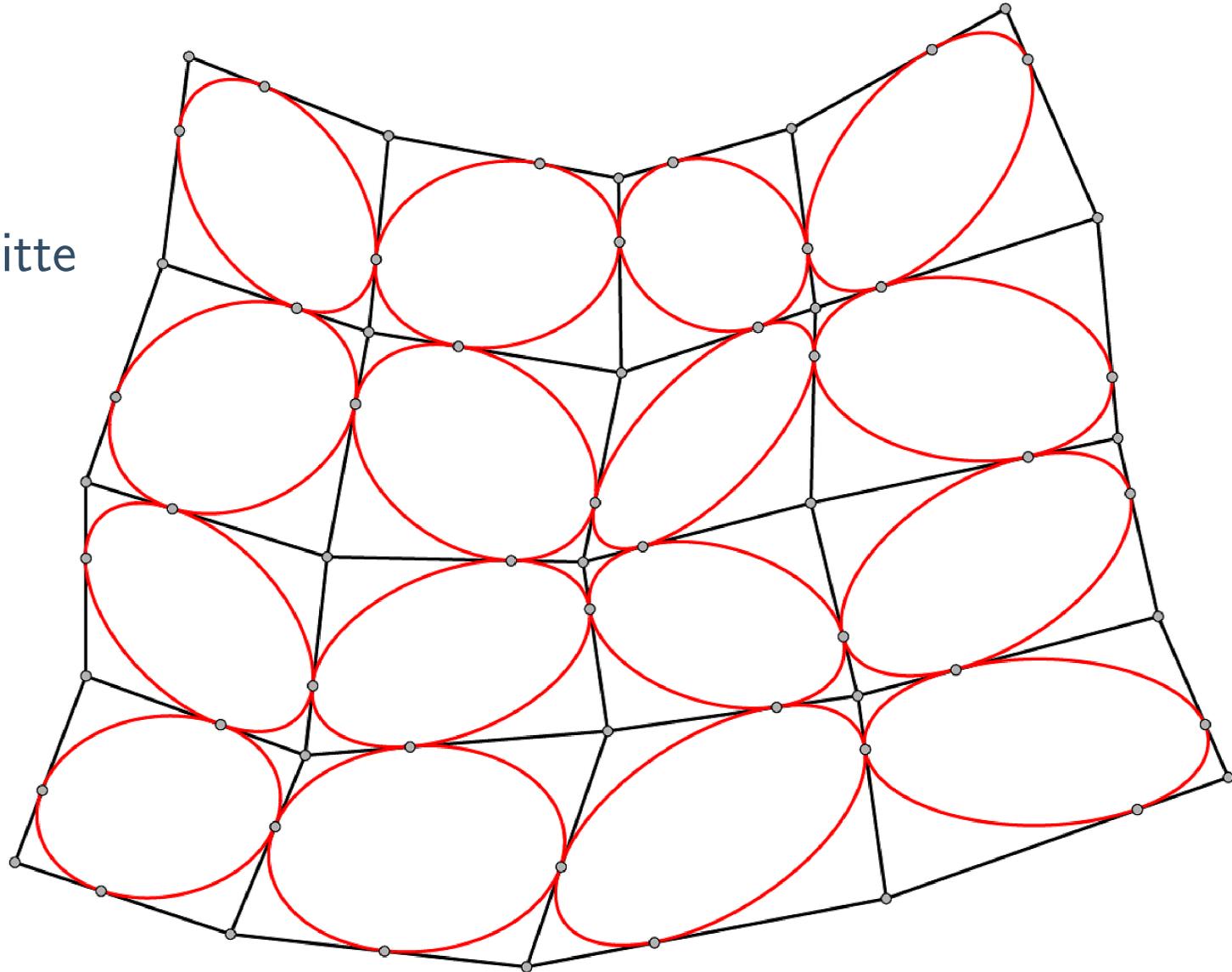
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



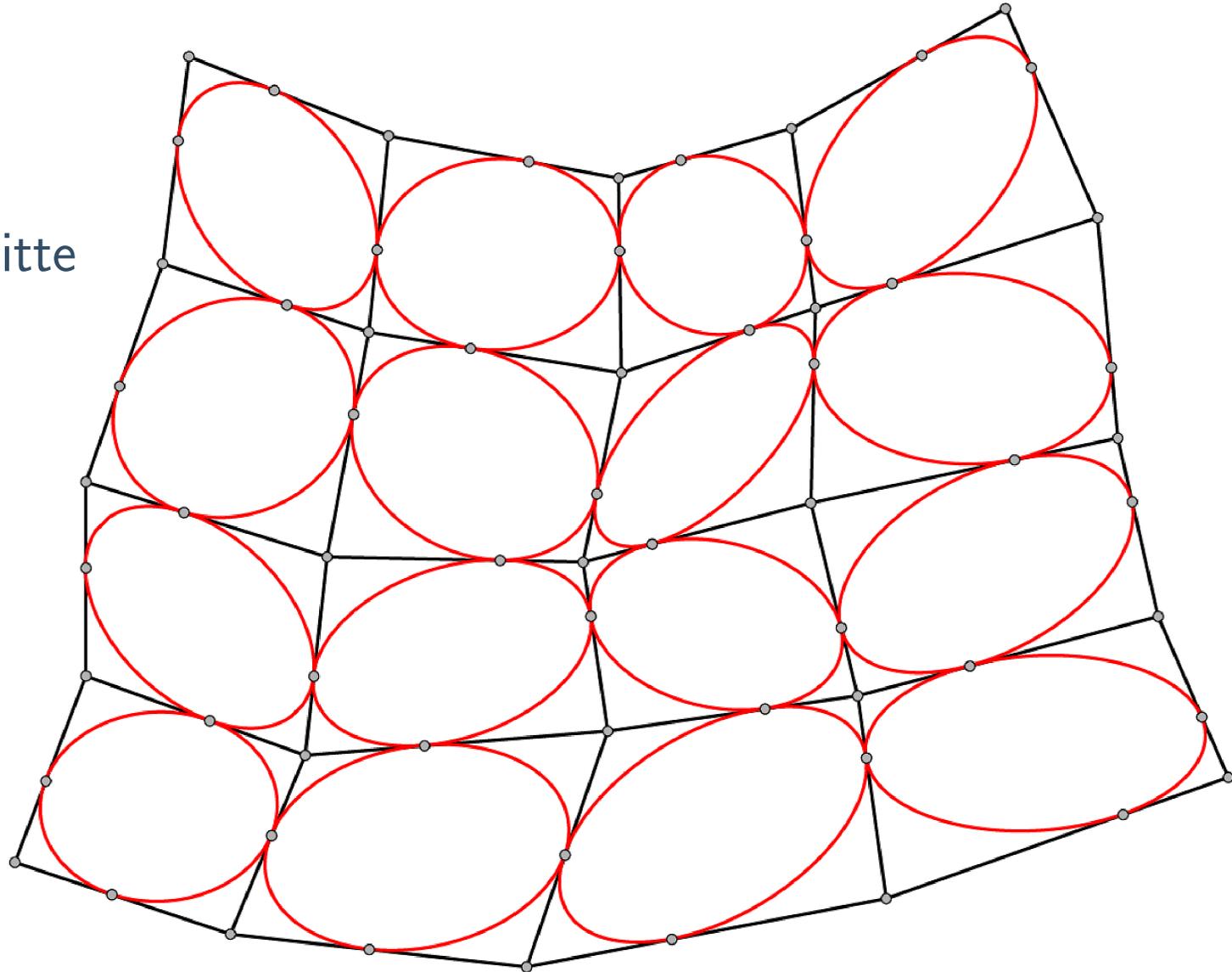
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



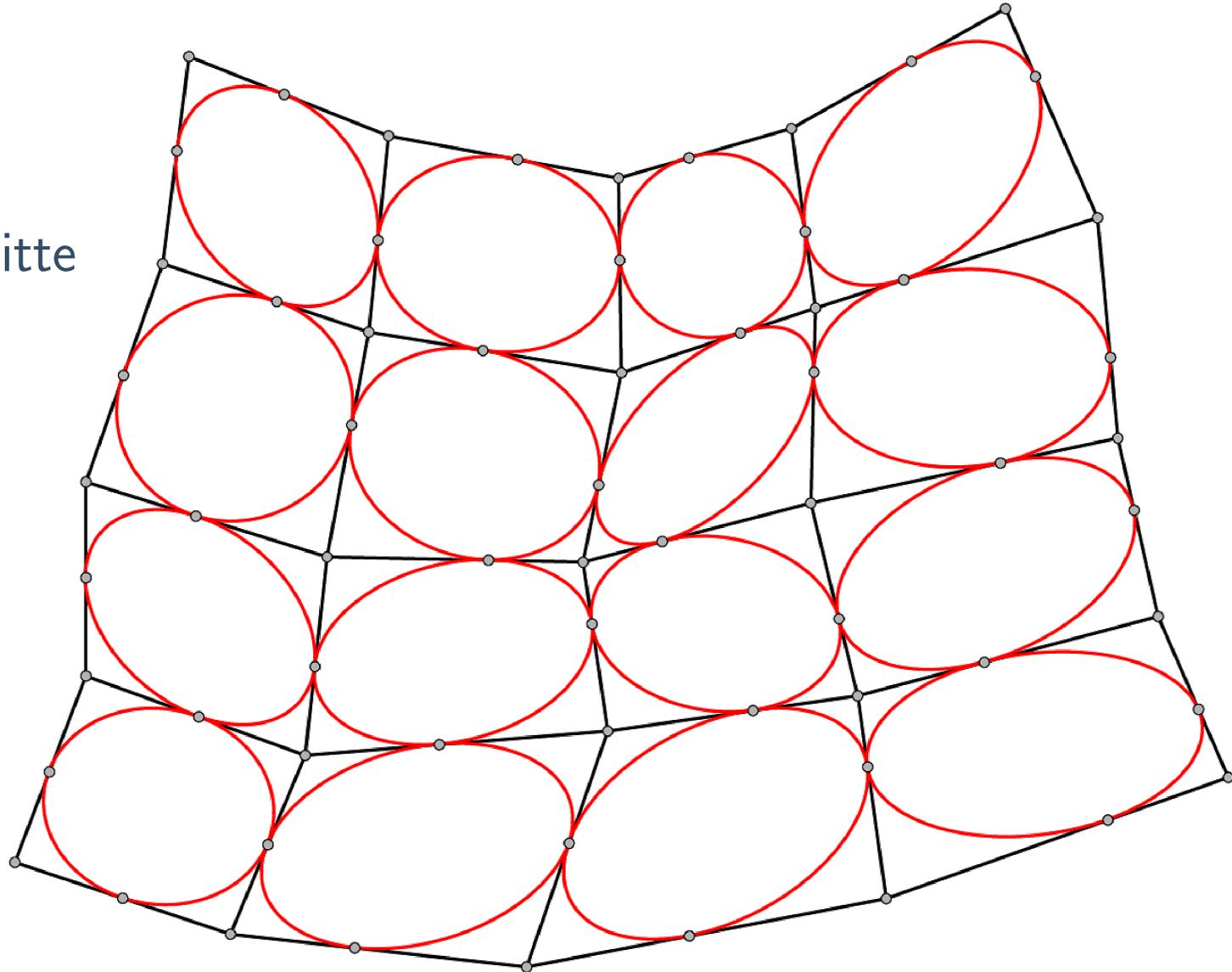
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



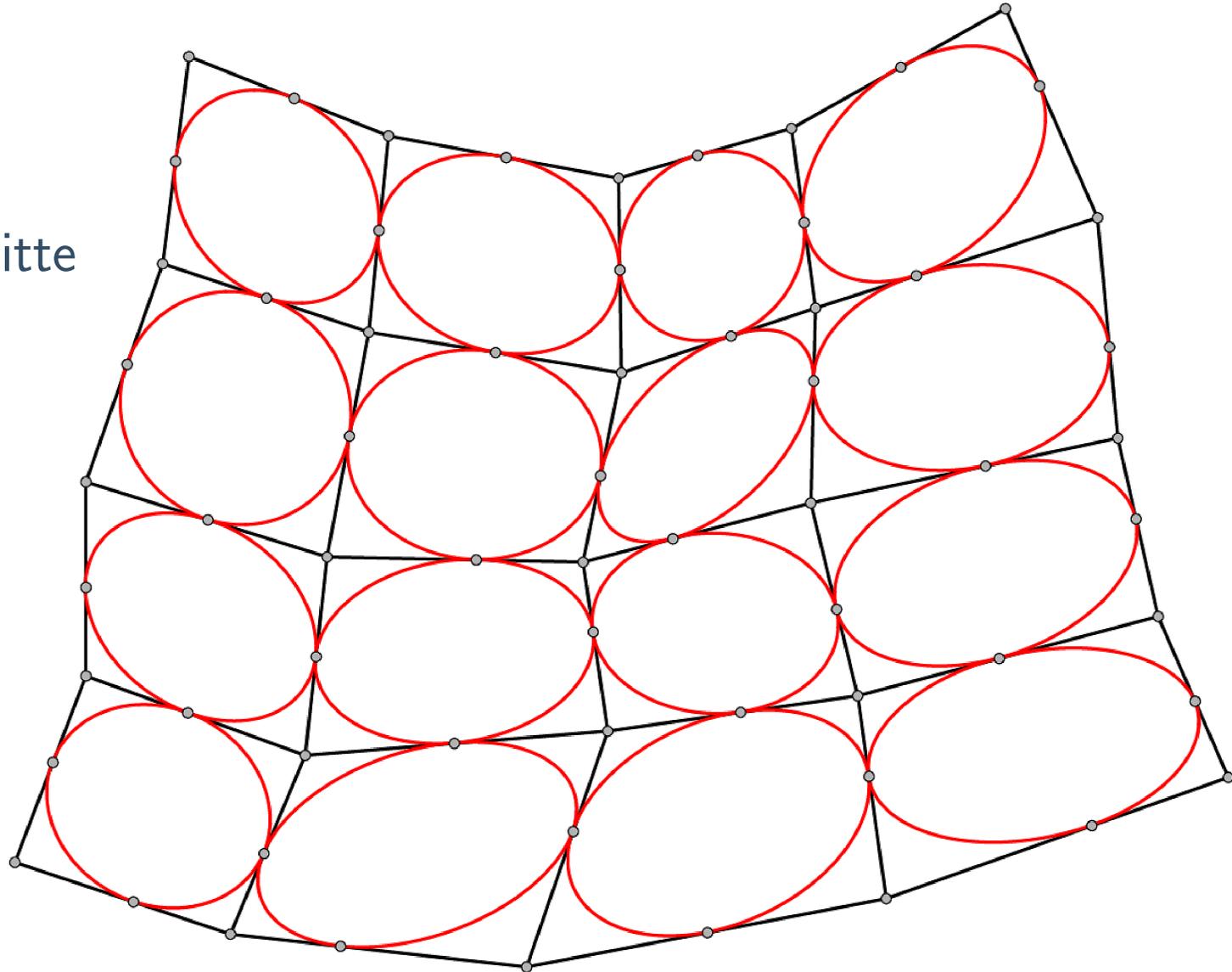
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



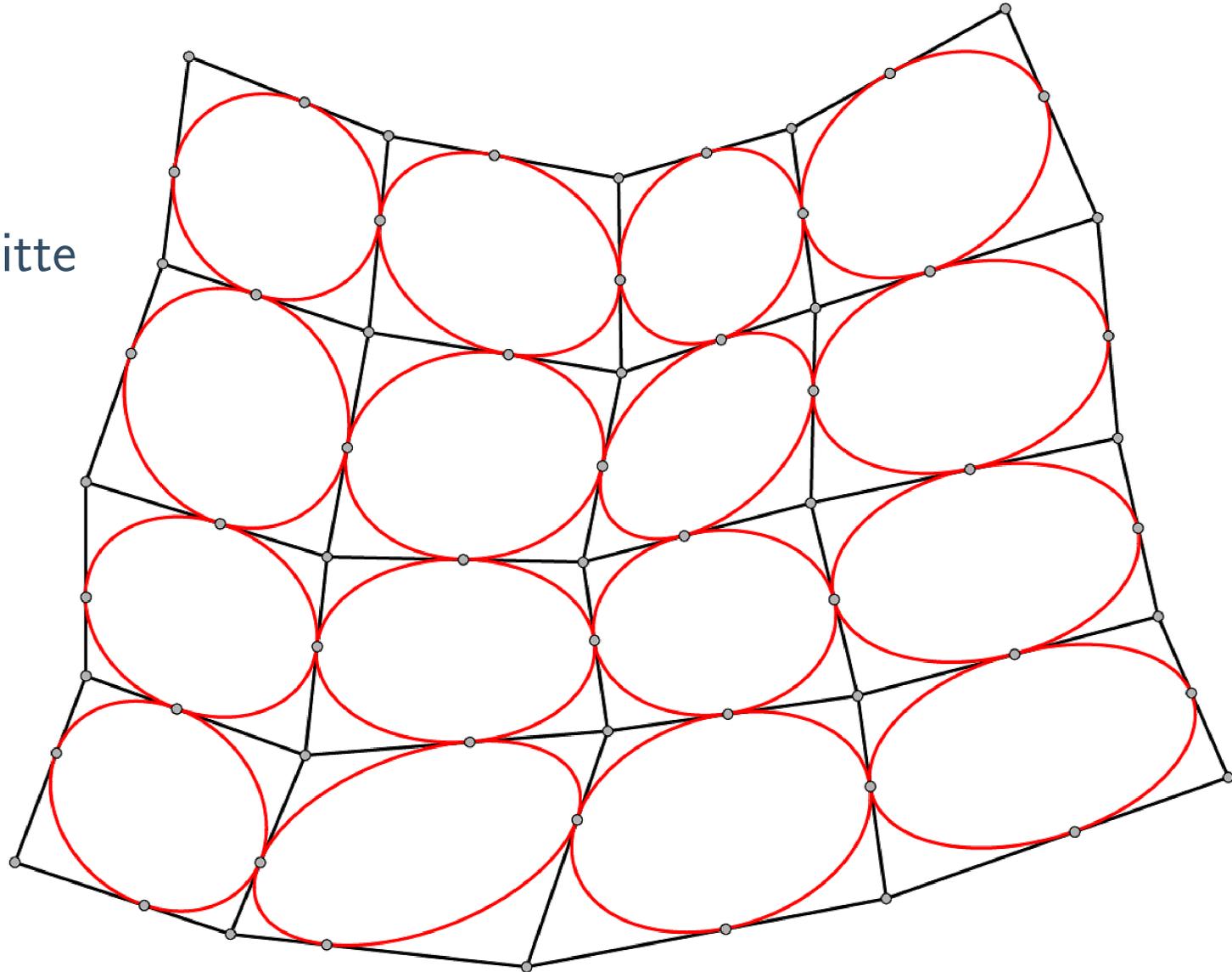
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



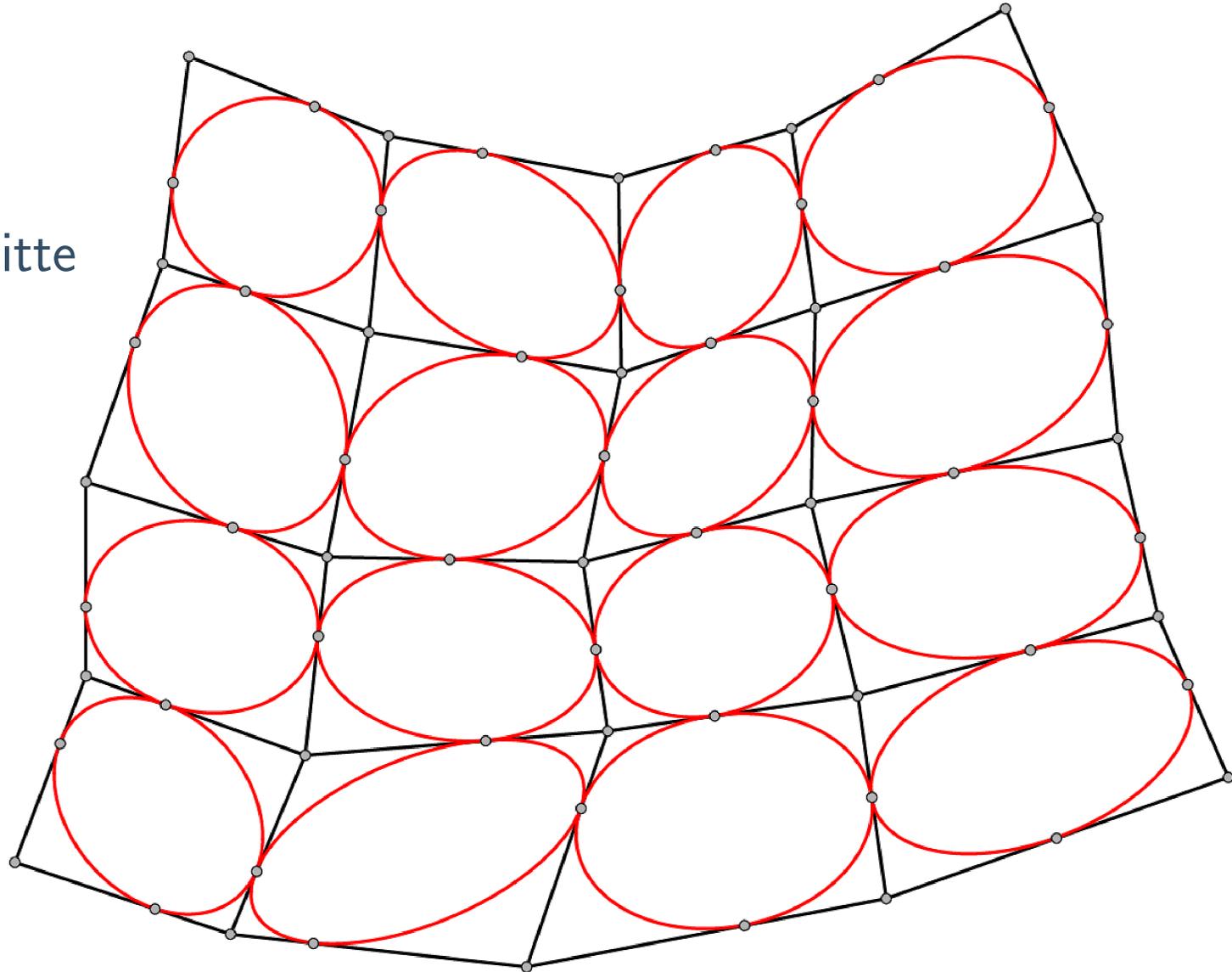
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



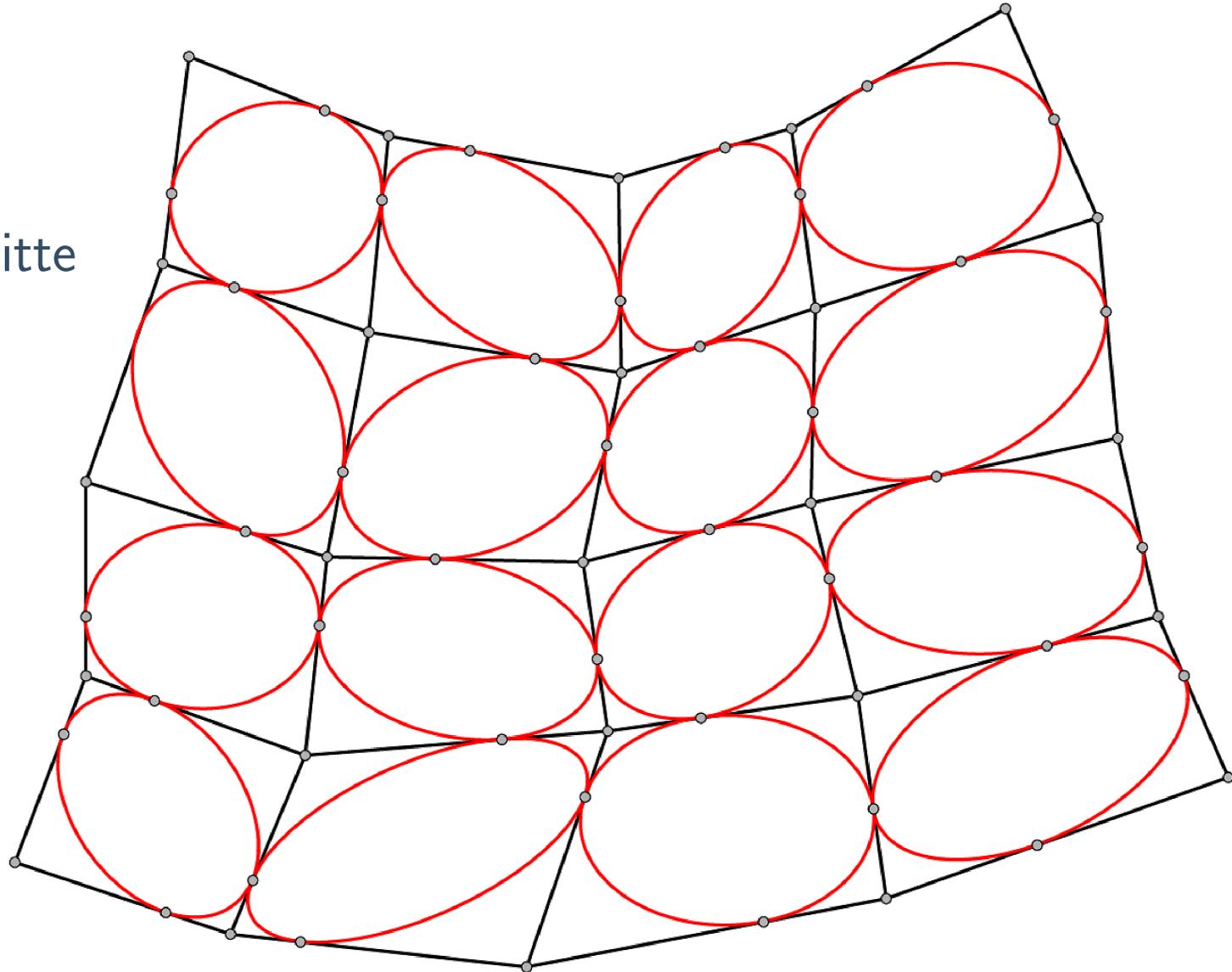
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



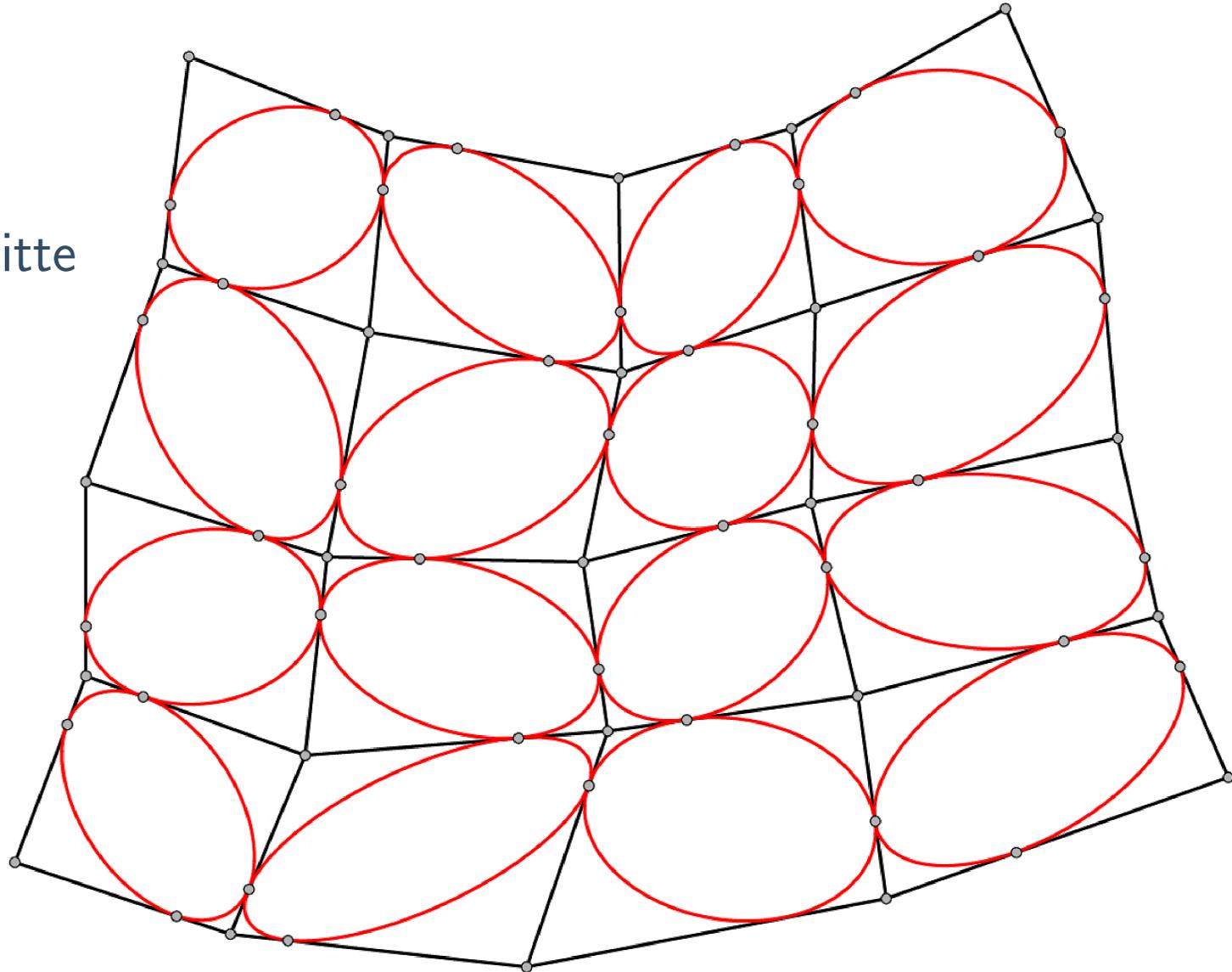
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



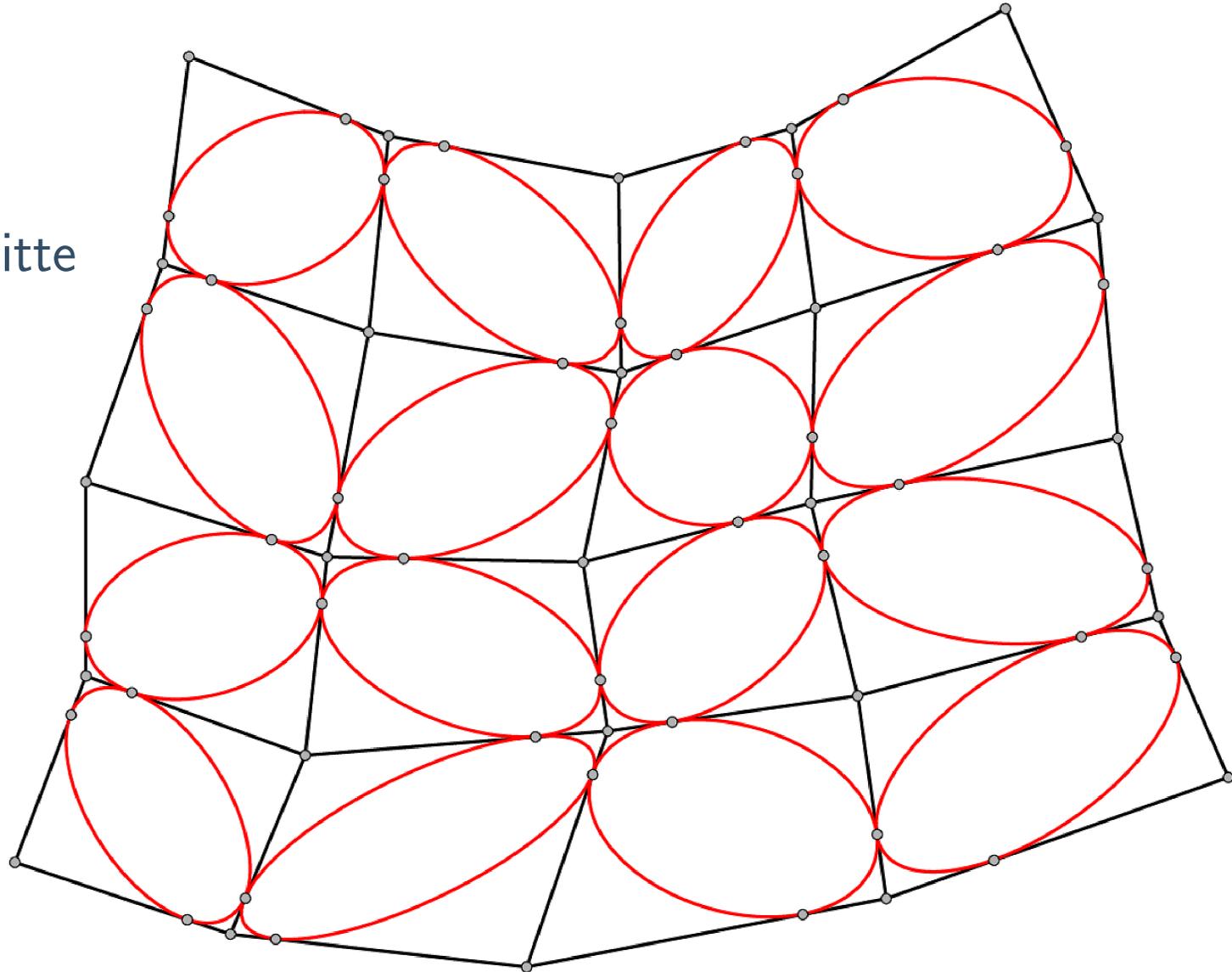
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



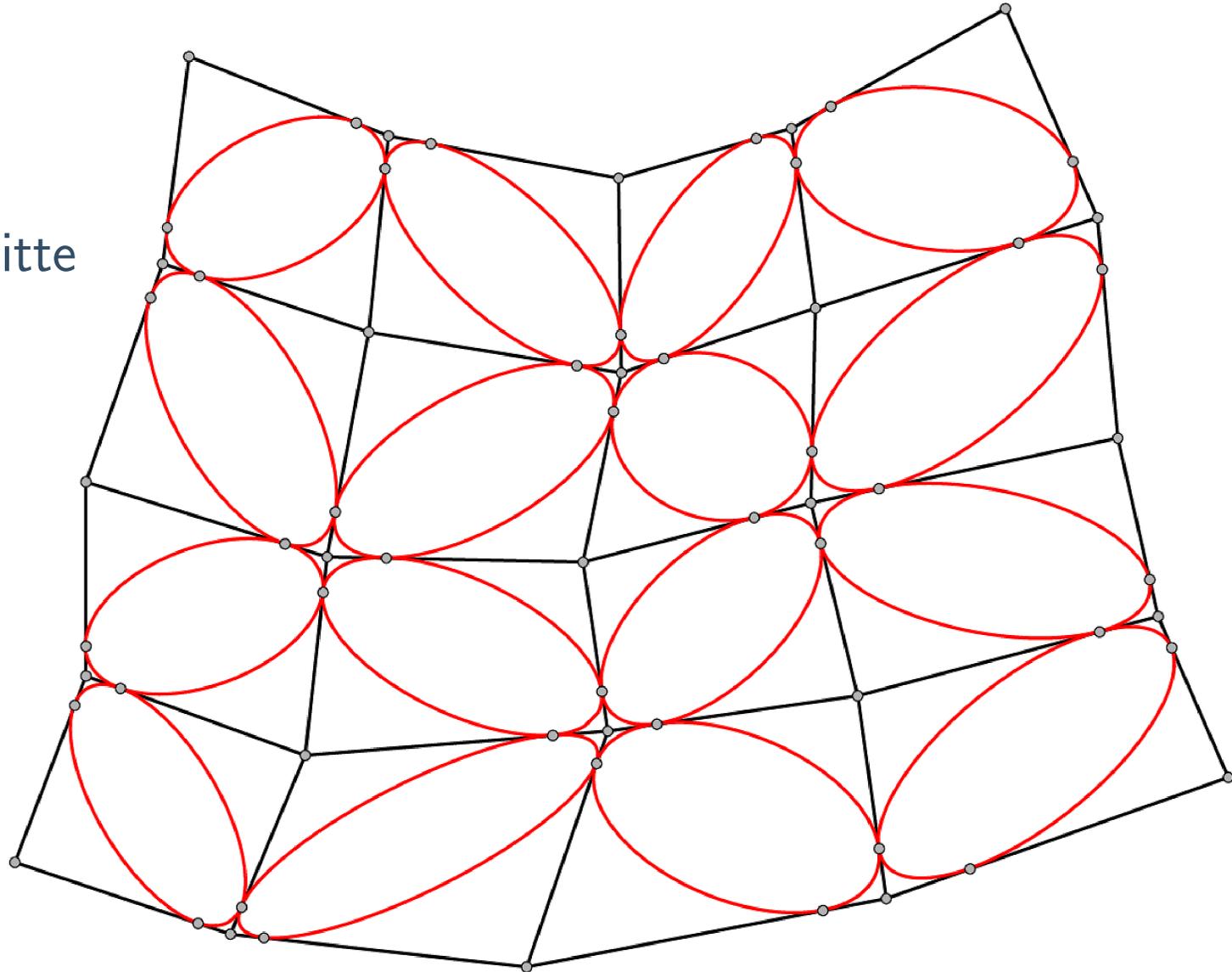
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie
eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte
berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



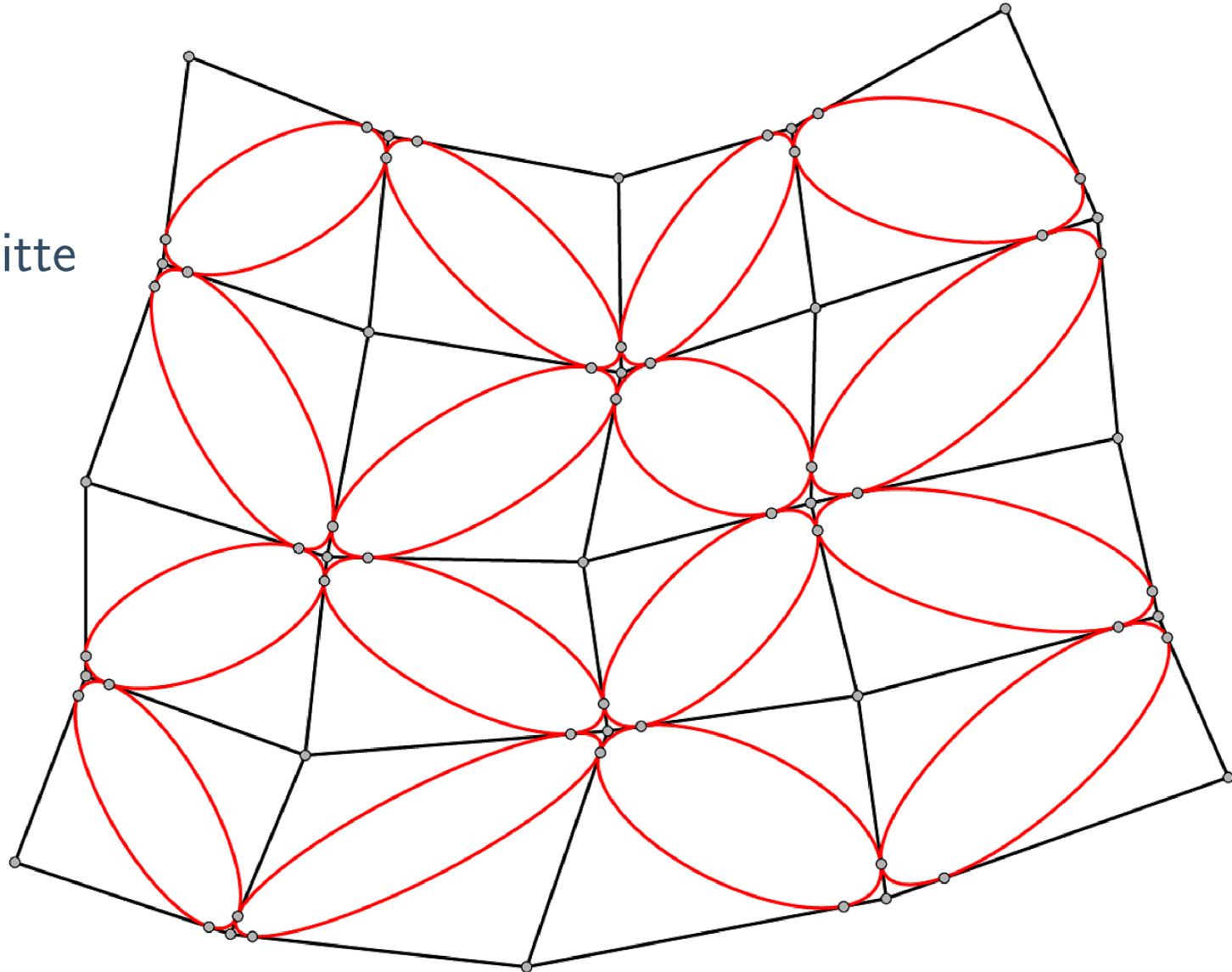
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



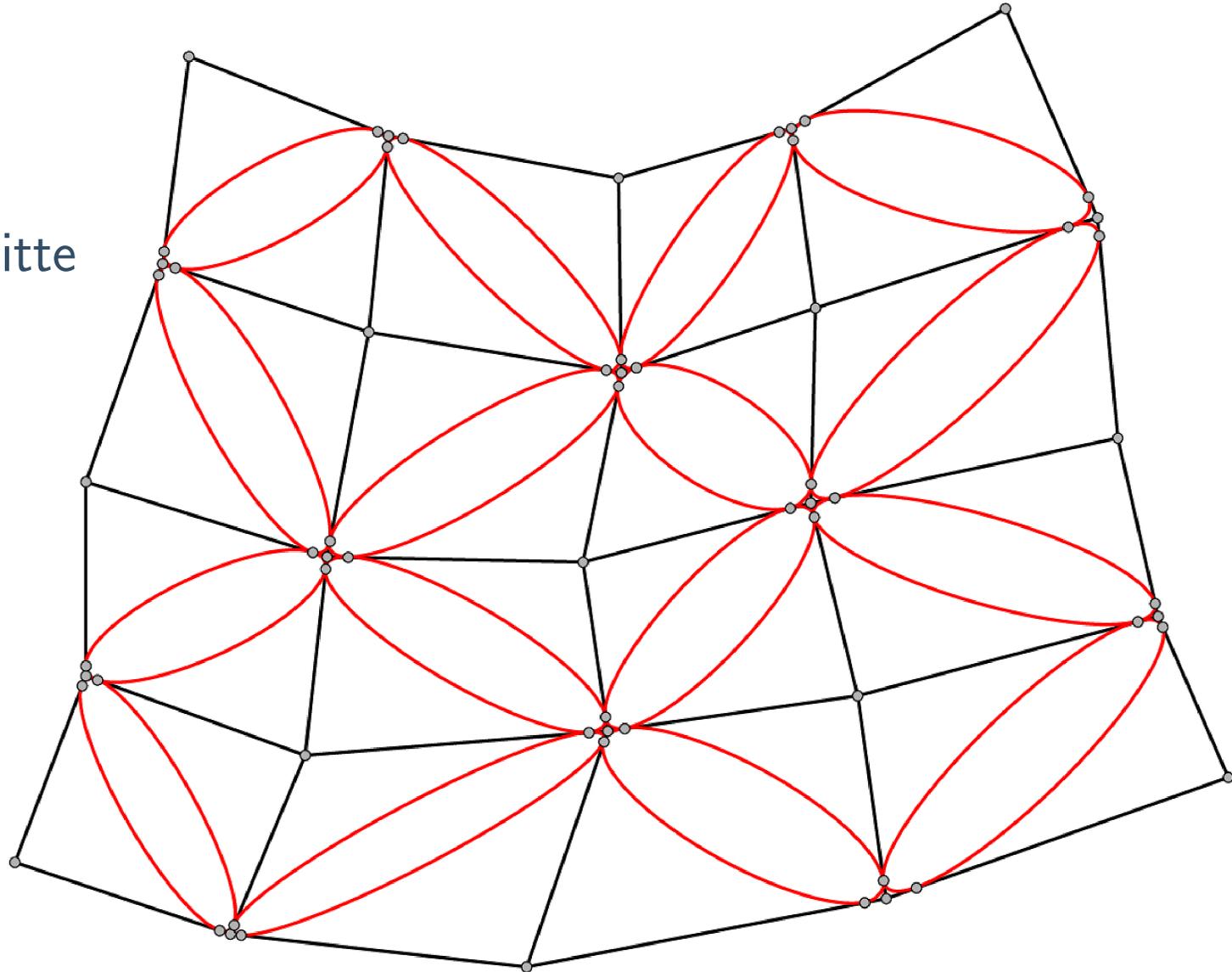
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

[A. Fairley (2019)]



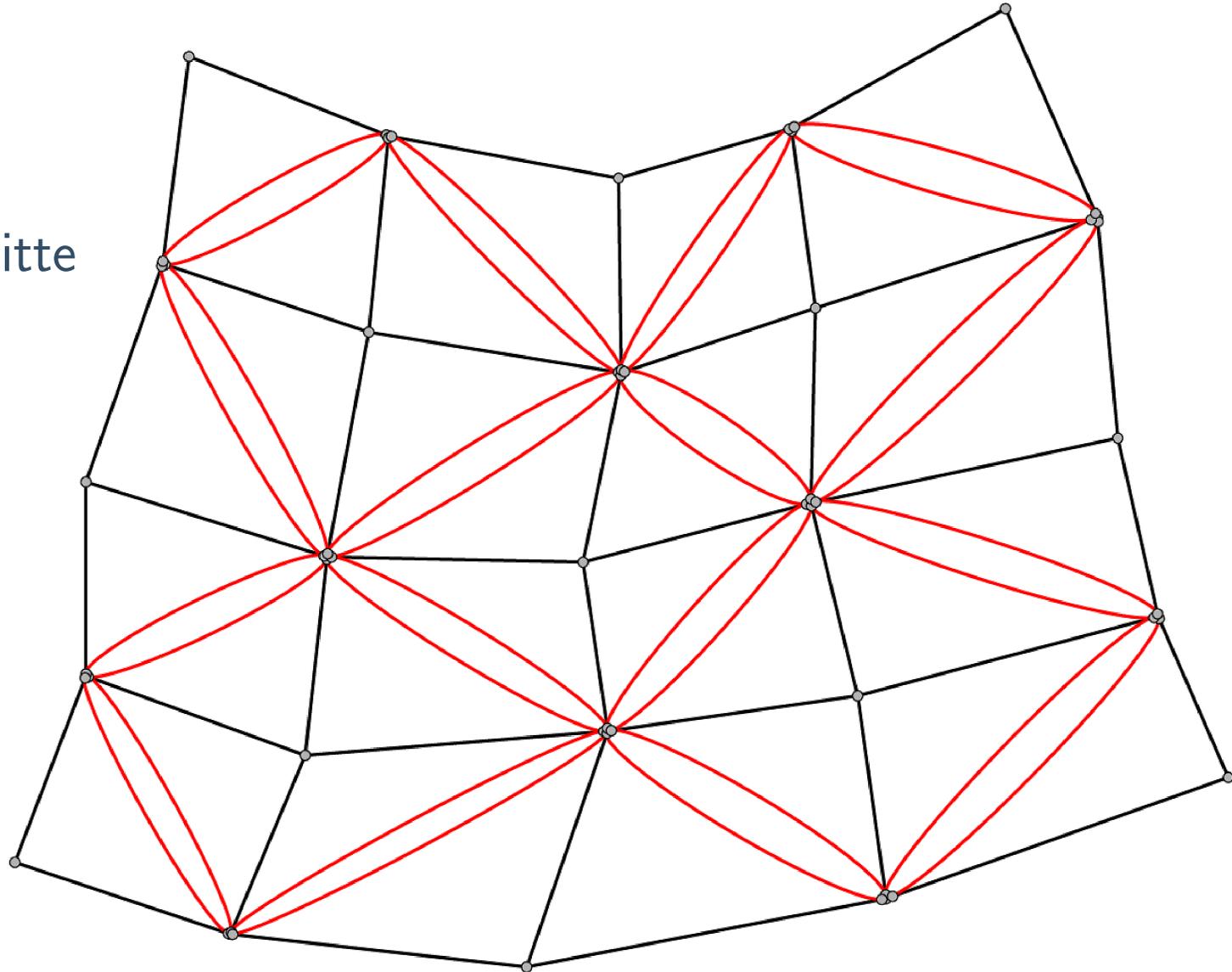
Kœnigs Netz—Eingeschriebene Kegelschnitte

Satz: Kœnigs Netz \Leftrightarrow

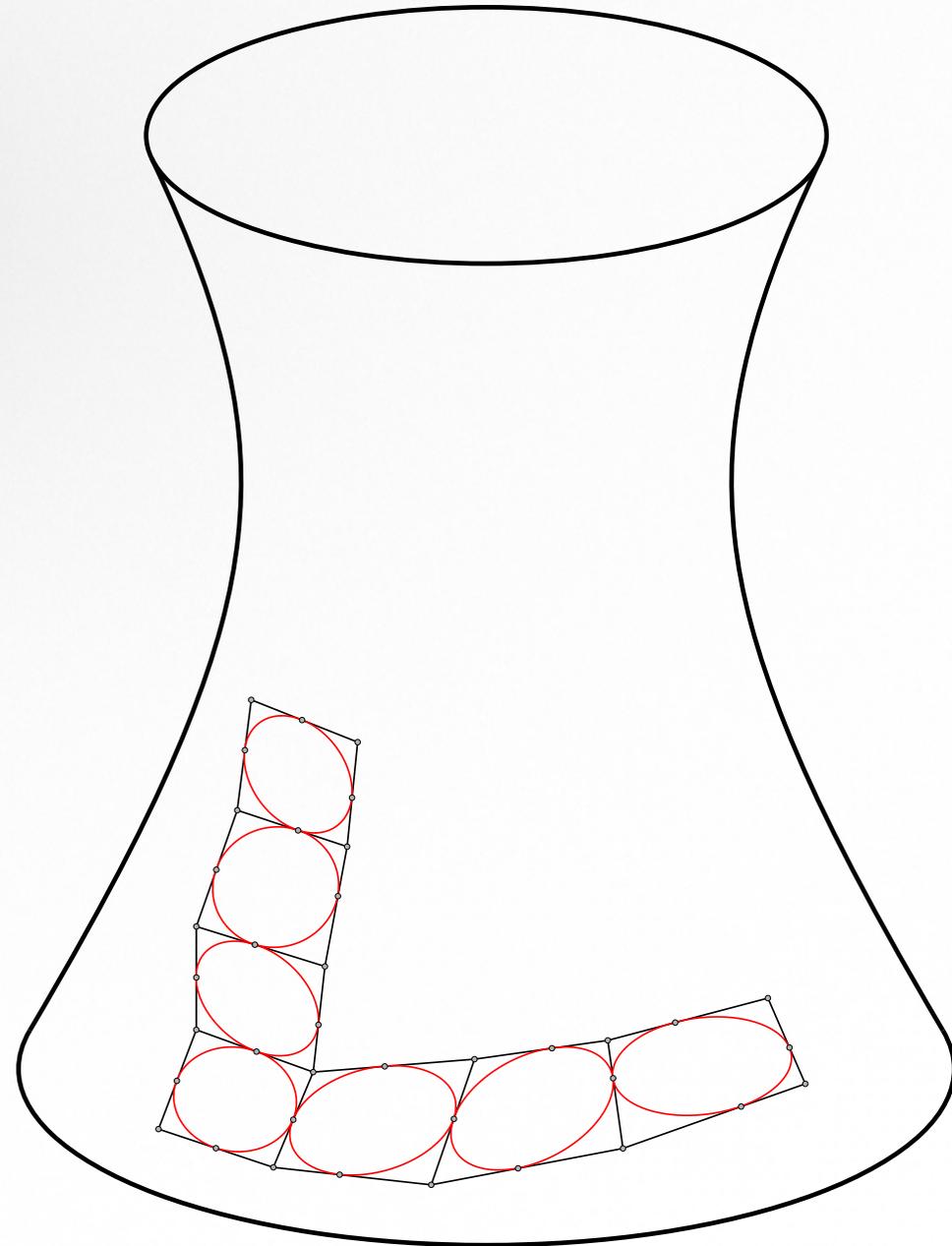
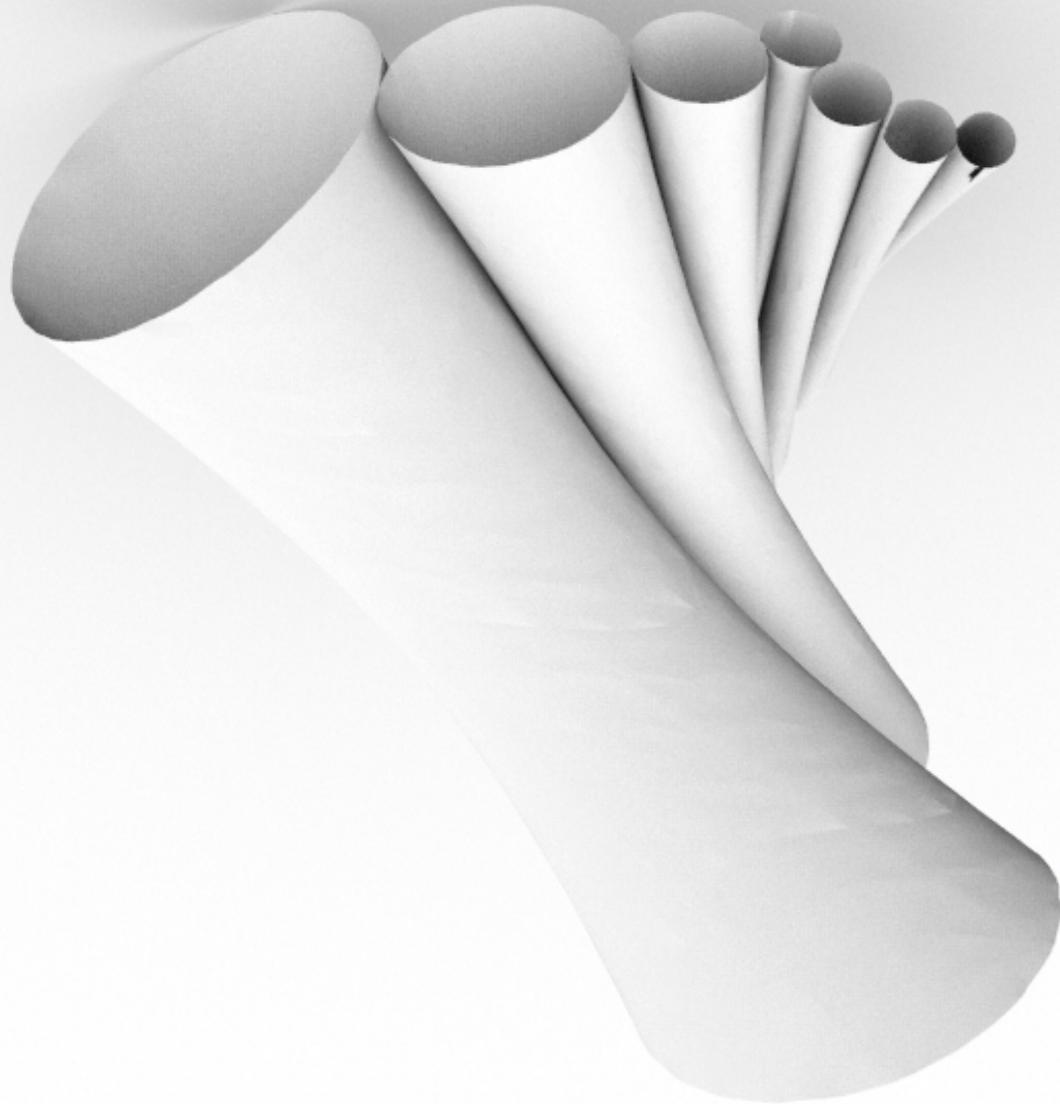
- 1-parameter Familie eingeschriebener Kegelschnitte
- benachbarte Kegelschnitte berühren sich

unabhängig entdeckt von

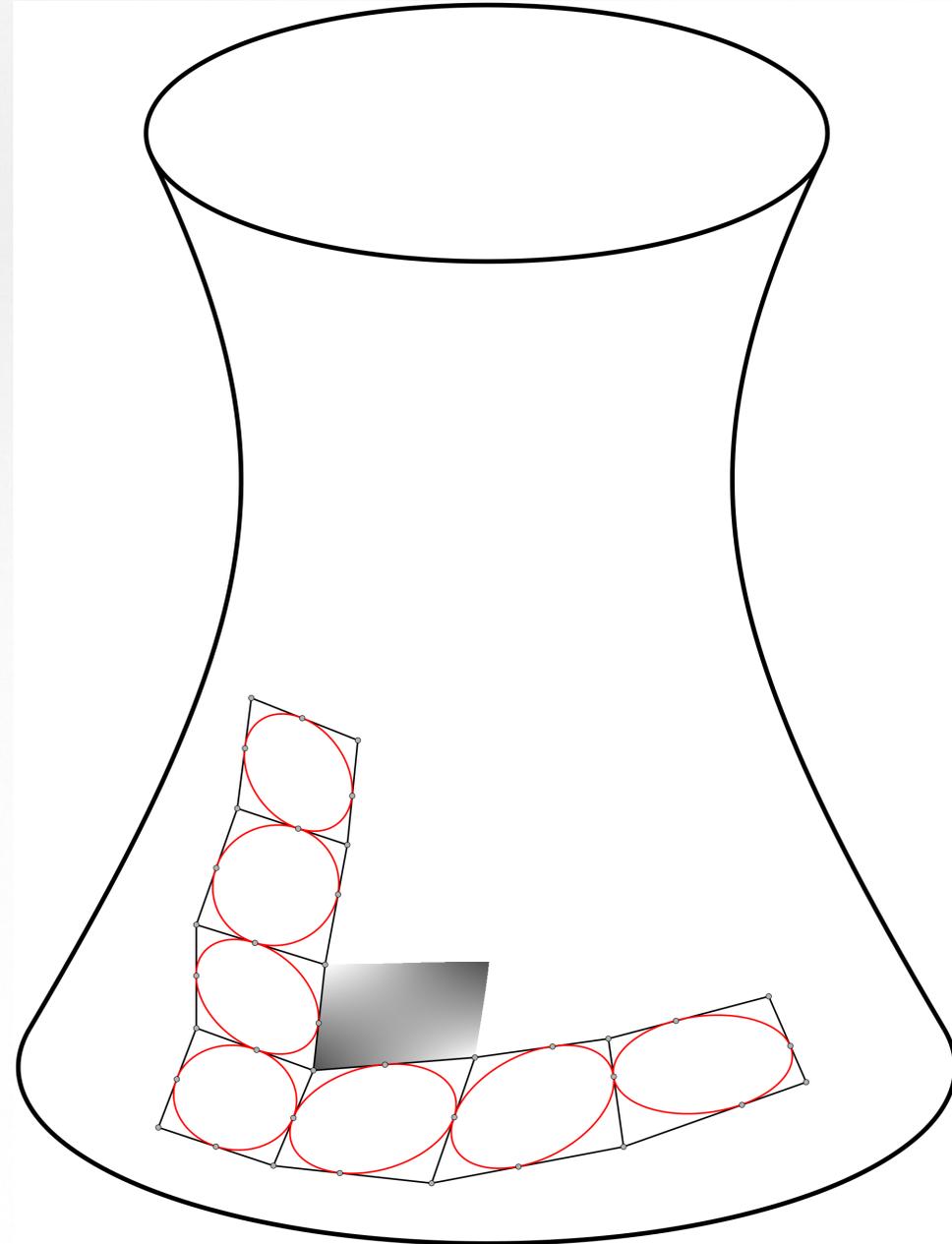
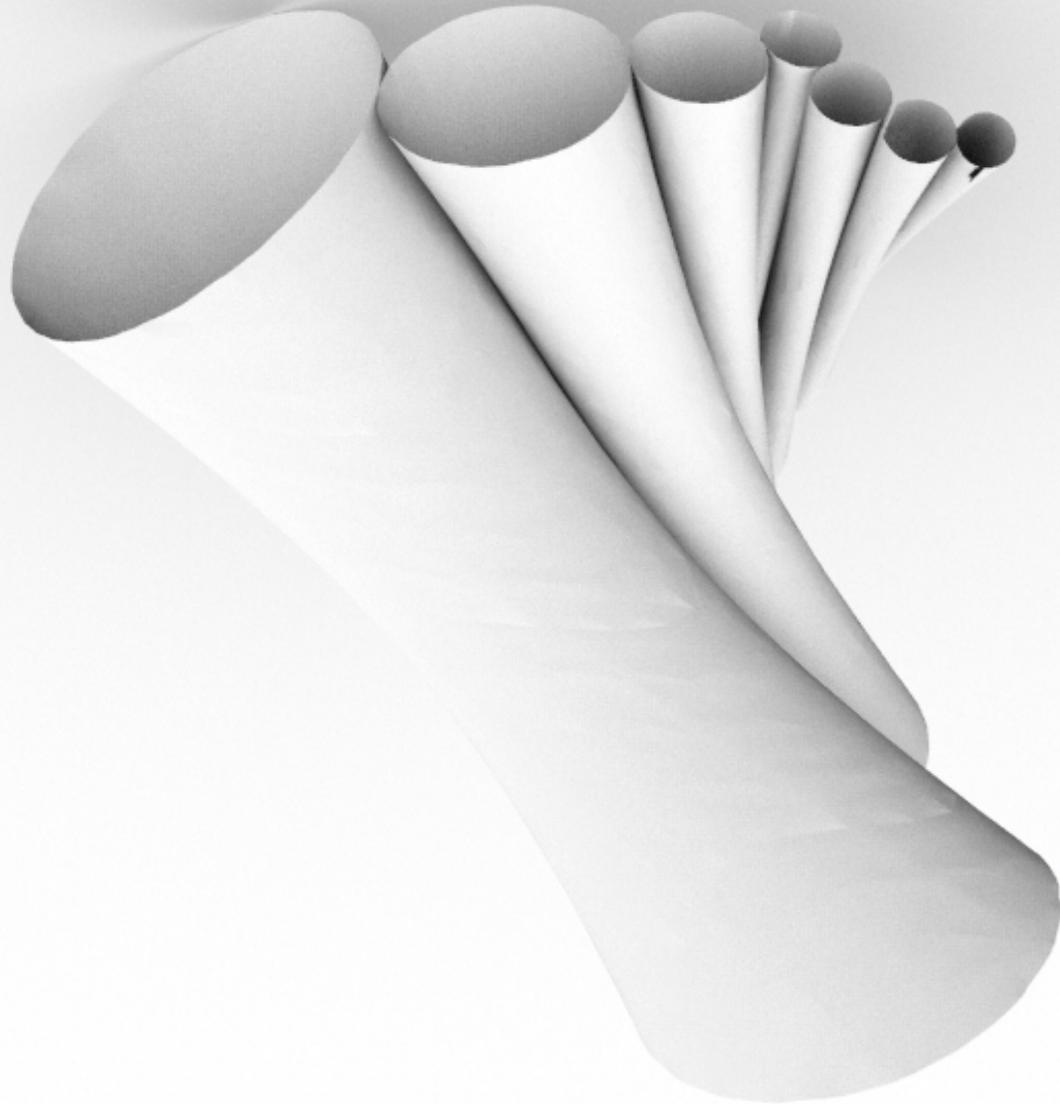
[A. Fairley (2019)]



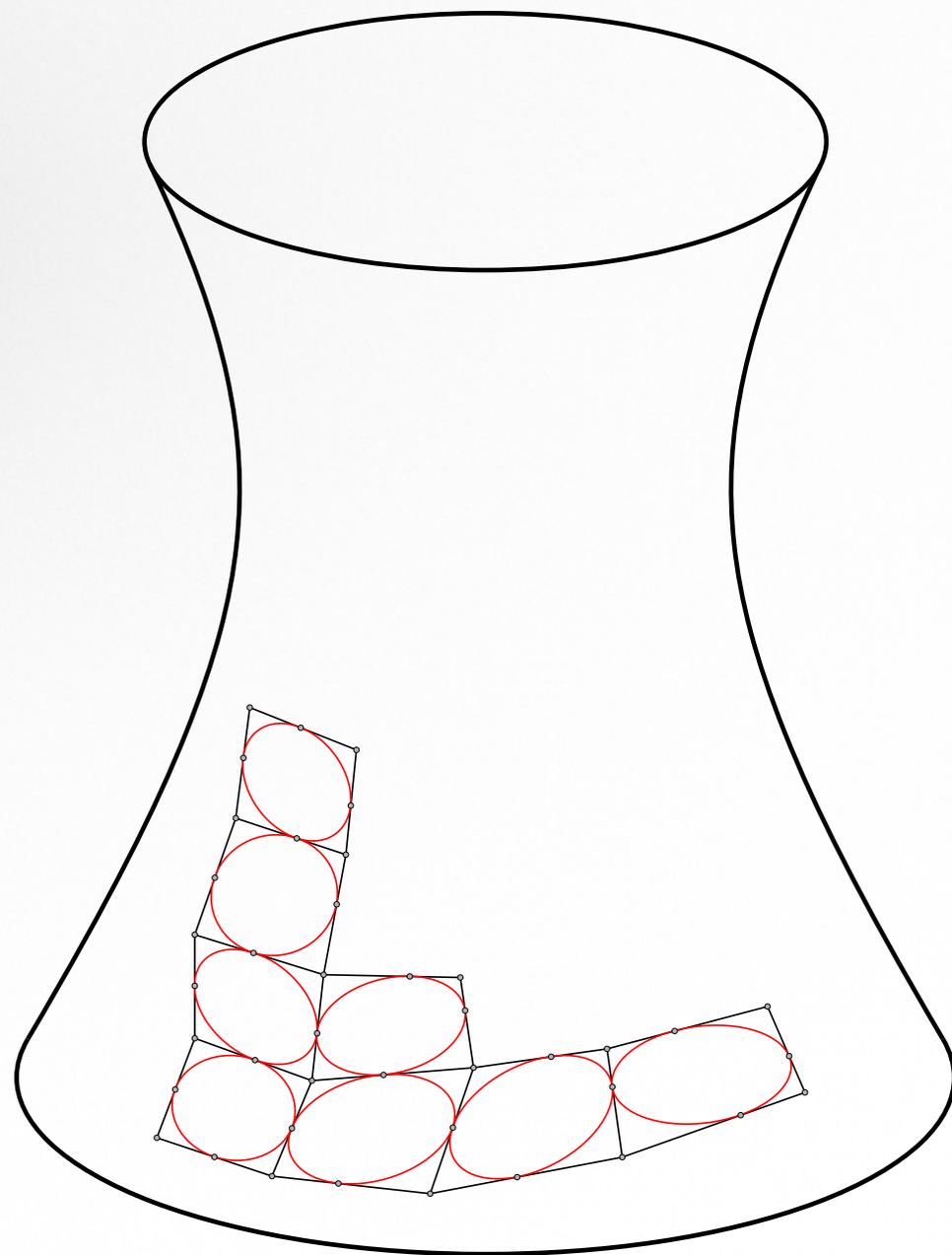
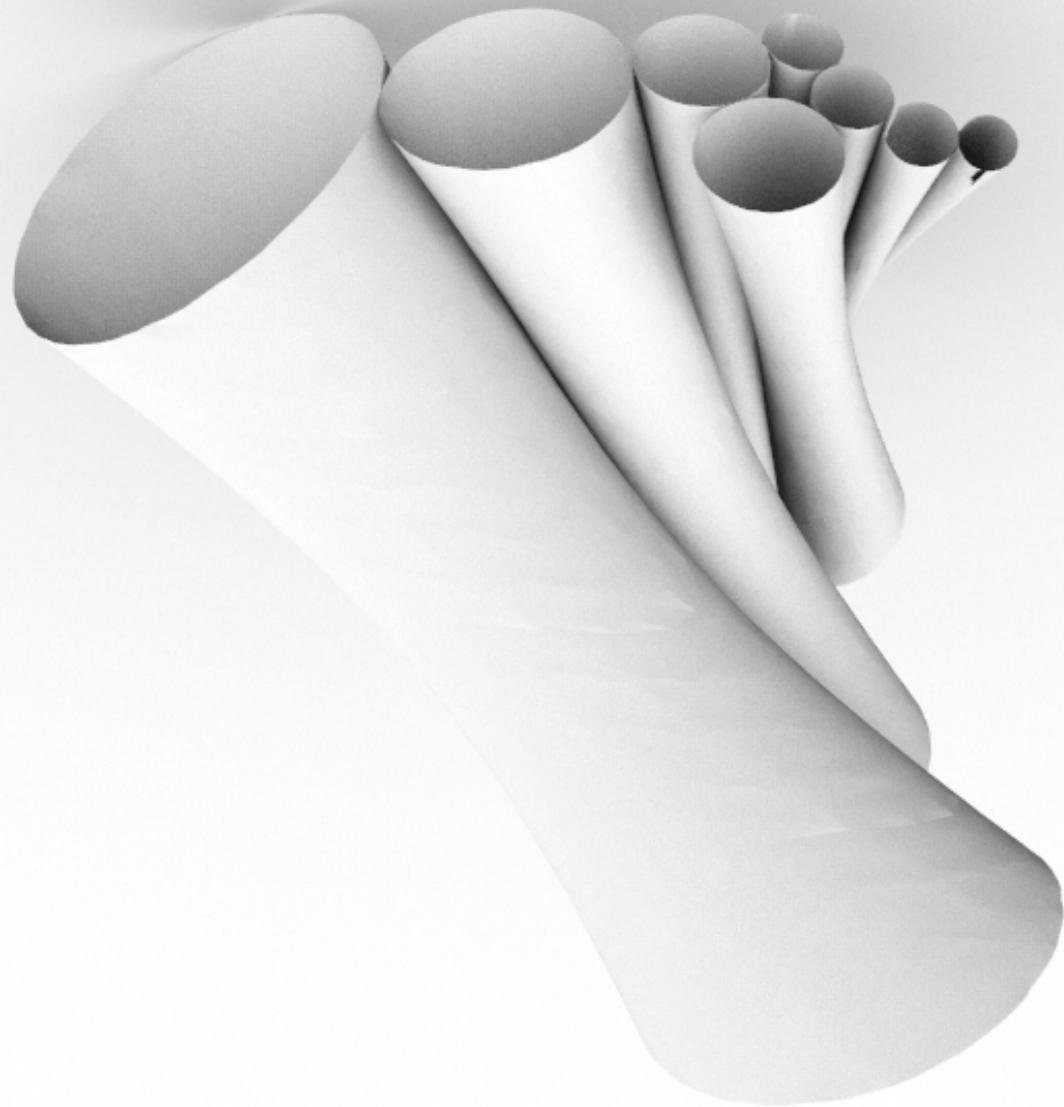
Randwertproblem



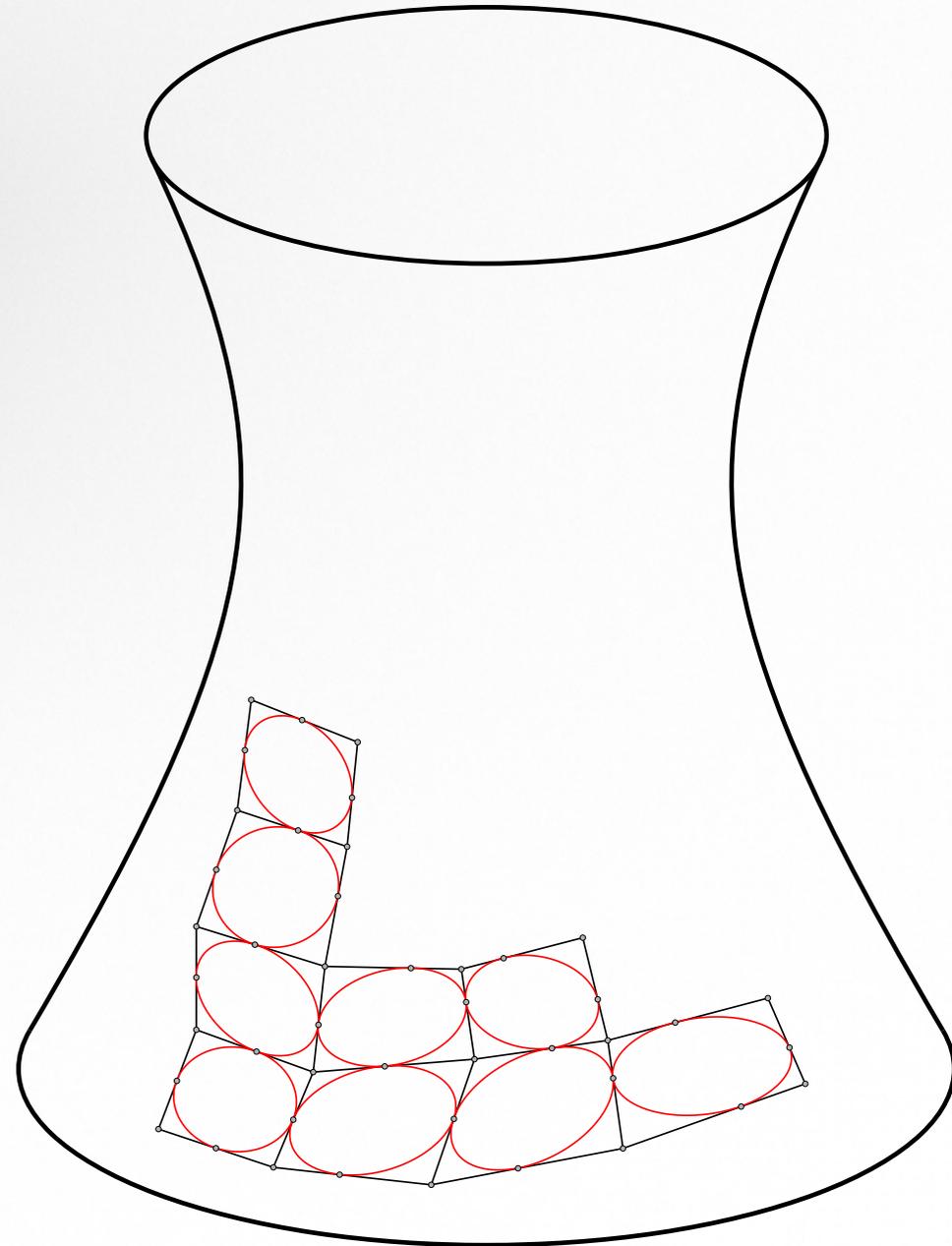
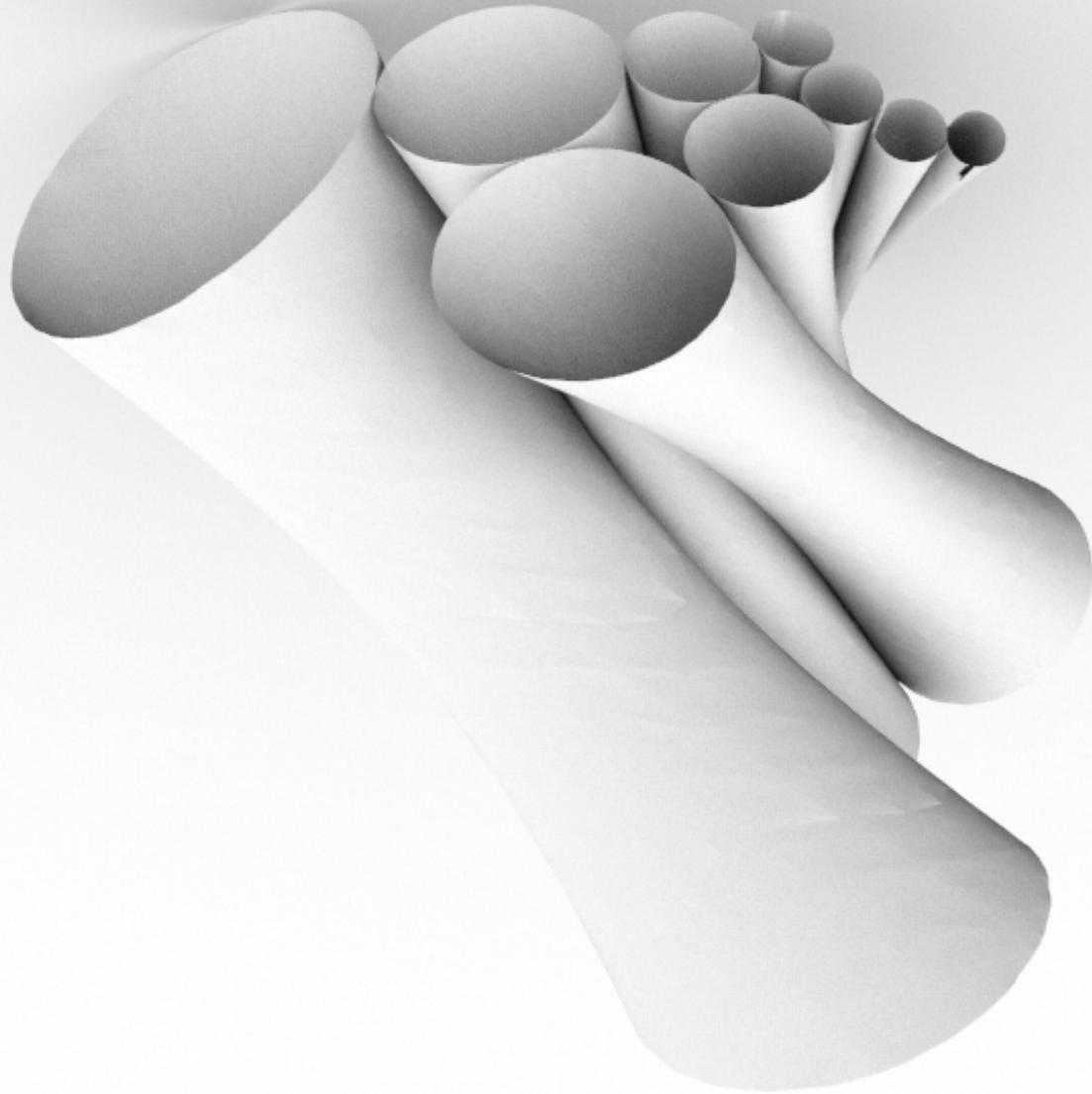
Randwertproblem



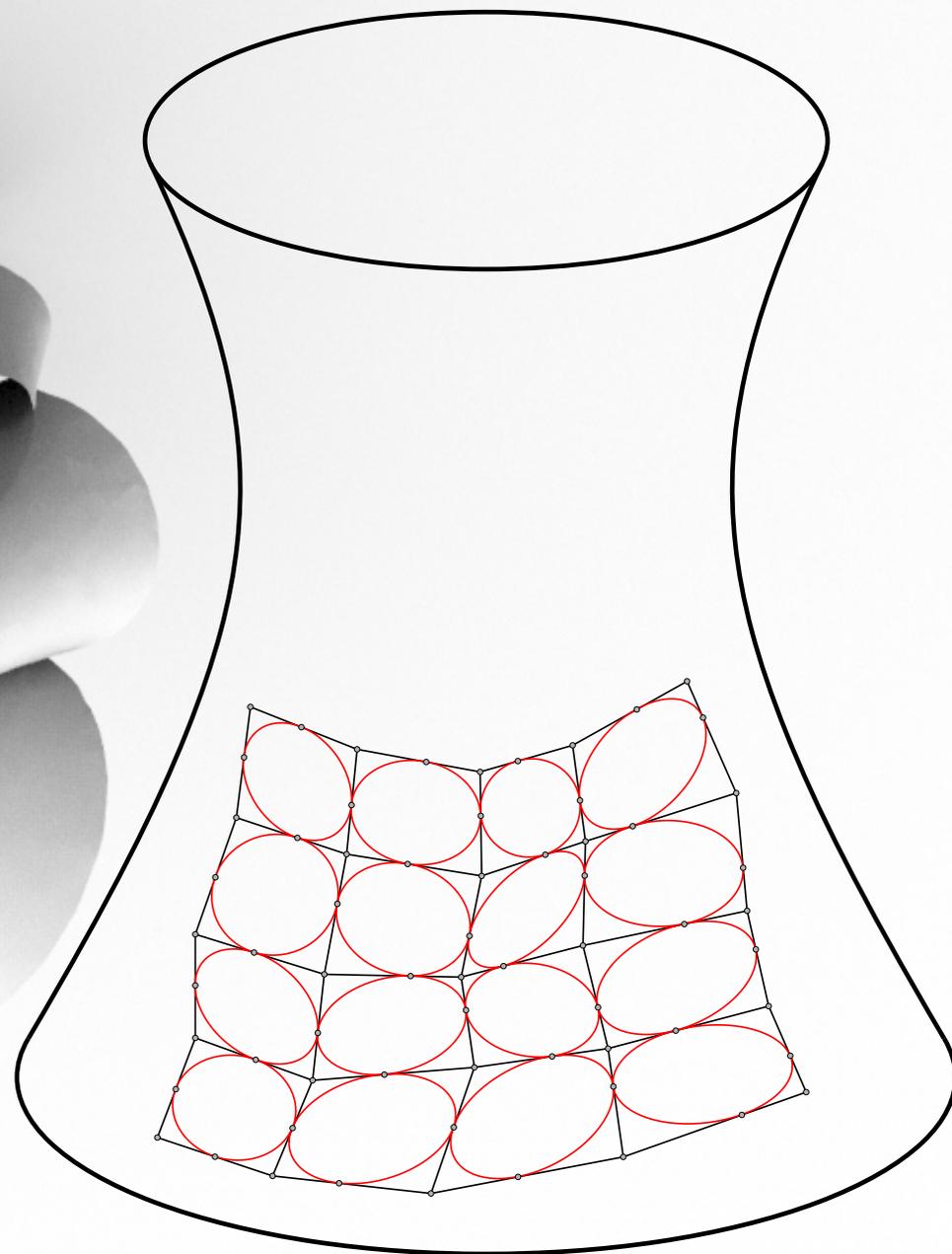
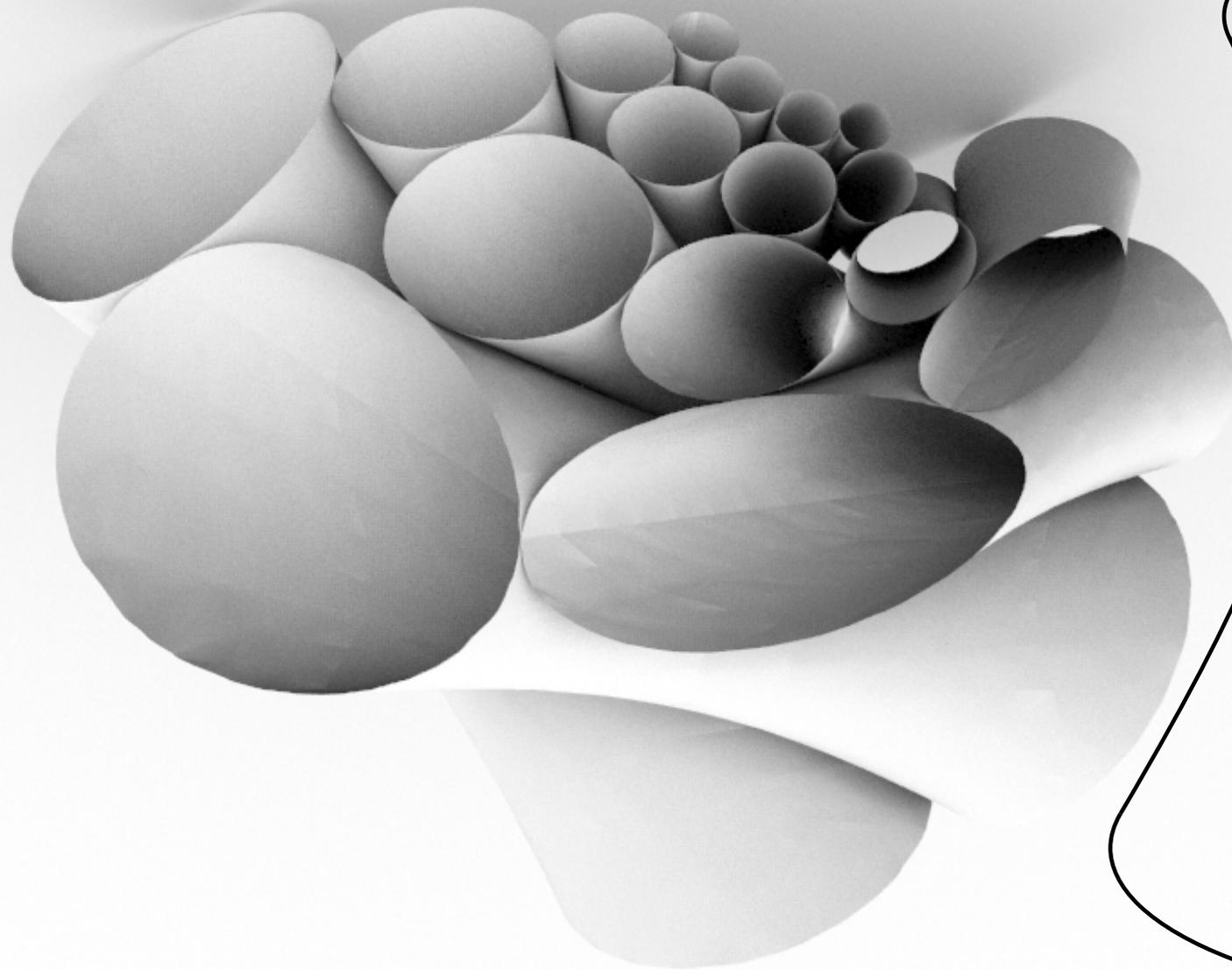
Randwertproblem



Randwertproblem

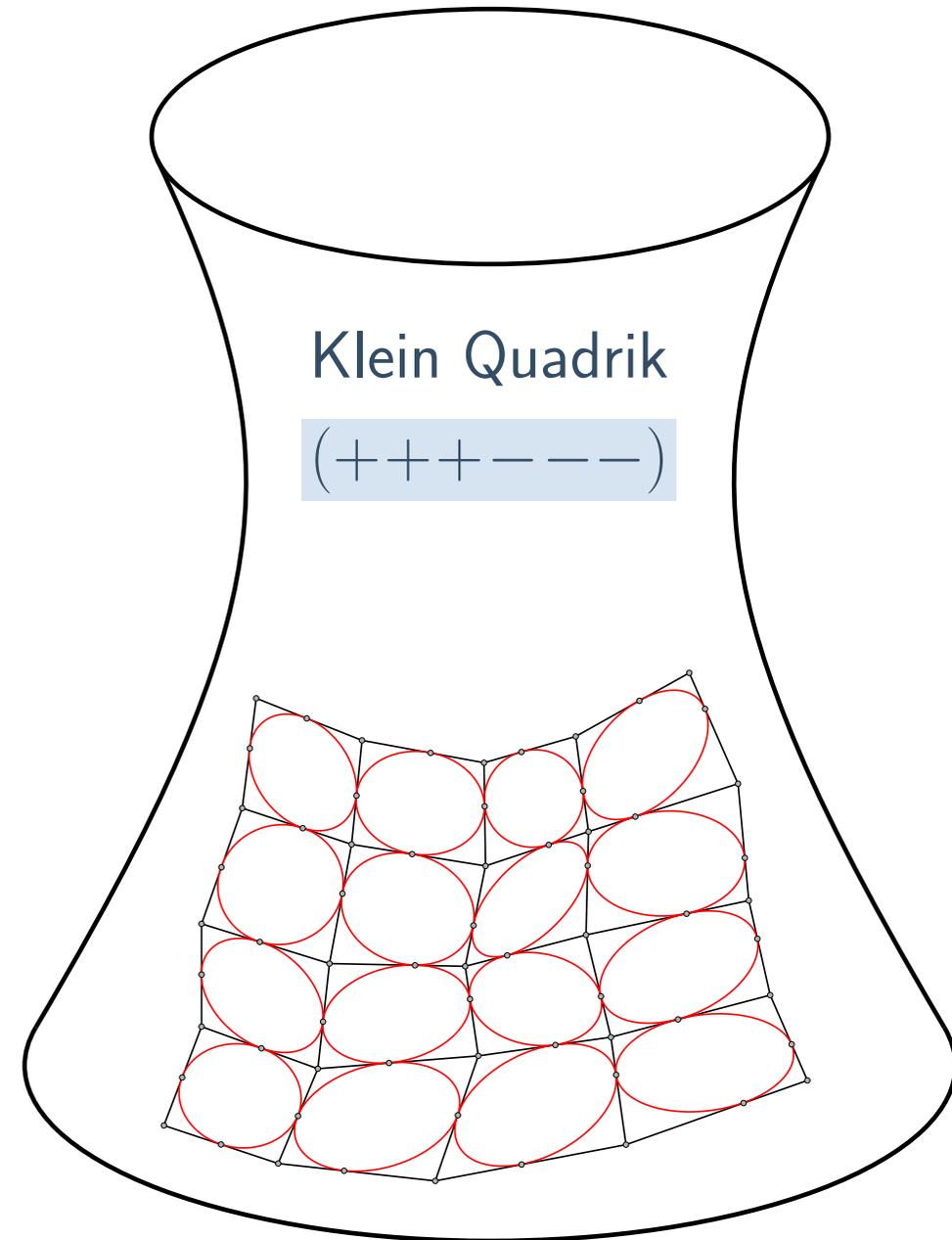


Randwertproblem



Klein Quadrik: $(+++---)$

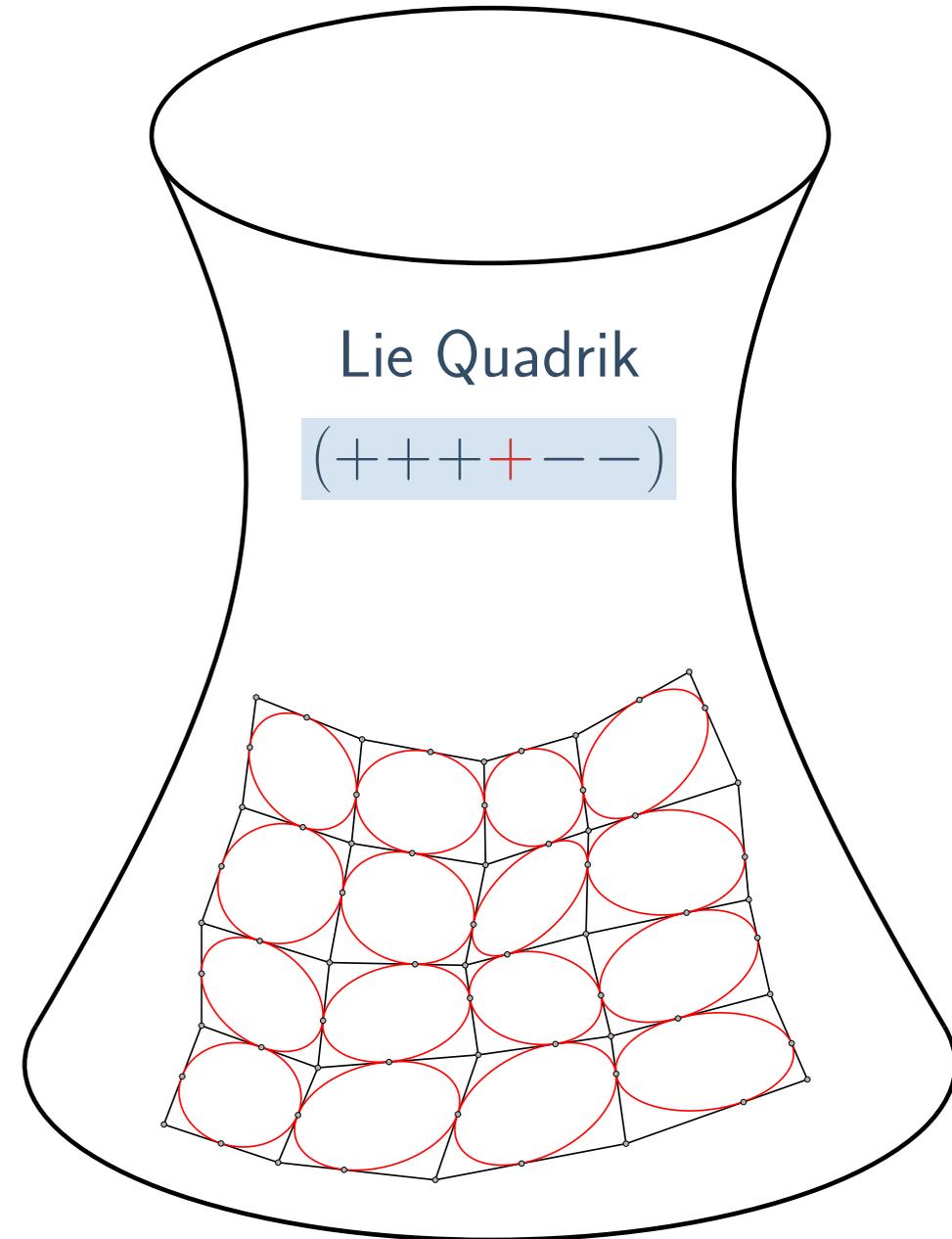
Koenigs Netz auf der Klein Quadrik



Koenigs Netz auf der ~~Klein~~ Lie Quadrik

Klein Quadrik: $(++++--)$

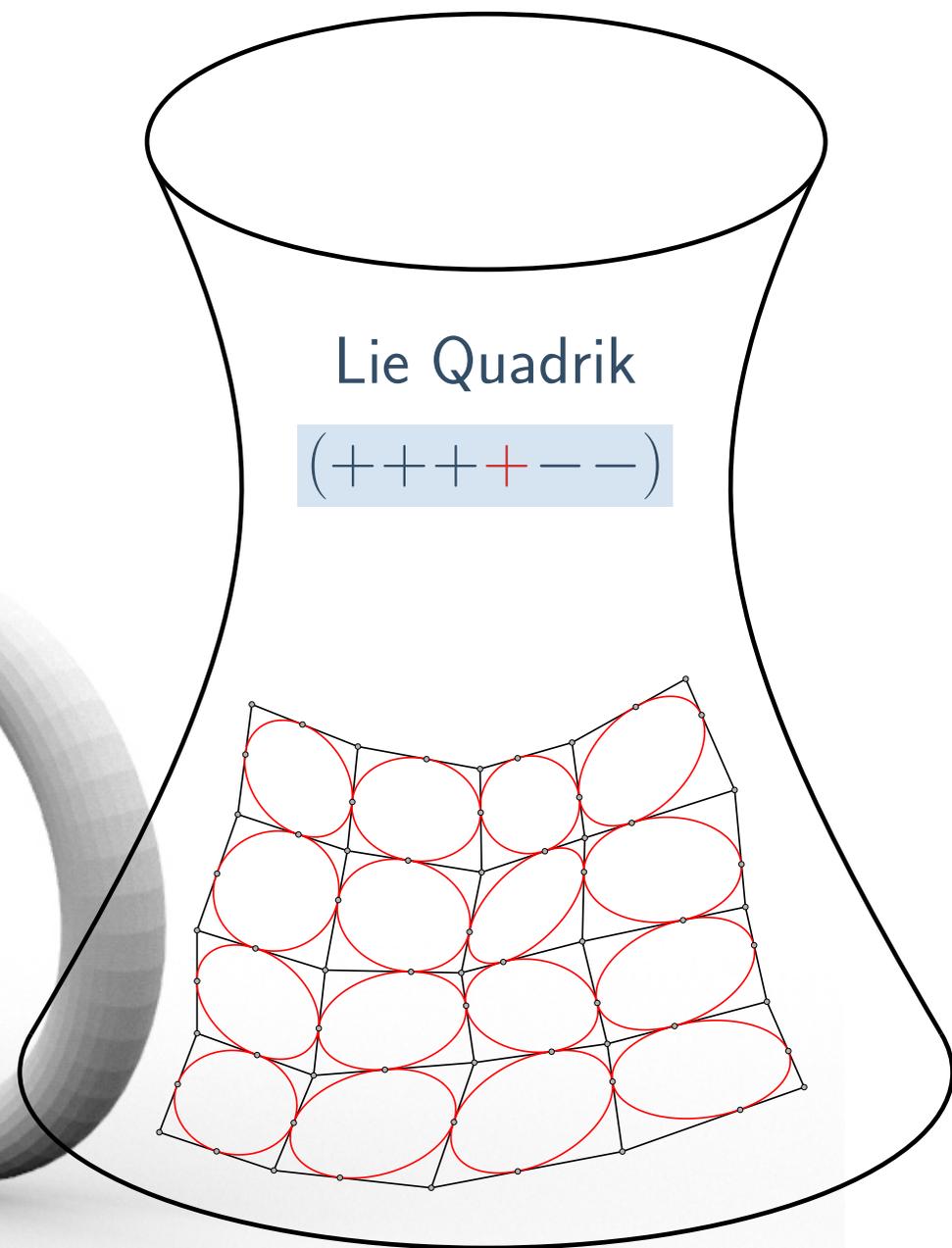
Lie Quadrik: $(+++++--)$



Koenigs Netz auf der ~~Klein~~ Lie Quadrik

Klein Quadrik: $(++++--)$

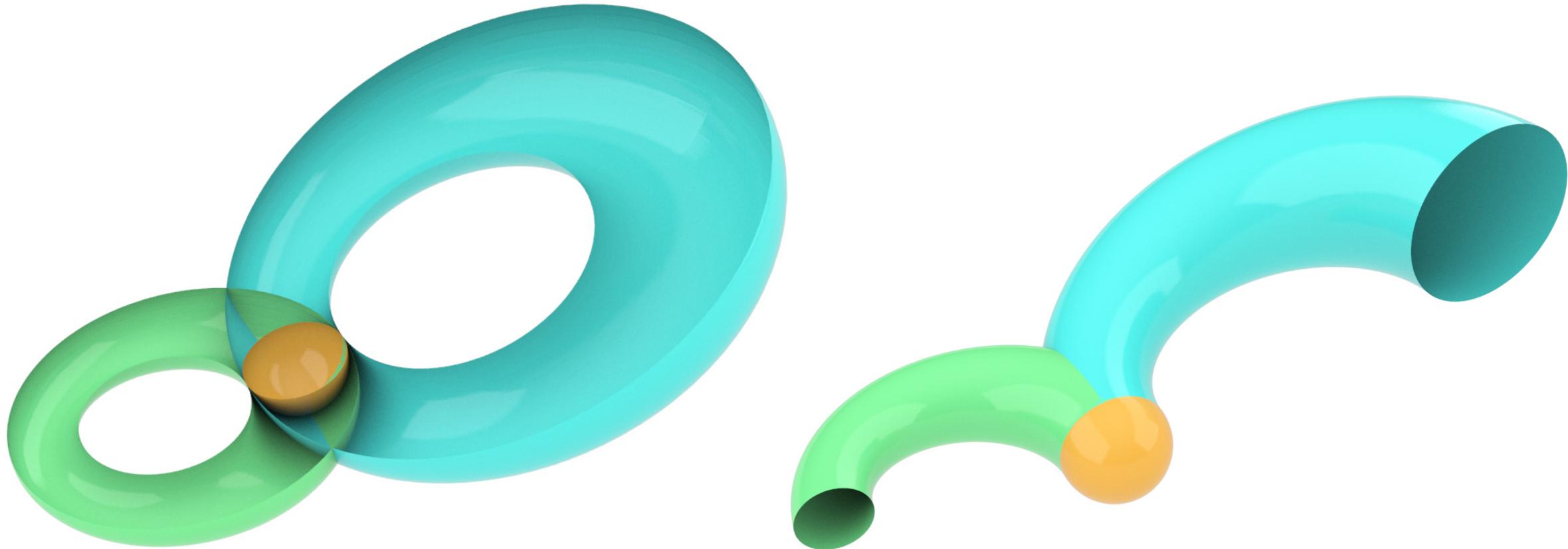
Lie Quadrik: $(+++++--)$



Koenigs Netz auf der ~~Klein~~ Lie Quadrik

Klein Quadrik: $(++++--)$

Lie Quadrik: $(+++++--)$



Tensegrity

Def. Netzwerk aus Seilen und Stäben im Gleichgewicht.

Tensegrity

Def. Netzwerk aus Seilen und Stäben im Gleichgewicht.

Eine Realisierung eines Netzwerks im \mathbb{R}^n ist ein **Tensegrity**, wenn

- $\exists \omega_{vw} \in \mathbb{R} \dots$ Spannungskoeffizienten

- $\sum_{w \in \text{star}(v)} \omega_{vw}(v - w) = 0 \quad \forall \text{ innere Knoten } v$

Tensegrity

Begriff stammt von Richard Buckminster Fuller

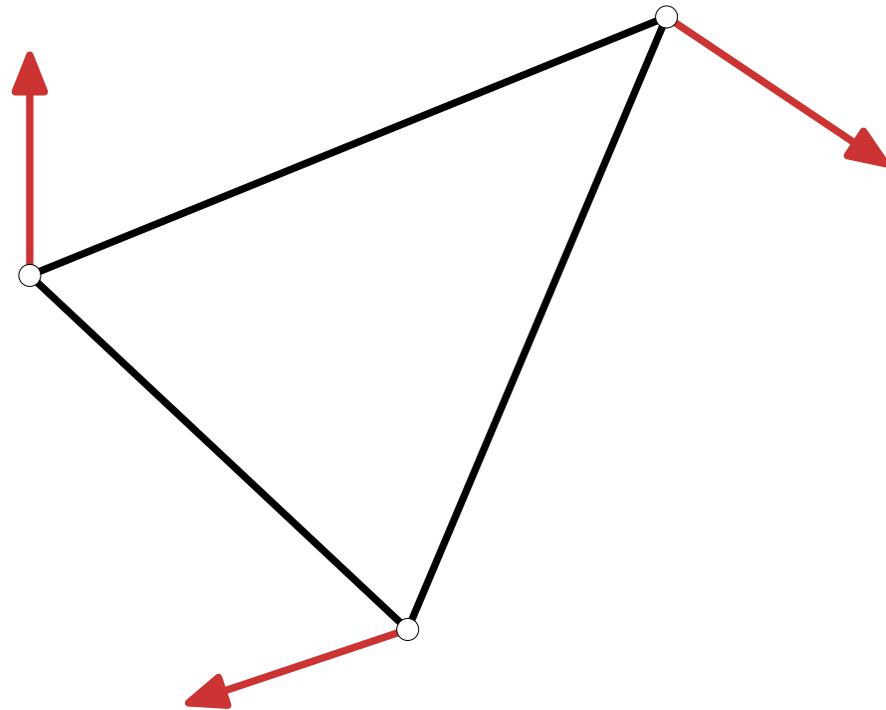
Def. Netzwerk aus Seilen und Stäben im Gleichgewicht.

Eine Realisierung eines Netzwerks im \mathbb{R}^n ist ein **Tensegrity**, wenn

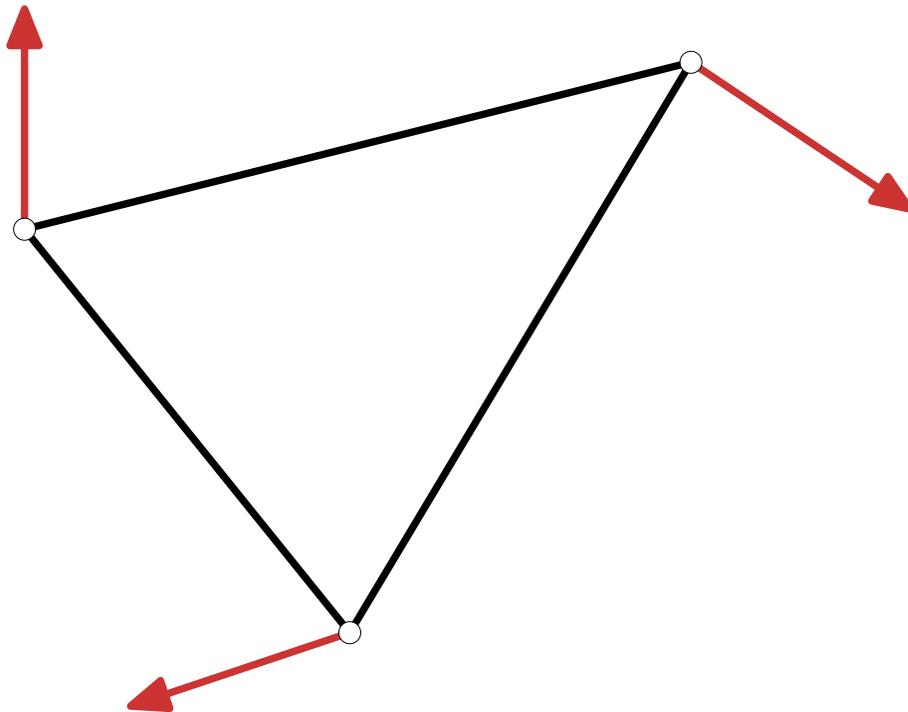
- $\exists \omega_{vw} \in \mathbb{R} \dots$ Spannungskoeffizienten

- $\sum_{w \in \text{star}(v)} \omega_{vw}(v - w) = 0 \quad \forall \text{ innere Knoten } v$

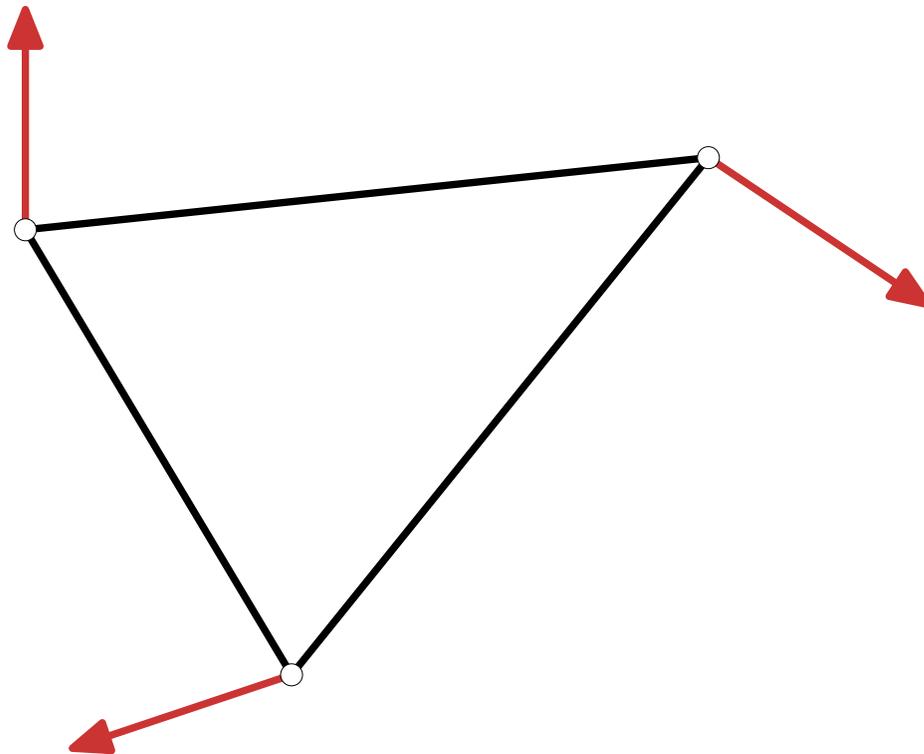
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



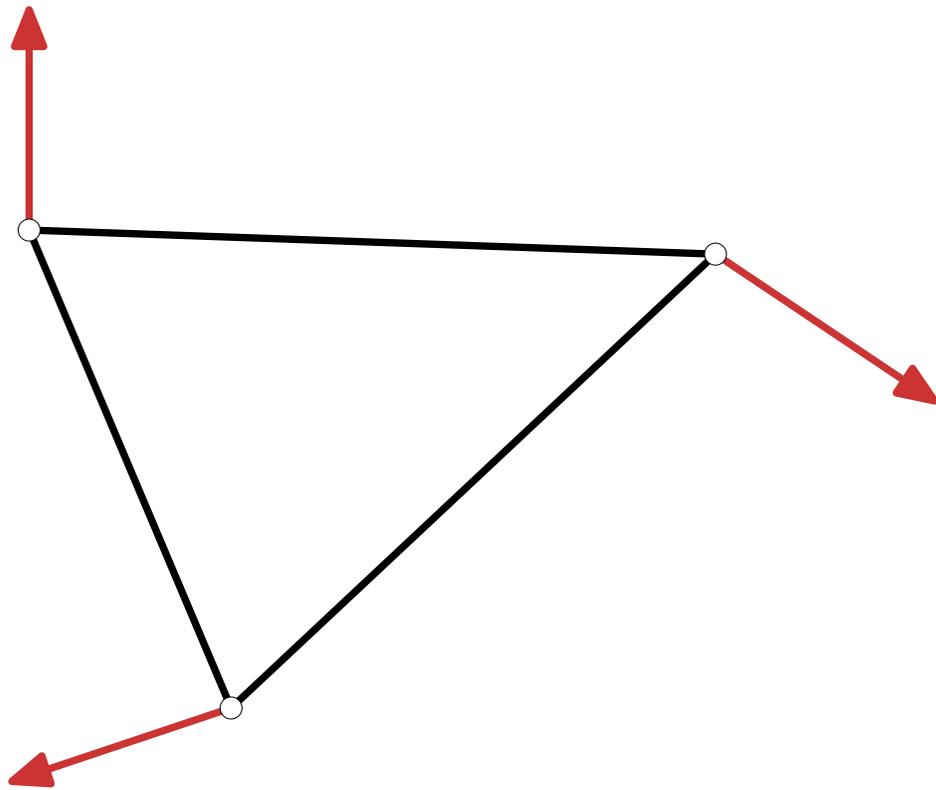
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



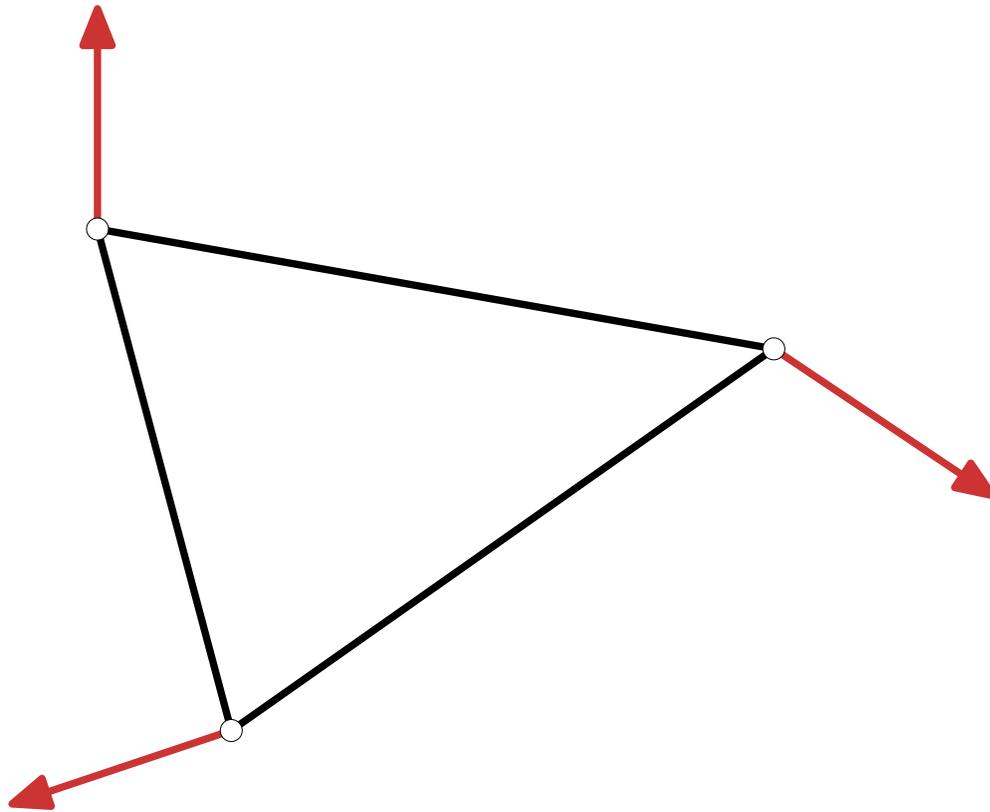
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



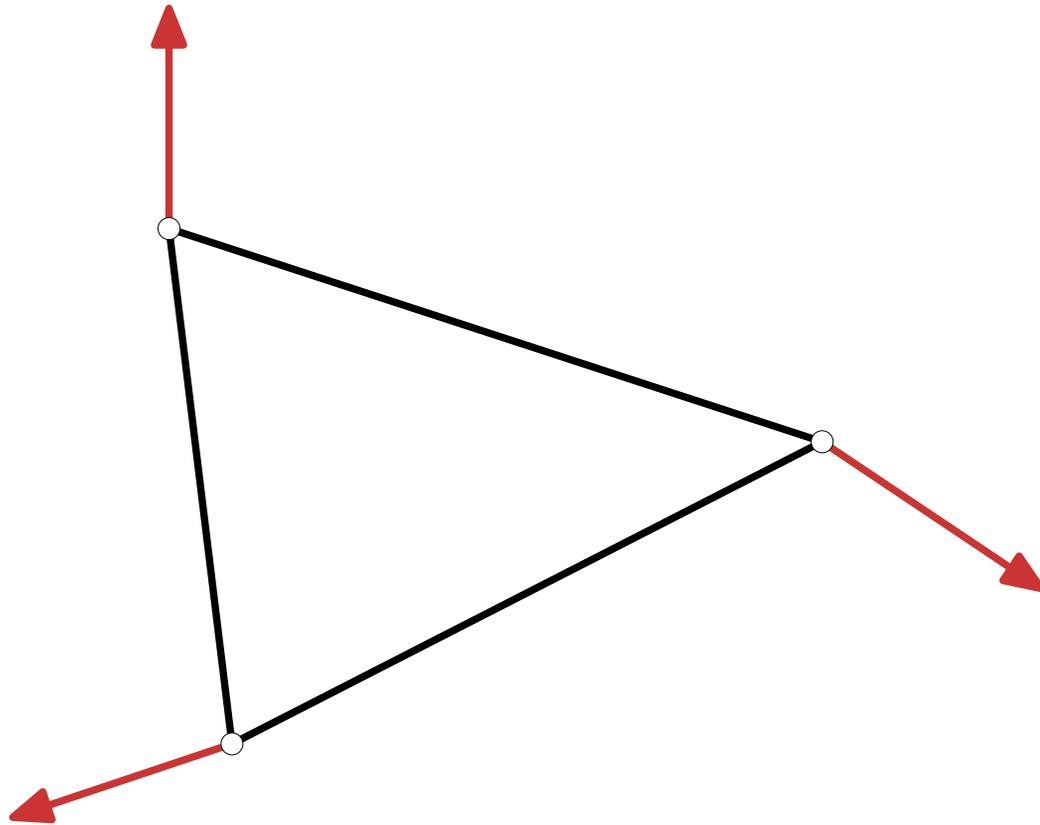
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



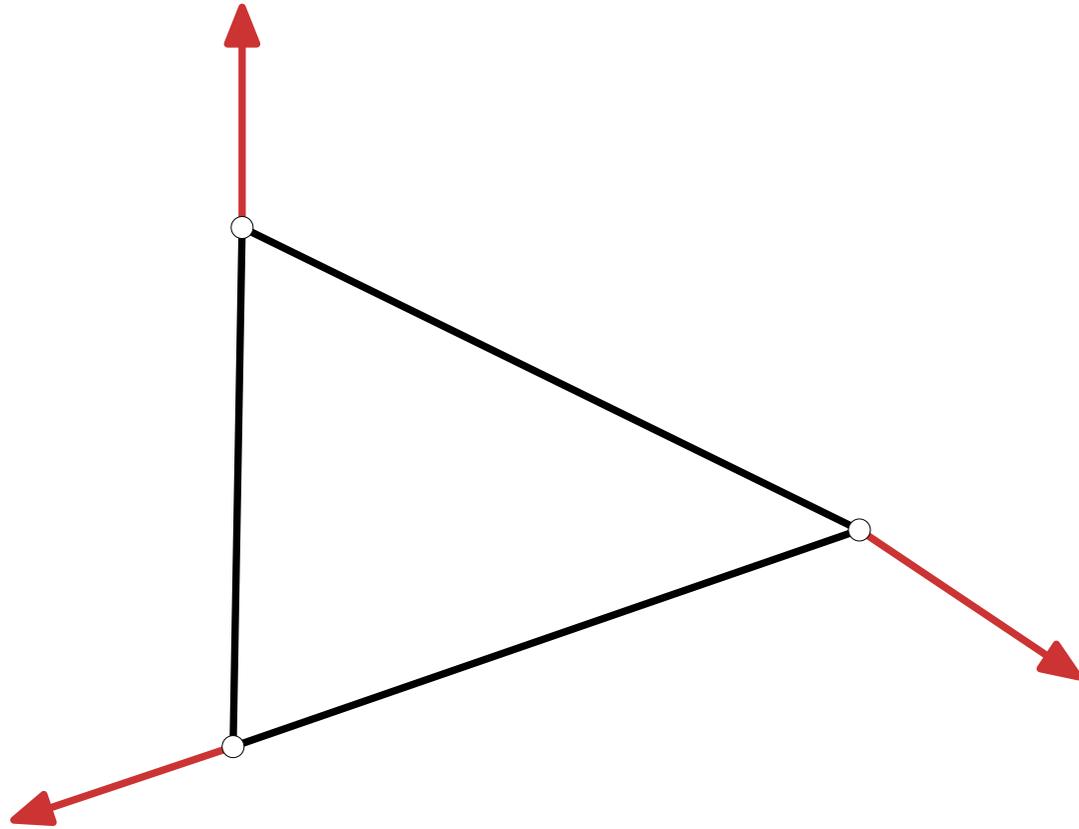
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



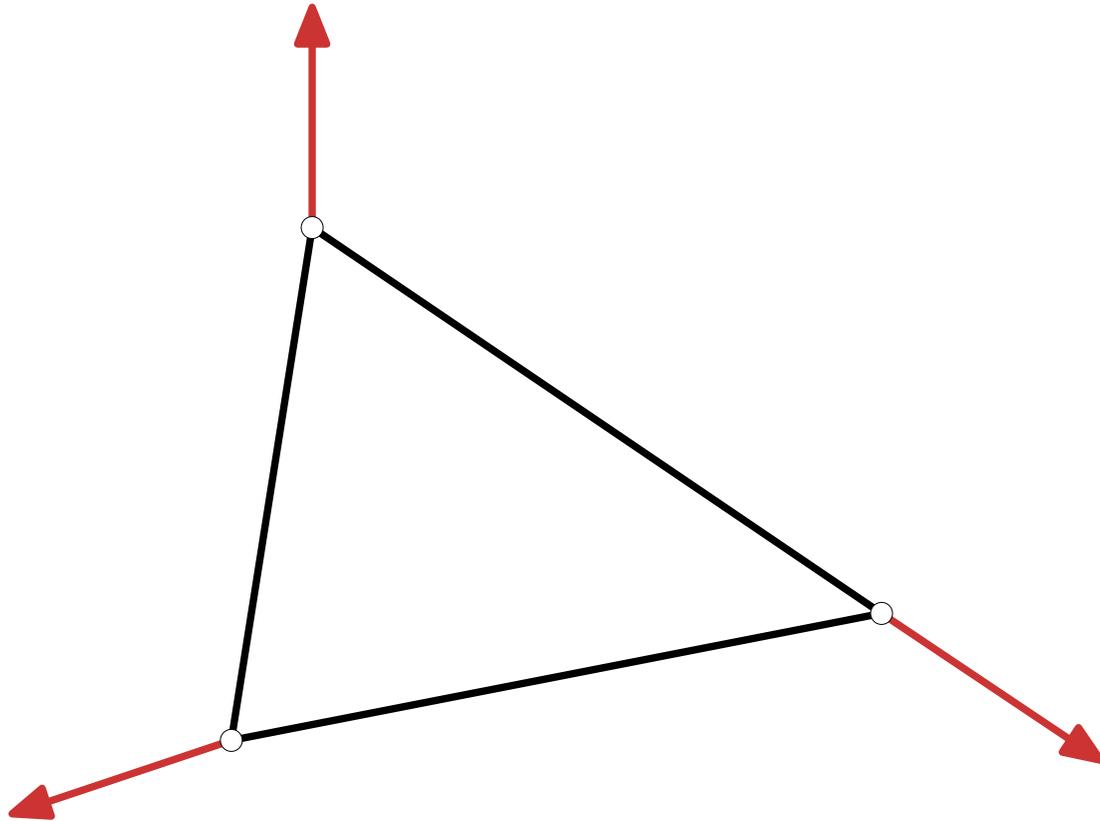
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



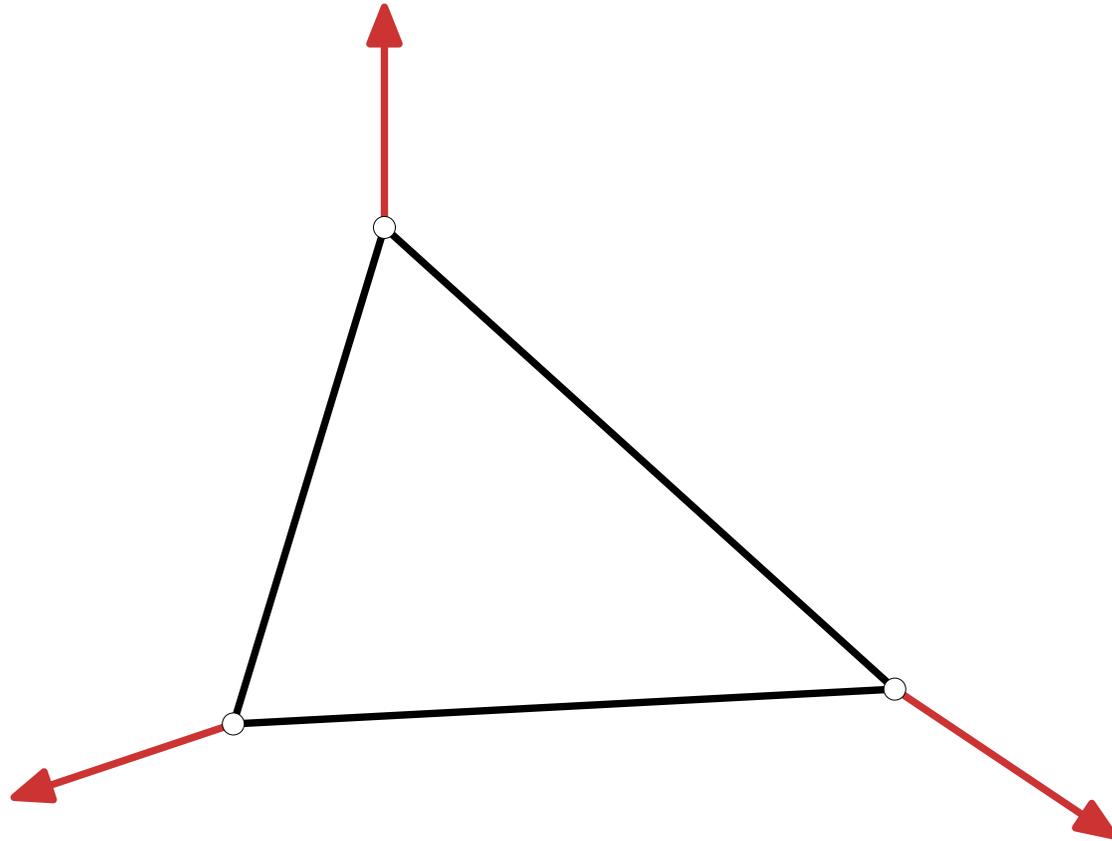
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



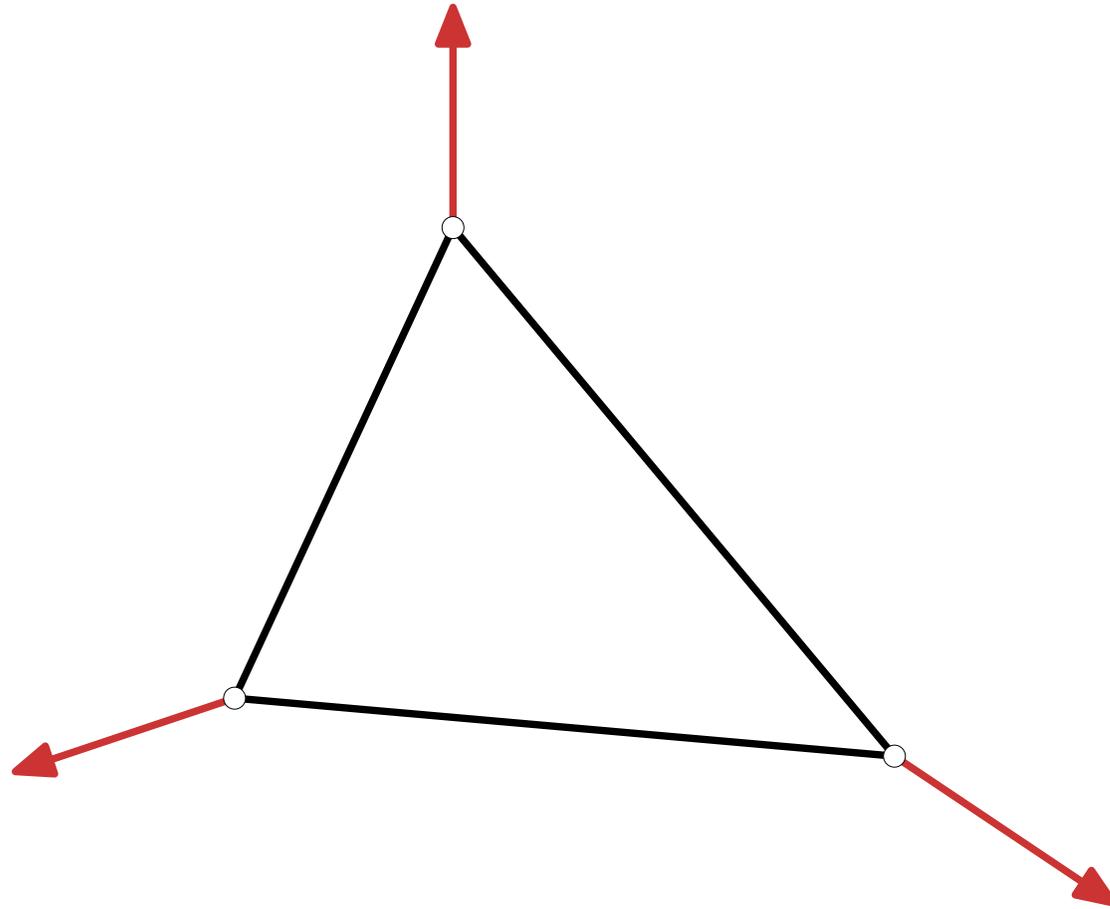
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



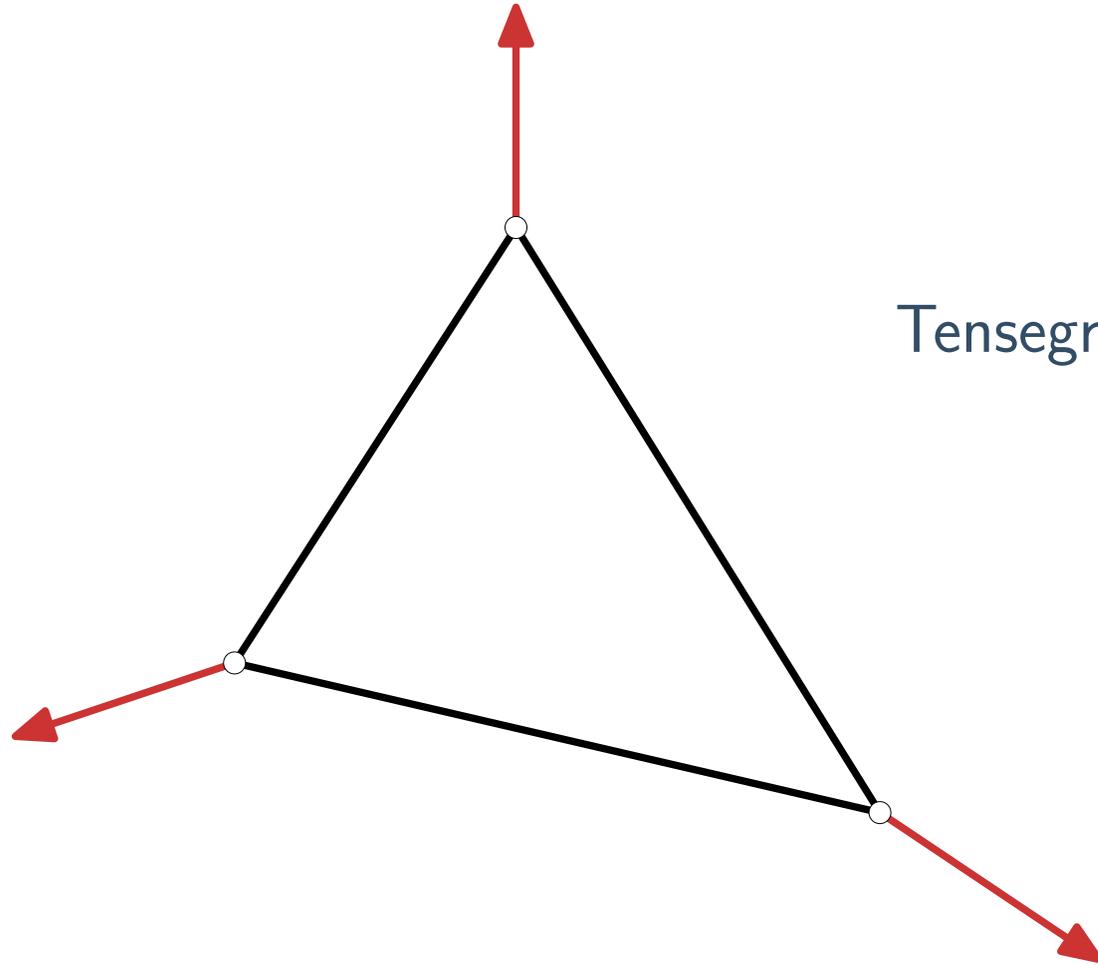
Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!



Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!

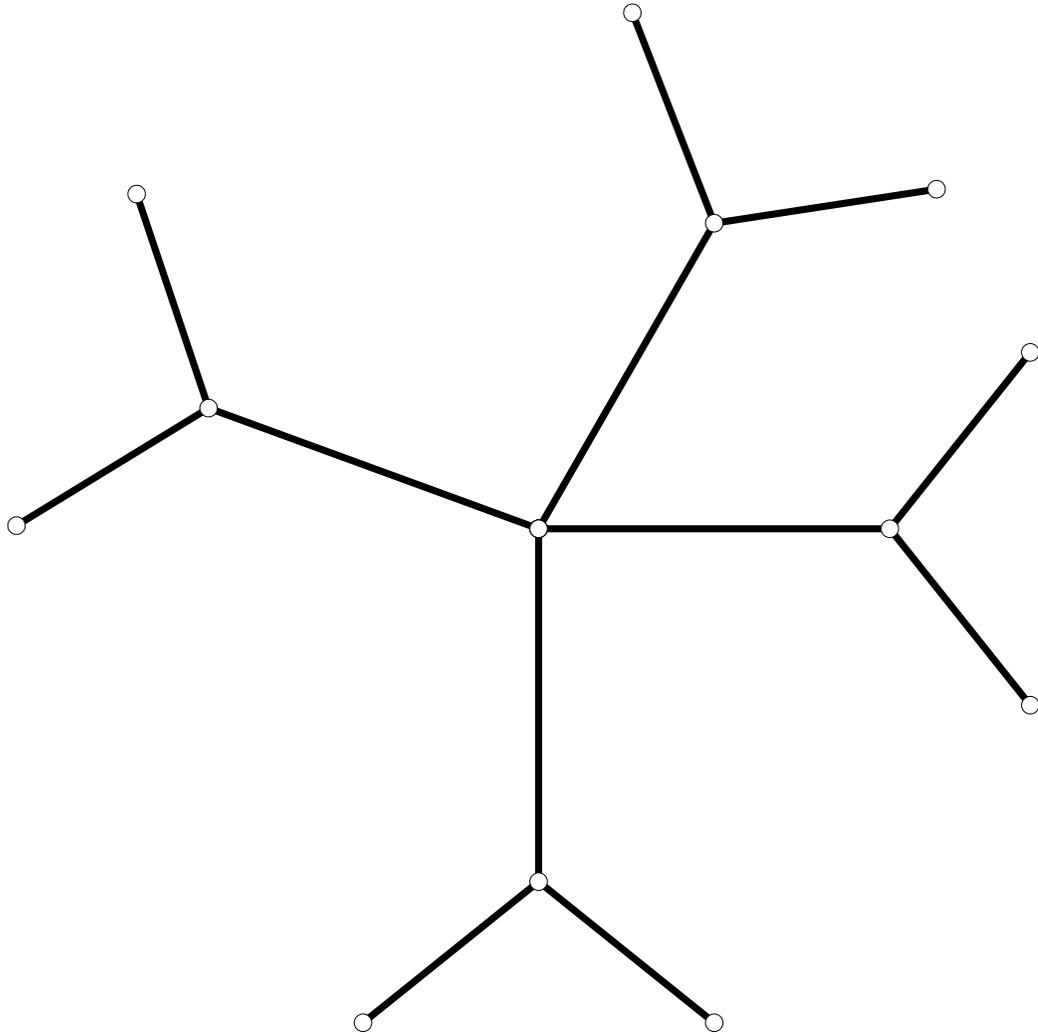


Nicht jede Realisierung eines Netzwerks ist ein Tensegrity!

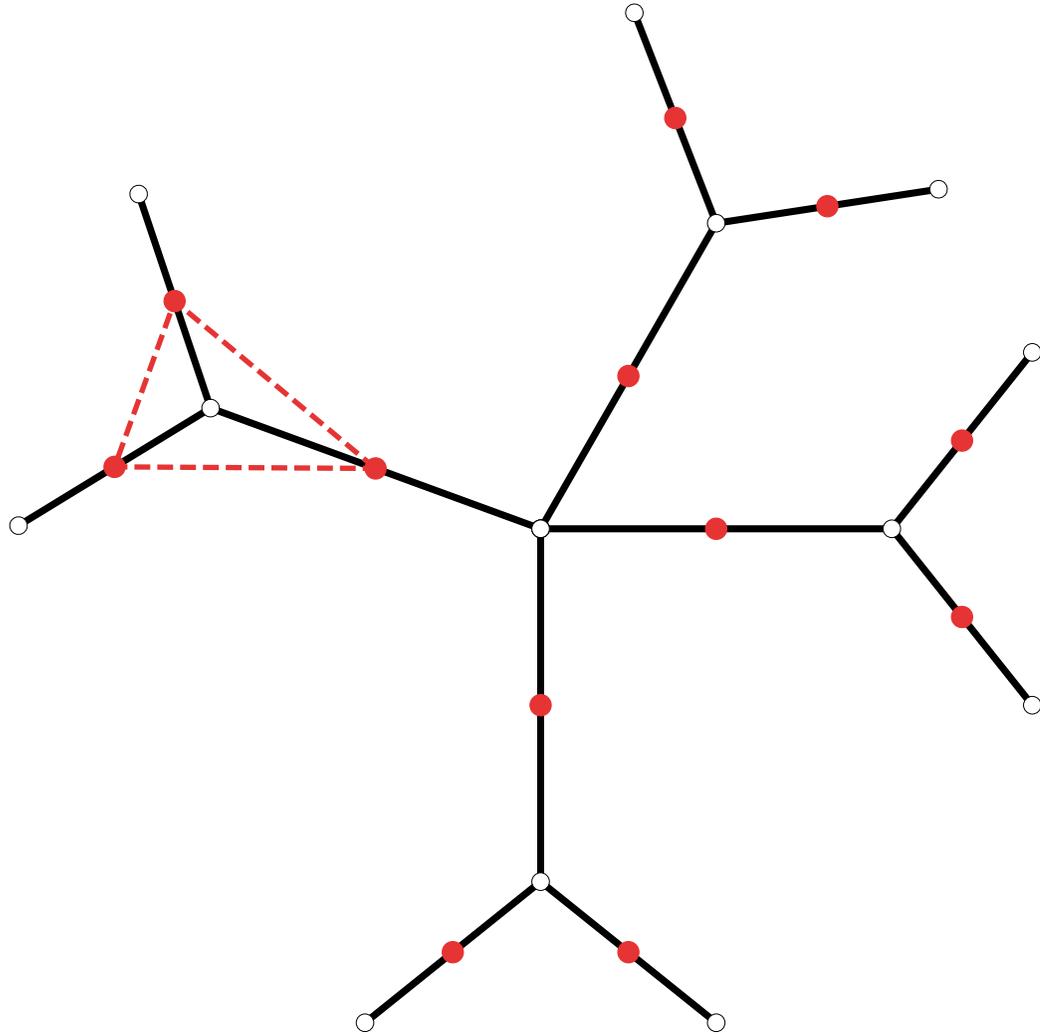


Tensegrity

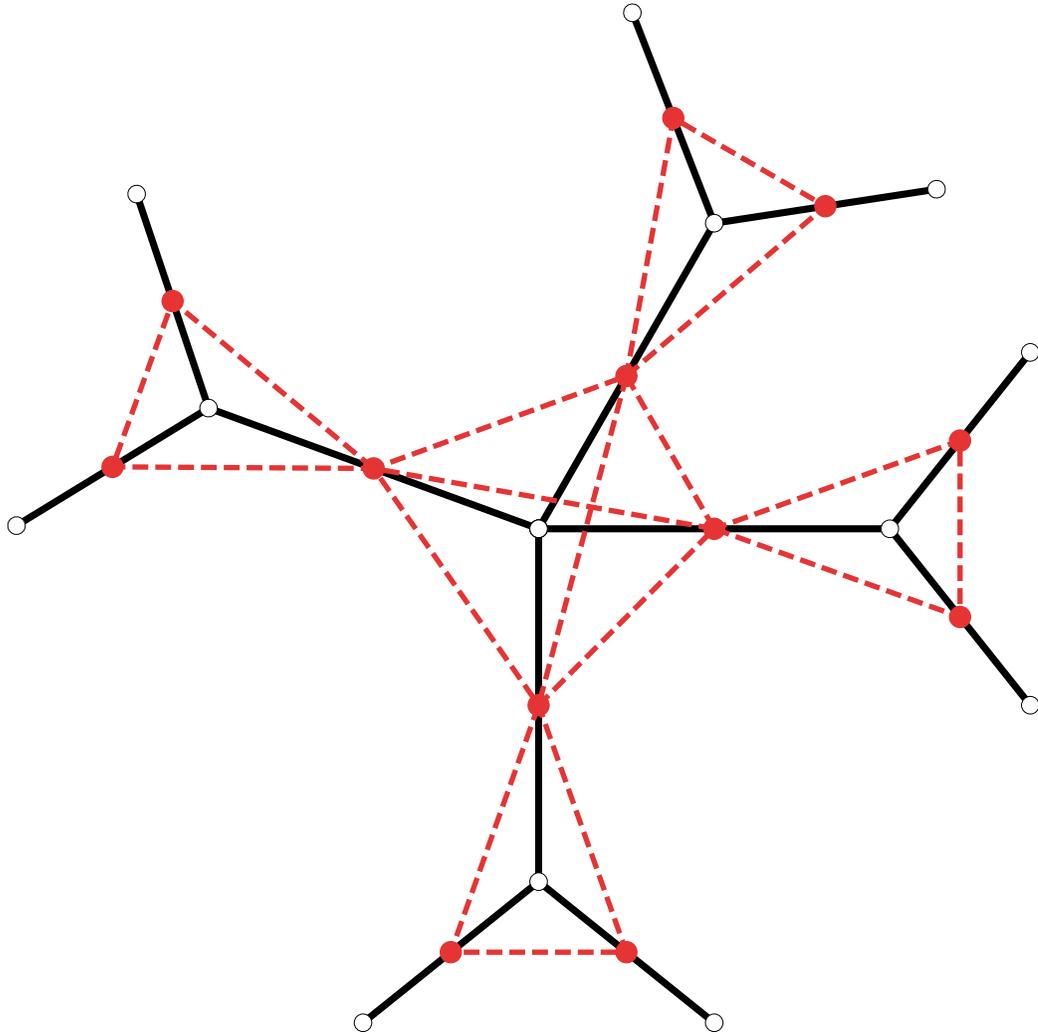
Kantengraph



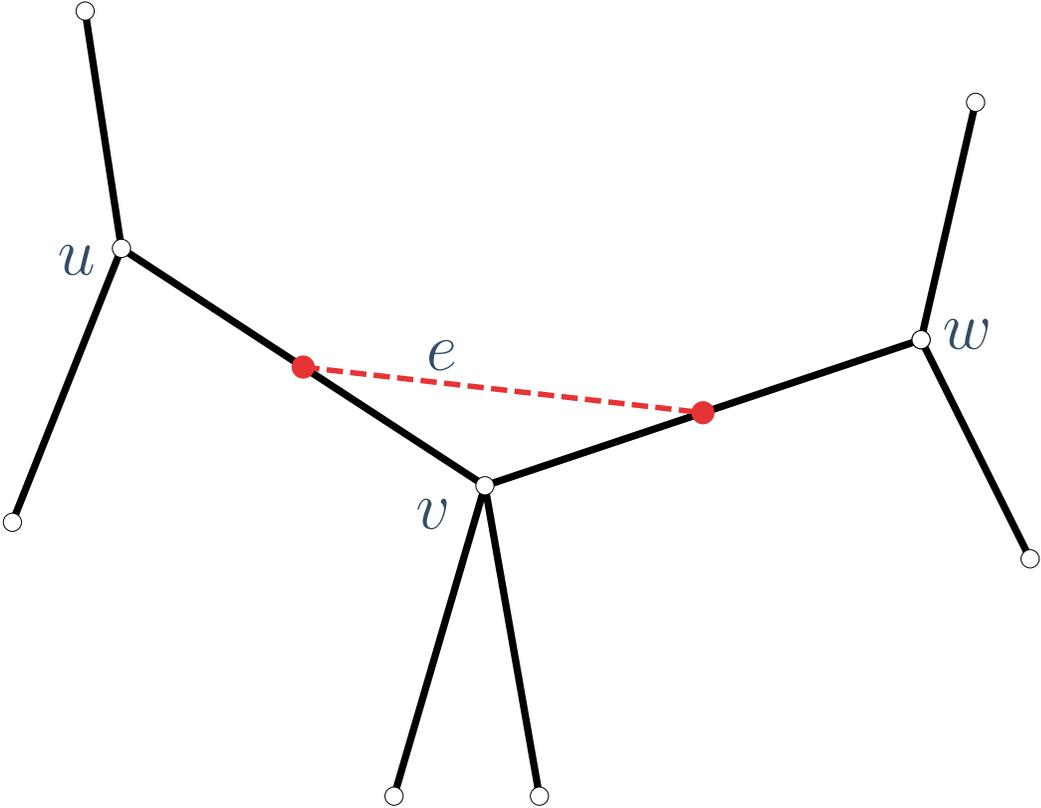
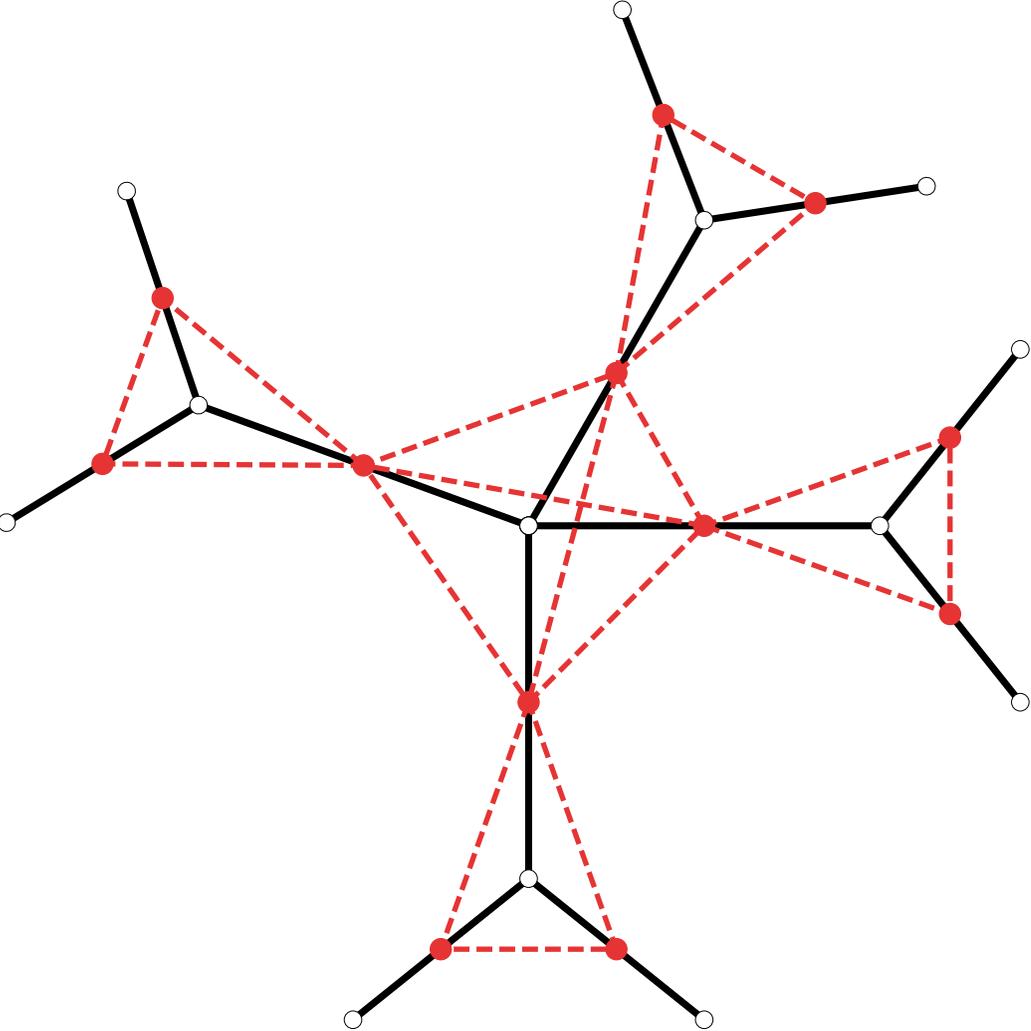
Kantengraph



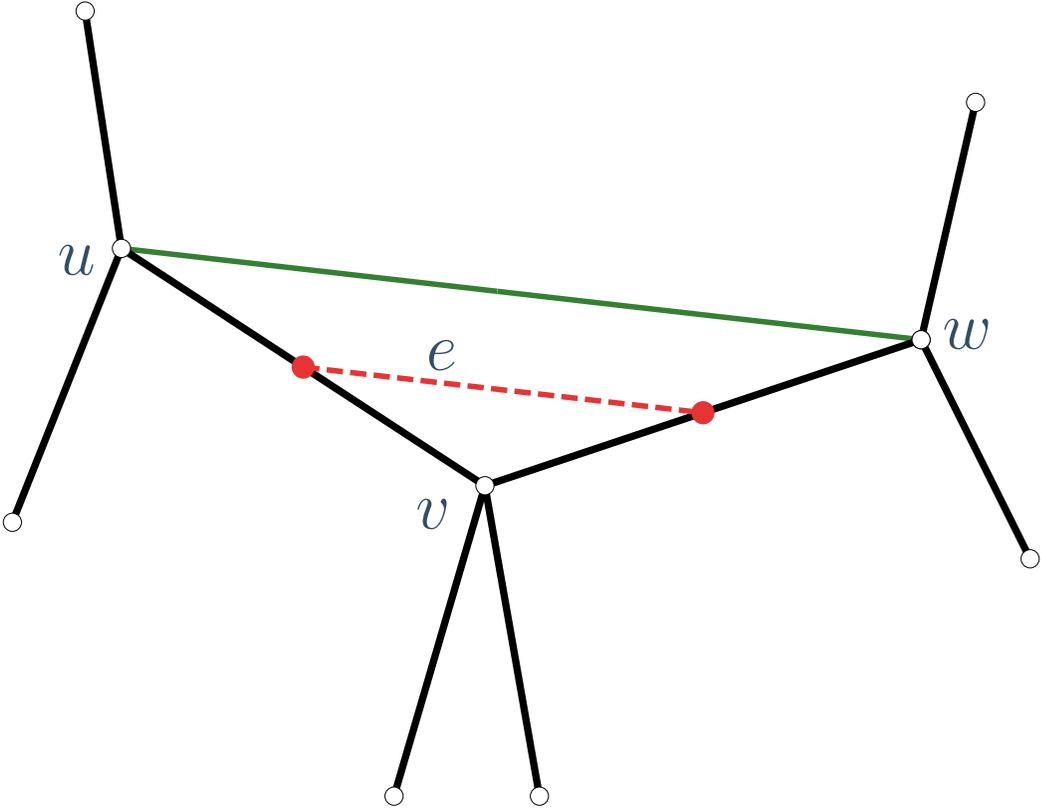
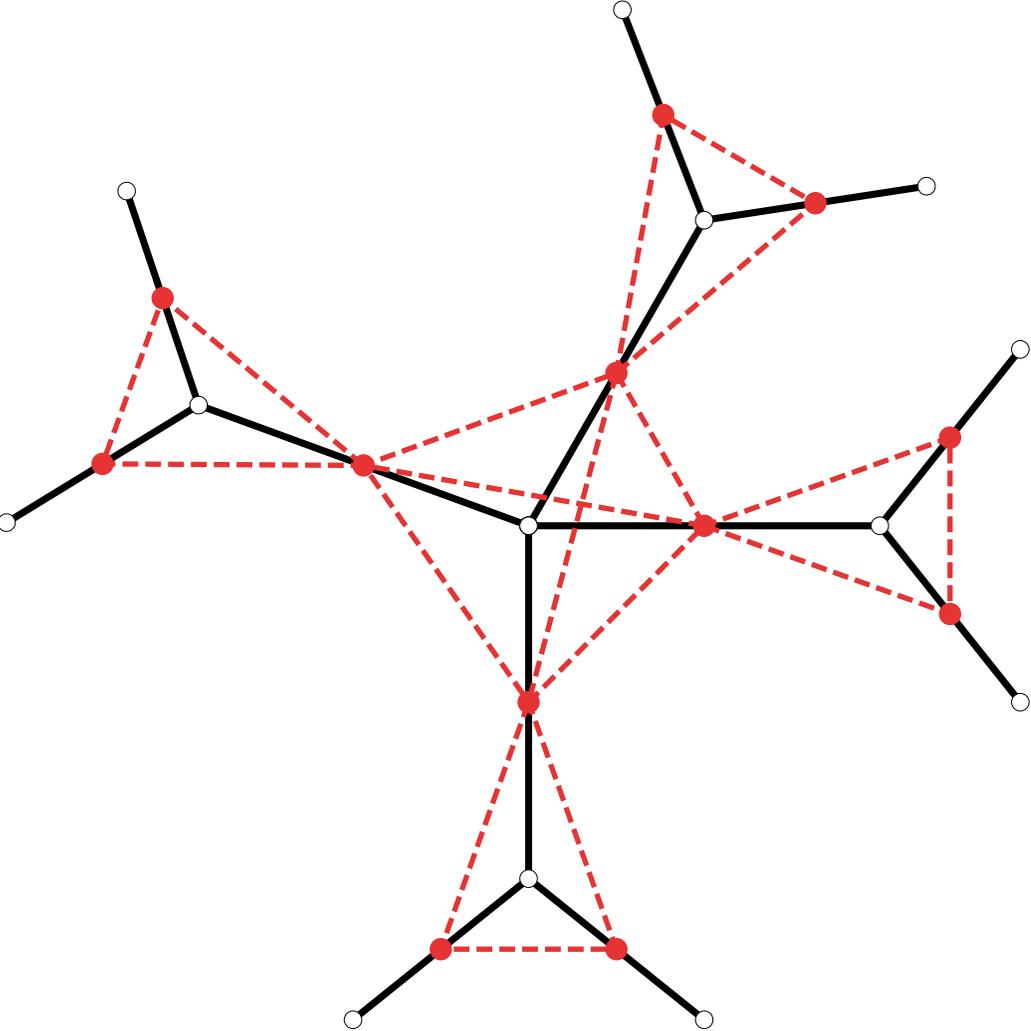
Kantengraph



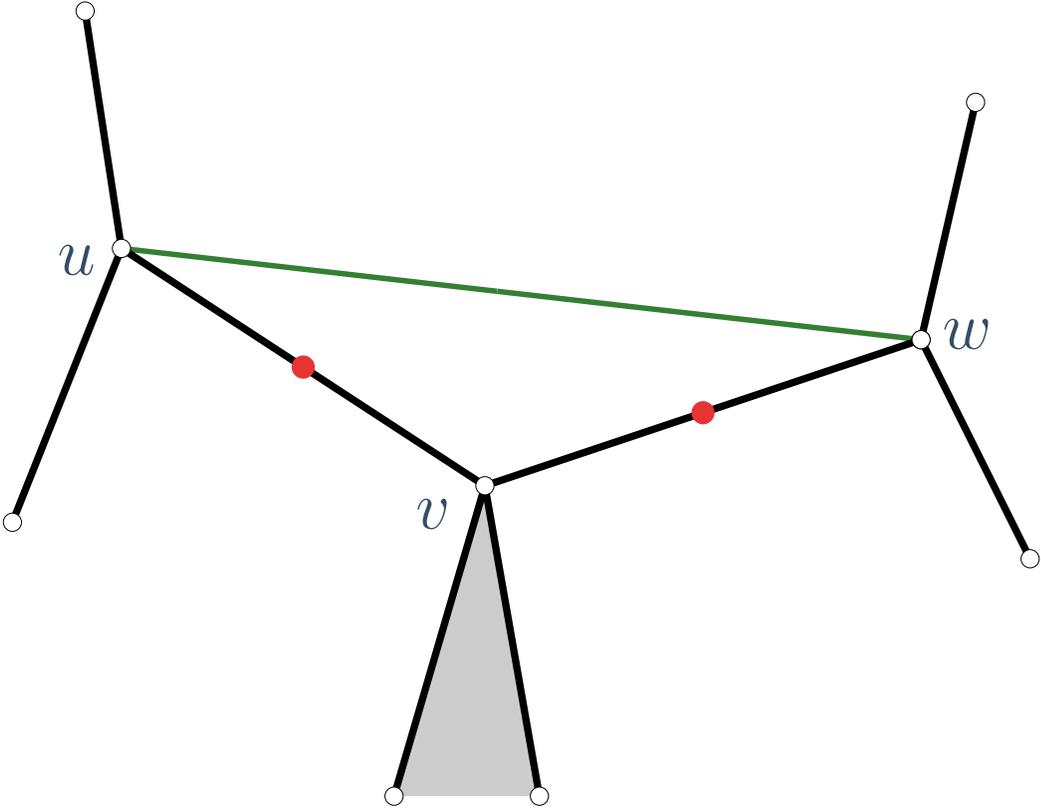
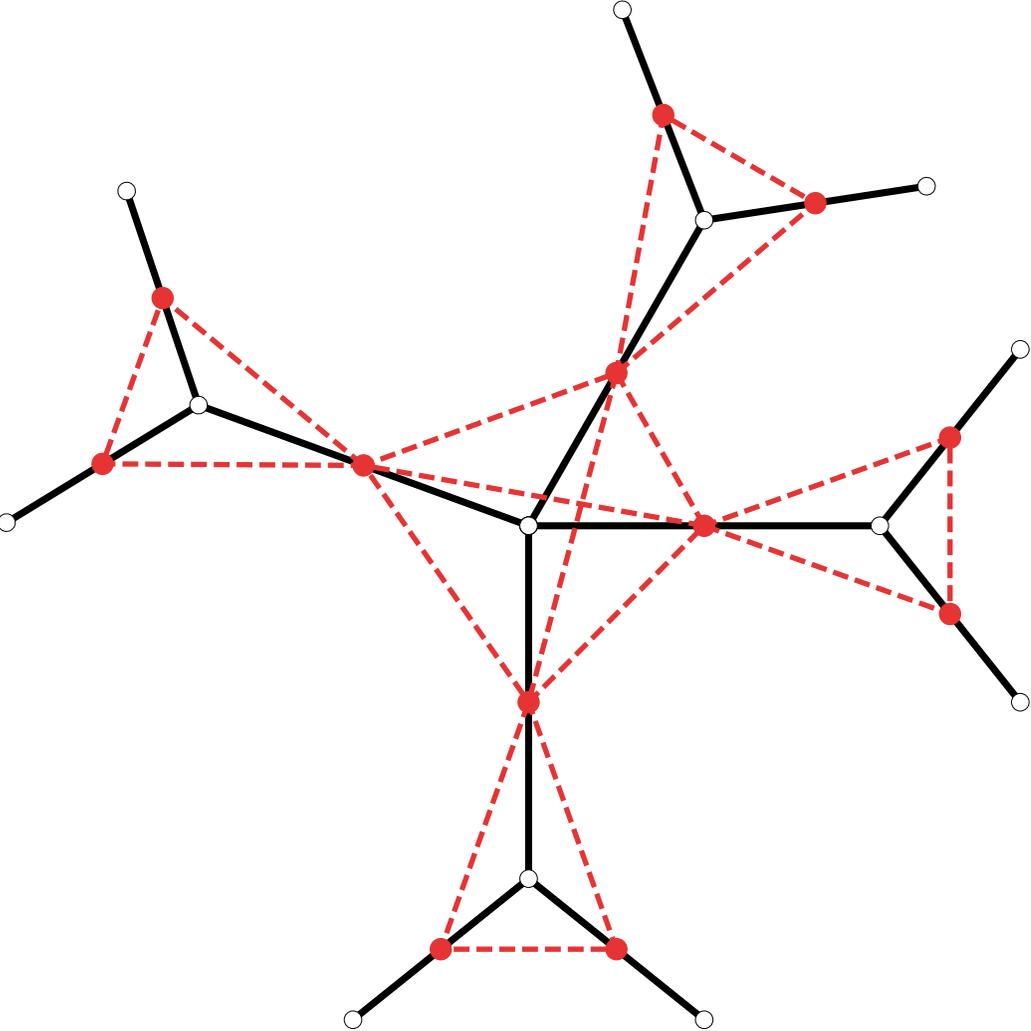
Kantengraph



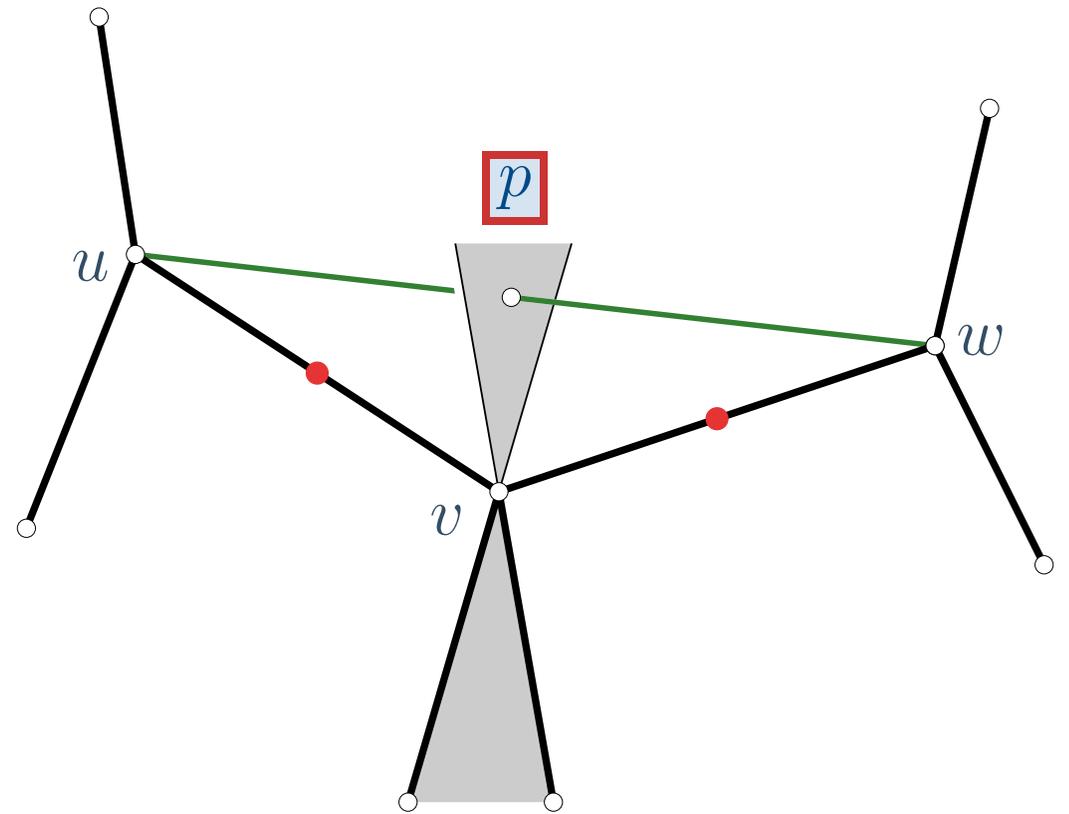
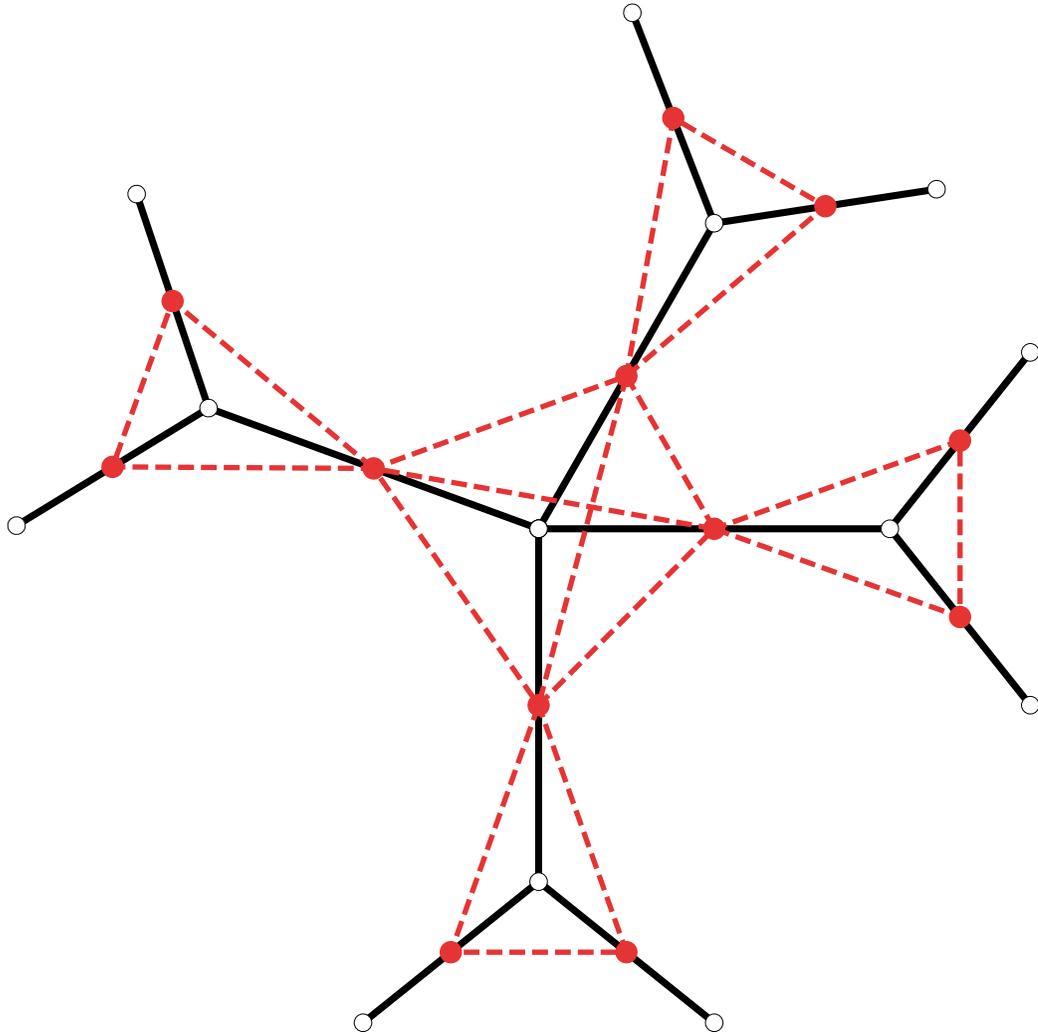
Kantengraph



Kantengraph



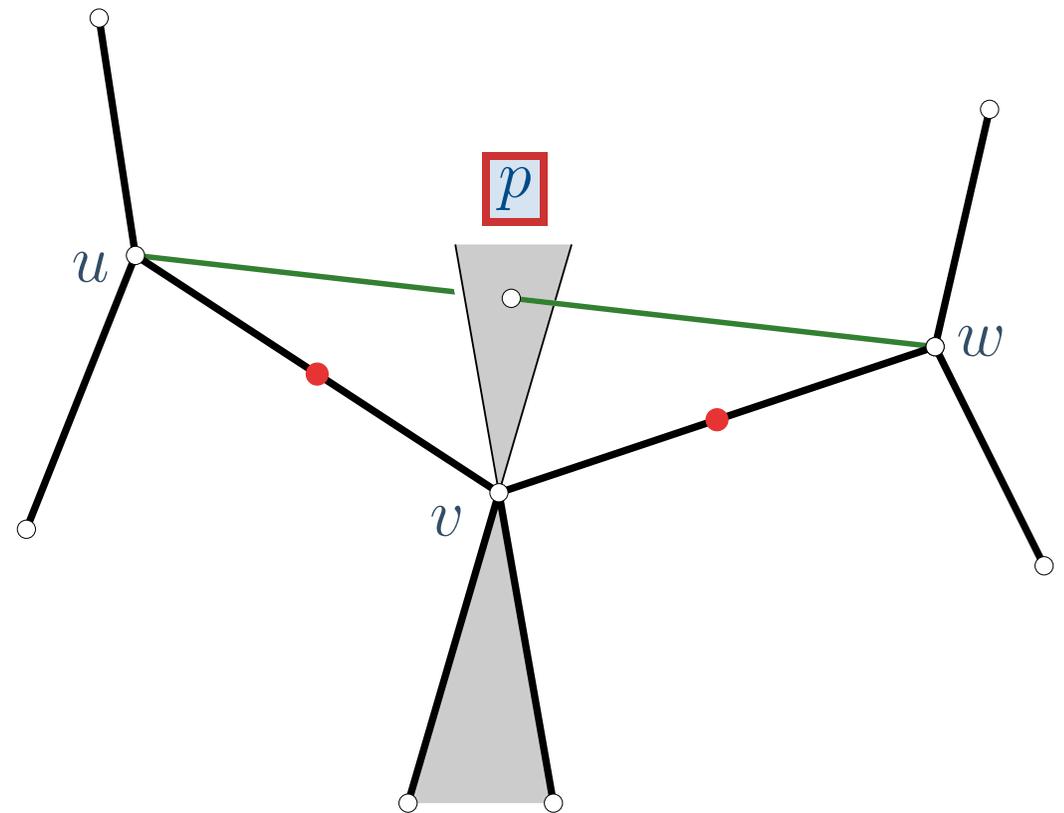
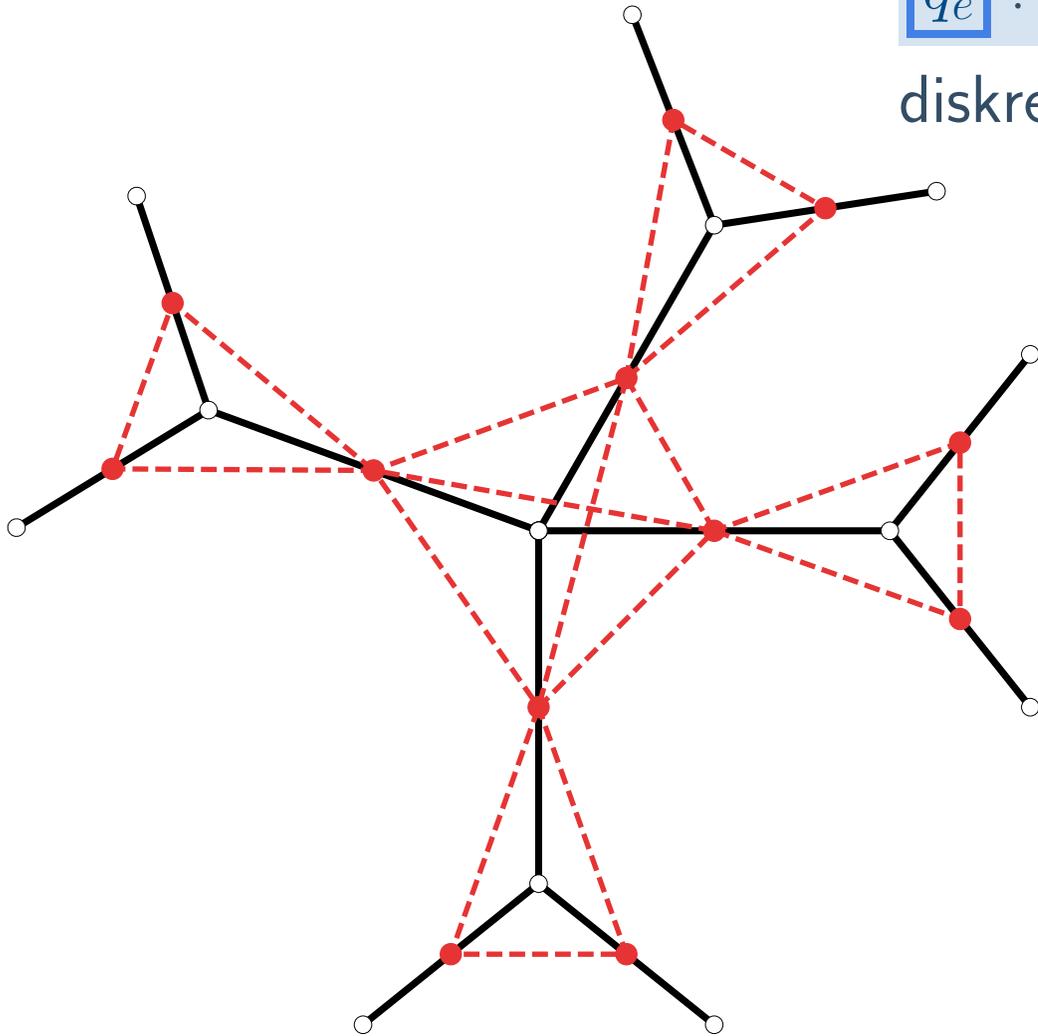
Kantengraph



Kantengraph

$$q_e := (u - p) : (w - p)$$

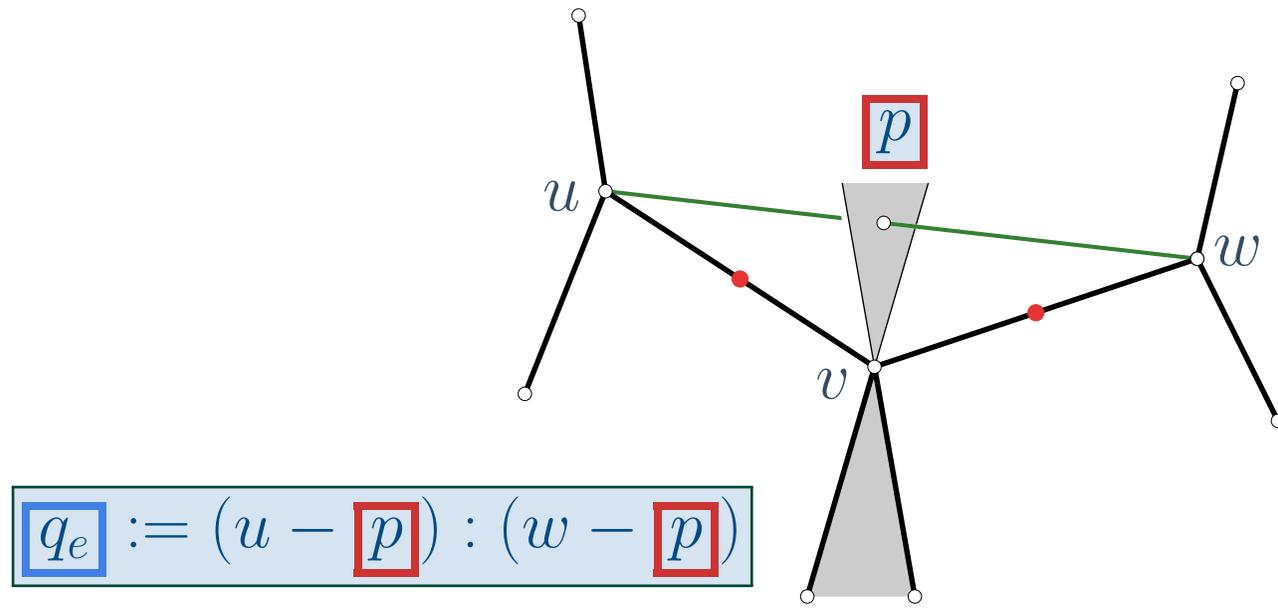
diskrete multiplikative 1-Form auf dem Kantengraph



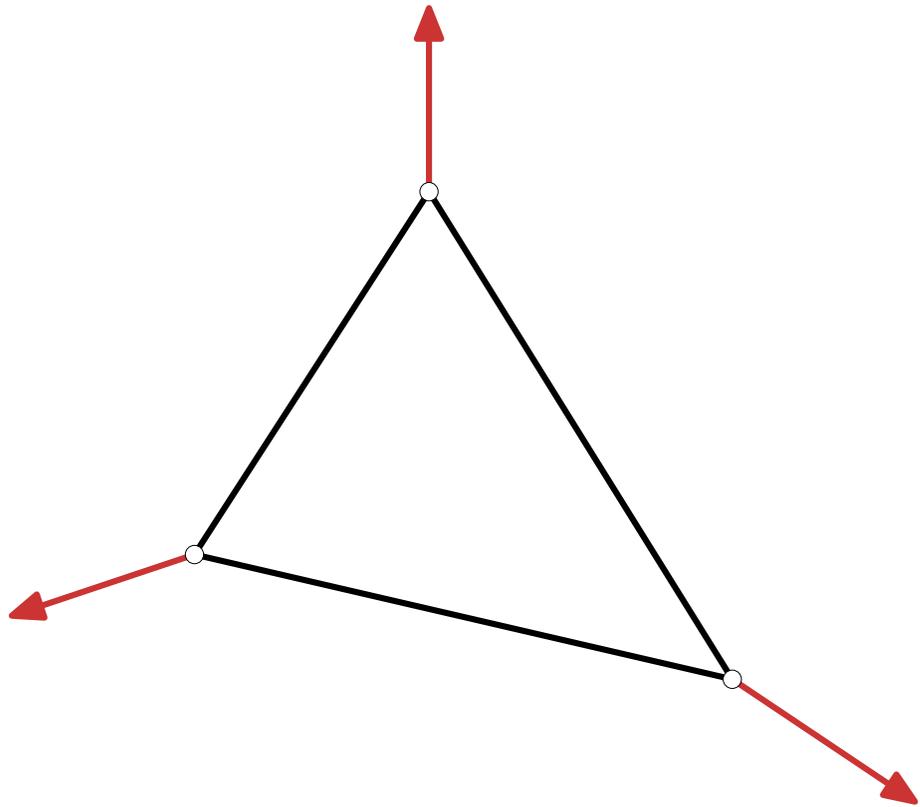
Charakterisierung von Tensegrities

- Satz:**
- G ... Realisierung eines Graphen in \mathbb{R}^{n-1}
 - $\text{Valenz}(\text{star}(v)) \leq n$

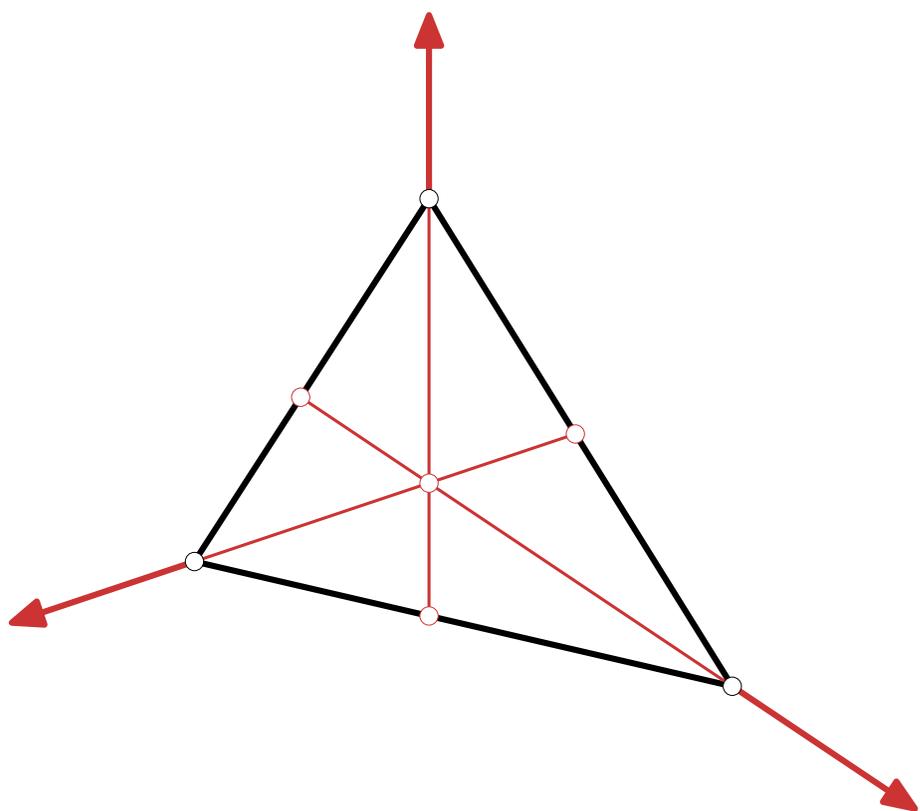
Dann ist G ein Tensegrity \Leftrightarrow multiplikative 1-Form q_e auf dem Kantengraphen ist exakt.



Beispiele

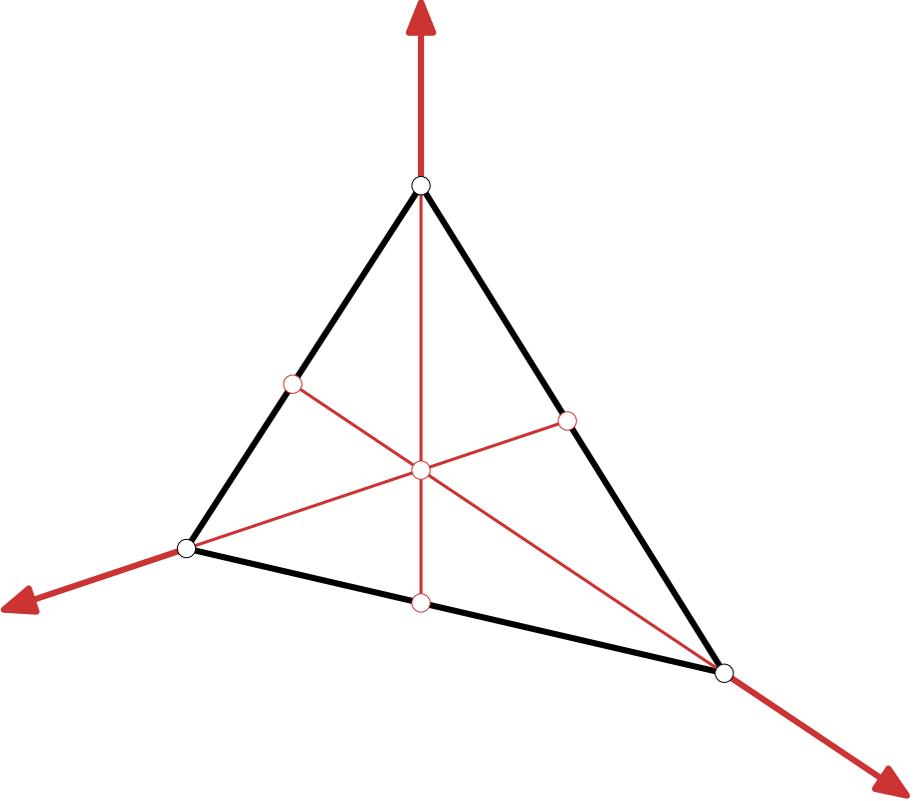


Beispiele

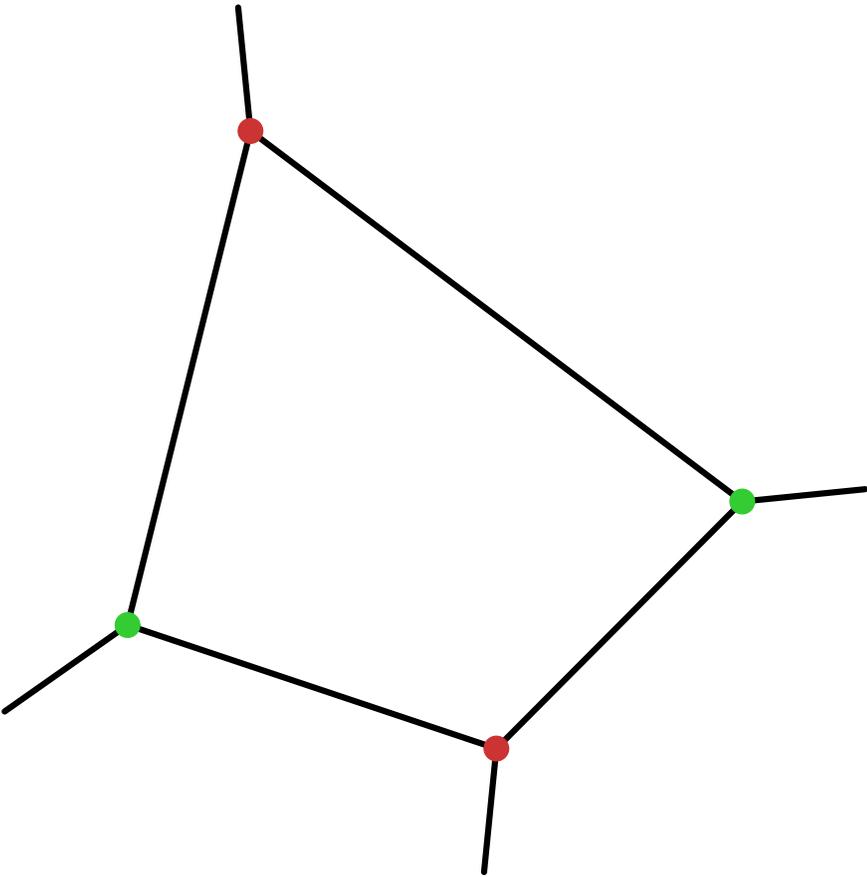


Satz von Ceva

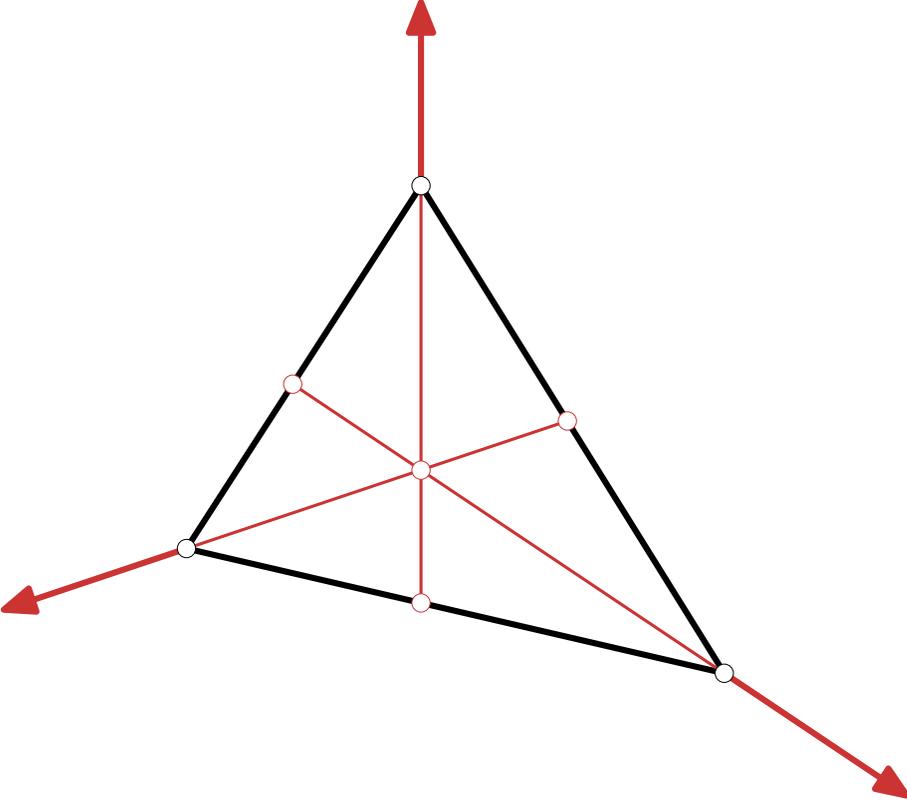
Beispiele



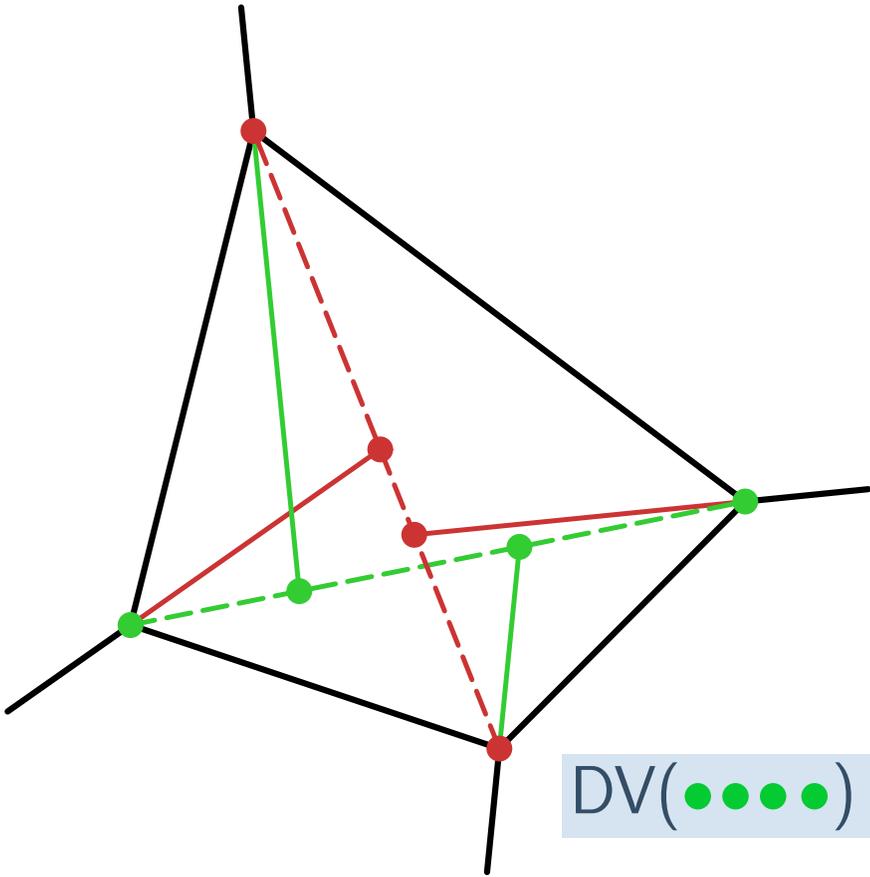
Satz von Ceva



Beispiele

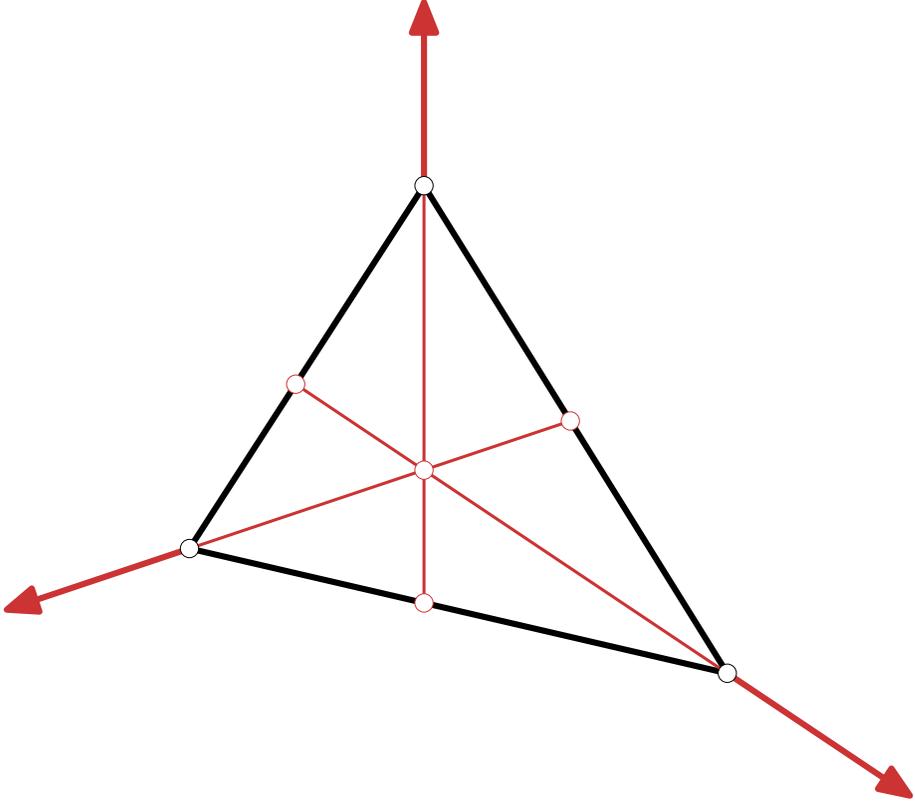
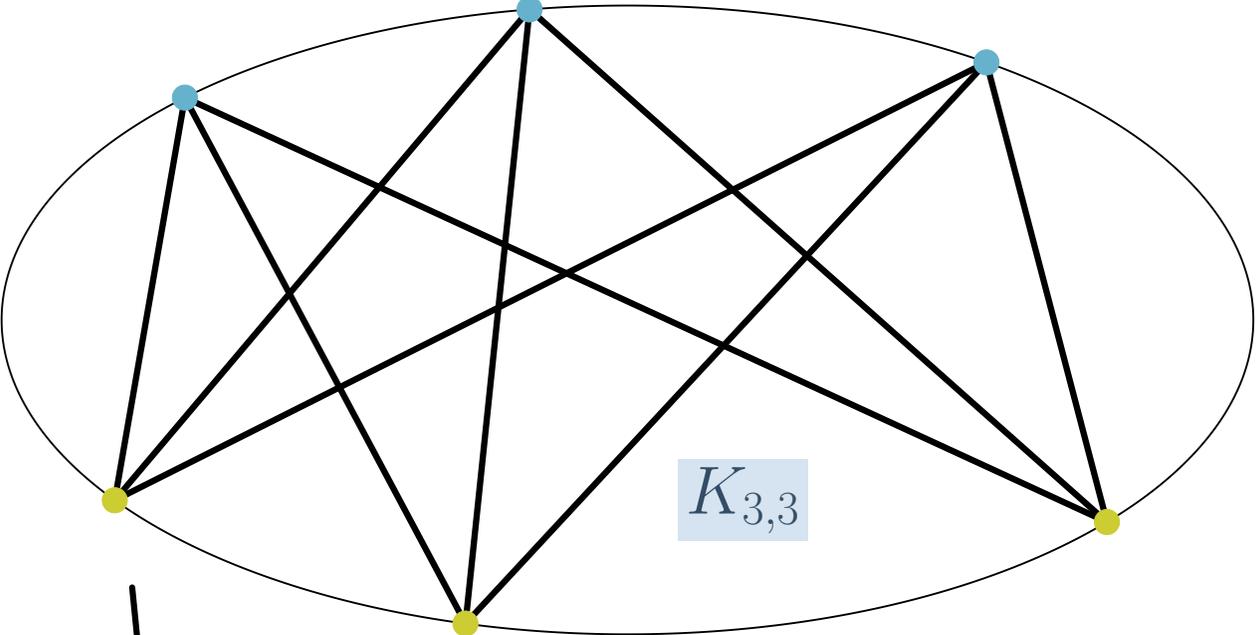


Satz von Ceva

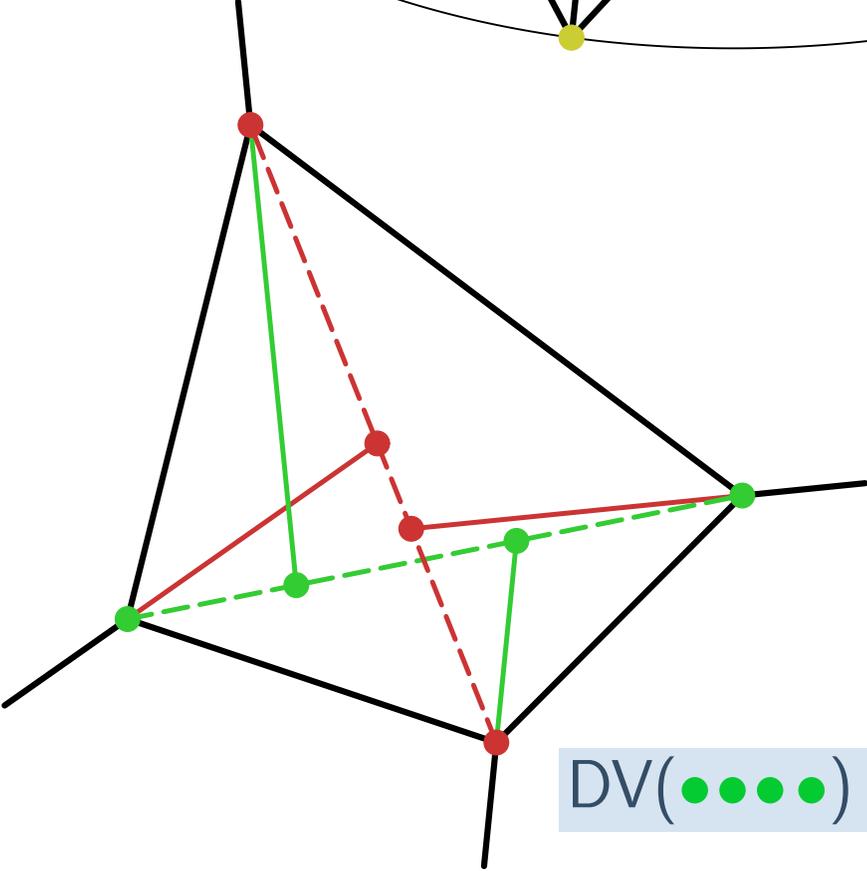


$$DV(\bullet\bullet\bullet\bullet) = DV(\bullet\bullet\bullet\bullet)$$

Beispiele



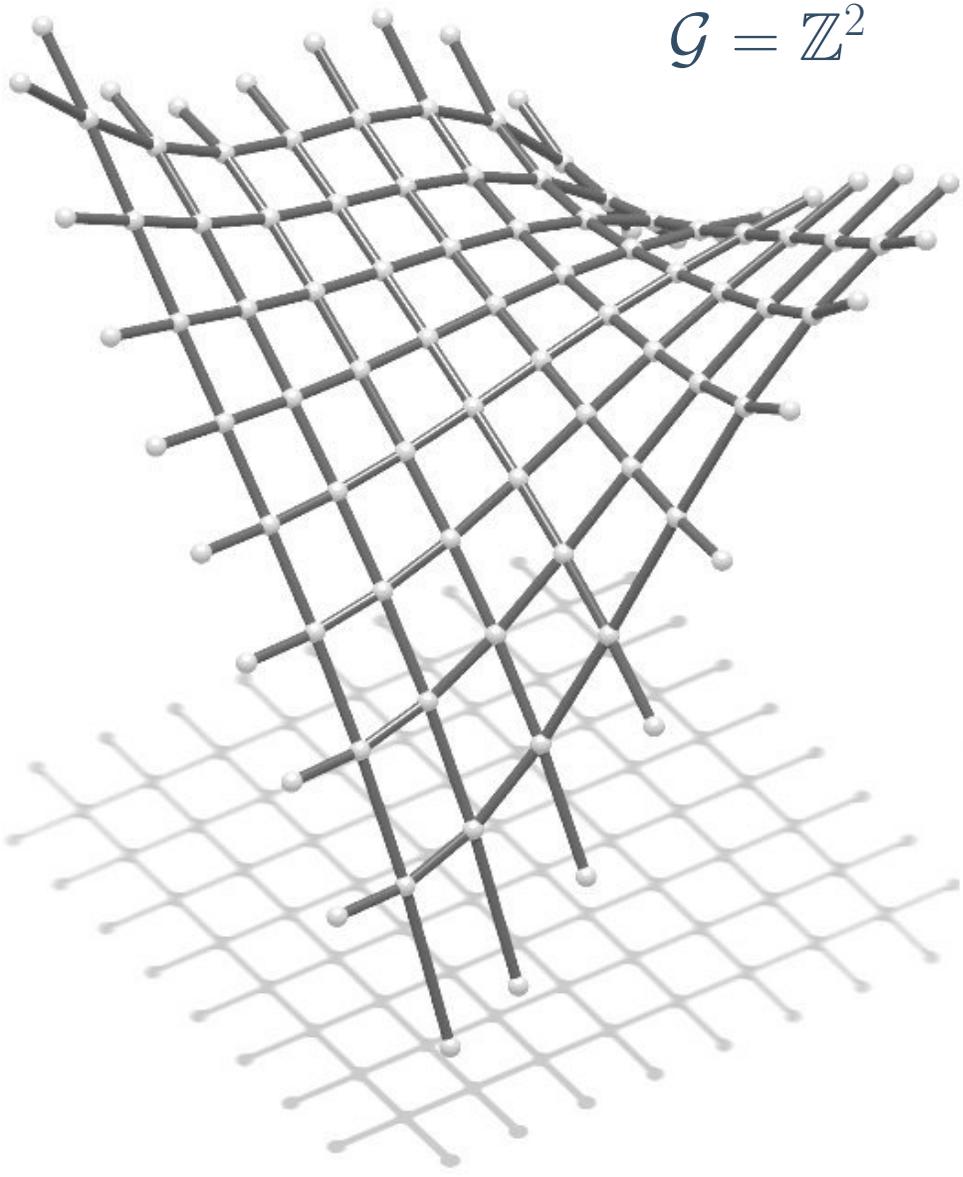
Satz von Ceva



$$DV(\bullet\bullet\bullet\bullet) = DV(\bullet\bullet\bullet\bullet)$$

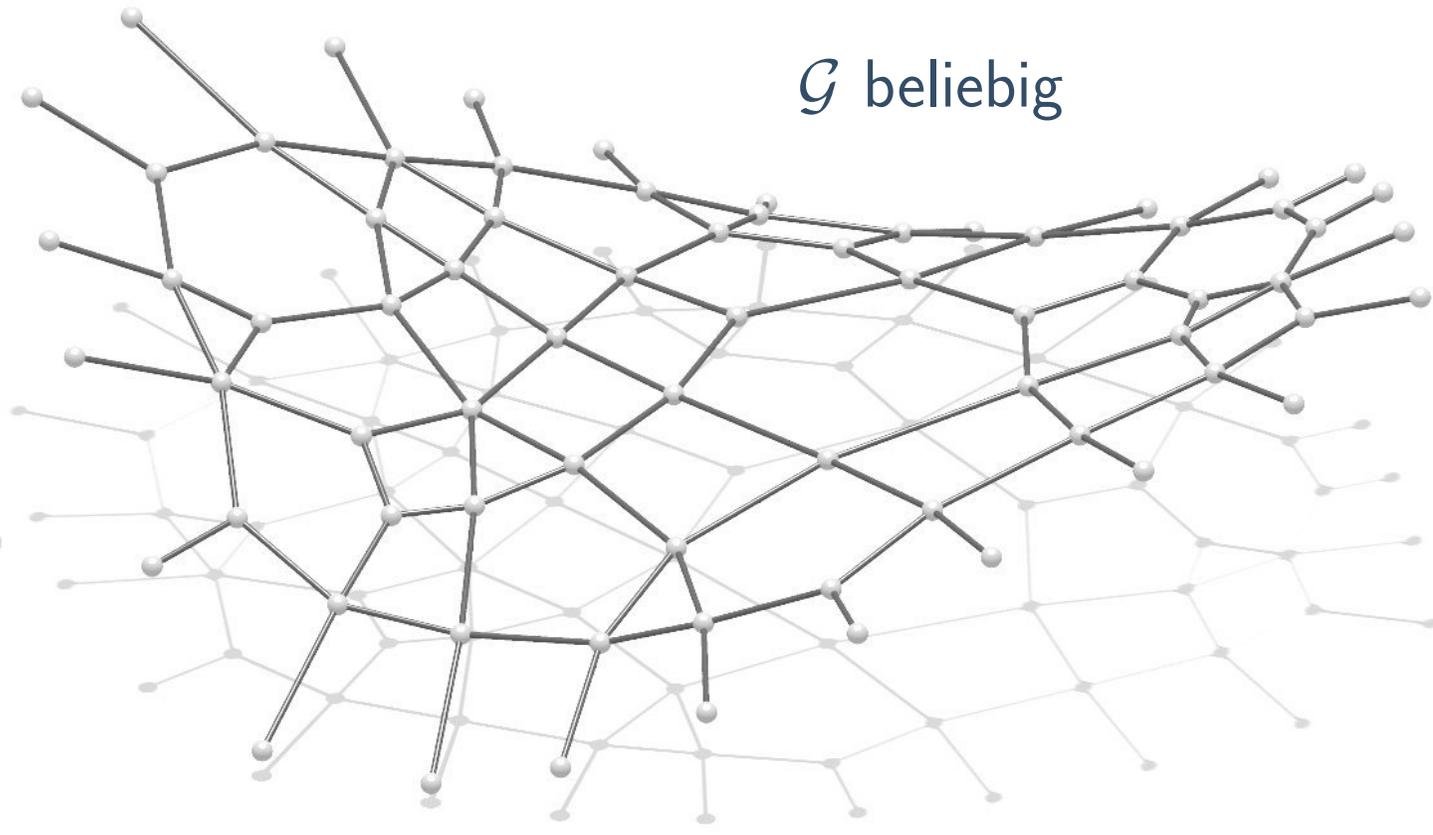
Beispiele: Diskrete Harmonische Abbildung

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}^2$$



$$f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (\Delta f)(v_i) = 0$$

\mathcal{G} beliebig



Beispiele: Diskrete Harmonische Abbildung

