

# ELEMENTARGEOMETRIE **NEU** ENTDECKEN, DENKEN, UNTERRICHTEN, ...

Beitrag zur Förderung des Unterrichts im Fach *MATHEMATIK*  
durch  
synergetisches Zusammenspiel  
von *Mathematik, Konstruktiver Geometrie und Transformationsgeometrie*

**Kulturgeschichtlicher Hintergrund zu diesem Apell**

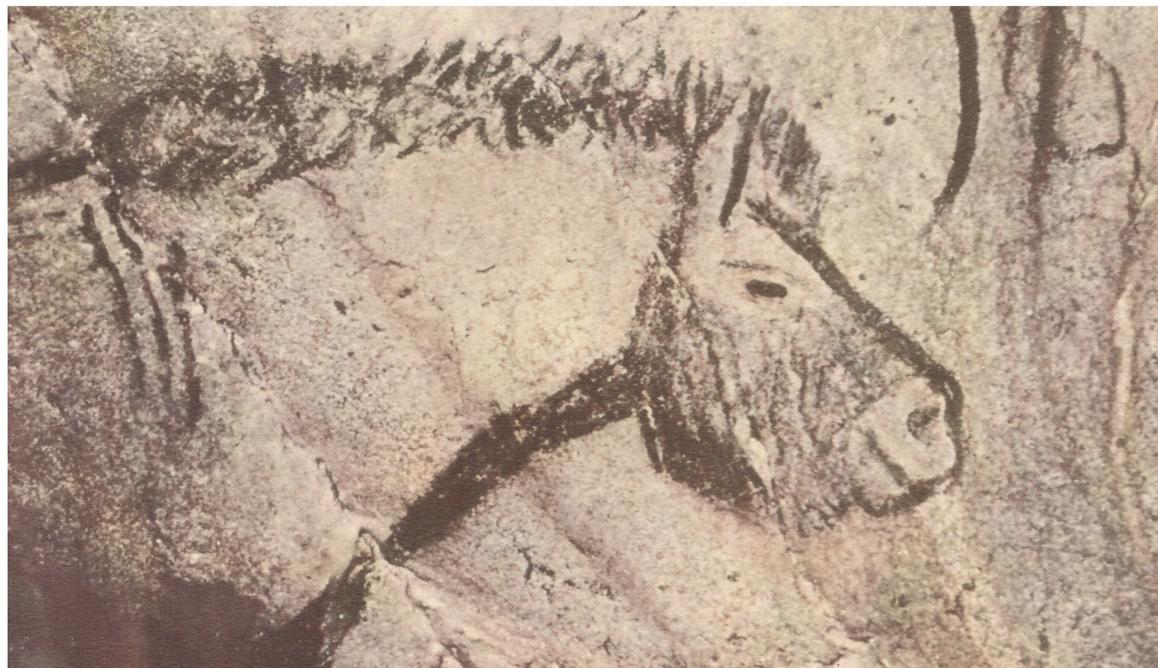
**EUKLID**

als *SYNONYM* für

**EUropäische KuLtur und IDdeengeschichte**



Weidende Rentiere (Gravur auf Elfenbein), *Teyjat, Dordogne*, frühes Magdalenien ca. 30.000 - 20.000 v. Chr.



Wildpferd, *Niaux bei Tarascon-en-Ariege*, Mittleres Magdalenien ca. 25.000 bis 15.000v. Chr.



Schwimmende Hirsche, *Lascaux*, Spätes Magdalenien, 20.000 bis 10.000 v. Chr.

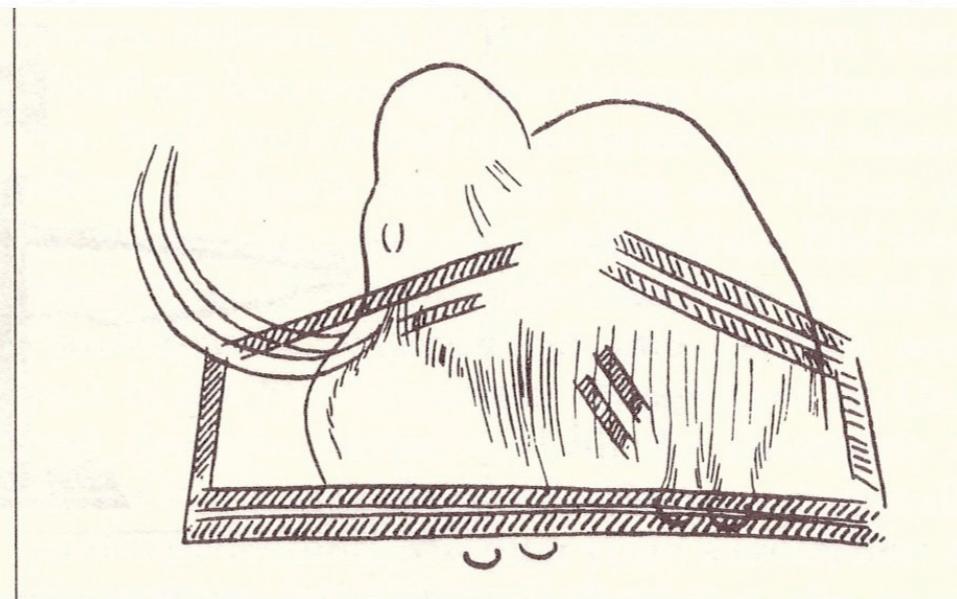
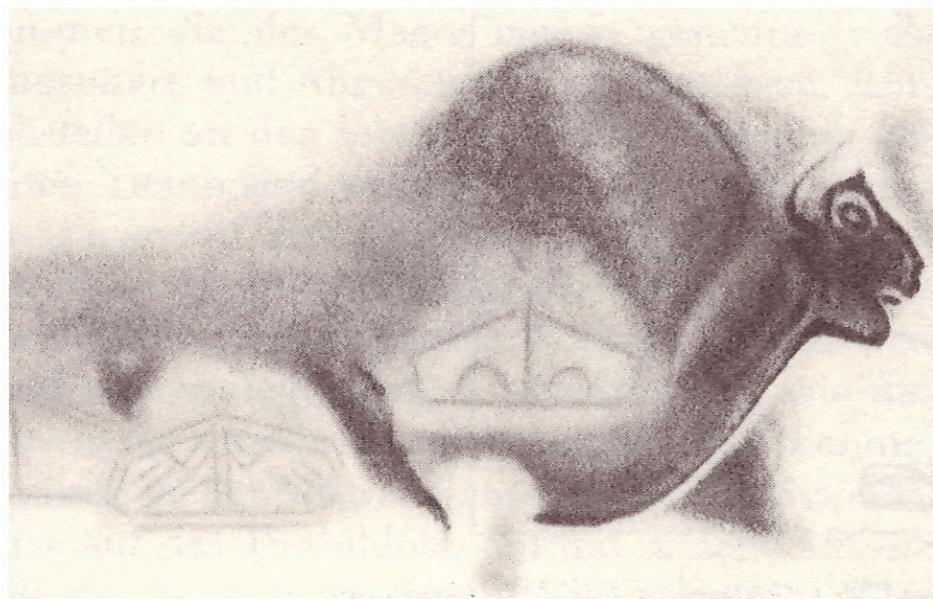
2) „Protokolle“ von Jagd und Jenseitsvorstellungen, intentional vermutlich mit *Bannungs-* oder *Beschwörungs-*Intentionen



Urrind auf eine Falle zulaufend. *Lascaux*, spätes Magdalenien ca.15.000 vor Chr..



Fingerzeichnung, *Altamira*, ca. 50.000 v. Chr.

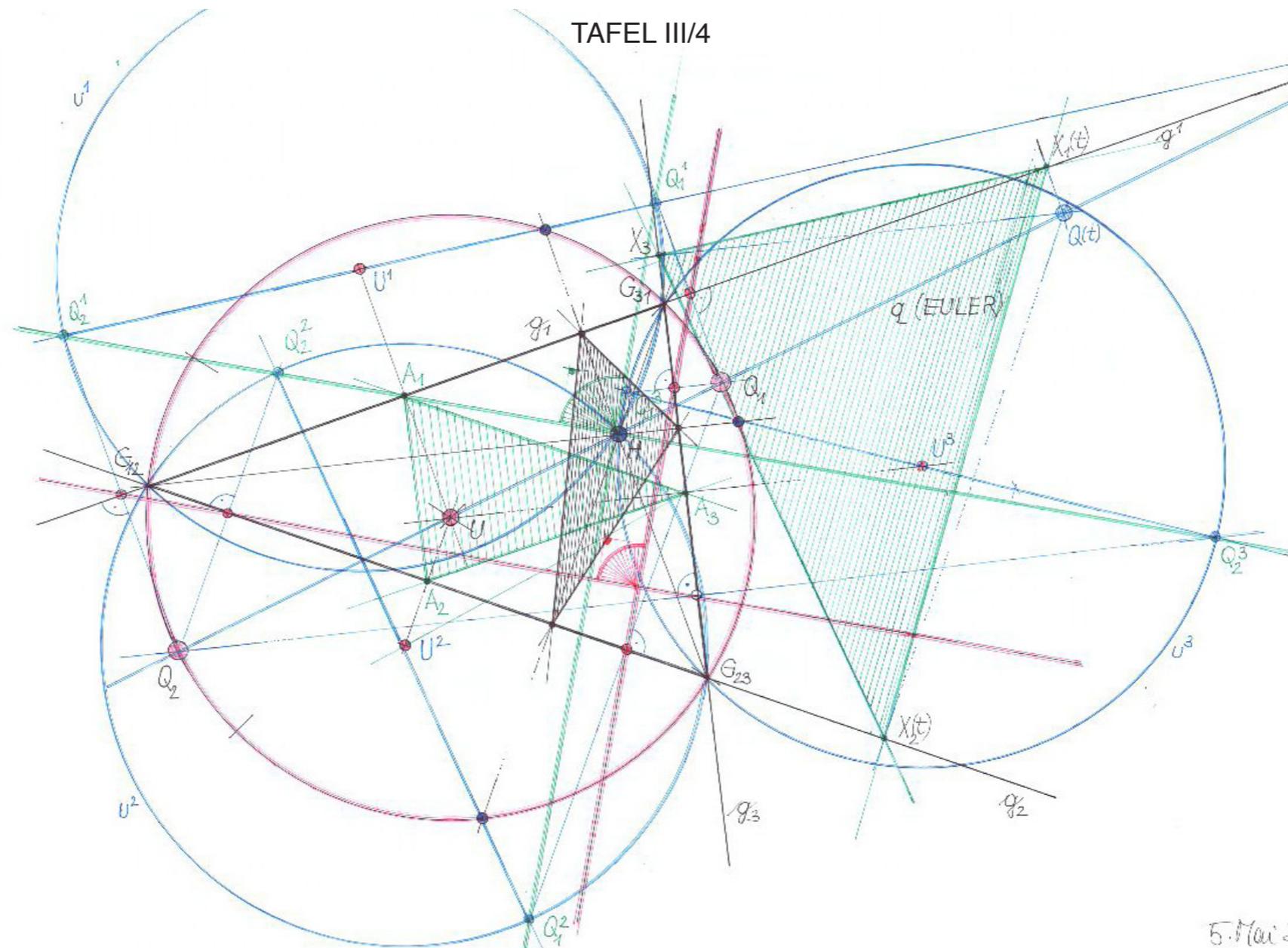


Beide Figuren aus der gleichen Höhle: *Font-de-Gaume (Dordogne Fr.)*  
„.... Das wesenhaft INNERE, LEBENDIGE des Tieres als Zelt in der Herzgegend ... „

Vom DAUMENKINO einer DREISEITSCHAR  
mit geradlinigen (linearen), TV-gleichen Eckpunkt-reihen (Mittelstufe)

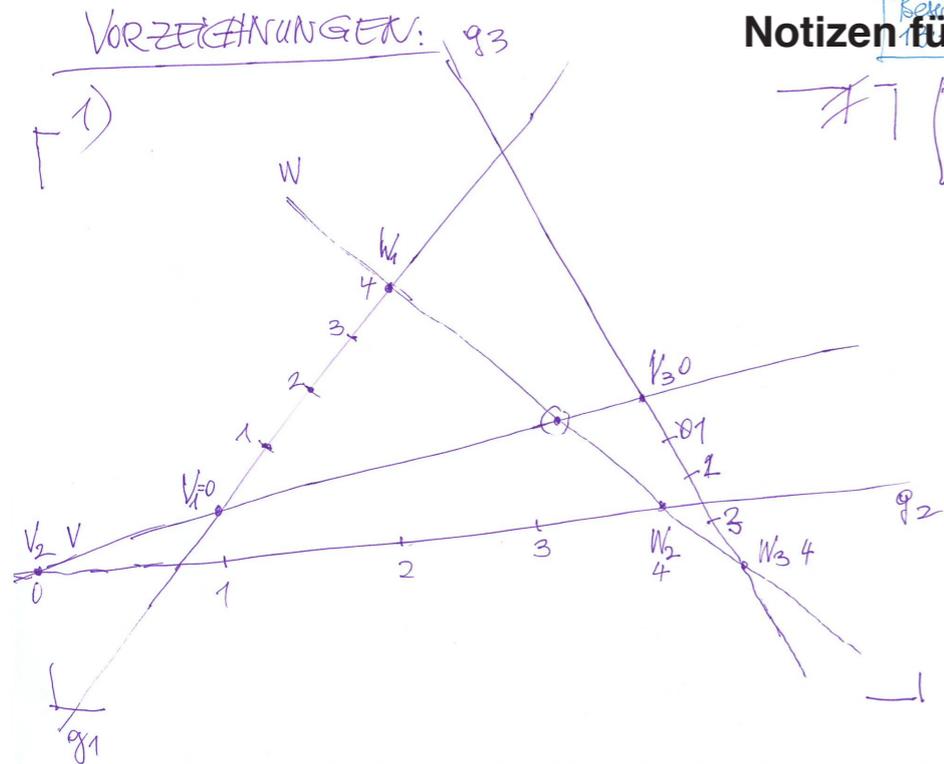
zur

**GEOMETRIE von konformen und affinen BEWEGUNGSTRANSFORMATIONEN mit geradlinigen BAHNKURVEN in konformen und affinen Zeichenebenen (Aff.AE, Konf. AE)**

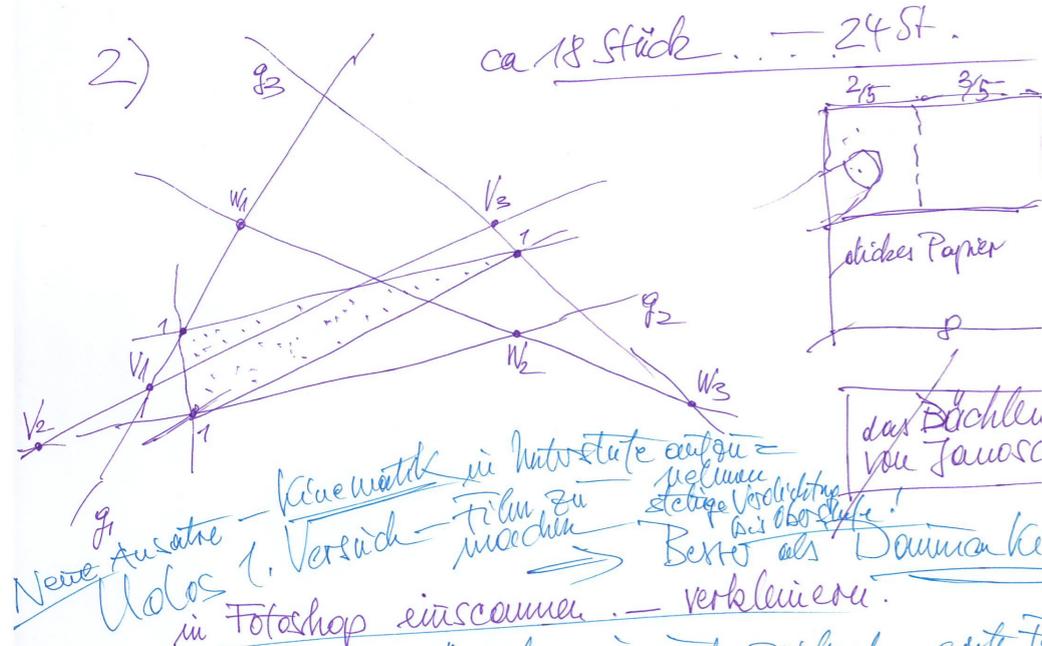


# DAUMENKINO 1

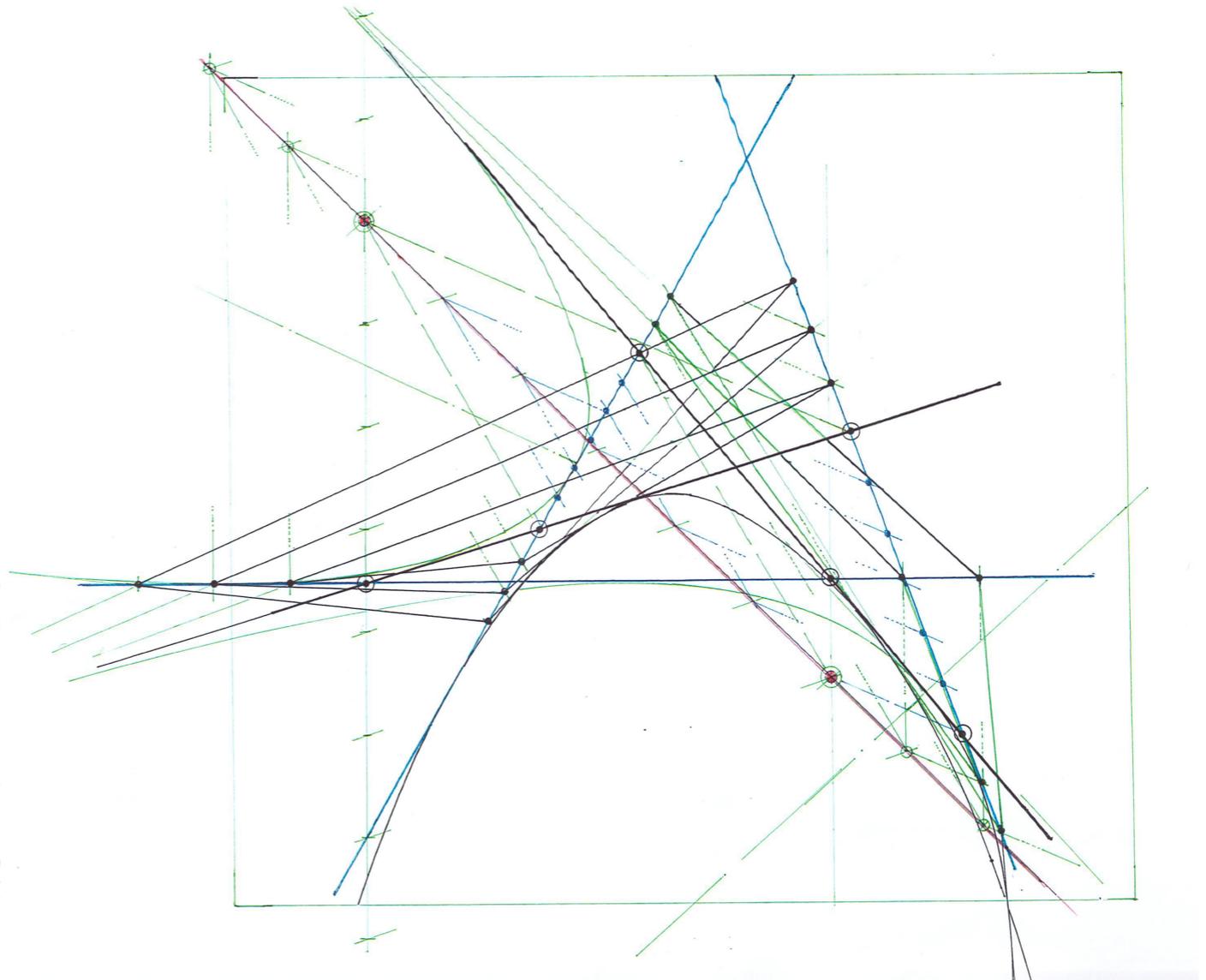
## Notizen für eine Ausführung in festem Papier



$\neq$  | Pass =  
markt

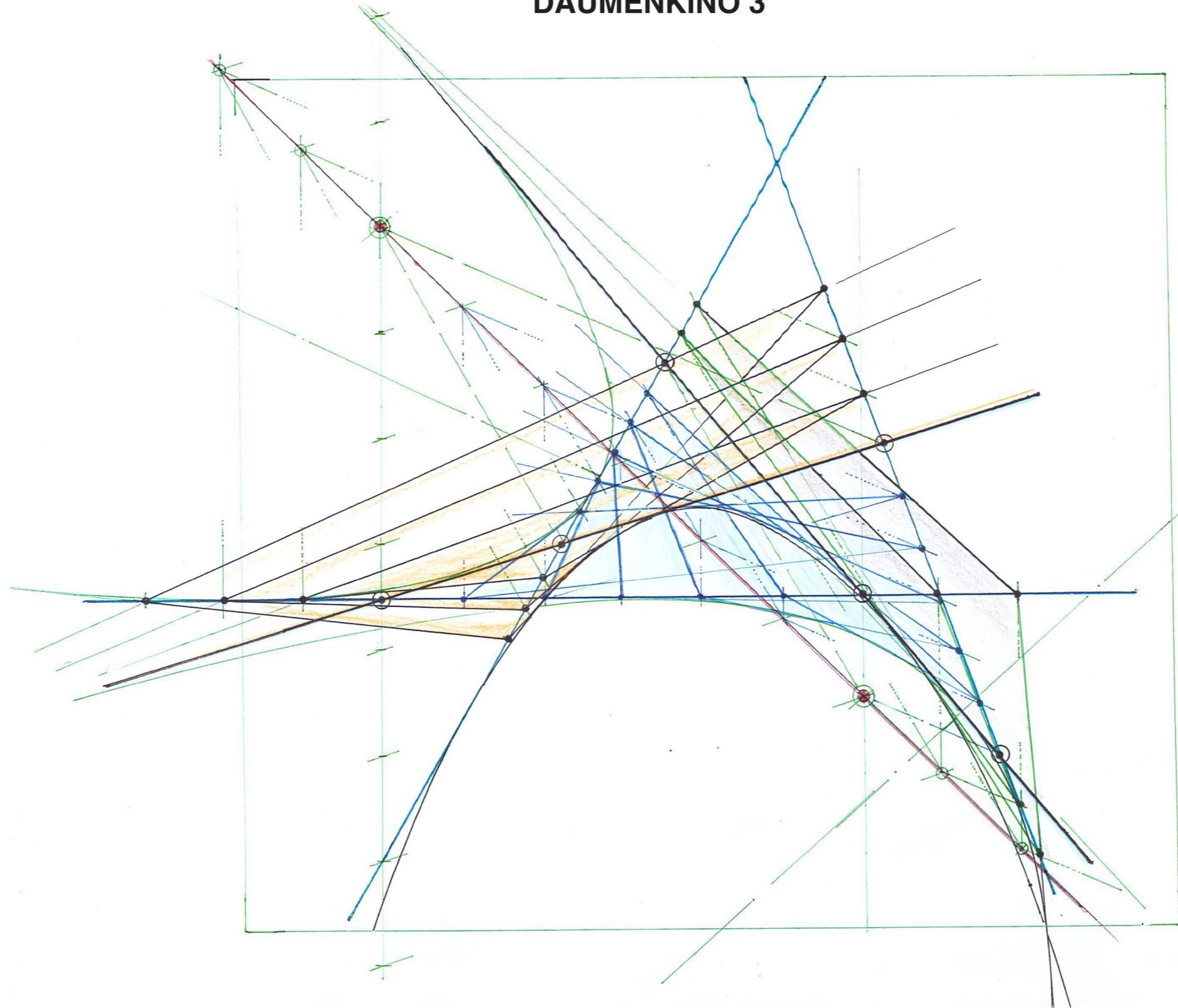


3) Foto scannet Ausgabe ein mit Zeichenet erste Folie  
von Dreiecken von links oben gegen  $V-W-V_3$  in gelb  
und dann in Lila, so dass man die ganze F  
als Film wieder geben kann. das Licht kontrastreich





# DAUMENKINO 3







# 1 Analyse und grundlegende Fragen zum Verständnis der geometrischen Phänomene des Daumenkino-Spielzeuges

## 1.1 Geometrisches Handwerkszeug aus der Schulgeometrie zur Anfertigung eines DAUMENKINOs für Dreiecke (Dreiseite) bzw. Parallelogramme als Bildfelder für Figuren, deren Eckpunkte TV-gleich auf geraden Linien laufen

Zwei Punktreihen  $g_1\{A_1, B_1, X_1(t)\}$ ,  $g_2\{A_2, B_2, X_2(t)\}$ , für welche die **Abstands-** bzw. **TEIL-VERHÄLTNISSE (TV)** von zwei variablen, mit dem **Zeitparameter**  $t \in \mathbb{R}$  auf  $g_i$  laufenden Punkten  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , zu zwei festen **Grundpunkten**  $(A_1, B_1)$  bzw.  $(A_2, B_2)$  **übereinstimmen**, nennen wir im folgenden **teilverhältnisgleich (TV-gleich)**. Diese Definition ist Ausgangspunkt für das Vergleichen von zwei Punktreihen mit Einheitsstrecken,  $[A_1, B_1] =: e_1$ ,  $[A_2, B_2] =: e_2$ , unterschiedlicher Länge, die nach dem Axiom von EUDOXUS (Hilbert IV,1) durch **Zuweisen von Koordinaten** - bei TV-gleich DAHER durch die gleiche Koordinate  $t$  - für die Punkte  $X_i$  erfolgt. Die *veranschaulichende Figur* wird in der *Schulmathematik* leider *nicht* **Maßstäbe-VergleichsFIGUR** (mit veranschaulichendem Dreieck) sondern **Strahlensatz** genannt.

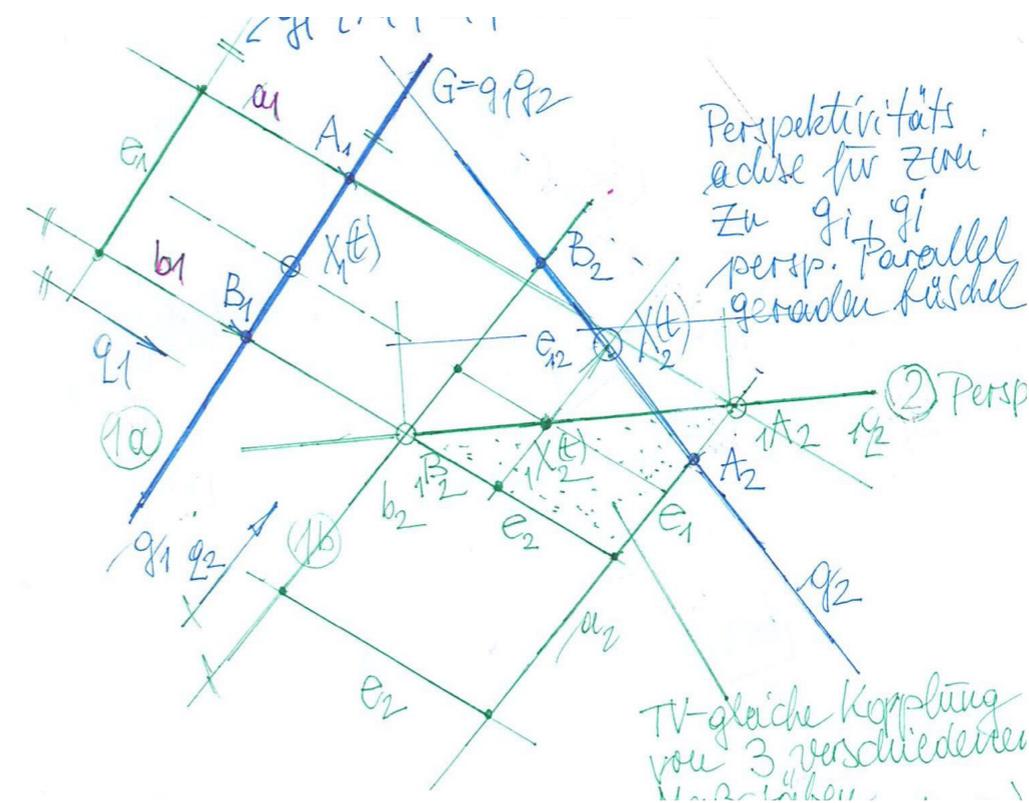
### Konstruktionsschritte für das Vervollständigen zweier TV-gleicher Punktreihen

(1.1)  $g_1\{A_1, B_1, X_1(t)\}$ ,  $g_2\{A_2, B_2, X_2(t)\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

1) Hilfsgerade mit entsprechenden Teilungspunkten

(2) Konstruktion der Perspektivitätsachse  $q_2 = q_1 Q_2(0) Q_2(1)$ , welche die Schnittpunkte (Knotenpunkte)  $Q_2(t)$  der zugeordneten Geraden  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  von zwei zu  $g_i$  perspektiv liegenden STREIFEN paralleler (Projektions-) Geraden  $q_i(t)$  trägt.

siehe dazu TAFEL I



## Anmerkungen:

**A1)** Die **algebraisch-rechnerische Bestätigung** der **Maßstabsvergleichfigur** in der Schule müsste nach Axiom IV so erfolgen, dass die  $g_i$ -Punktreihen als  $x_i$ -Zahlengeraden beschriftet werden mit

**(1.2a)**  $A_i =: X_i(0)$  als **Ursprung** (Nullpunkt) und  $B_i =: X_i(1)$  als **Einheitspunkt** und

**(1b)**  $t \in \mathbb{R}$  als **Koordinate** von  $X_i(t)$  auf  $x_i$ .

Mit der Festlegung der **Streckenverhältnisse**  $TV(A, B, X) = [A, X] : [A, B]$  für die Koordinate von  $X$  nach (1b) ist

**(1.3)**  $TV(X_i(0), X_i(1), X_i(t)) = TV(0, 1, t) = [t : 1] = t$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

Die Punkt- Geradengeometrie in der Zeichenebene mit der **Existenz** einer Parallelen zu jeder Geraden  $g$  aus der Menge  $\{ // g \}$  durch einen Punkt  $Q$  außerhalb von  $g$  heißt **Affine Geometrie (Aff.Geometrie)** in der **Anschauungsebene (AE)**.

Das **Übertragen** bzw. **Vervollständigen** von TV-gleichen Punktreihen

**(1.4a)**  $g_1\{A_1, B_1, X_1(t)\}, g_2\{A_2, B_2, X_2(t)\},$

mit i.a. unterschiedlichen EINHEITSSTRECKEN

**(1.4b)**  $e_1 = [A_1, B_1], e_2 = [A_2, B_2]$  ( $\rightarrow$  Anwendung des Maßstäbe vergleichenden Strahlensatzes ...)

gehört zur **absoluten Basisausrüstung** der **konstruktiven Denk- und Arbeitsweise** beim Anfertigen von **affinen** (parallelen-treuen) und **konformen** (ähnlichen) Figuren seit **ägyptischen und griechischen Zeiten**.

**A2) Grundlage** für die **rechnerisch analytische Behandlung** dieser **Dreiseitscharen** ist natürlich die **Vektorrechnung** für die **TV-gleich parametrisierten Punktreihen** ab 5ter **ABHS?**:

Die Punkte  $A_i, B_i$  werden mit Ortsvektoren in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem erfasst. Dann gilt mit (1b) für die laufenden Punkte  $X_i(t)$  auf  $g_i\{A_i, B_i, X_i(t)\}, i = 1, 2,$

**(1.5)**  $\mathbf{x}_i = \mathbf{a}_i + t(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

**A3) Fragen zu A2 und DAUMENKINO** mit *konfigurativen Skizzen* in **TAFEL I**:

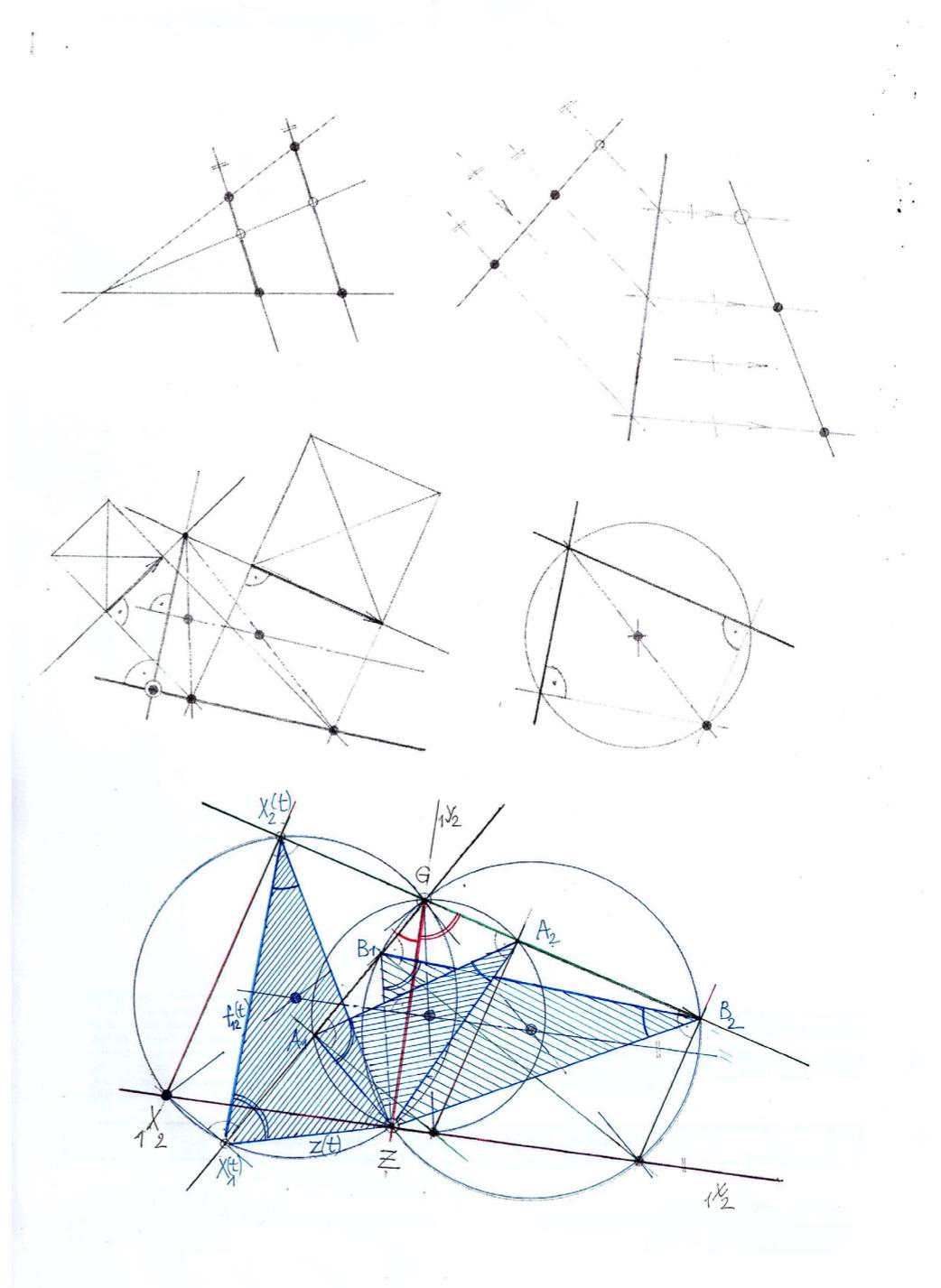
- Für welche  $t$ -Werte  $t_1, t_2, \dots$  liegen die **Punktetripel**  $\{X_1(t_i), X_2(t_i), X_3(t_i)\}$  **kollinear**?

- Ist die **Anzahl** dieser kollinearen Punkte-Tripel **algebraisch** über  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  in der projektiv abgeschlossenen affinen Ebene (PAAE)??

- Wie könnte man die TRÄGERGERADEN  $u, v, w$  dieser **kollinearen Punktetripel** mit **konstruktiv geometrischen** Überlegungen ermitteln ....d.h. **Dreifachtangenten** an die Hüllkurven  $c_{ij}$  der Verbindungsgeraden  $f_{ij}(t) := X_i(t), X_j(t)$  legen???

# TAFEL I/1

**Handwerkszeug zur Teilung von Strecken nach vorgegebenen Verhältnissen, bzw. Vervollständigung von TV-gleichen Punktreihen, Anwendung für Konstruktive Behandlung von Drehstreckungen**



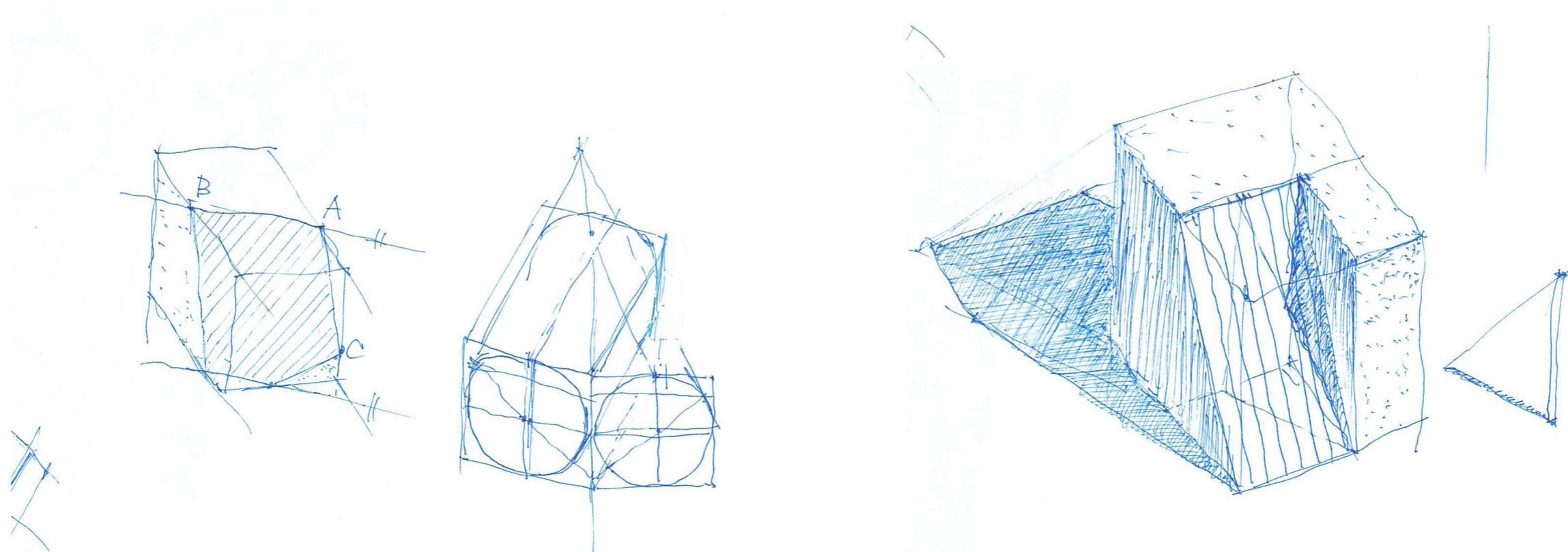
## TAFEL I/2

### AFFINE ANSCHAUUNGSEBENE / PARALLELITÄT, TV-GLEICHHEIT (ab 3ter, 4ter ABS, ABHS ?)

🍏 -TV-gleiche STREIFEN paralleler Geraden mit KNICKPUNKTACHSEN (PERSPEKTIVITÄTSACHSEN)  
(Anwendung für ebene Schnitte von PRISMEN UND ZYLINDERN und für die Konstruktion solcher Körper in  
**PARALLERISSBILDERN VON WÜRFELTEILKÖRPERN**)

🍏 - TV-GLEICHE, GERASTERTE PARALLELOGRAMME als EINHEITSPARALLELOGRAMME für *affine Koordinatensysteme* in zwei Figuren-FELDERN  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  ein geeignetes INSTRUMENTARIUM dafür, PUNKTE in  $\mathcal{F}_1$  durch GLEICHE KOORDINATEN in das Feld in  $\mathcal{F}_2$  ABZUBILDEN

🍏 - 2L-TV-gleiche PUNKTREIHEN  $g_i\{A_i, B_i, X_1(t)\}$  und die HÜLLKURVEN  $c_{ij} := \{f_{ij}(t) := X_1(t)X_2(t)\}$  der Verbindungsgeraden ??? sehen wie Kettenlinien aus



## 1.2 Vertiefung der geometrischen Bearbeitung der Daumenkino-Geometrie ab der dritten ABs bzw. ABHS

Je zwei Dreiecke  $\Delta\{A_1, A_2, A_3\}$  mit  $\Delta\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  (oder mit  $\Delta\{B_1, B_2, B_3\}$ ) legen nach TAFEL I *Parallelogramme* für affine Koordinatensysteme fest. Für die Einheitsparallelogramme dieser *affinen Punkt- Geraden-Felder*  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  können die Ursprungspunkte  $O_1, O_2$  und  $x_1$ -,  $x_2$ -Achsen noch ohne Einschränkung in zwei zugeordneten Punkten  $A_i, B_i$  und von dort ausstrahlenden Geraden  $A_i A_j, B_i B_j$  gewählt werden.

**Beispiel: Übertragen einer Figur von  $\mathcal{F}_1$  nach  $\mathcal{F}_2$ :**

### Anleitungen zur Konstruktion:

**A1)** Zum Übertragen *signifikanter Punkte* aus  $\mathcal{F}_1$  nach  $\mathcal{F}_2$  werden zuerst die *Perspektivitätsachsen*  ${}_1x_2$  und  ${}_1y_2$  für die TV-gleiche Zuordnung der  $y_i$ - und  $x_i$ -Geraden (Ordner) ermittelt. Die *Perspektivitätsachse*  ${}_1x_2$  ist als Verbindungsgerade der Schnittpunkte  ${}_1Y_2(0,0)$  bzw.  ${}_1Y_2(e_1, e_2)$  der  $y_i$ -Geraden durch  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  bzw. durch  $x_1 = e_1$  und  $x_2 = e_2$  festgelegt:

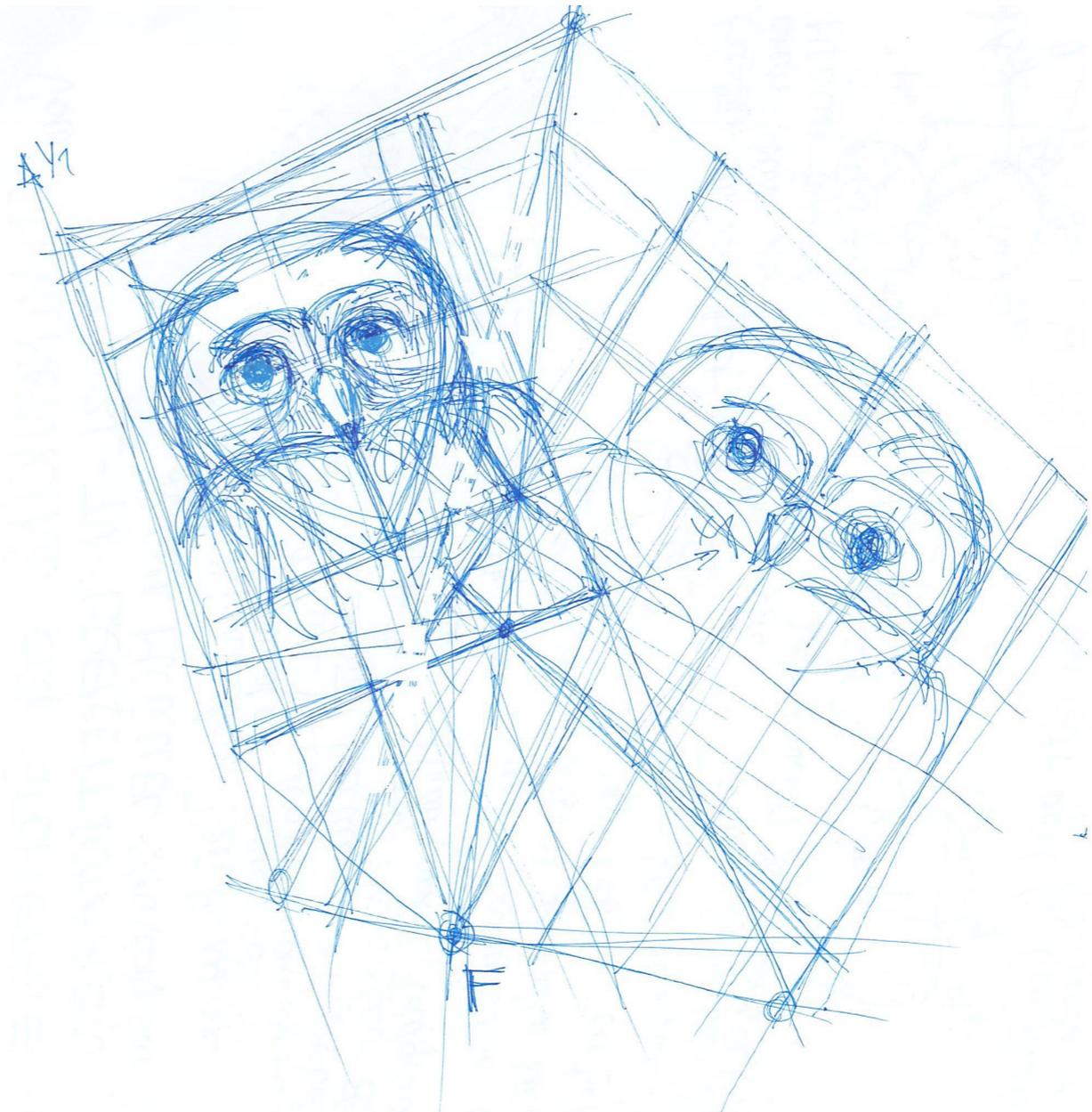
$${}_1x_2 := {}_1Y_2(0,0) {}_1Y_2(e_1, e_2).$$

Analog wird die  ${}_1y_2$ -Achse als Verbindungsgerade der Schnittpunkte  ${}_1X_2(0,0)$  bzw.  ${}_1X_2(f_1, f_2)$  zugeordneten  $x_i$ -paralleler Geraden  $y_i = 0$  bzw.  $y_1 = f_1, y_2 = f_2$  ermittelt

$${}_1y_2 := {}_1X_2(0,0) {}_1X_2(f_1, f_2).$$

**A2 ) Punkte** aus  $\mathcal{F}_1$  können damit in bequemer Weise durch **Abbildung mit gleichen Koordinaten** (siehe TAFEL I, 2) nach  $\mathcal{F}_2$  übertragen werden. Um eine Hilfsgerade  $g$  als Tangente an eine Kurve  $k_1$  zu übertragen wird  $g$  an geeigneten  $x$ - oder  $y$ -Geraden angegittert ....

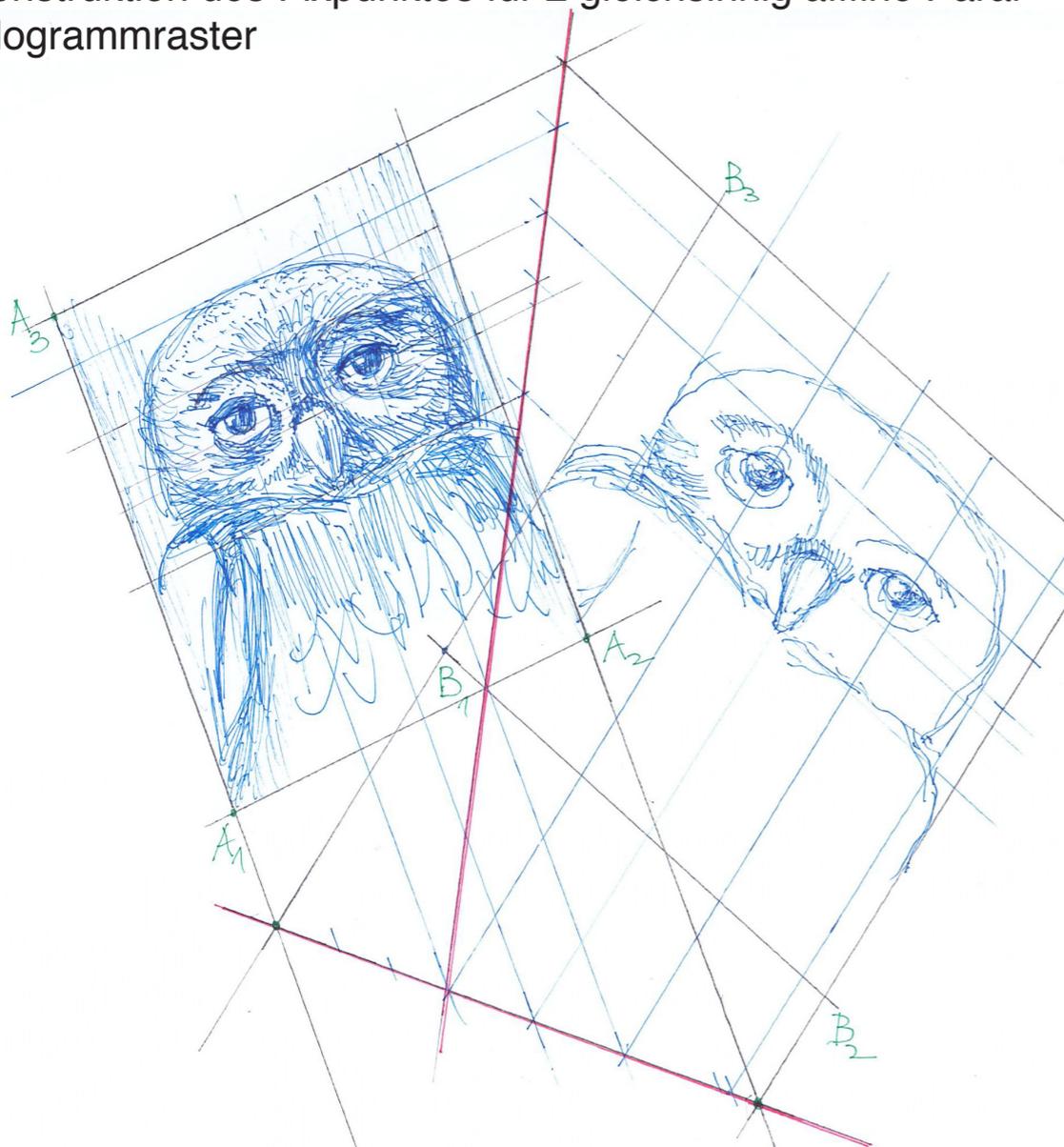
**A3)** Für zwei solche Felder  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  liegt der Schnittpunkt  $F := {}_1x_2 \cap {}_1y_2$  der Perspektivitätsachsen in beiden Feldern, weil die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten für  $F_1 = F$  mit denen von  $F_2 = F$  übereinstimmen. Entsprechende affine Parallelogramme in  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$  mit  $F$  als gemeinsamer Ecke sehen aus, als wären sie gegeneinander affin „verdreh“.



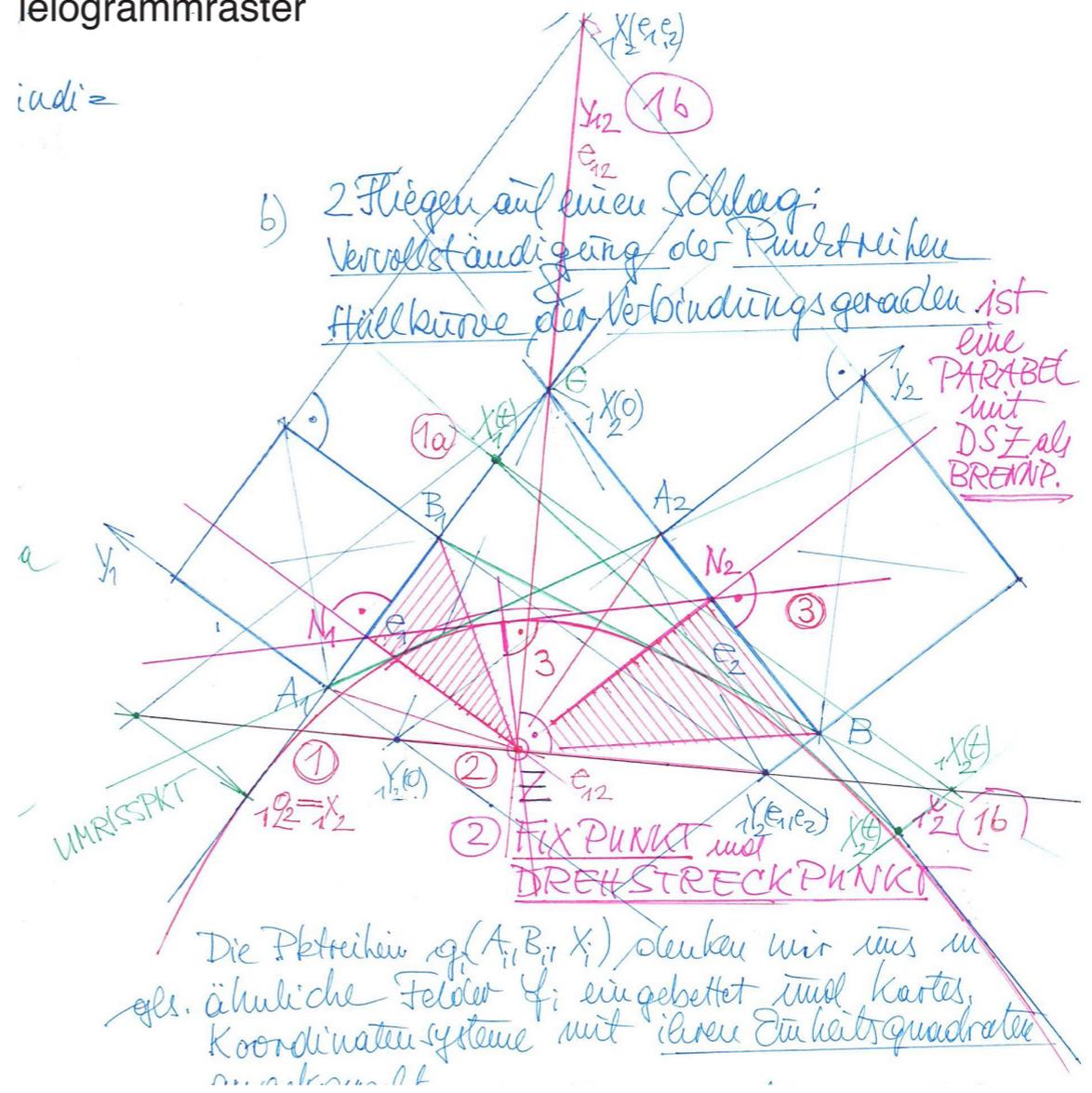
Dieser Eindruck verstärkt sich, wenn das Dreieck  $\Delta\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  mit seinem Parallelogramm-Anhängsel in einer Art (*affiner*) DREHSTRECKBEWEGUNG um F zu wandern beginnt, sobald t als Zeitparameter in  $\mathbb{R}$  läuft. Für den Punkt F kann gezeigt werden, dass dieser ein Fixpunkt ist für eine **Bewegung** mit *geradlinig TV-gleichen Eckpunkt-Bahnkurven* auf dem Weg von  $\Delta\{A_1, A_2, A_3\}$  nach  $\Delta\{B_1, B_2, B_3\}$ . Diese, soeben mit t als Zeitparameter erlebte **AFFINBEWEGUNG** eines Dreiecks in der stetigen Dreiecksmenge  $\Delta\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  mit einem gemeinsamen **Fixpunkt** ist eine eindrucksvolle „**DREHSTRECKBEWEGUNG**“ die insbesondere bei WACHSTUMSFORMEN (Schneckengehäusen, **Ammonitengehäusen**) ablesbar ist, da sich bei diesen dreieckige und rautenförmige Formen offensichtlich drehstreck-ähnlich fortbewegen .

**Beispiel:** Konstruktion des **Drehstreckzentrums** für eine Ammonitenstruktur, ausgehend von zwei zugeordneten, beschrifteten Dreiecken siehe dazu **2.1** und **TAFEL 2/ ...**

Konstruktion des Fixpunktes für 2 gleichsinnig affine Parallelogrammraster



Konstruktion des Fixpunktes für 2 gleichsinnig ähnliche Parallelogrammraster



## TAFEL II/1

### NEUE methodische Ansätze zur Lösung von Problemen und Fragestellungen in der Elementargeometrie für Schule und Ausbildung

(1) **EBISUI-Thesen** ... Beispiele dazu in der umfangreichen Veröffentlichung, von **Gunter WEISS**: „advanced elementary geometry ... playground for YOUNG and OLDs“, 2014

(2) **K. MEIRER: Lösungsbilder** (ERFURT 2017) ... das waren eher schon ANTWORTEN oder kultivierte synthetische Darstellungen von LÖSUNGSWEGEN für Architekturstudent:innen.

Neben vielen **klassischen Konfigurationen** mit **Merkwürdigkeiten** sind vor allem die zahlreichen **CAD-Konfigurationen** des **japanischen Geometrie-ZEN-Meisters H. EBISUI** (besonders für **Europäische Konstruktions-Geometer**) von Interesse, da EBISUI seine Werke **ohne Hinweise** auf ihre **Merkwürdigkeiten**, als *Thesen für ZEN-geometrische Meditation* ins Netz stellt. Diese *Thesen* beinhalten im Grunde *bekannte klassische geometrische Überraschungen*, dass z. B. bei Dreieckskonstruktionen in zweiter und dritter Ausbaustufe gewisse **KONSTRUKTIONSPUNKTE** oder **-GERADEN ungeplante bemerkenswerte LAGEN einnehmen**:

🍏 mindestens 3 **Punkte inzidieren** mit einer **Geraden** (kollinear) ... siehe 1: EULER'sche Gerade  
**siehe Abschnitt 3**: Für Dreiseitscharen mit TV-gleichen Eckpunktfolgen  $g_i\{A_i, B_i, X_i(t)\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , mit drei Leitgeraden (siehe Daumenkino) existieren über  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  **zwei** reelle bzw. imaginäre **Trägergeraden**  $v, w$ , wenn für eine der Punktfolgen der Durchlaufsinne bezüglich der anderen am Dreiecksrand entgegengesetzt bzw. gleichlaufend ist.

🍏 mindestens 3 **Geraden** sind mit einem **Punkt kopunktal** ...siehe HÖHENSCHNITTPUNKT

🍏 mindestens 3 **Kreise**  $k_1, k_2, k_3$  haben statt 6 Doppelpunkten nur noch drei Doppelpunkte  $A_{ij}$ , dafür aber einen Tripel-Punkt  $Z$  in dem die „inneren Doppelpunkte“! zusammenfallen. In diesem Fall existiert eine stetige Schar geschlossener Dreiseite, deren Seiten mit  $A_{ij}$  inzidieren und deren Eckpunkte auf  $k_j$  laufen.  
**siehe IBDG 1/2006**: PODERSTORFER: die drei Spiegelbilder  $u^{(ij)}$  des Umkreises  $u(A_j)$  eines Dreiecks  $\Delta(A_j)$  an den Seitengeraden  $g_{ij}$  von  $\Delta(A_j)$  ...

siehe: Die drei Kreise  $k_{ij} := k(G_{ij}, A_i, A_j)$  die MIQUEL ca 1835 zu einem *Linienelementdreiseit*  $\mathcal{D}(g_i, A_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , mit dem *Ecken-Dreieck*  $\Delta(G_{ij} = g_i g_j)$  zeichnet, haben nach den ersten Versuchen stets einen Punkt  $Z$  gemeinsam NEU

🍏 drei **Hüllparabeln** einer **Dreiseitschar** mit einem gemeinsamen Brennpunkt existieren ....

siehe: für die Hüllparabeln der Seitengeraden der Anschlusspunktdreiseite der stetigen Schar von MIQUEL-Kreis-Tripeln zu gleichem MIQUELpunkt.

🍏, 🍏, 🍏

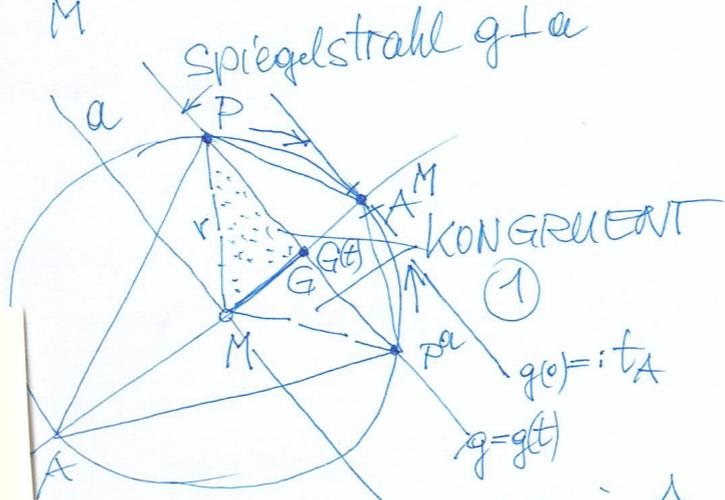
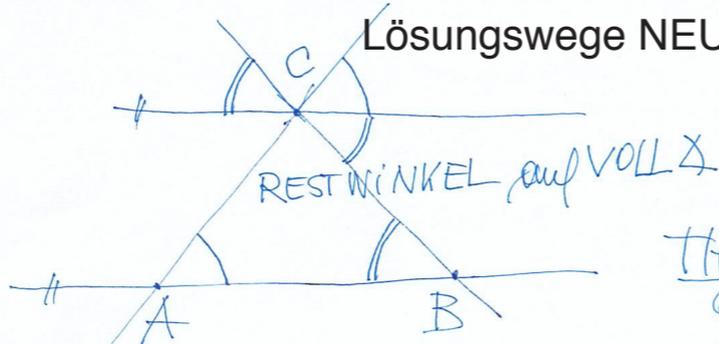
### **Dreh- und Angelpunkt für die Elementargeometrie der Mittelstufe:**

J. STEINERS punktweise Erzeugung von Kegelschnitten, insbesondere von Kreisen, ausgehend von der Erzeugung der Kreispunktmenge nach THALES, mit zugeordneten Geraden aus Geradenbüscheln mit Scheiteln  $S_1, S_2$ , in projektiven, affinen, ähnlichen, euklidischen Feldern.

Für die **ABS** und **ABHS**: Kreispunktmenge bereits in der Unterstufe mit rationaler Parameterbelegung. Für ABHS ab 6. Klasse analytisch durch Zentralprojektion eines mit  $t \in \mathbb{R}$  laufenden Punktes aus dem Gegenpunkt  $A^M$  des Kegelschnittes auf eine Tangente in  $A$ .

TAFEL II/2

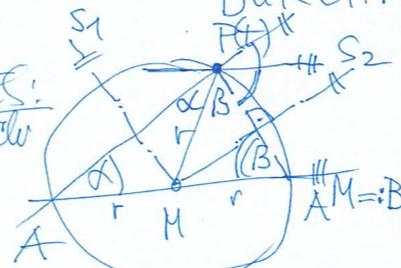
Lösungswege NEU für klassische Beispiele



② SPIEGELSTRAHL in A  
 $\lim_{G \rightarrow A} g(t) = t_A$   
 $t_A$  hat mit KREISLINIE  $k$  zwei zusammengehörige Pkte gemeinsam.

$\frac{2}{1+t} = \frac{t}{1+t^2}$   
 $\Rightarrow (1+t) \cdot \frac{2}{1+t} = \frac{2t}{1+t^2}$   
 $2 = \frac{2t}{1+t^2}$   
 $1 = \frac{t}{1+t^2}$   
 $1+t^2 = t$   
 $t^2 - t + 1 = 0$   
 $t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$   
 $\rho = \frac{1}{1+t^2}$

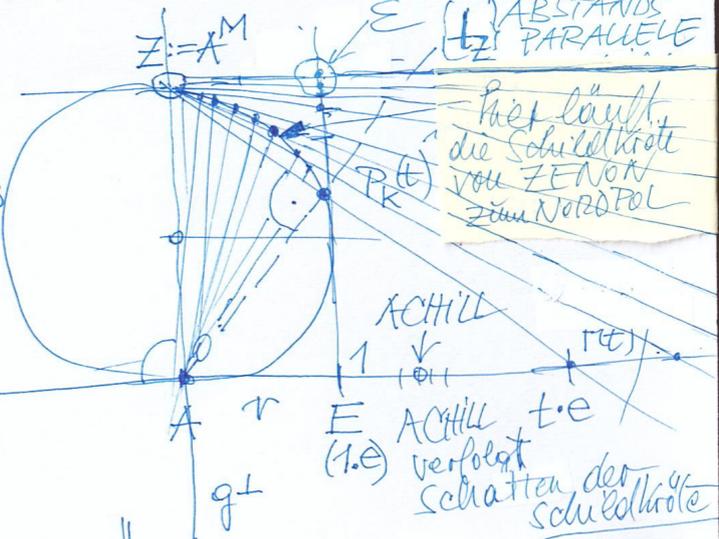
THALES:  $\infty$  v. d. v.



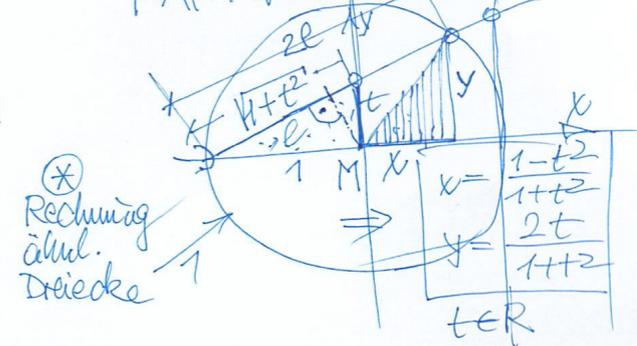
$\Delta(A, M, P), \Delta(P, M, B)$   
 sind gleichsch.  
 $\exists$  Symmetrie  $\rightarrow g$   
 Durch Spiegelungen an  $S_1$  und  $S_2$  kommt A nach AM  
 (Halbe Drehung Winkelvergleich zeigt Außenwinkel  $\alpha + \beta$  ist gleich dem Innenwinkel.

analytische Erfassung des Pkte aus  $k$   
 1) Nach Descartes  
  
 Alle Pkte  $(x, y)$  welche die Gleichung  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$  machen liegen auf  $k$

ZAHLENGERADE KREISTPUNKTE DURCHNUMMERIEREN bis auf einen  $Z$



Zu allen Punkten aus  $g$  mit  $t \in \mathbb{R}$  existiert ein Punkt  $P_k(t)$ .  
 gleiche Mächtigkeit!  
 2) Wenn Punkte mit einer Zentralproj. aus  $Z$  mit Pkten einer geraden nummeriert u. PARAMETERDARST...



## 2 Zur Geometrie von 2 linearen, TV-gleichen Punktreihen (2L-TV-Punktreihen: $g_i\{A_i, B_i, X_i(t)\}$ , $i \in (1,2)$ ), und ihrer einparametrischen Schar von Verbindungsgeraden $\mathcal{D}\{f_{12}(t) := X_1(t) X_2(t)\}$ mit einer Parabel $c\{f_{12}(t)\}$ als Hüllkurve

### 2.1 Konstruktion des Drehstreckzentrums $Z$ für 2 beschriftete Strecken $(A_1, B_1)$ , $(A_2, B_2)$ in der euklidischen ÄHNLICHKEITSEBENE (EÄE)

#### 1) Konstruktionsanleitungen:

Analog zu **Abb. 1.1** für **affine Felder** verknüpfen wir nun mit  $(A_1, B_1) \in g_1$ ,  $(A_2, B_2) \in g_2$  zwei Quadrate als EINHEITS-Quadrate für gleichseitig ähnliche kartesische Koordinatensysteme. Damit finden wir in eleganter Weise die Perspektivitäts- (bzw. Knoten-) Achsen

${}_1x_2$  der parallelen  $y_i$ -Ordnergeraden und  ${}_1y_2$  der parallelen  $x_i$ -Ordnergeraden.

2) Da das „**Schnittparallelogramm**“ der  $y_1$ - und  $y_2$ -parallelen Streifen mit der Diagonalstrecke

**(2,1a)**  $[{}_1Y_2(0,0), {}_1Y_2(e_1, e_2)]$  auf  ${}_1x_2$

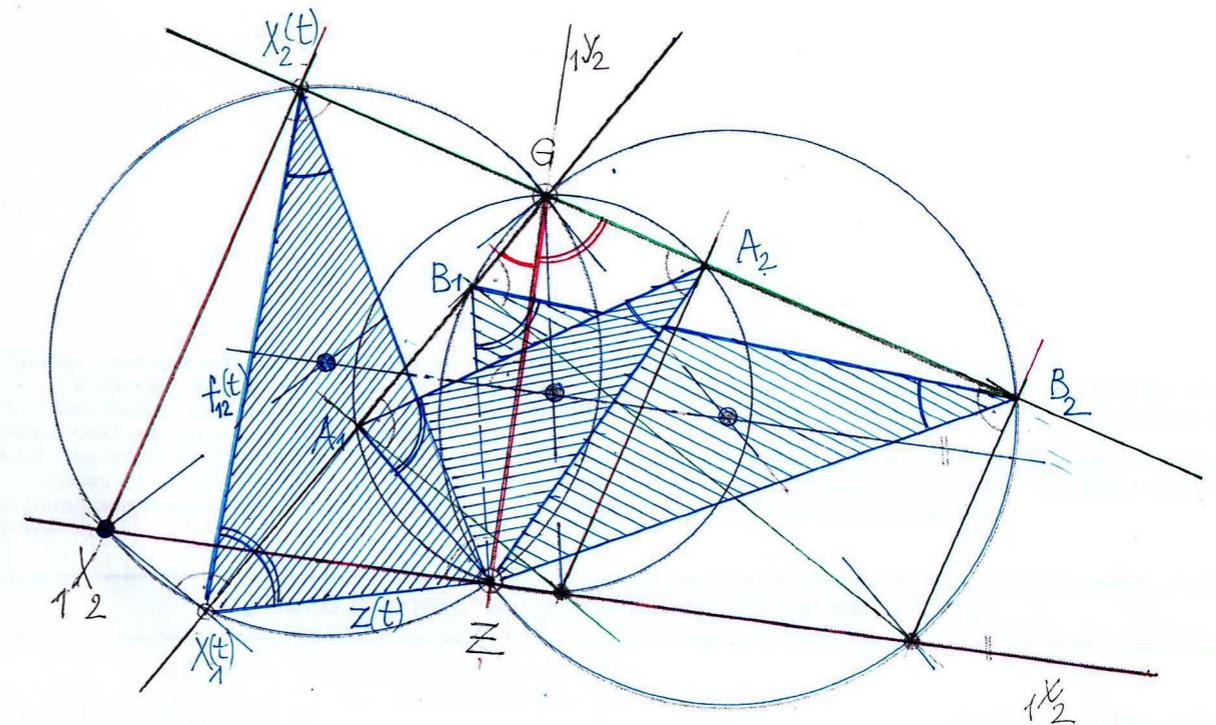
zum „Schnittparallelogramm“ des  $x_1$ - und  $x_2$ -parallelen Streifens mit der Diagonalstrecke

**(2,1b)**  $[{}_1X_2(0,0), {}_1X_2(f_1, f_2)]$  auf  ${}_1y_2$

kongruent und um 90 Grad verdreht ist folgt:

**SATZ 2.1:** Für das Streckenpaar  $(A_1, B_1) \in g_1$ ,  $(A_2, B_2) \in g_2$ , ist der **Fußpunkt** der **Normalen** aus dem **Schnittpunkt**  $G := g_1 g_2$  auf der **Perspektivitätsachse**  ${}_1q_2$  der zu  $g_i$  normalen Seitengeraden  $a_i, b_i$  der aufgesetzten Quadrate der **Fixpunkt** für die **affinen Quadrat-raster**. (siehe dazu Abb. auf Seite 14)

Abb. für Satz 2.2  
Drehung von  $(A_1, Z, A_2)$  nach  $(B_1, Z, B_2)$



## 2) Folgerungen:

**F1)** Nach dem Satz von THALES liegen die Ursprungspunkte  $A_1, A_2$  der kartesischen Koordinatensysteme als Scheitel der orthogonalen Achsengeraden  $x_i, y_i$ , mit den Schnittpunkten  ${}_1X_2$  bzw.  ${}_1Y_2$  konzyklisch auf einem Kreis  $k$ , mit der Strecke  $[{}_1X_2, {}_1Y_2]$  als Durchmesser.

**F2)** Da der **Fixpunkt**  $Z = Z_1 = Z_2$  zugleich ein Punkt in beiden **gleichsinnig ähnlichen Feldern**  $\mathcal{F}_1(A_1, Z, B_1), \mathcal{F}_2(A_2, Z, B_2)$  ist, sind die **Radialstrahl-Dreiecke** von  $Z$  hin zu  $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$

(2.2)  $\Delta_1 := \Delta(A_1, Z, B_1)$  und  $\Delta_2 := \Delta(A_2, Z, B_2)$

**konform (ähnlich). Anschaulich ausformuliert bedeutet (2.2):**

Wird die mit  $(A_1, B_1)$  **gekoppelte Figur**  $\mathcal{F}_1$ - hier ein Quadrat - mit dem Winkel  $\alpha = \angle(A_1, Z, A_2)$  **um Z gedreht**, so liegen die Punkte der **gedrehten Figur** (Quadrat $^\alpha$ )  $\mathcal{F}_1^\alpha$  mit **gedrehtem Dreieck**  $(A_1^\alpha, Z^\alpha, B_1^\alpha)$  wegen  $Z^\alpha = Z$  **zentrisch ähnlich** zur **Figur**  $\mathcal{F}_2$  (Quadrat) **gekoppelt mit**  $\Delta(A_2, Z, B_2)$ . Damit können die beschrifteten Quadrate als Anzeigefiguren dieser ähnlichen Felder ersetzt werden durch die Dreiecke (2.2) mit dem gemeinsamen selbstentsprechenden Punkt  $Z$  als Drehstreckpunkt.

Mit diesen für die Konstruktive Elementargeometrie geometrisch essentiellen **Folgerungen F1 und F2** kann **Satz 1a** in Anlehnung an die um **Veranschaulichung bemühte Einführung** in die EBENE KINEMATIK (B.I. 447/447a, 1970) des in der Nachkriegszeit bis in die 80-er Jahre weit über Österreich hinaus bekannten Geometrielehrers und Forschers an der TU Wien (für **Technikstudenten**, insbesondere für **Maschinenbau, Lehramt Geometrie**) zu einer **grundlegend bedeutsamen Aussage** für konstruktiv-geometrische Behandlung von **Drehstreckbewegungen (analytisch: Transformationen der KINEMATIK)** in **ÄHNLICHKEITSEBENEN** mit euklidischer (und geringem Aufwand auch für nichteuklidische Ebenen mit Cayley-Kleinscher Metrik) erweitert werden.

### **SATZ 2.2: Basissatz der Euklidischen Ähnlichkeits-Kinematik (E-Ähnlichkeits-Kinematik):**

Für zwei mit einem STRECKENPAAR  $(A_1, B_1) \in g_1, (A_2, B_2) \in g_2$  gekoppelte FIGUREN,  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , aus zwei *gleichsinnig ähnlichen Feldern*  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  in der euklidischen Zeichenebene ist der **FIXPUNKT Z** des **Streckenpaares** bzw. der **Figuren** in den *Feldern* nach **Satz 1a** als **FUSSPUNKT** der **NORMALEN**  $({}_1y_2)$  aus **Punkt**  $G := g_1 g_2$  zur **Perspektivitätsachse**  ${}_1q_2$   $({}_1x_2)$  (für die zu  $g_i$  normalen, mit  $a_i, b_i$  **berandeten Parallelstreifen**) das **DREH-STRECK/STAUCH-Zentrum (DSZ)**. Diese durch Hintereinanderausführen (Produkt) von **DREHUNG** mit **Winkel**  $\alpha = \angle(A_1, Z, A_2)$  und **STRECKUNG/STAUCHUNG** mit Faktor  $\sigma := [A_2Z]:[A_1Z]$  zusammengesetzte **drehende und streckende/stauchende Transformation**  $\sigma \circ \alpha$  (Abbildung) von  $\mathcal{F}_1$  nach  $\mathcal{F}_2$  mit **Z** als Zentrum wird **DREHSTRECKUNG** zum **Punkt Z** genannt.

**Beweisidee:**  $\Delta(A_1, Z, B_1), \Delta(A_2, Z, B_2)$  sind ähnlich .... 🍏)

Aus diesem Basissatz **folgen** ohne großen Aufwand weitere **SCHLÜSSELSÄTZE** (Fundamentalsätze) der Ähnlichkeitsgeometrie, welche die Geometrie von 2L-TV-gleichen Punktreihen und 3L-TV-Dreiseitscharen reflektieren, nicht nur für schulgeometrische Euklidische Ähnlichkeitsebenen sondern auch **CK-kreisgeometrische** in **affinen Punkt-Geradenebenen** mit **CAYLEY-KLEINSchem Absolutgebilde**.

## 2.2 Geometrie, die durch 2L-TV-gleiche Punktreihen generiert wird:

(1) Einparametrische Scharen von konzyklischen Polygonen  $p_1, p_2, \dots, p_s$  mit einem gemeinsamen Punkt  $Z = Z_1 = Z_2 = \dots = Z_s$ , existieren auf Kreisen eines hyperbolischen Kreisbüschels mit  $Z$  als Drehstreckpunkt und dem zur Mittelpunktsgerechten  $m$  symmetrischen zweiten Doppelpunkt  $G$  der Polygon-Trägerkreise als Perspektivitätszentrum (siehe TAFEL II/4 und ff)

(2) Erzeugung der Hüllkurven  $c_{ij}$  der Verbindungsgeraden  $f_{ij}(t) := X_i(t)X_j(t)$  zugeordneter Punkte  $X_i(t), X_j(t)$  dieser Punktreihen  $p_i \{X_i(t)\}, p_j \{X_j(t)\}$  mit WINKELHAKEN-Bewegung für welche ein Winkelschenkel als Zentralgerade  $z(t)$  durch das Drehstreckzentrum  $Z$  gleitet und der freie, mit  $z(t)$  starr gekoppelte Schenkel  $f_{ij}(t)$  die Kurve  $c_{ij}$  als PARABEL mit  $Z$  als Brennpunkt umhüllt (siehe Abb. Seite 18 und TAFELN II, III)

Die Punktepaare  $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$  auf  $g_1, g_2$  legen mit den Einheitsstrecken  $e_i := [A_i, B_i]$  zwei lineare TV-gleiche Punktreihen fest (2L-TV-Punktreihen), siehe Gl. (1.1). Nach 2.1 können diese zeichnerisch-konstruktiv am raschesten und grafisch sehr genau vervollständigt werden mit der Perspektivitätsachse  ${}_1q_2 (\dots {}_1x_2)$ , die sich als Knotenpunktachse für die zu  $g_1, g_2$  normalen, zu  $g_i \{X_i(t)\}$  perspektiven Parallelgeradenbüschel  $q_i(t)$  ergibt. Auf  ${}_1q_2$  liegen die Schnittpunkte (Knotenpunkte)  ${}_1Q_2(t)$  zugeordneter Geraden  $q_1(t), q_2(t)$  der zu  $g_i$  normalen Parallelgeradenbüschel. Nach 2.1, Basissatz ist der Fixpunkt  $Z$  als Fußpunkt der Normale  $({}_1y_2)$  aus  $G$  auf  ${}_1q_2 (\dots {}_1x_2)$  Drehstreckzentrum, nicht nur für  $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ , sondern für je zwei, diesen Paaren TV-gleich zugeordnete Punkte  $(X_1(t), X_2(t))$  aus beiden L-TV-gleichen Punktreihen.

Wählen wir die Punkte  $A_i, B_i$  als Ursprungs- und Einheitspunkte für die Koordinatenzuordnung

$$(2, 3) \quad A_i =: X_i(0), \quad B_i =: X_i(1),$$

so können wir nach 2.1, Folgerung 1 jedem Punktequadrupel  $\{G, Z, X_1(t), X_2(t)\}$  nach THALES einen Kreis  $k(t), t \in \mathbb{R}$ , mit der Durchmesserstrecke  $[G, Z]$  zuordnen. Die Mitten  $M(t)$  dieser Kreise laufen auf einem zu  ${}_1q_2$  parallelen, gemeinsamen Durchmesser  $m$  und die Punktreihe  ${}_1q_2 \{ {}_1Q_2(t) \}$  der Knotenpunkte geht durch zentrische Streckung der Mittelpunktsreihe  $m \{ M(t) \}$  aus dem Punkt  $G$  mit dem Faktor 2 hervor. Die beiden Punktreihen sind also TV-gleich.

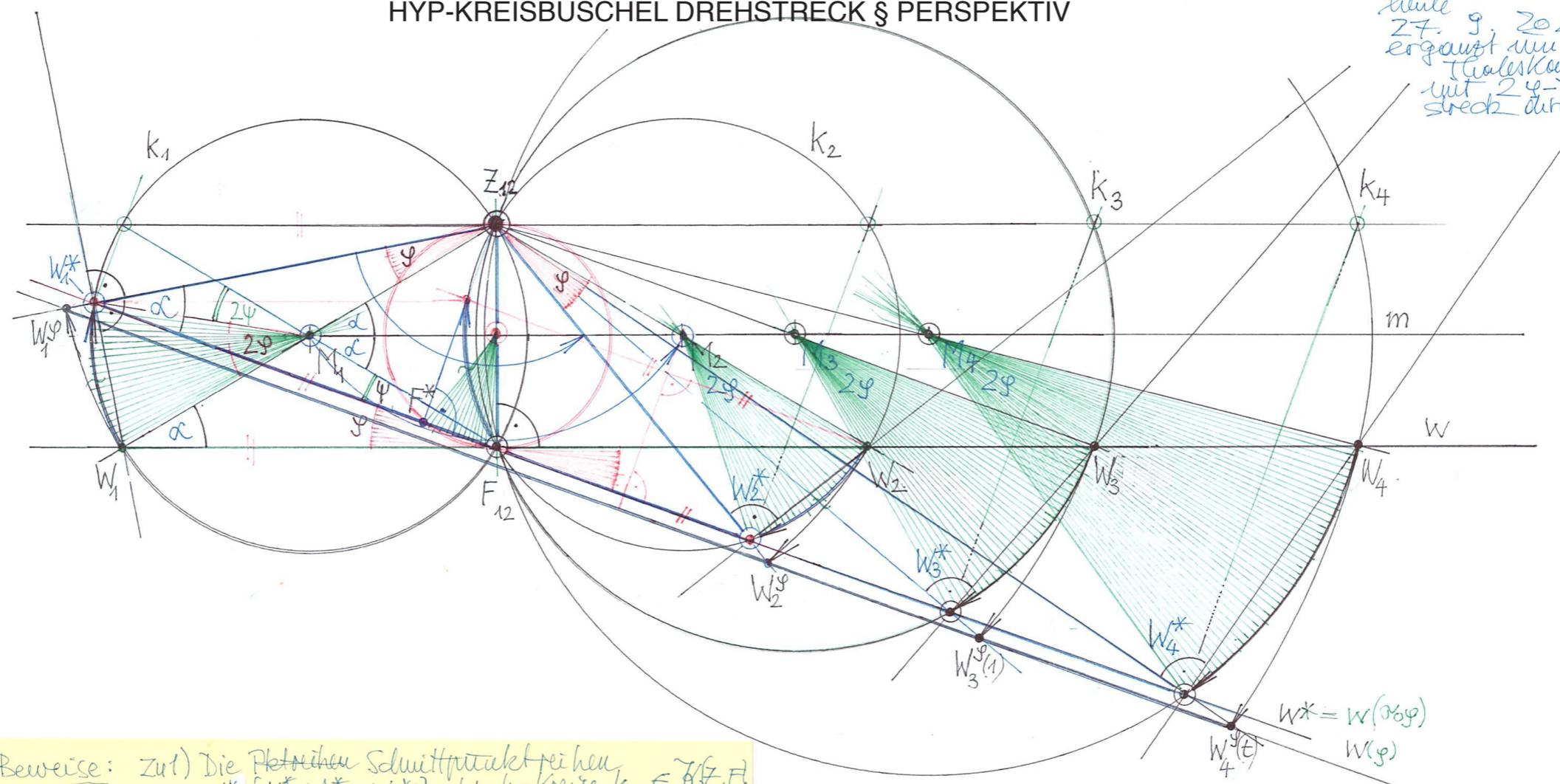
**Bezeichnung:** Eine einparametrische Menge von Kreisen  $k(t), t \in \mathbb{R}$ , die zwei reelle Grundpunkte  $G, Z$  als Grundpunkte besitzt, wird hyperbolisches Kreisbüschel genannt. Wir schreiben dafür abkürzend

$$(2.4) \quad \mathcal{K}\{G, Z, k(t)\} := \{ k(t) / [G, Z] \in k(t), t \in \mathbb{R} \}.$$

Die Mittelpunkte  $M(t)$  dieser hyp-Kreise  $k(t)$  liegen auf der Streckensymmetralen  $m = S(G, Z)$  ( $S$  für Streckensymmetrale) der Grundpunkte  $G, Z$  von  $\mathcal{K}\{G, Z, k(t)\}$ . Die Spiegelpunkte  $G^M(t)$  von  $G$  und  $Z^M(t)$  von  $Z$  an der Kreismitte  $M(t)$  von  $k(t)$ , für  $t \in \mathbb{R}$ , laufen auf den zu  $m$  parallelen Geraden  $w_Z$  (inzident mit  $Z$ ) bzw.  $w_G$  (inzident mit  $G$ ). Die zwei Punktepaare  $\{G, G^M(t)\}, \{Z, Z^M(t)\}$  sind jeweils Endpunkte für Durchmesser von  $k(t)$  als zweifachem Thaleskreis zur Strecke  $[G^M(t), Z^M(t)]$ . (siehe dazu TAFEL II/3)#

# TAFEL II/3 HYP-KREISBÜSCHEL DREHSTRECK & PERSPEKTIV

25.11.2021  
heute  
27.9.2022  
ergänzt um  
Thaleskonfigs  
mit 2φ-Dreh-  
streck drehst



Beweise: zu 1) Die Pktreihen Schnittpunktreihe  $w^* \{W_1^*, W_2^*, W_t^*\}$  der h-Kreise  $k_t \in \mathcal{H}(Z, F)$  mit den Geraden  $w^* := w(\varphi)$  aus Büschel  $Z := Z_{12}$   $F := F_{12} \{W_1, w(\varphi)\} \neq w(\varphi) = \varphi$  sind TV-gleich da: Thaleskonfigurationen  $\{Z, M_t, W_t, W_t^*\}$  Dreh = Streckähnlich mit  $m$  bzw.  $w(\parallel m)$  als Bahnkurve.  
zu 2) Folgerung 1: Die Drehstrecklagen der Punkte  $W(t) = W$  zu Pkten  $M(t)$  zum  $\angle 2\varphi$  liegen nach 1) auf der Drehstrecklage  $w^{2\varphi}(M(t))$   $\{Z, W_t^*\}$  Thaleskreise  $k(t)$  über den Strecken  $[Z, W_t]$   
zu 2) Folgerung 2: Die Drehstrecklage  $w^\varphi$  von  $W$  zum Drehpunkt  $Z$  zum Winkel  $\varphi$  liegt  $\parallel$  zu  $w^{2\varphi}(M(t))$  Durch Stauchung  $[Z, W_t^{2\varphi}]$ ;  $[Z, W_t^\varphi]$  in  $w^{2\varphi}(M(t))$  über

heute 27.9.2022  
Die Drehstrecklagen der Pktreihe  $w \{W_1, W(t)\}$  um  $Z$  durch die Thalesdrehstrecke einzelner Punkte um die Mittelpkte  $M(t)$   $\parallel$  mit  $(2\varphi)$  erstet  
25.11.2021

**Satz 2.3: Fundamentalsatz: 2L-TV-Punktreihen als Schnittpunktreihen der Kreise** (als Ordnerkreise) eines **hyp-Kreisbüschels** auf **Geradenpaaren** durch einen **Grundpunkt G** bzw. **Z** von  $\mathcal{K}\{G,Z, k(t)\}$

**Teil 1:** Sind  $k(t)$  Kreise eines **hyp-Kreisbüschels**  $\mathcal{K}\{G,Z; k(t)\}$  mit Mitteln auf der Symmetralen  $m:=S(G,Z)$  der Grundpunkte  $G, Z$ . Sind weiters  $g_i, g_j$  zwei Geraden des Geradenbüschels  $\mathcal{G}\{g_0, g_1, \dots, g_s\}$  mit dem Scheitel  $G$ , so sind die Reihen mit  $X_u(t):=X(u,t), u \in \{0,1,2,\dots,u, \dots,s\}, t \in \mathbb{R}$ ,

**(2.3a)**  $g_i\{X_i(0), X_i(1), \dots, X_i(t)\}$  und

**(2.3b)**  $g_j\{X_j(0), X_j(1), \dots, X_j(t)\}$  für  $i,j \in \{0,1,2,\dots,u, \dots,s\}, t \in \mathbb{R}$ ,

**TV-gleich** (siehe Gl.(1.3)). Aus dem **Basissatz 2.2.** folgt: Jede Strecke, etwa  $(X_i(0), X_i(t))$  der **Punktreihe**  $g_i\{X_i(0), X_i(1), \dots, X_i(t)\}$  kann durch **Drehstreckung** um das **Drehstreckzentrum Z** in die zugeordnete Strecke  $(X_j(0), X_j(t))$  auf  $g_j$  verlagert werden. Eindrucksvoller aber ist die aus Göl.(2.2) folgende Tatsache

**Teil 2: (siehe Abb. auf Seite 18)** die Ecken  $X_i(t), X_j(t)$  der **Radialstrahldreiecke**

**(2.4a)**  $\Delta(t):= \Delta\{X_i(t), Z, X_j(t)\}$ ,

deren Basisstrecke  $[X_i(t), Z, X_j(t)]$  die Verbindungsgeraden

**(2.4b)**  $f_{ij}(t):= X_i(t) X_j(t)$

trägt, wandern wegen der **Ähnlichkeit** dieser **Stützdreiecke** (2.4a) bei einer **DREHSTRECKBEWEGUNG** mit **Z** als **Zentrum** und  $t \in \mathbb{R}$  als Zeitparameter auf den Geraden  $g_i, g_j$ . Der analytischen Darstellung dieser linearen TV-gleichen **Eckpunkt-Bahncurven** der Verbindungsstrecken der Punkte  $X_i(t), X_j(t)$  auf  $g_i$  bzw.  $g_j$

**(2.5)**  $x_i = a_i + t(b_i - a_i)$  für  $t \in \mathbb{R}$

ist diese elegante Zuordnung durch **Ordnerkreise** aus einem hyp-Kreisbüschel niemals ohne geometrische Einsicht anzusehen.

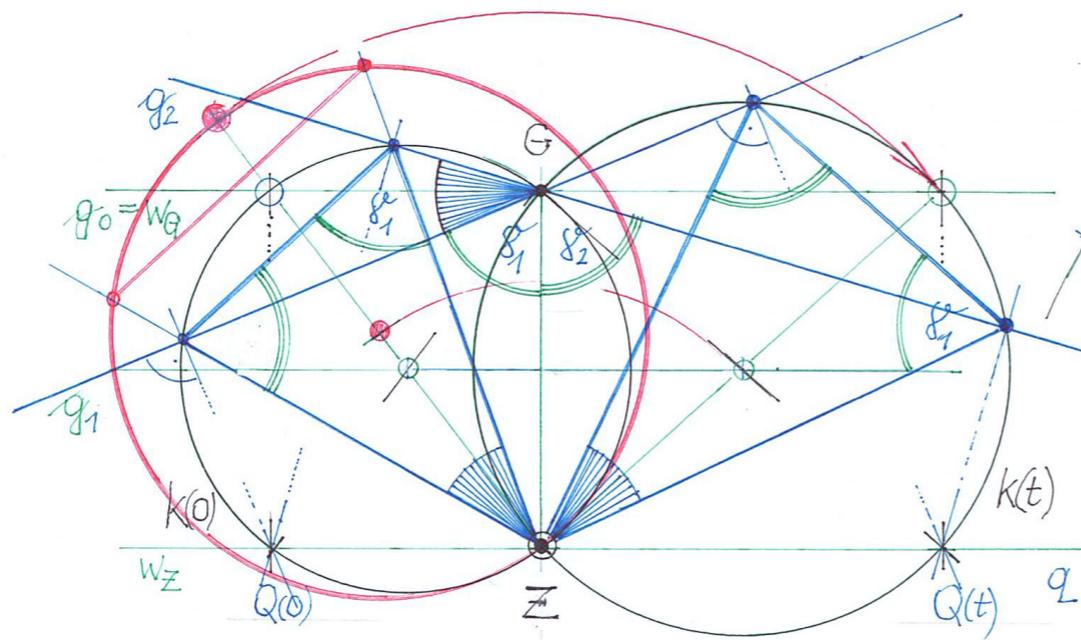
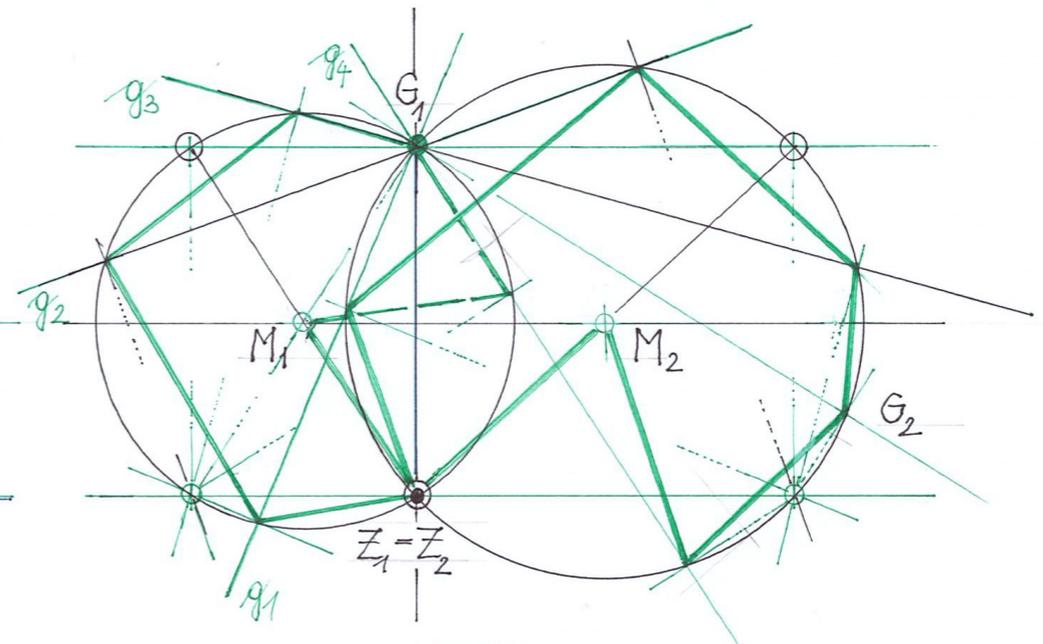
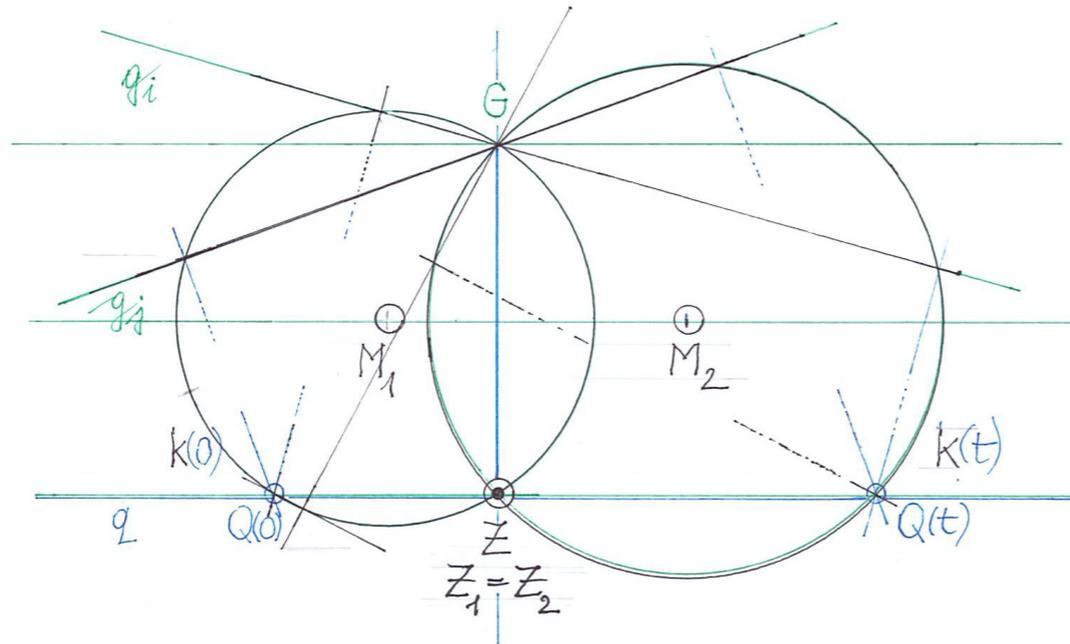
**Beweis für Teil 2:** Nach dem Satz von THALES zielen die Normalen zu  $g_i$  bzw.  $g_j$  in Punkten  $X_i(t) \in g_i$  bzw.  $X_j(t) \in g_j$  durch den Gegenpunkt  $G^M(t)$  des gemeinsamen Punktes  $G$  aller Kreise  $k(t)$ . Daher stimmen die Peilwinkel zu den Polygoneckpunkten  $\{X_0(0), X_1(0), \dots, X_s(0)\}, \{X_0(1), X_1(1), \dots, X_s(1)\}, \{X_0(t), X_1(t), \dots, X_s(t)\}$  aus den Normalenknotenpunkten  $G^M(0), G^M(1), G^M(t)$  nach dem Peripheriewinkelsatz mit den Winkeln des Geradenbüschels  $\mathcal{G}\{g_0, g_1, \dots, g_s\}$  überein. Die Winkel der Radialstrahlen  $z_i:= ZX_i$  aus  $Z$  gegen  $f_{ij}(t), \angle\{ZX_1, f_{ij}(t)\}$  und  $\angle\{f_{ij}(t), X_2Z\}$  stimmen mit den Peilwinkeln aus dem vierten konzyklischen Punkt  $G \in k(t)$  hin zu  $X_2, Z$  und  $X_1, Z$  überein

**(2.5)**  $\angle\{ZX_1, f_{ij}(t)\} = \angle(GZ, g_2) \quad \angle\{f_{ij}(t), X_2Z\} = \angle(g_1, GZ).$

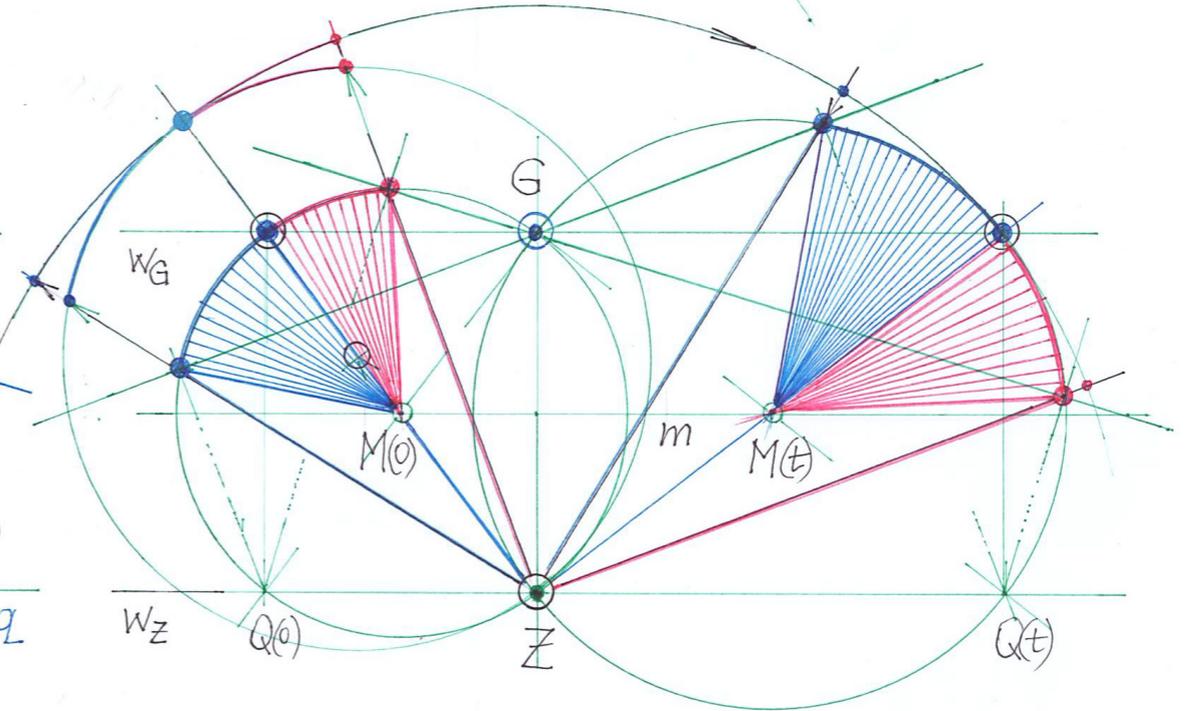
Damit sind diese Schenkelwinkel fest für alle  $t \in \mathbb{R}$ . siehe dazu Abb. 🍏

**Folgerungen: Satz 2.3** ist ein **Schlüsselsatz** für elegante **geometrisch-konstruktive Analyse** von vielen Konfigurationen mit merkwürdigen Punkte die Gunter WEISS in [advanced elementary geometry -plauground for jung and old] angibt, insbesondere für die von H. EBISUI ins Netz gestellten Thesen zu Kompositionen mit Ketten ähnlicher POLYGONEN, bei denen je zwei Nachbarn ein Punkt  $Z=Z_i=Z_{i+1}$  als Drehstreckpunkt gemeinsam haben. Damit hat H. EBISUI uns Europäische Euklidiker in der global aufgeblasenen Fake-

TAFEL II/4  
 HYP-KREISBÜSCHEL DREHSTRECK & PERSPEKTIV



Beweis mit Peilwinkelsatz



...mit Drehstrecksatz 2.3 für THALES-Blütenkonfiguration

2. Nov. 2023

news- , Blöf-, Automaten- Durchgangsphase herausgefordert, mit jugendlicher Gesinnung die ursprünglichen alten, hellenistischen Beweismethoden (→ HILBERT: die Kraft des geometrisch-algebraisch gestützten argumentativen Beweises) Neu zu beleben als brotlose aber immer noch begeisterungsfähige, mit axiomatisch-geometrischen Denkbewegungen zu essentiellen Einsichten/Evidenzen vordringenden Denkbewegungen. Die **methodischen Ansätze** für die **Dechiffrierung** von **Punkt-Geraden-Kreis-KONFIGURATIONEN** mit **Konjunktions-Merkwürdigkeiten** in **CK-Kreis-KONFIGURATIONEN** in **Affine Ebenen** zu übertragen und diese Ebene mit passend gewählter ABSOLUTER METRIK nach CAYLEY-KLEIN-Metrik auszustatten ist ein naheliegendes und reizvolles Übungsgelände für Mathe-Geometrie Lehrerinnen, um das festgefahrene Pflichtprogramm an den Schulen aus einer etwas höheren Warte mit heiterem Gemüt zu betrachten.

## 2.3 Drehstreckbewegung - Winkelhakenbewegung

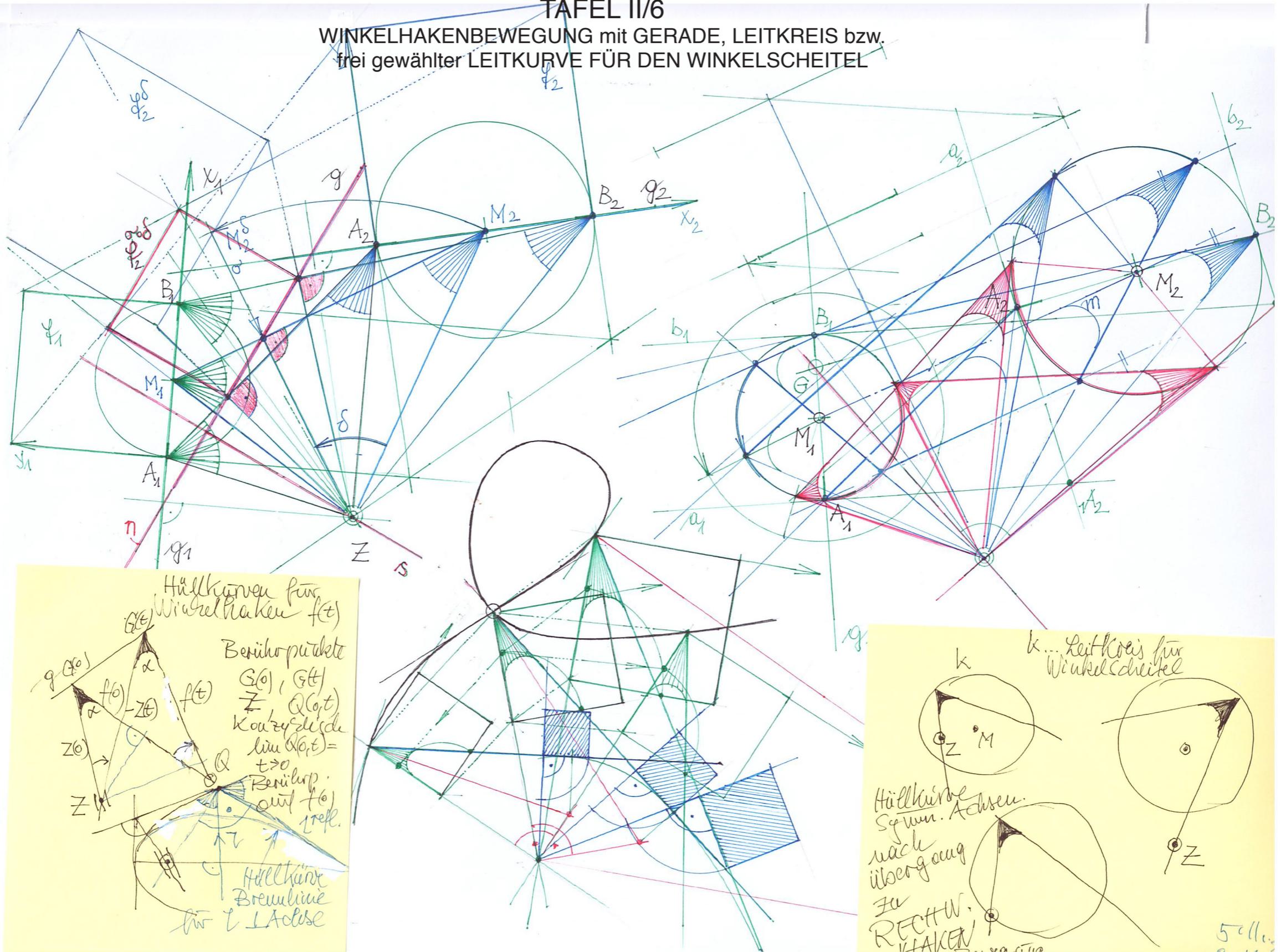
Ausführliche Beschreibung fehlt

siehe dazu: Tafel II /4,5,6  
Tafel III/1,...ff

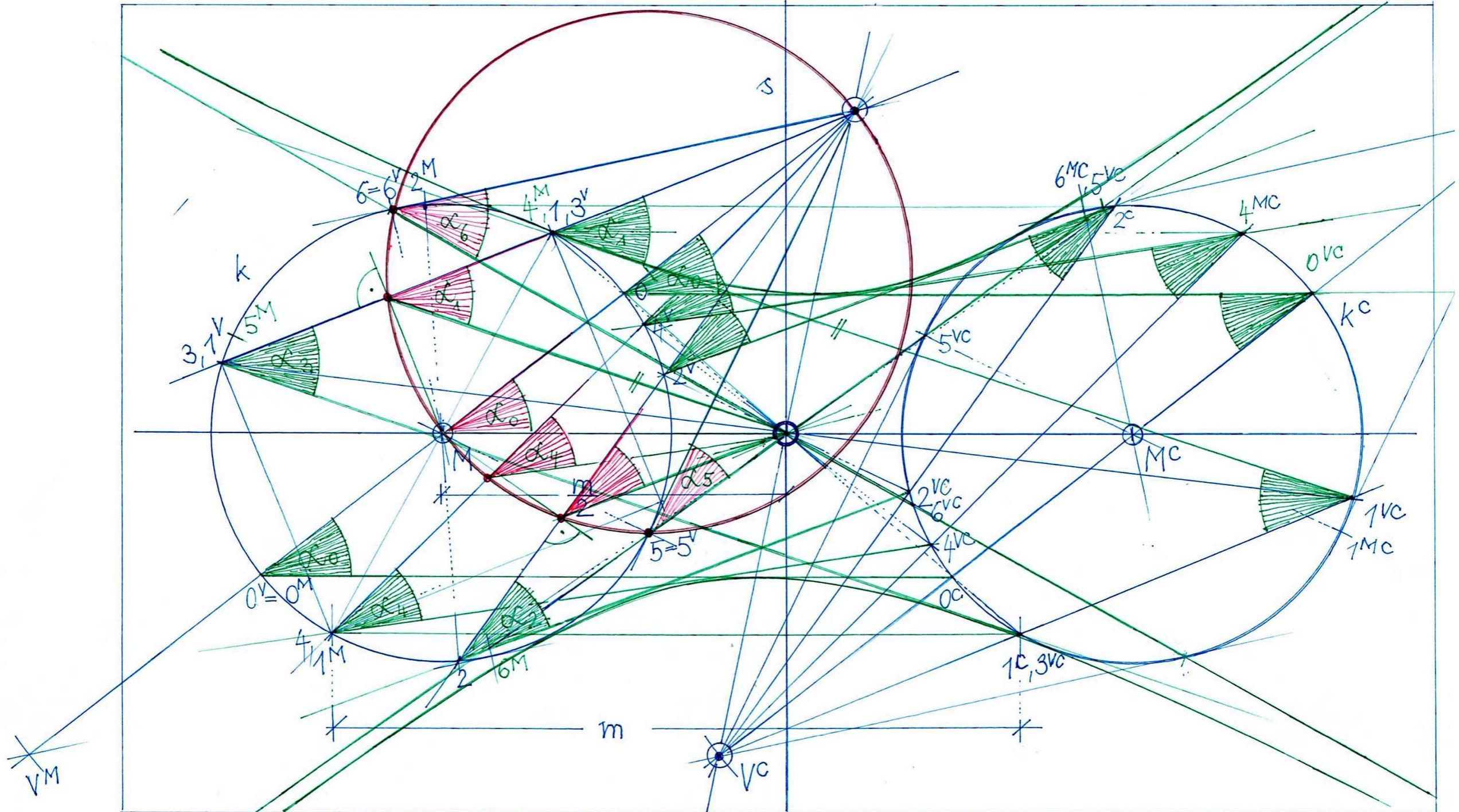


TAFEL II/6

WINKELHAKENBEWEGUNG mit GERADE, LEITKREIS bzw. frei gewählter LEITKURVE FÜR DEN WINKELSCHEITEL



TAFEL II/7  
WINKELHAKENBEWEGUNG mit LEITKREISEN FÜR DEN WINKELSCHEITEL  
Konstruktive Lösung zu einer Aufgabe in IBDG 2/21?



**3 Zur Geometrie von 3 linearen, TV-gleichen Punktreihen (3L-TV-Punktreihen:  $g_i\{A_i, B_i, X_i(t)\}$ ,  $i \in (1,2)$ ) und ihrer einparametrischen Schar von Dreiseiten  $\mathcal{D}\{f_{ij}(t)\}$ ,  $f_{ij}(t) := X_i(t)X_j(t)$ , mit Parabeln  $c\{f_{ij}(t)\}$  als Hüllkurven der Seitengeraden.**

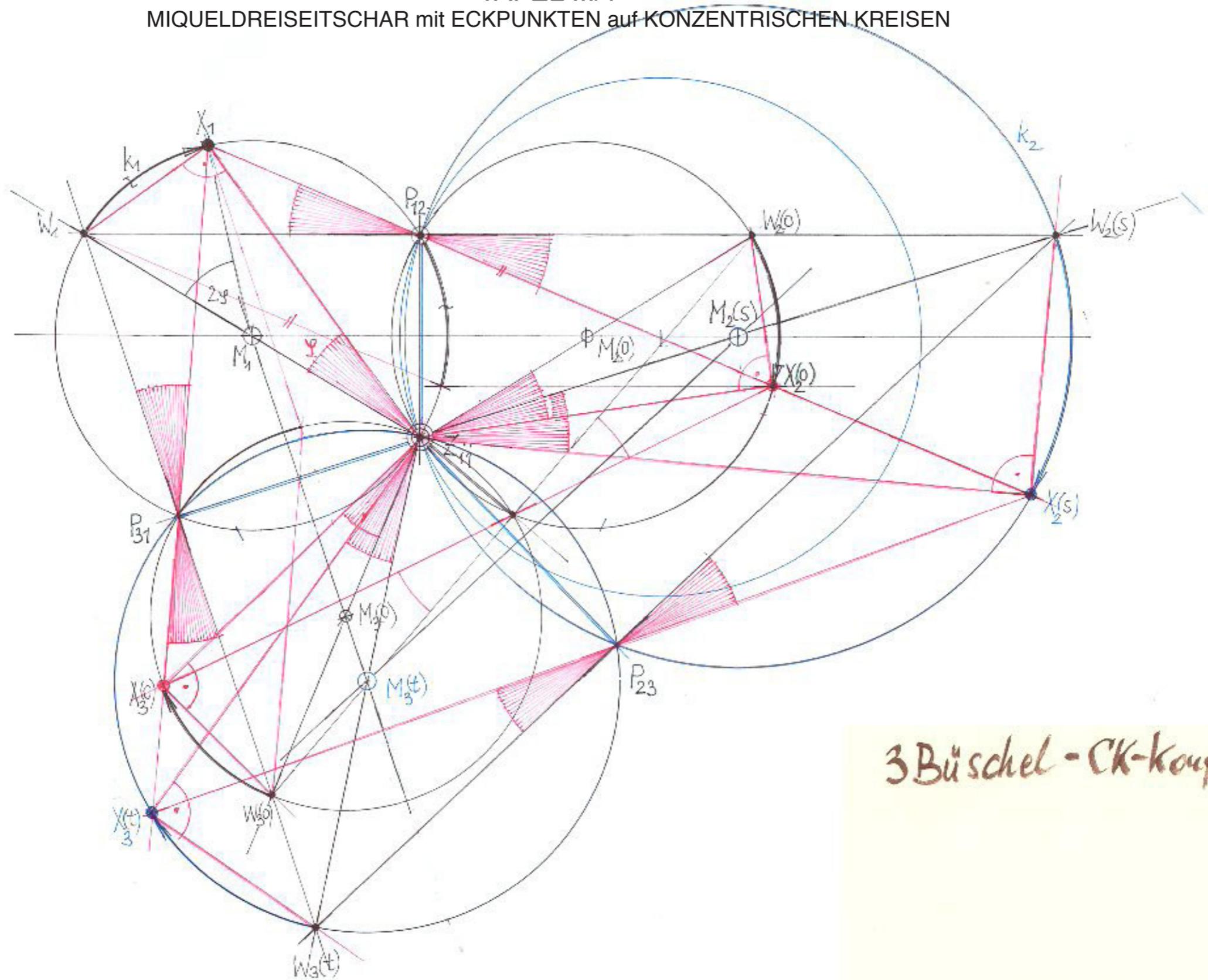
**3.1 Konstruktion des Fixpunktes, der Fixgeraden  $v, w$  für die Affin-Bewegung einer 3L-TV-Dreiseitscharen**

Im algebraischen Sinne existieren für jede 3L-TV-Dreiseitschar in der affinen Ebene über  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  zwei Trägergeraden  $v, w$ , mit degenerierten Dreiseiten. Die Dreiseitschar wird mit den Fernpunkten  $V, W$  der Geraden  $v, w$  als **CK-absoluten Punkten** in der **projektiv abgeschlossenen affinen Ebene** eine **CK-Drehstreckenschar** mit dem Schnittpunkt  $Z = vw$  als Drehstreckzentrum. Kegelschnitte  $c(t) := \{X_1(t), X_2(t), X_3(t), V, W\}$ , welche die Ecken  $X_i(t)$  eines Dreiseites  $\mathcal{D}\{f_{ij}(t)\}$  und die absoluten Punkte  $V, W$  enthalten sind affin-invariant mit den Dreiseiten als CK-Umkreise verbunden. Mit **Satz 2.3** können die Dreiseite dieser Scharen als Anschlusspunktdreiecke von CK-MIQUEL-Kreistripeln gedeutet werden.

**3.2 Die SCHAAL-BURMESTERAUFGABE.** Siehe TAFELN III/2 und III/3

**3.3 Die dualen MIQUEL-Konfigurationen: Einparametrische CK-konforme Dreiseitscharen, deren Eckpunkte auf 3 CK-Kreisen  $k_i$  mit einem gemeinsamen Punkt  $Z$  laufen, wobei deren Seitengeraden in den Büscheln mit den Doppelpunkten  $A_{ij}$  als Scheitel variieren.** Siehe TAFEL III/4

TAFEL III/1  
 MIQUELDREISEITSCHAR mit ECKPUNKTEN auf KONZENTRISCHEN KREISEN



3 Büschel - CK-Kauf

TAFEL III/2  
(zu Abschnitt 3.2)

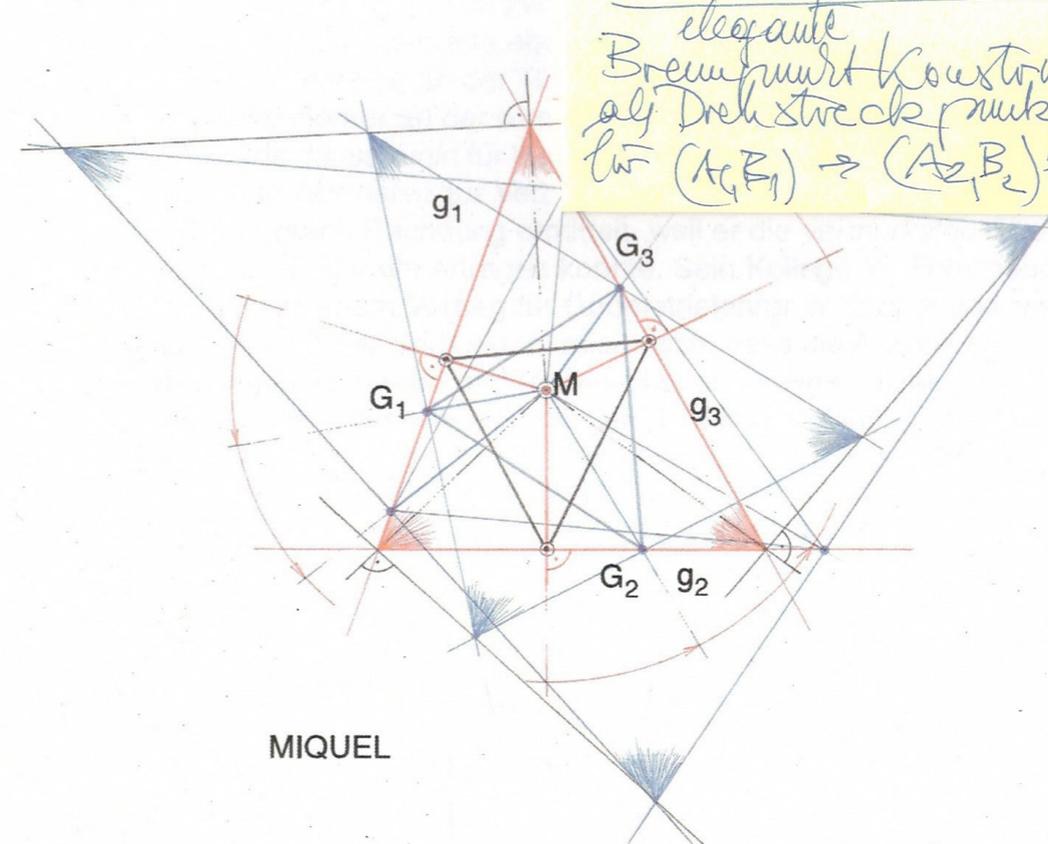
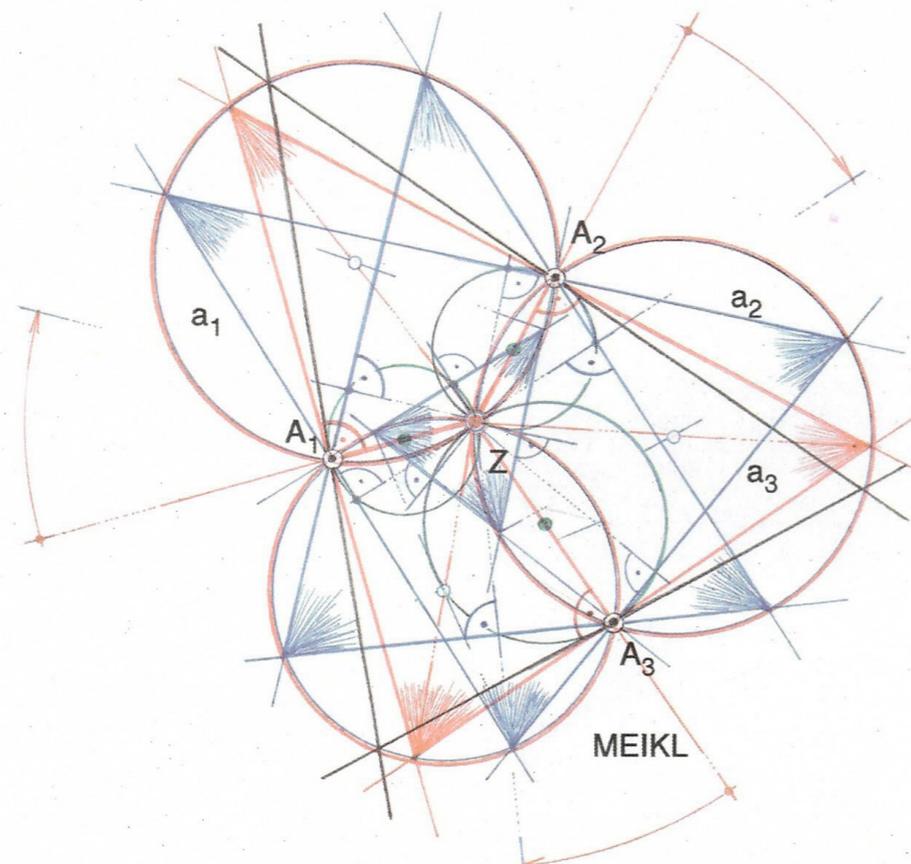
Die durch zwei Linienelemente induzierten geometrischen Konfigurationen in der Euklidischen Anschauungsebene und deren räumliche Analoga.

Hinweise auf Generatoren von Drehstreckungen in der Kreis-Dreiecksgeometrie durch ähnlichkeitsgeometrische Deutung von Angabe-Konf

Beispiel: zwei ähnlichkeitsgeometrisch duale Konfigurationen

Zusammenfassung meiner  
Referates in Frobl  
Herbst 2017

elegante  
Brennpunkt Konstruktion  
als Drehstreckpunkt ab  
für  $(A_1, B_1) \rightarrow (A_2, B_2)$   $3e2$

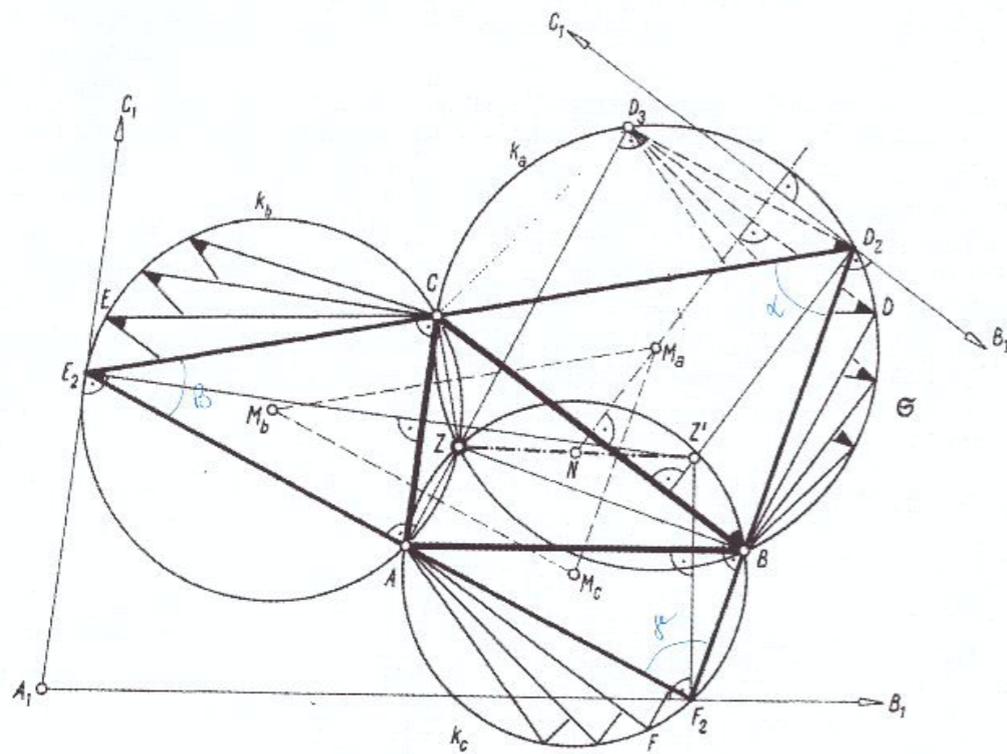


**Zum Einstieg in die Linienelementgeometrie:** Werden sämtliche konforme Dreiecke in der MEIKL-Konfiguration (li.: 3 kongruente Geradenbüschel mit Scheitel  $A_i$ ) auf das rote (größte) Dreieck abgebildet, so stellt sich die erweiterte MIQUEL-Konfiguration (Dreiseit, mit speziellen, zum M-Punkt *drehstreckungsähnlichen Punktzeihen*) ein (ab 3.2). Die Angabe der MEIKL-Konfiguration durch ein [3-Punkt ( $A_i$ ) mit 3-Gerad ( $a_i$ )], also 3 Linienelemente ( $A_i, a_i$ ), ist ähnlichkeitsgeometrisch eleganter als die MIQUEL-Angabe: 3-Dreiseit ( $g_i$ ) mit Dreipunkt ( $G_i$ ) (auch drei Linienelemente, aber für die Konstruktion von M, spielen dann die Kreise durch die Eckpunkte  $A_{12}, A_{23}, A_{31}$  eine Zaubertrick-Rolle zum Generierung des rundum wirkenden Drehstreckzentrums). Bei MEIKEL stellt sich das Drehstreck-Zentrum Z als Umfassungsdreieck mit Inhalt NULL des Grenzdreieites bzw. als Schnittpunkt der Bahnkurven (Peripheriekreise) der Dreiseitecken ein. Dieser Punkt Z ist dann in konstruktionsgeschichtlicher durchsichtiger Weise Drehstreckzentrum.

98

H. SCHAAL: Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder

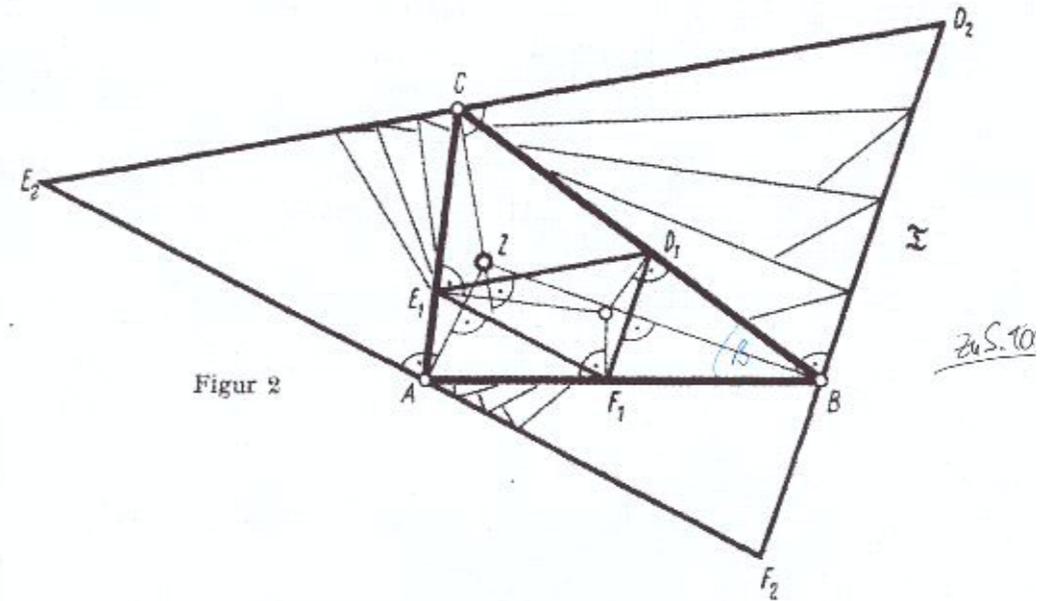
mit dem Dreieck  $DEF$  im Sinne der Ähnlichkeitsgruppe fest verknüpft ist, beschreibt dabei als Bahnkurve einen *Kreis durch  $Z$* . Es liegt daher jene *spezielle kreislinige Bewegung* des durch das Dreieck  $DEF$  bestimmten ähnlich-veränderlichen Systems



Figur 1

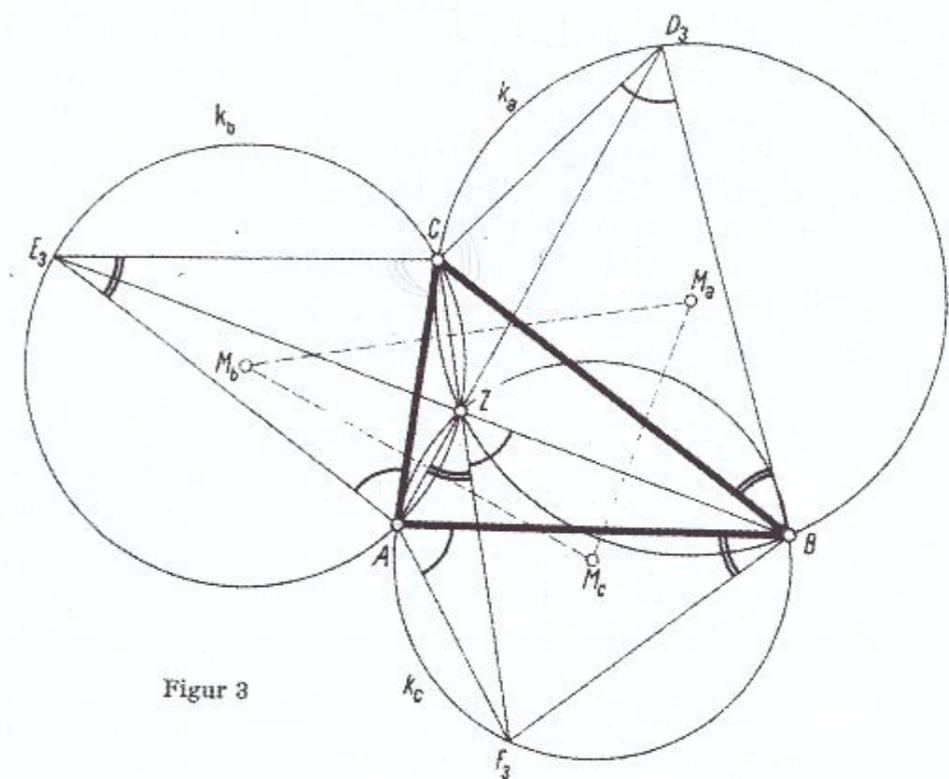
gegen das feste System des Dreiecks  $ABC$  vor, die L. BURMESTER in [5], S. 874-884 behandelte. Jede Gerade des bewegten Systems durchläuft dabei ein Bündel des festen Systems.

Das System  $DEF$  ist ein ähnlich-veränderliches System...



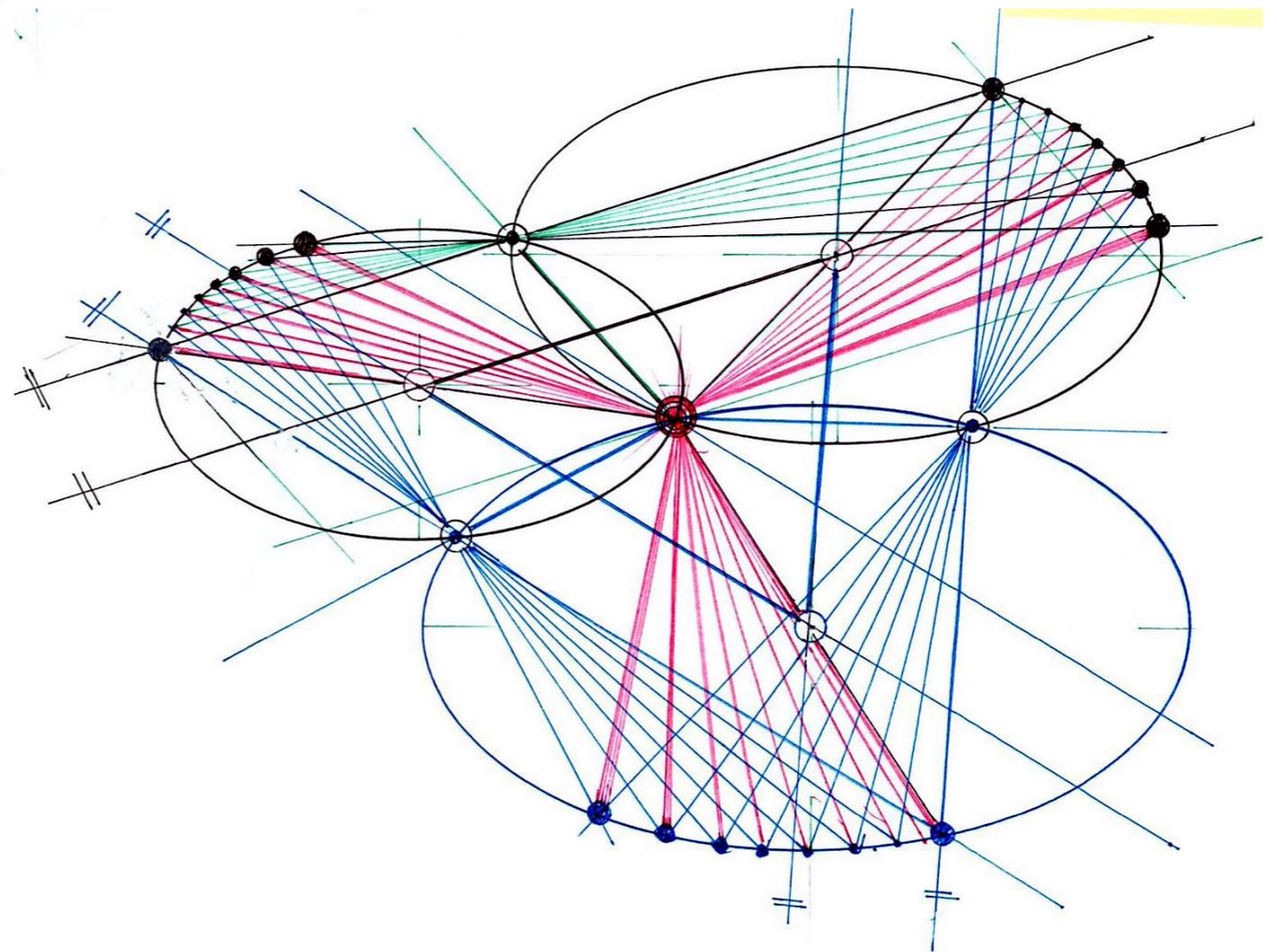
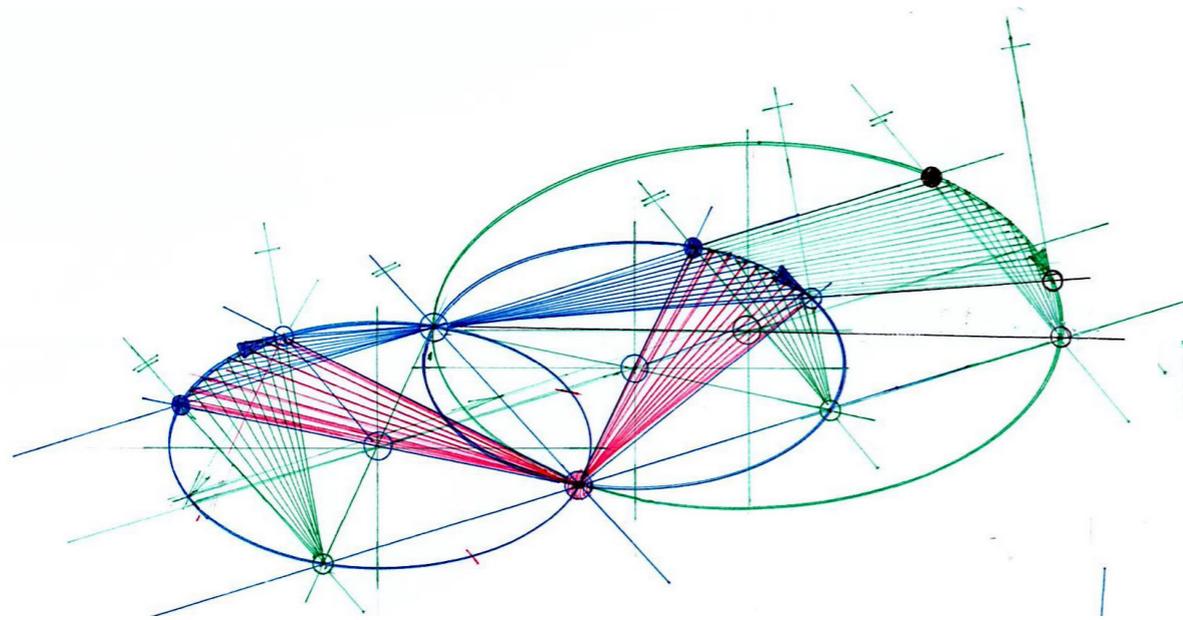
Figur 2

zu S. 10



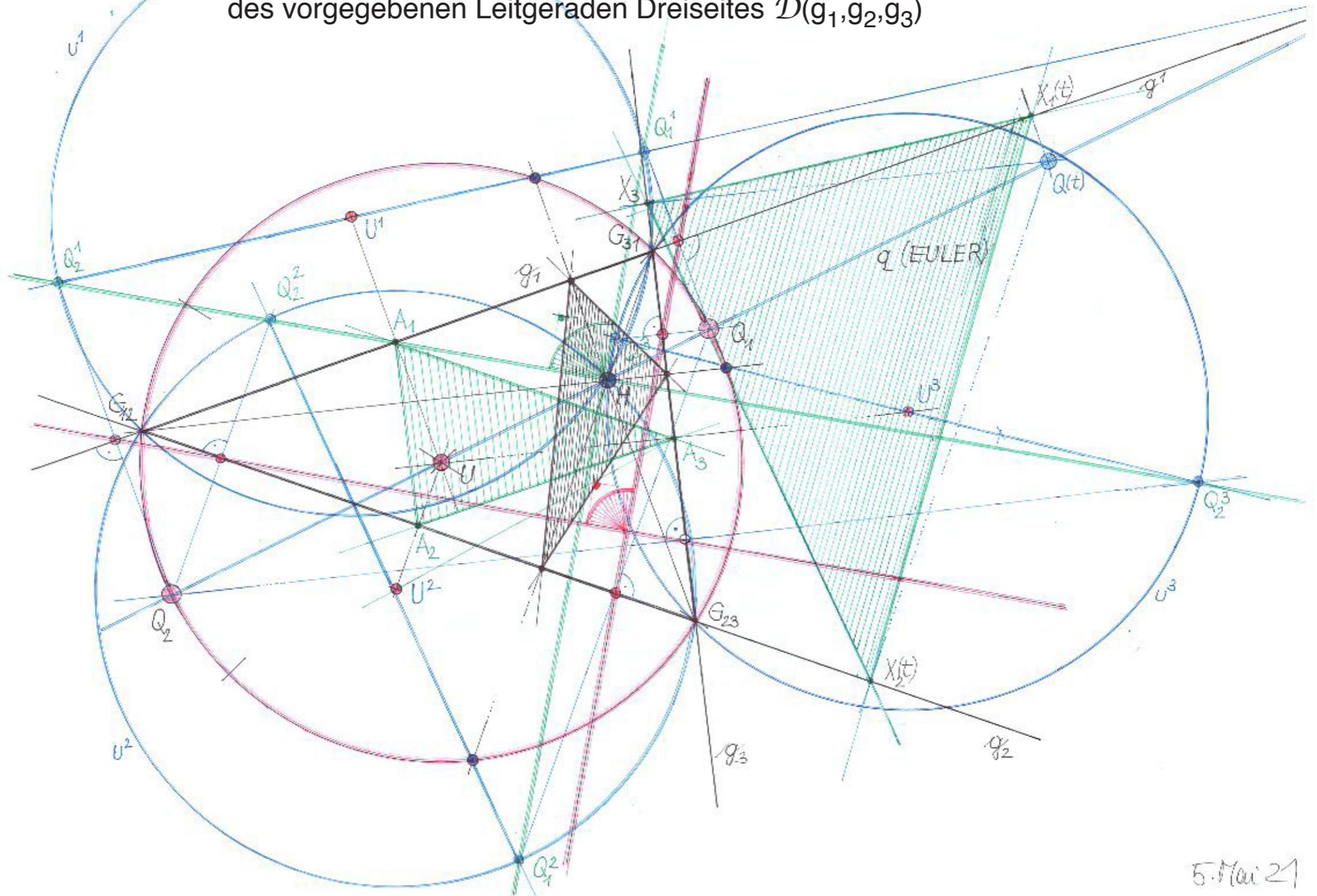
Figur 3

TAFEL III/4  
CK-Hyp-Kreisschar und CK-Kreistripel mit stetiger Schar konformer CK-MIQUEL-Kreise  
(s. Abschnitt 3.3)



TAFEL III/5

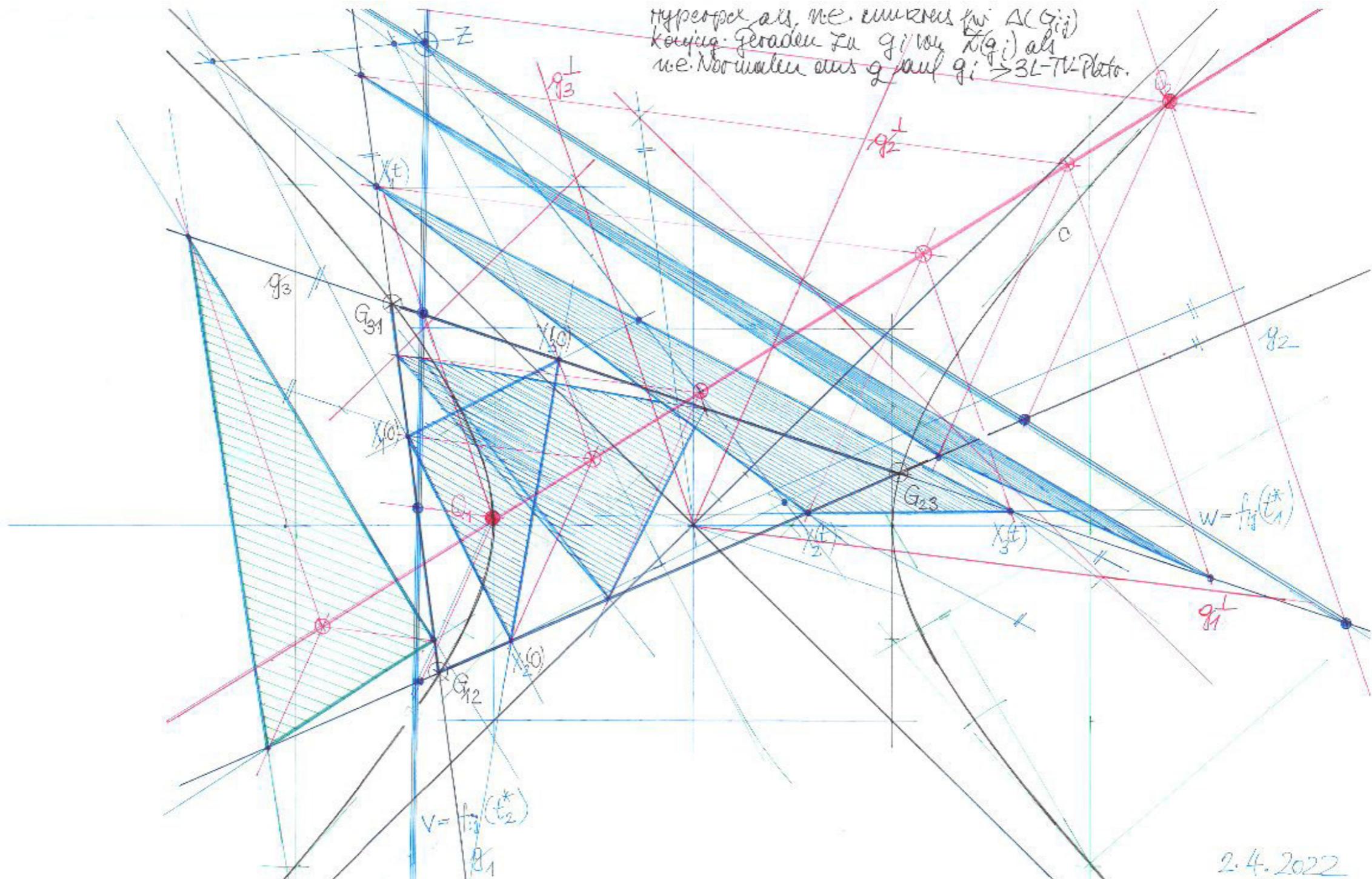
DREISEITSCHAR mit geometrisch speziellen TV-Punktreihen als Fußpunkte der Normalen aus PUNKTEN  $Q(t)$  der EULER-GERADEN auf die LEITGERADEN  $g_i$  des vorgegebenen Leitgeraden Dreiseites  $\mathcal{D}(g_1, g_2, g_3)$



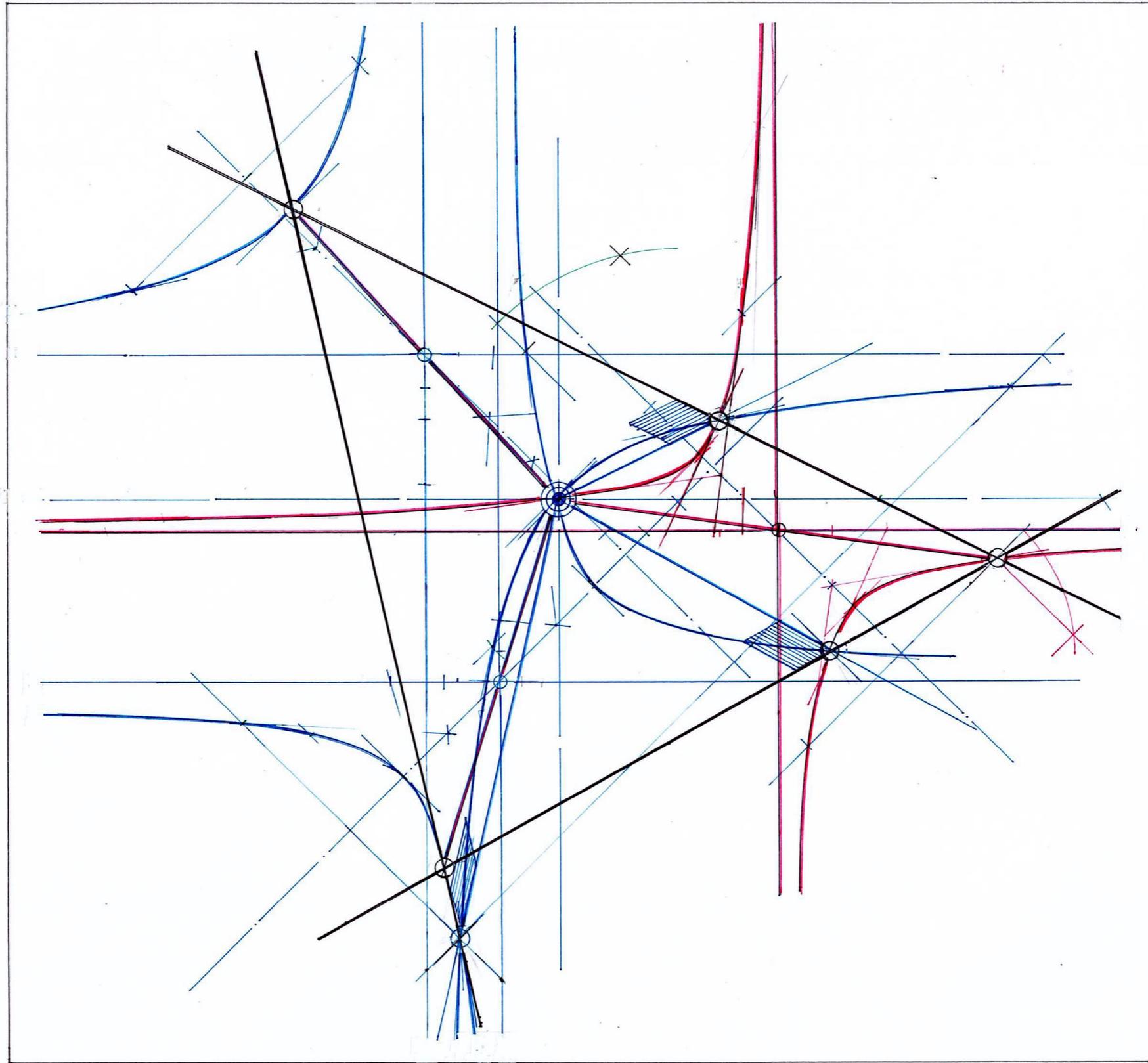
5. Mai 21

### TAFEL III/6

Als CK-UMKREIS des AUSGANGSDREIECKS  $\Delta(G_{ij})$  wurde hier eine HYPERBEL  $c$  gewählt. Analog zum euklidischen Beispiel auf Tafel III/5 sind die CK-Normalen aus Punkten  $Q$  der Tripelgeraden  $q$  hier konjugierte Geraden zu  $g_i$  bzgl. der Hyperbel als CK-Umkreis. Die drei Fußpunkte der Schnittpunkte  $Q^*$ ,  $Q^{**}$  von  $q$  mit  $c$  sind deshalb auch hier kollinear und liegen auf Trägergeraden  $v$ ,  $w$ .



TAFEL III/7  
CK-MIQUEL-Kreistripel mit Hyperbeln

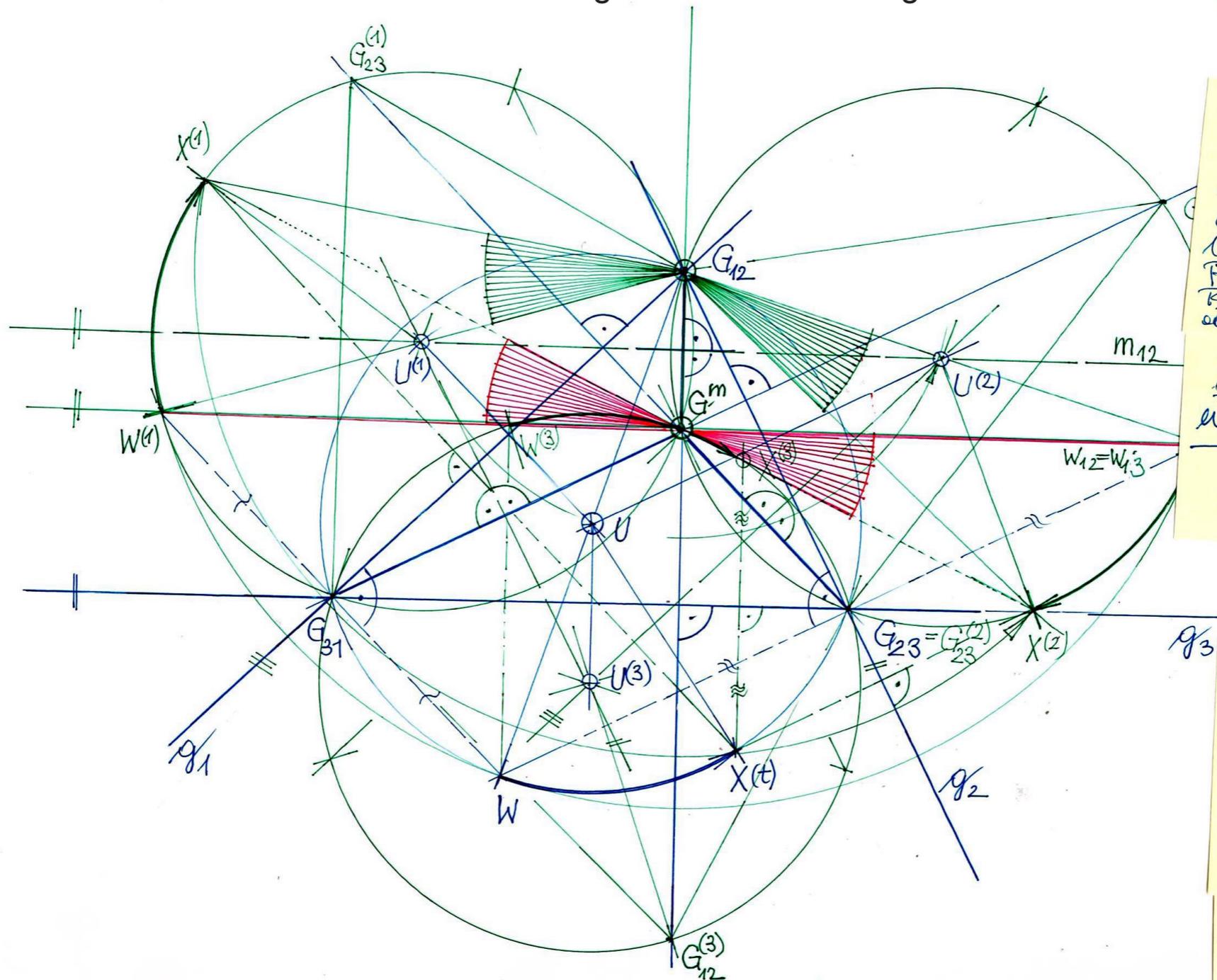


12.1.2023

TAFEL III/8

BEWEIS für die INZIDENZ der WALLACE-GERADEN mit dem HÖHENSCHNITTPUNKT des AUSGANGSDREIECKS  
 Transformationsgeometrische Lösung

Do 26.11.2020



EBISAI These  
 mit 44 Teilen,  
 die nicht in eine  
 unvollständigen  
 Punkt reihe projektiv  
 Bündel von 4 Geraden  
 oder perp. Geraden  
 mit einer selbst-  
 entsprechenden  
 eingebunden sind.

das ist eine  
 fundamental  
 wichtige  
 Basis Konfiguration  
 die die Wallace  
 Höhenschnittpunkt  
 Koppelt

und Sonderfall  
 der dualen  
 Miquel (p.w. Miquel)  
 Brauerstr. Aufgabe  
 SCHAAE