

Aus Bekanntem  
Neues erzeugen.

---

**Dynamische Erzeugung  
der Archimedischen Körper  
aus den Platonischen Körpern  
mittels Flächenverschiebung**

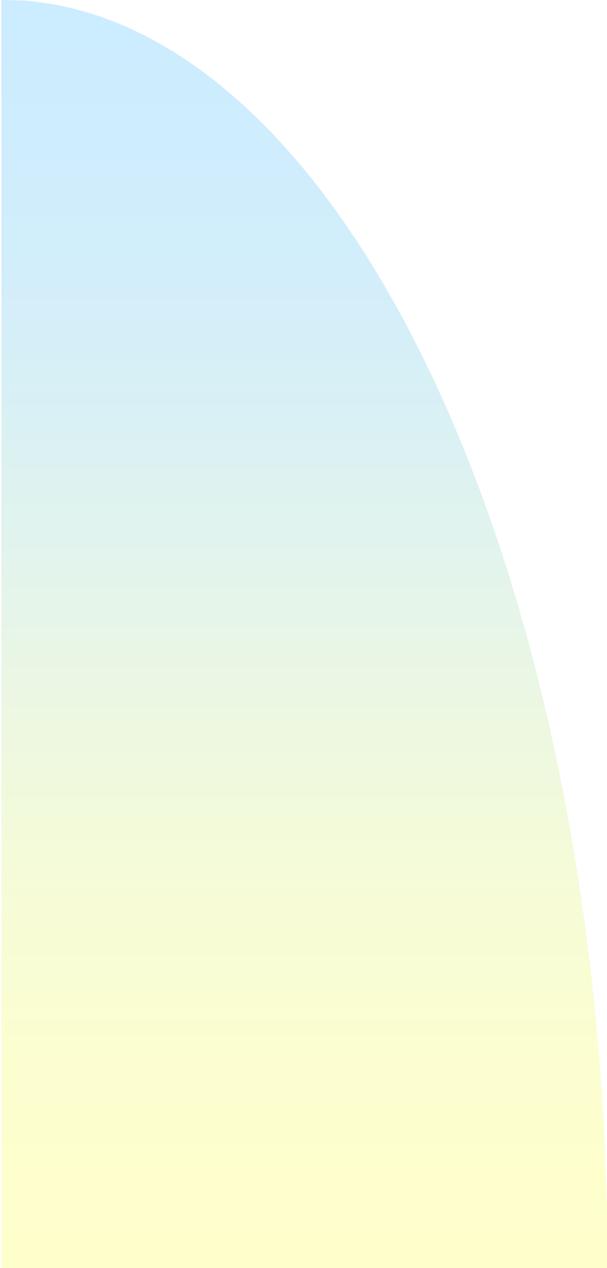
Prof. Dr. Heinz Schumann

PH Weingarten

Fak. II, Mathematik

[schumann@ph-weingarten.de](mailto:schumann@ph-weingarten.de)

41. Österreichische Fortbildungstagung für Geometrie  
Strobl am Wolfgangsee, 11. - 12. Mai 2022



## INHALT

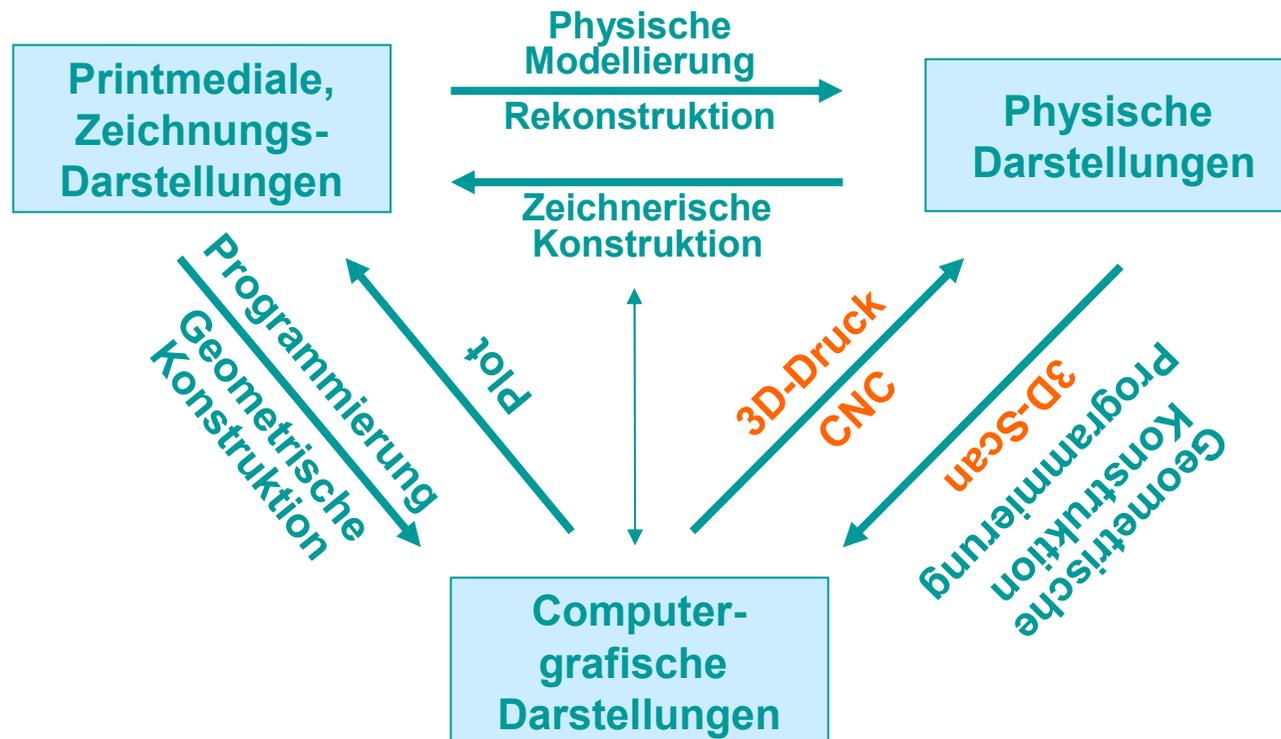
- **Einleitung**
- **Erzeugung der Archimedischen Körper aus den Platonischen Körpern mittels ECKENSTUMPFEN**
- **Erzeugung der Archimedischen Körper aus den Platonischen Körpern mittels “METAMORPHOSE”**
- **Erzeugung der Archimedischen Körper aus den Platonischen Körpern mittels FLÄCHENVERSCHIEBUNG**
- **Schlussbemerkung**

## **Pragmatische Grundlegung der computerunterstützten Raumgeometrie im Unterricht**

**Die raumgeometrischen Phänomene, die durch interaktive, im virtuellen Raum ausführbar Konstruktionen, Messungen, Manipulationen und Visualisierungen erzeugt werden, liefern die anschauliche Grundlage geometrischer Theoriebildung sowie die Konkretisierung geometrischer Theorie.**

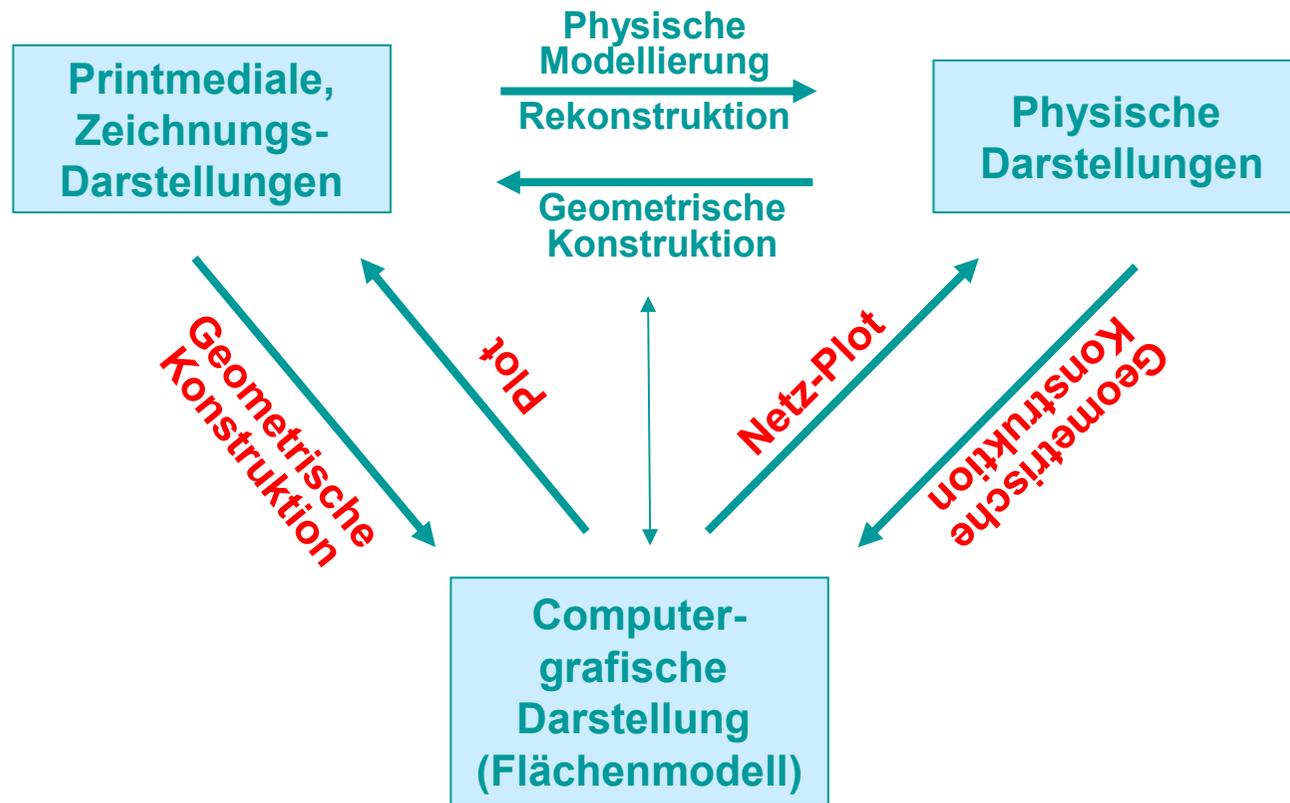
# Raumgeometrie

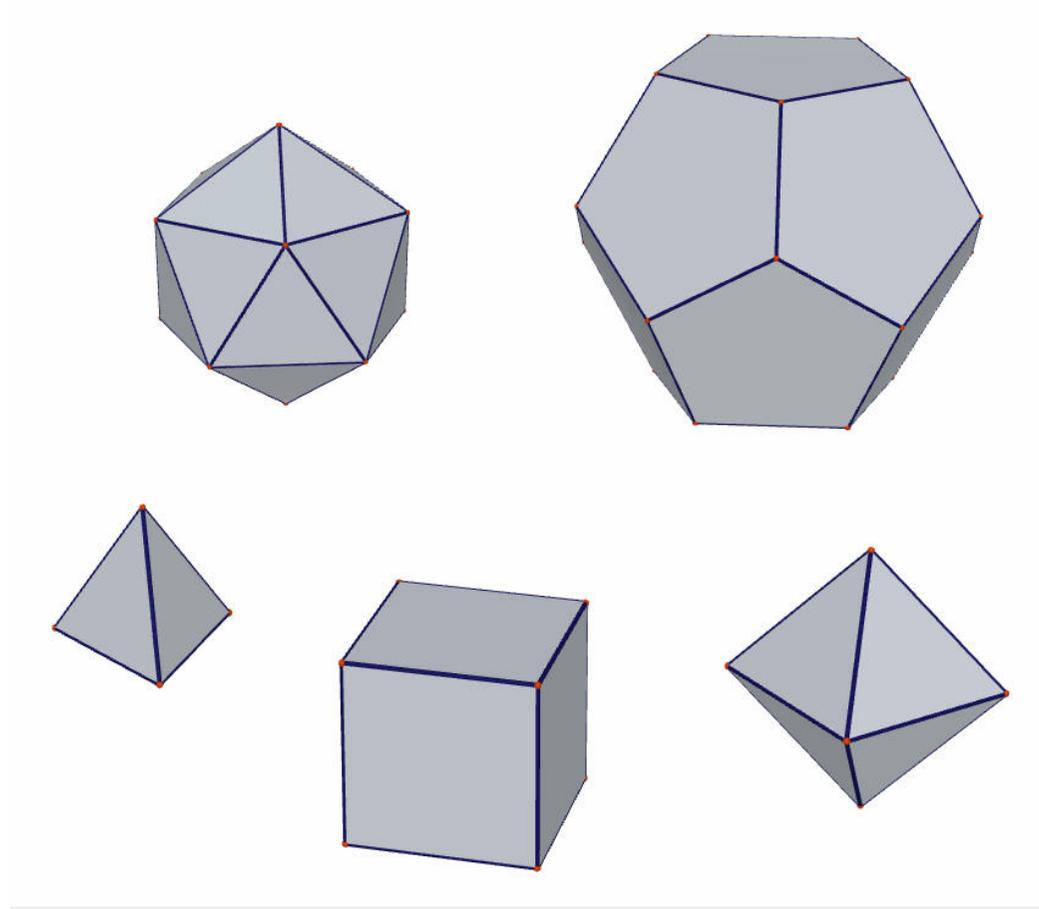
## Schnittstellen synthetischer Darstellungen in einer 3D-CAD Umgebung



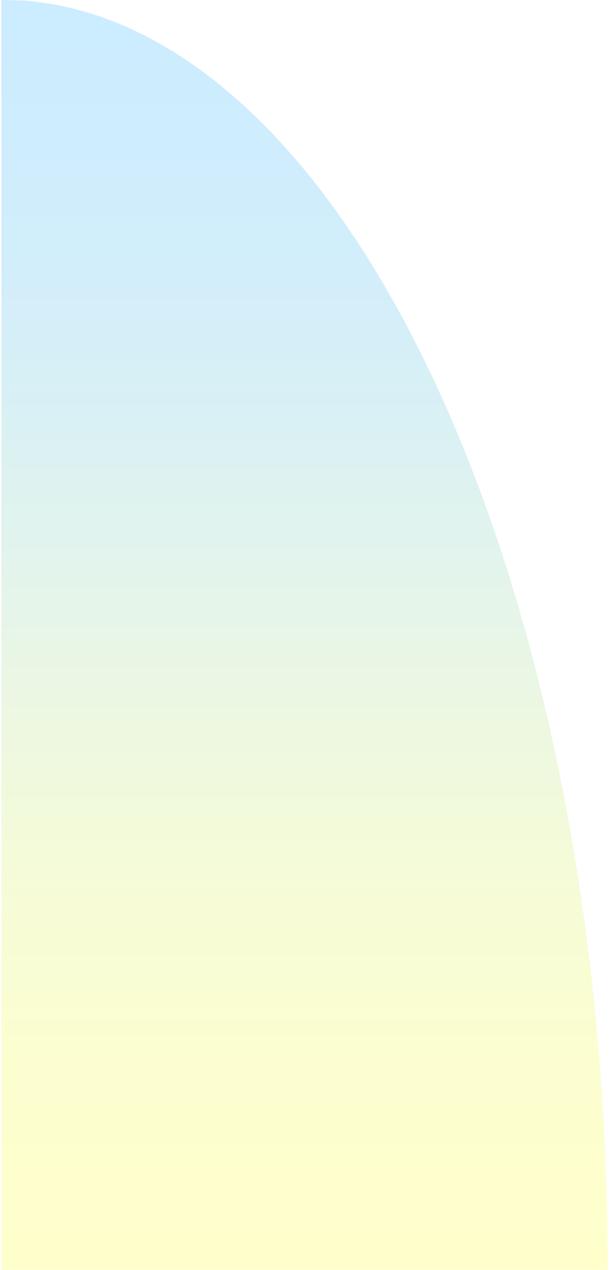
# Polyeder

## Schnittstellen synthetischer Darstellungen bei DRGS-Nutzung im Geometrie-Unterrichts der S I

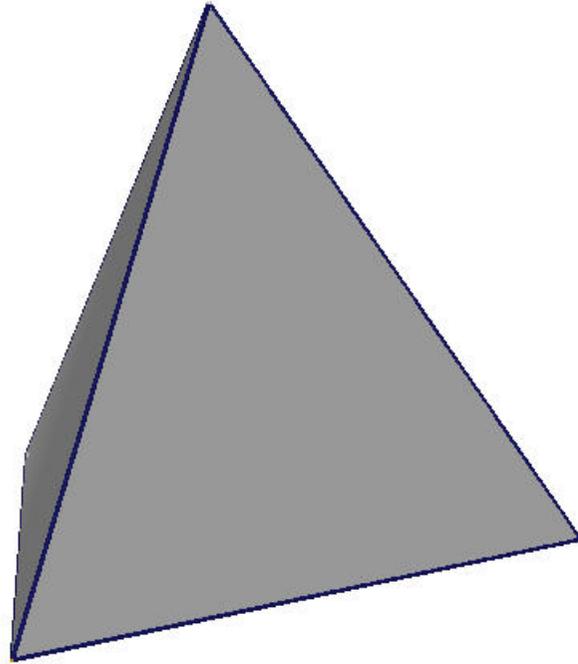




## Wie aus den Platonischen Körpern die Archimedischen Körper gewinnen?

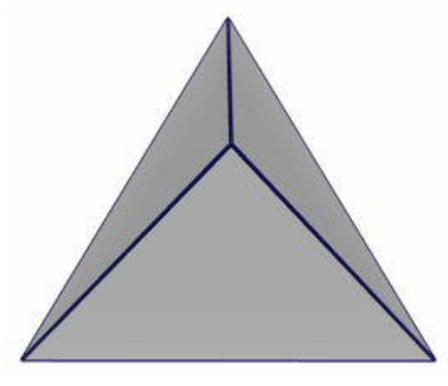


**Erzeugung der  
Archimedischen Körper  
aus den Platonischen  
Körpern mittels  
ECKENSTUMPFFEN**

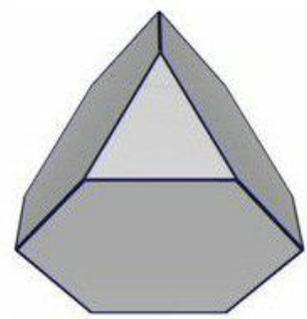


## Animation des Eckenstumpfens am Tetraeder

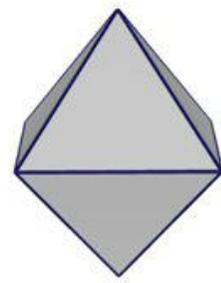
Schumann: Dynamische Erzeugung der Archimedischen Körper ...



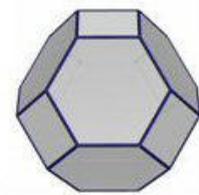
**Tetraeder**



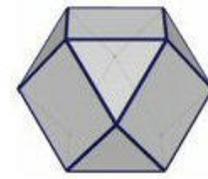
**Tetraederstumpf**



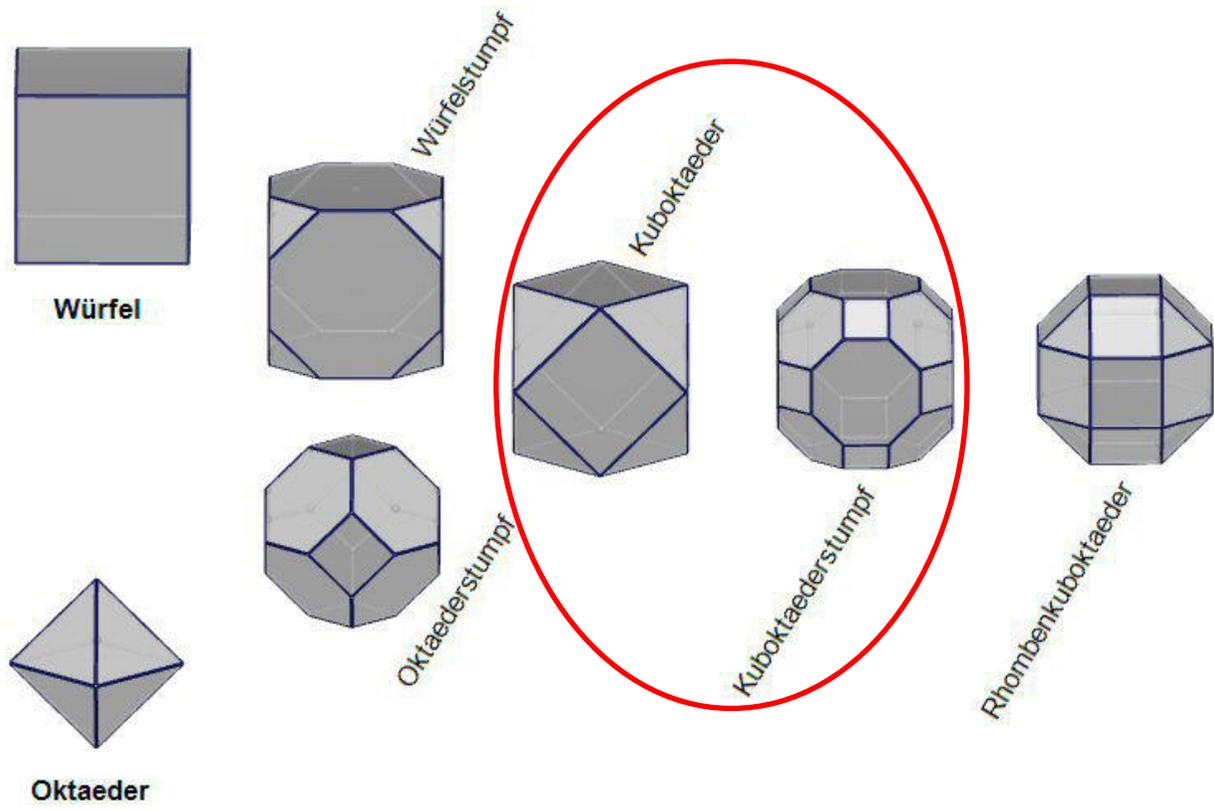
**Oktaeder**

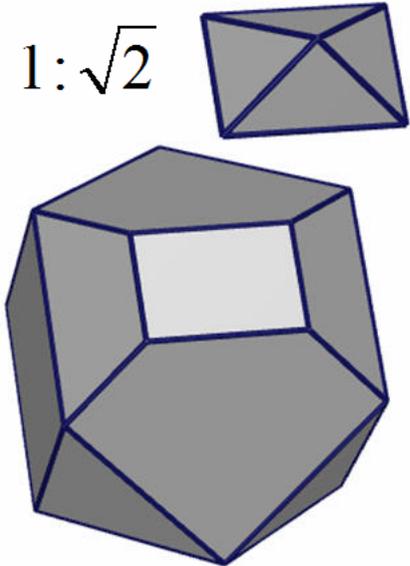
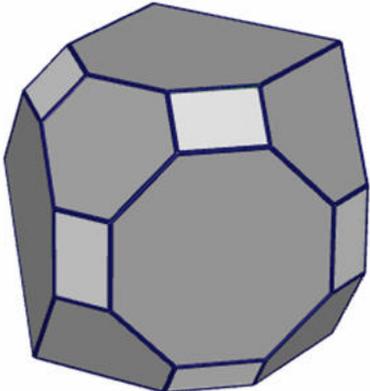
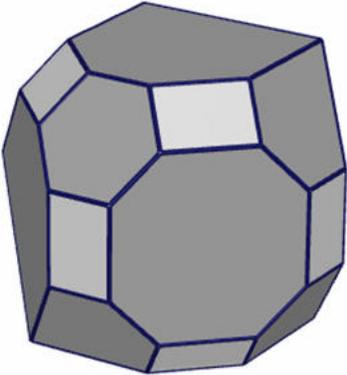


**Oktaederstumpf**

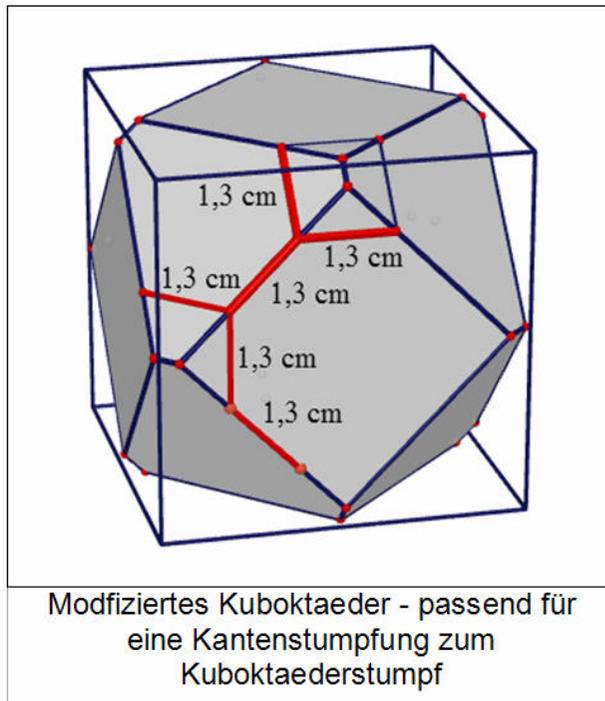


**Kuboktaeder**



<p><math>1:\sqrt{2}</math></p> 		
<p>Eckenstumpfung des Kuboktaeders</p>	<p>Eckenstumpfung zum regelmäßigen Achteck</p>	<p>Eckenstumpfung zum regelmäßigen Sechseck</p>

**Problem: Welcher Körper existiert, der zu einem Kuboktaederstumpf gestumpft werden kann?**

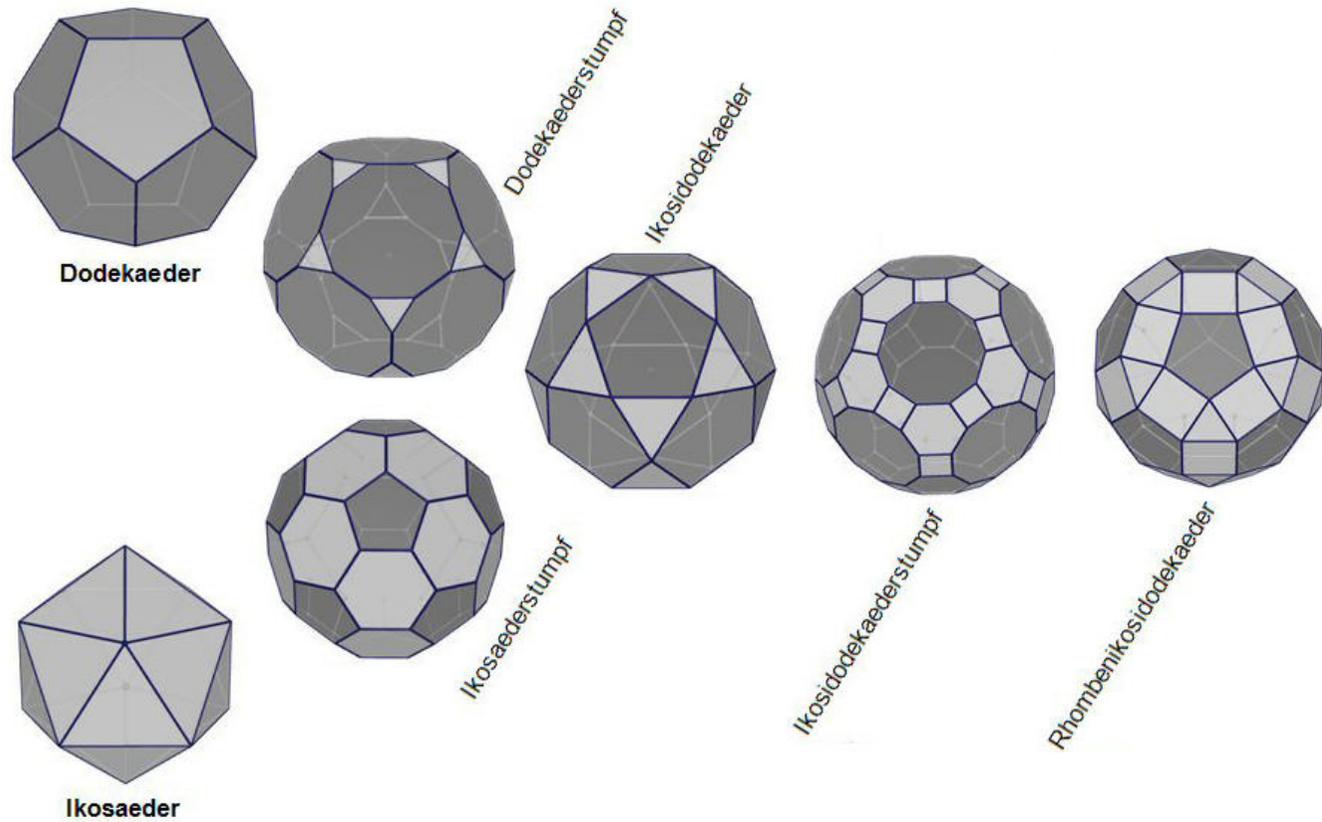


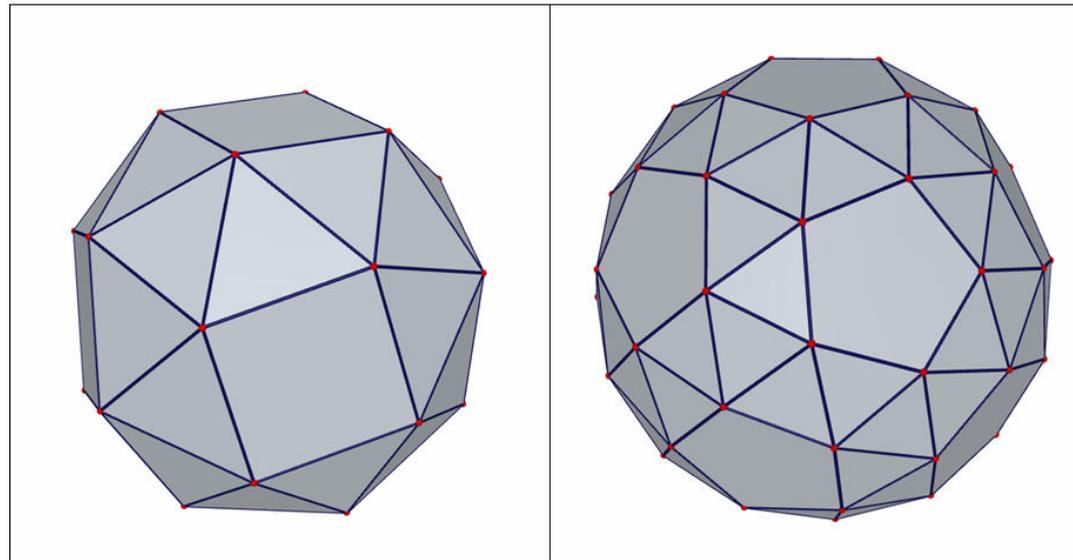
## Approximative Lösung in DRGS

Die rechnerische Lösung führt auf eine kubische Gleichung, deren Lösung nicht aus Quadratwurzeltermen besteht (casus irreducibilis), weswegen eine exakte geometrische Konstruktion unmöglich ist.

Das Problem des Eckenstumpfens zu regelmäßigen Schnittvierecken tritt bei den Platonischen bzw. Archimedischen Körpern mit Ausnahme des Tetraeders auf. Brakhage & Pütz (2019) haben dafür eine Berechnungsmethode zur Lösung des Problems entwickelt und computergrafisch programmiert:

„Dynamische Deklination Platonischer und Archimedischer Körper“ 40.  
Österreichische Fortbildungstagung für Geometrie Strobl, 7. bis 9. November  
2019 (<https://elearning.igpm.rwth-aachen.de/Archimedes/Download>).





Abgeschrägter Würfel

Abgeschrägtes Dodekaeder

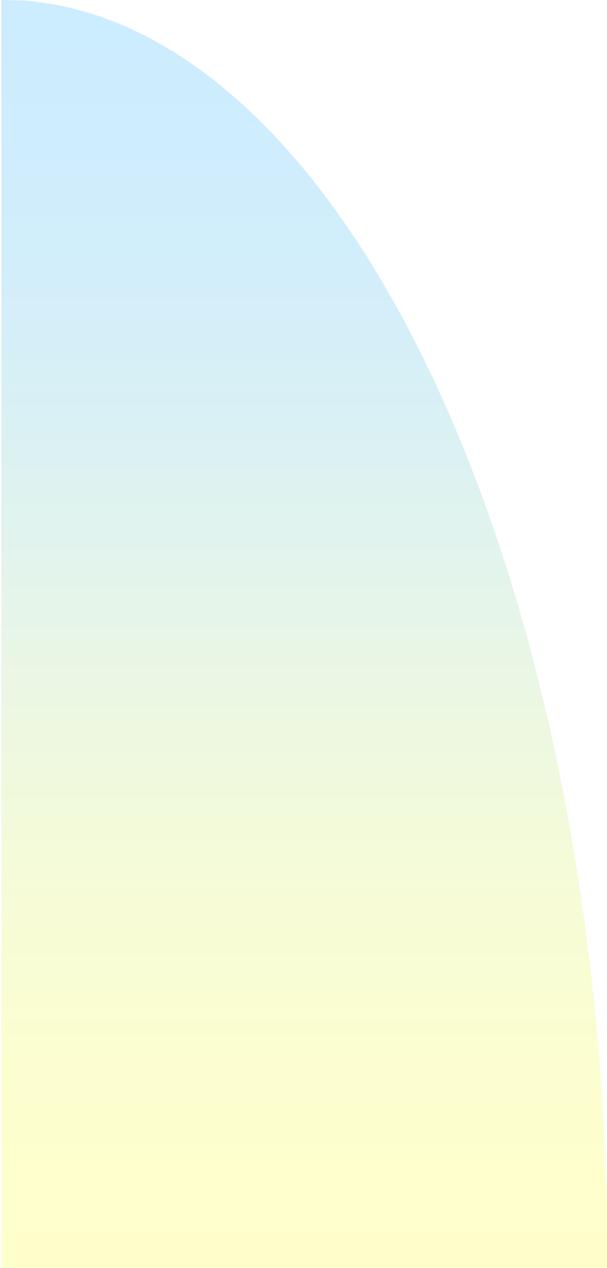
## **Bewertung der Methode „Eckenstumpfen“**

### **Die metrischen Formen**

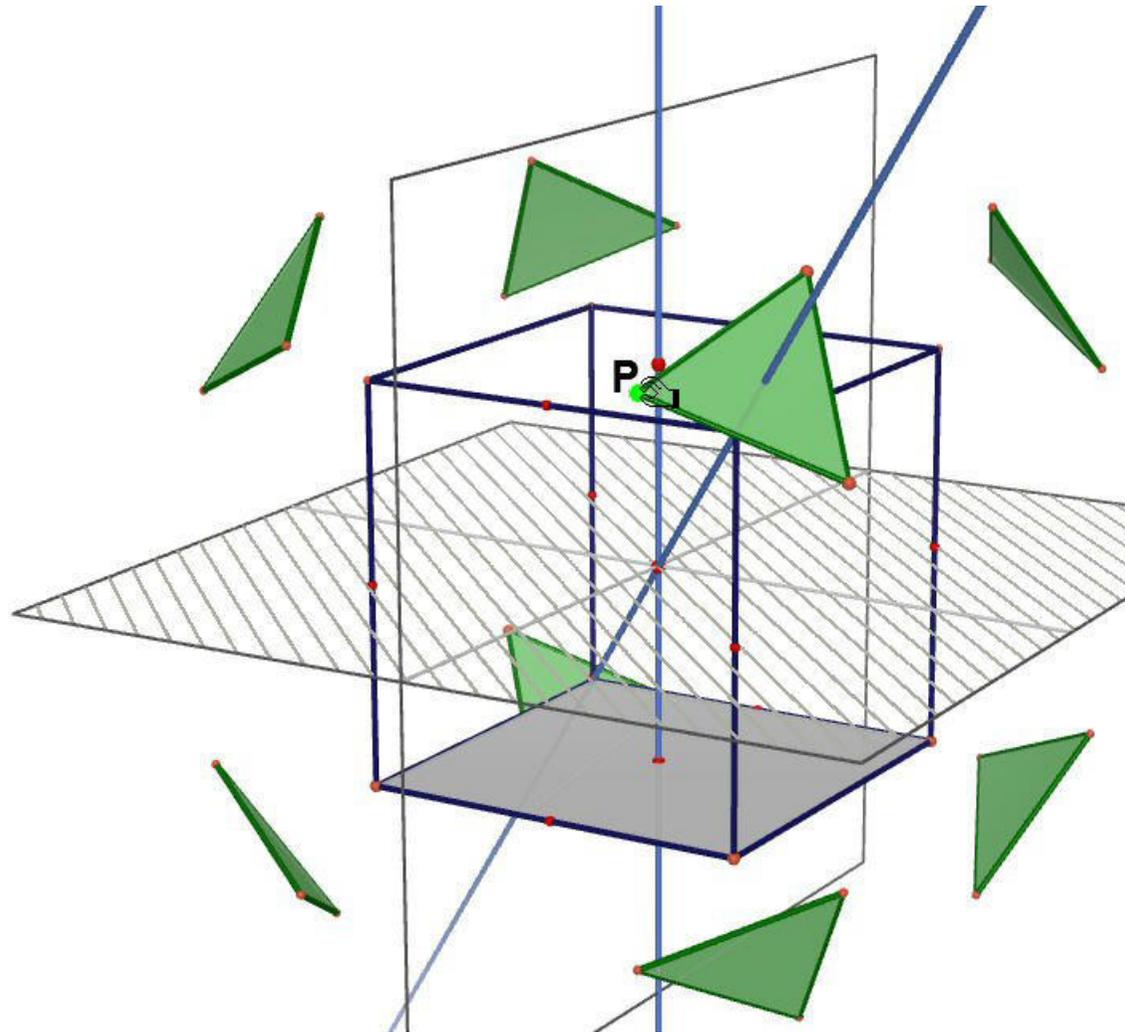
- Gestumpftes Kuboktaeder**
- Rhombenkuboktaeder**
- Ikosidodekaederstumpf**
- Rhombenikosidodekaeder**

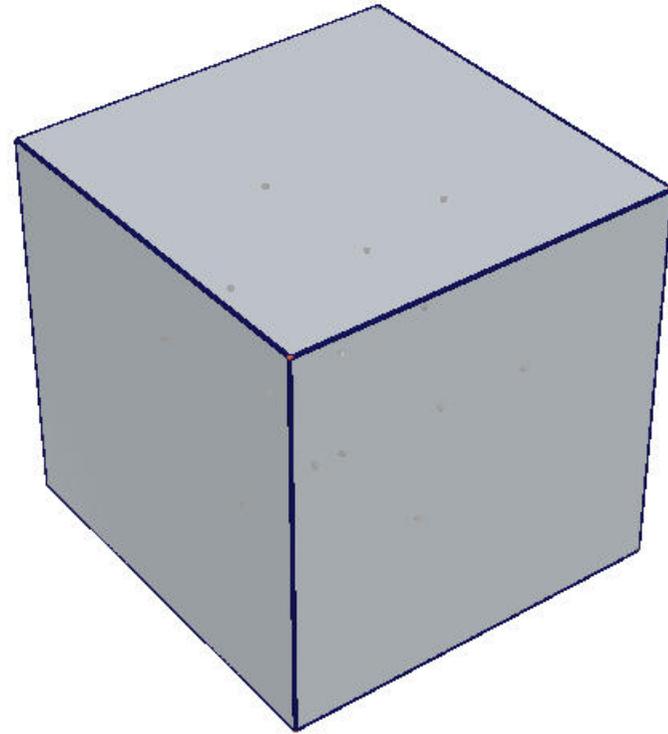
**können nicht durch Eckenstumpfen konstruiert werden. Das Eckenstumpfen führt nur auf Körper, die zu diesen topologisch äquivalent sind.**

**Das Eckenstumpfen ist ungeeignet zur Konstruktion des abgeschrägten Würfels und des abgeschrägten Dodekaeders.**



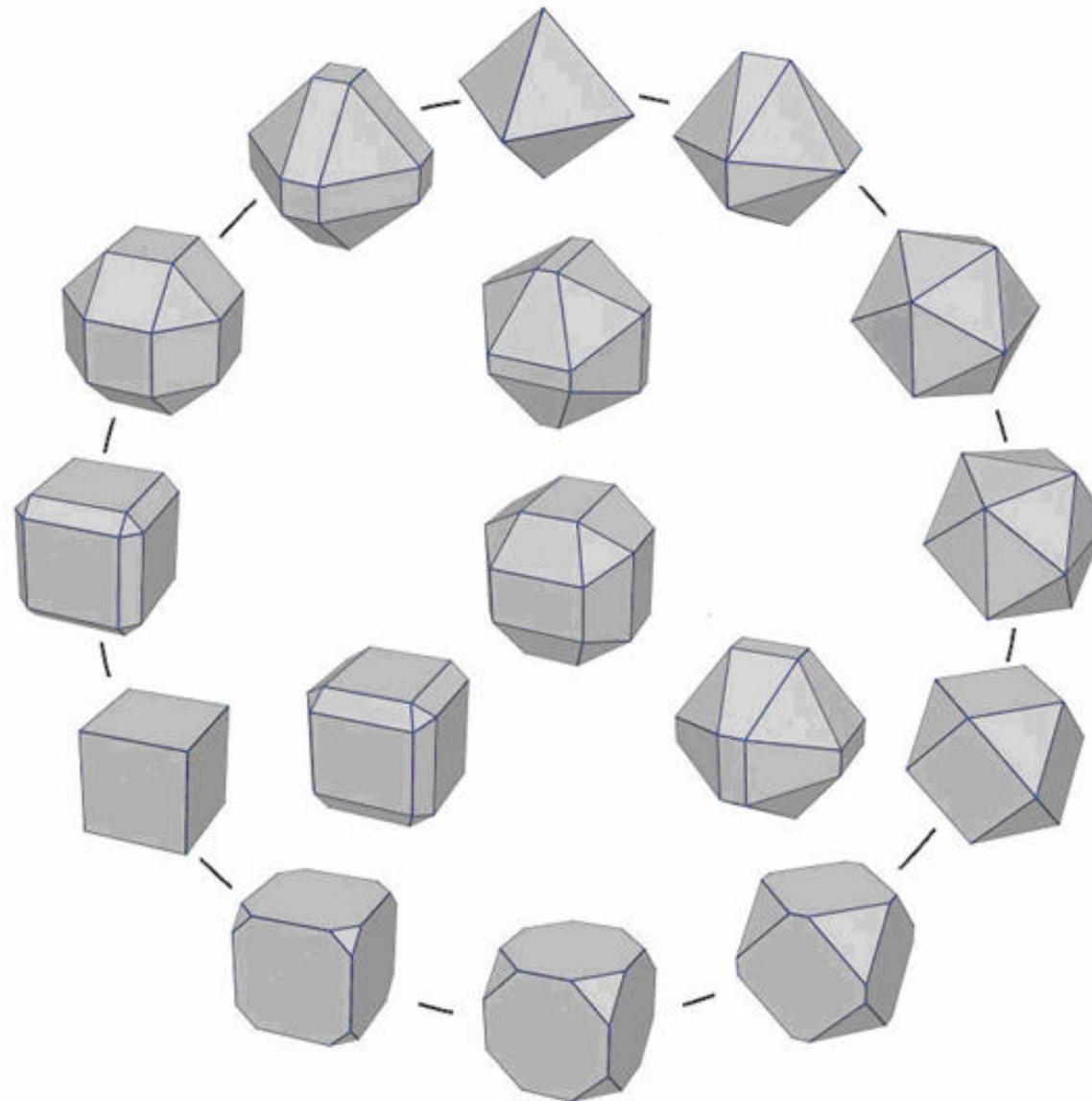
**Erzeugung der Archimedischen  
Körper aus den Platonischen  
Körpern mittels  
“METAMORPHOSE”  
(MNU, Jg. 69, 2020, Heft 1, 21-25)**



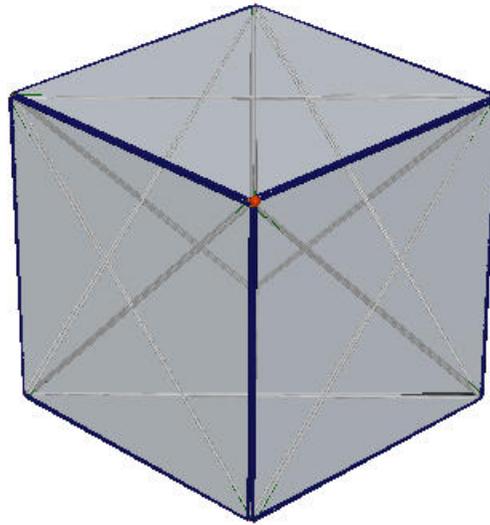


## Animation der Metamorphose einer Würfelerweiterung

Schumann: Dynamische Erzeugung der Archimedischen Körper ...



**Zyklus eckenäquivalenter Polyeder vom Würfel aus  
mittels der Gruppe  $T_h$**



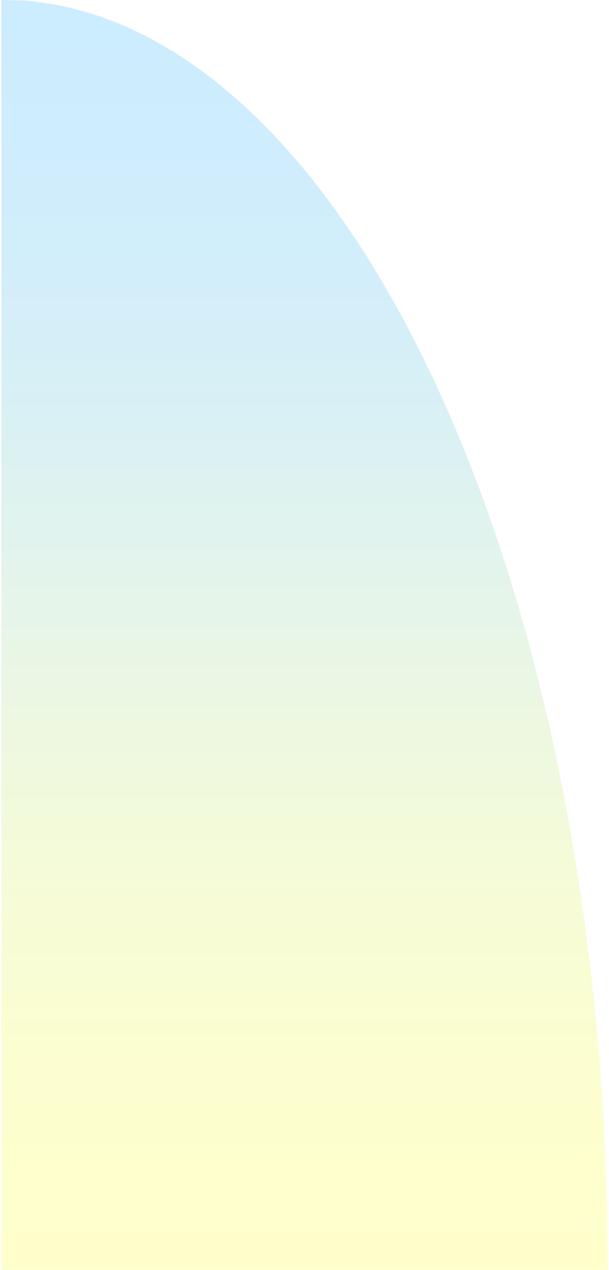
## Animation der Metamorphose einer 2. Würfelerweiterung

## **Bewertung der Methode „Metamorphose“**

**Das Ergebnis der Methode hängt ab von den Symmetrien des betreffenden Platonischen Körpers mit denen seine Erweiterung konstruiert wird.**

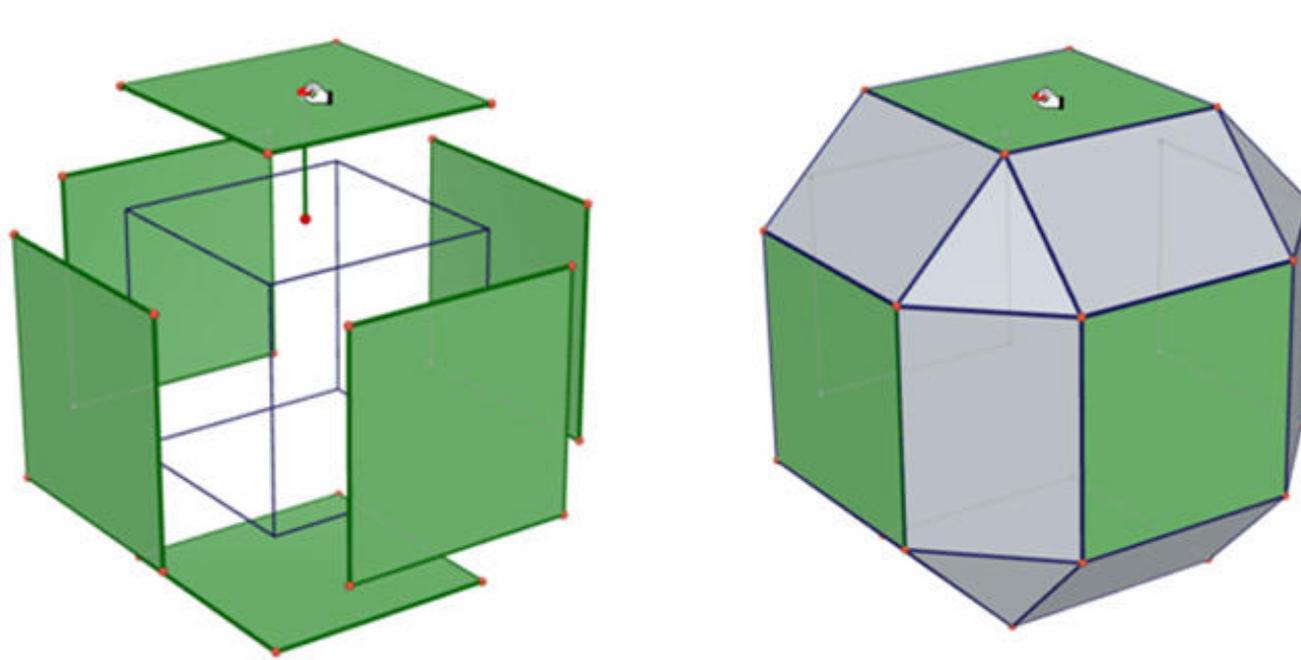
**Es können auf diese Art alle Archimedischen Körper konstruiert werden.**

**Wegen des gruppentheoretischen Bezugs ist diese Art der Konstruktion der Archimedischen Körper als nicht ‚elementar‘ zu bezeichnen.**

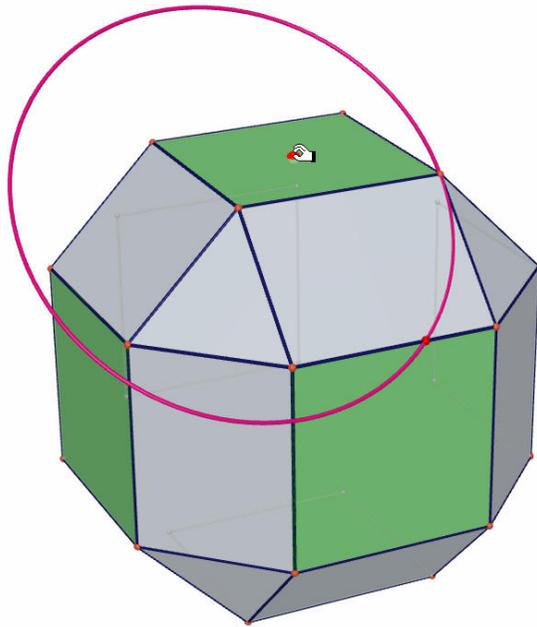


**Erzeugung der  
Archimedischen Körper  
aus den Platonischen  
Körpern mittels  
FLÄCHENVERSCHIEBUNG**  
(MNU, Jg. 73, 2020, Heft 4, 334-337)

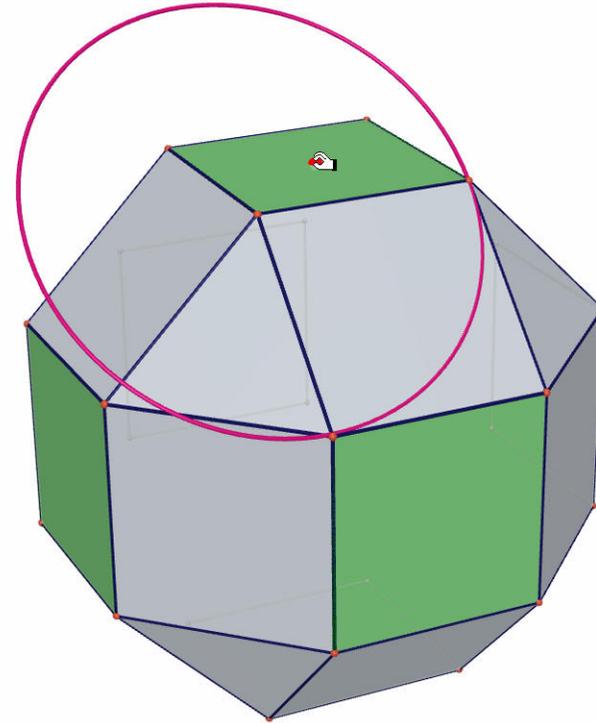
## Das „umhüllende“ Polyeder (konvexe Hülle)



# Passung

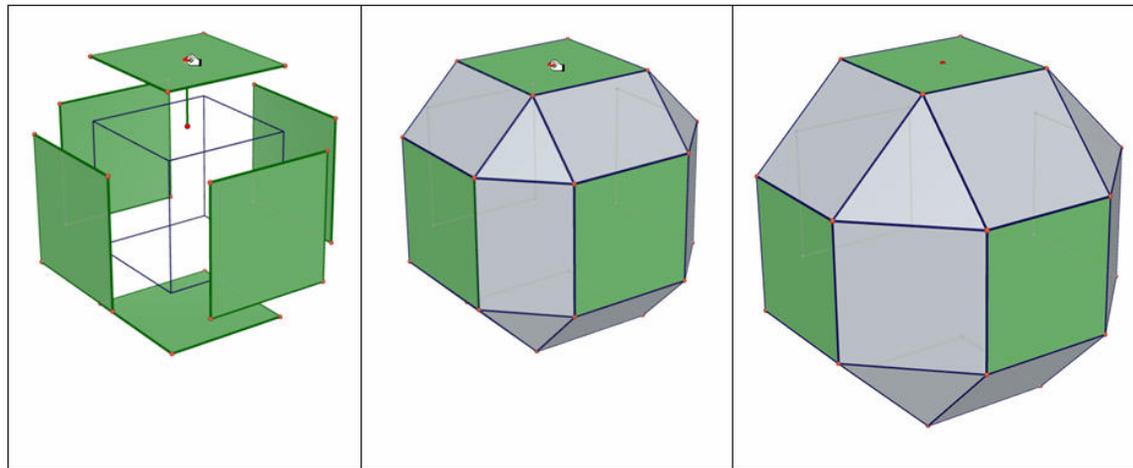


Passungsstart



Passungsziel

### Vom Würfel zum Rhombenkuboktaeder

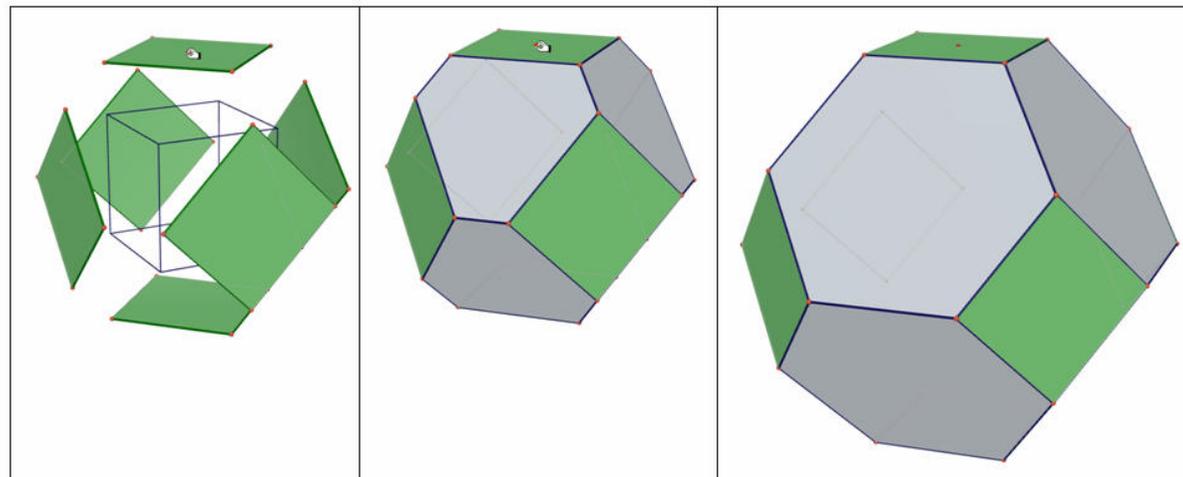


Parallelverschiebung der  
Quadratflächen des  
Würfels

Beispiel aus der  
Verschiebungsschar des  
Würfels

**Rhombenkuboktaeder**

### Vom Würfel mit den um 45° gedrehten Quadraten zum Oktaederstumpf

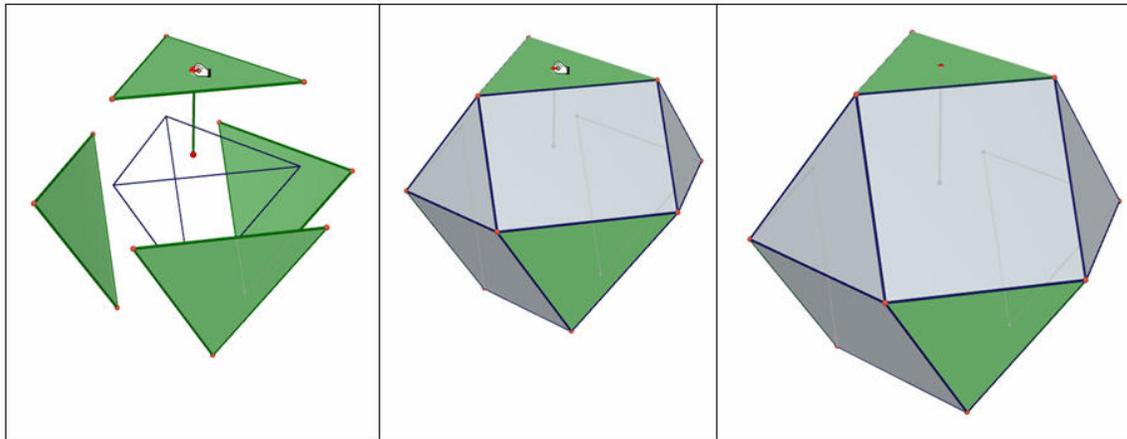


Parallelverschiebung  
der um 45° gedrehten  
Quadratflächen des  
Würfels

Beispiel aus der  
entsprechenden  
Verschiebungsschar des  
Würfels

**Oktaederstumpf**

### Vom Tetraeder zum Kuboktaeder

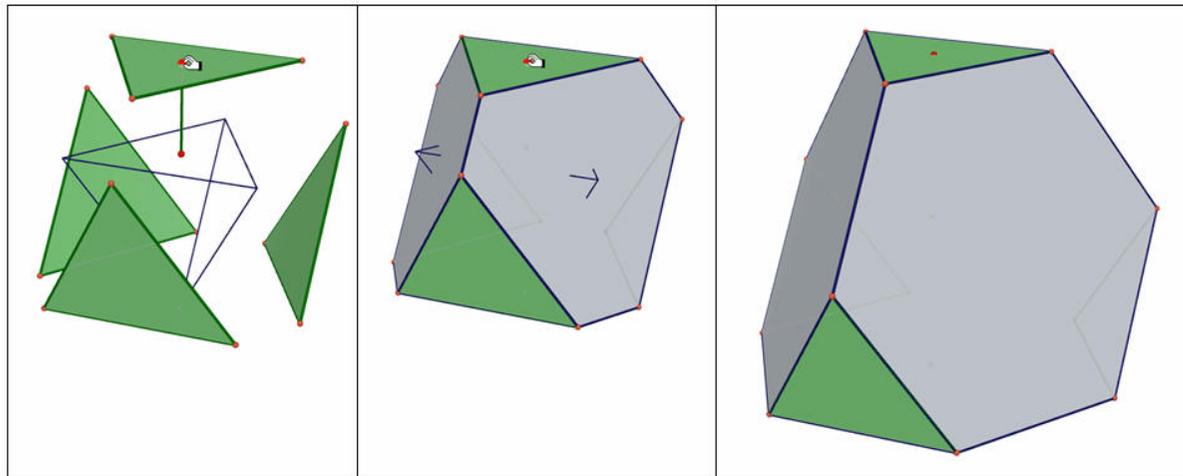


Parallelverschiebung der  
Dreieckflächen des  
Tetraeders

Beispiel aus der  
Verschiebungsschar  
des Tetraeders

**Kuboktaeder**

### Vom Tetraeder mit den um 60° gedrehten Dreiecken zum Tetraederstumpf

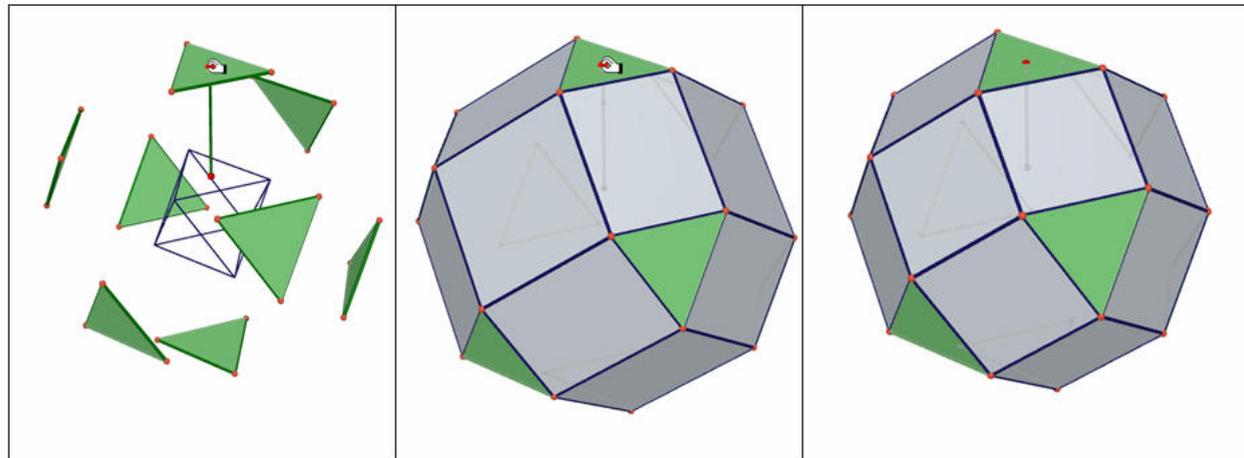


Parallelverschiebung  
der um 60° gedrehten  
Dreieckflächen des  
Tetraeders

Beispiel aus der  
entsprechenden  
Verschiebungsschar des  
Tetraeders

**Tetraederstumpf**

**Vom Oktaeder zum Rhombenkuboktaeder**

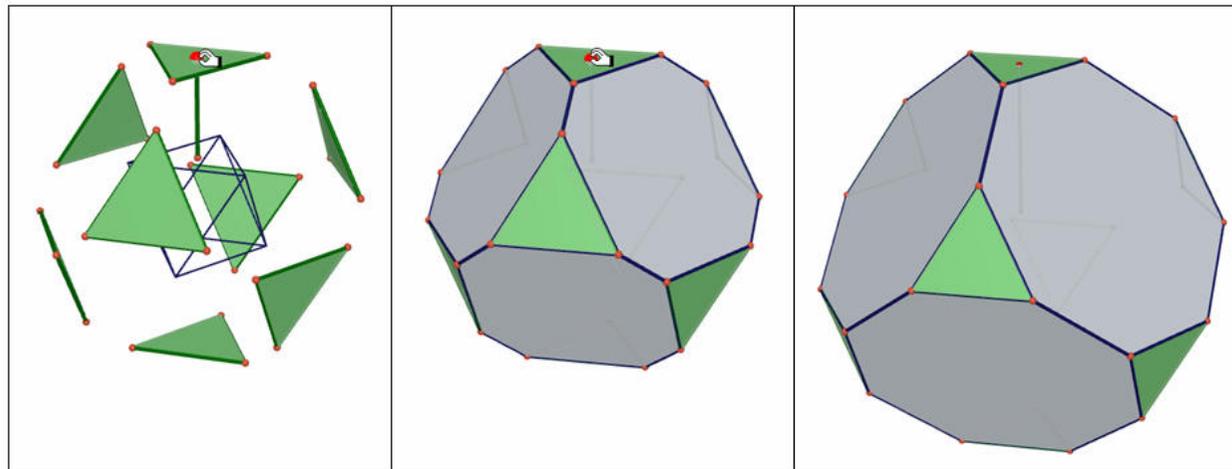


Parallelverschiebung  
Dreieckflächen des  
Oktaeders

Beispiel aus der  
Verschiebungsschar des  
Oktaeders

**Rhombenkuboktaeder**

**Vom Oktaeder mit den um 60° gedrehten Dreiecken zum Würfelstumpf**

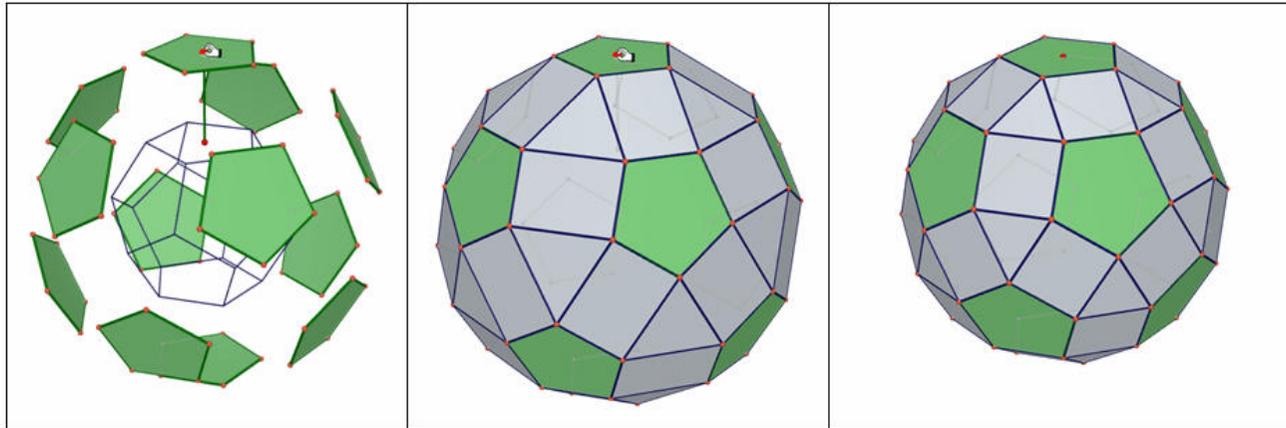


Parallelverschiebung der  
um 60° gedrehten  
Dreieckflächen des  
Oktaeders

Beispiel aus der  
entsprechenden  
Verschiebungsschar des  
Oktaeders

**Würfelstumpf**

**Vom Dodekaeder zum Rhombenikosidodekaeder**

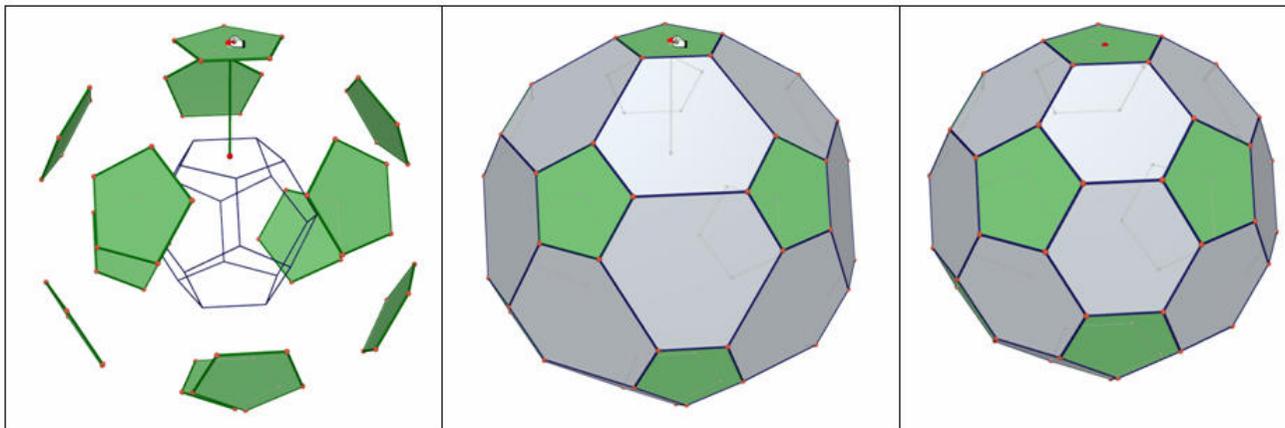


Parallelverschiebung der Fünfeckflächen des Dodekaeders

Beispiel aus der Verschiebungsschar des Dodekaeders

**Rhombenikosidodekaeder**

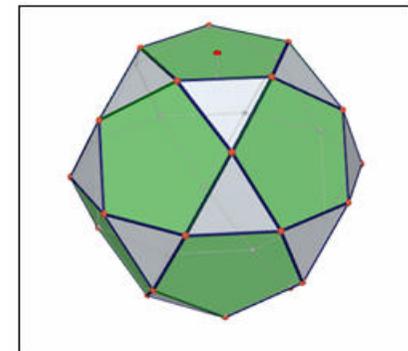
**Vom Dodekaeder mit den um 36° gedrehten Fünfecken zum Iksaederstumpf und Iksidodekaeder**



Parallelverschiebung der um 36° gedrehten Fünfeckflächen des Dodekaeders

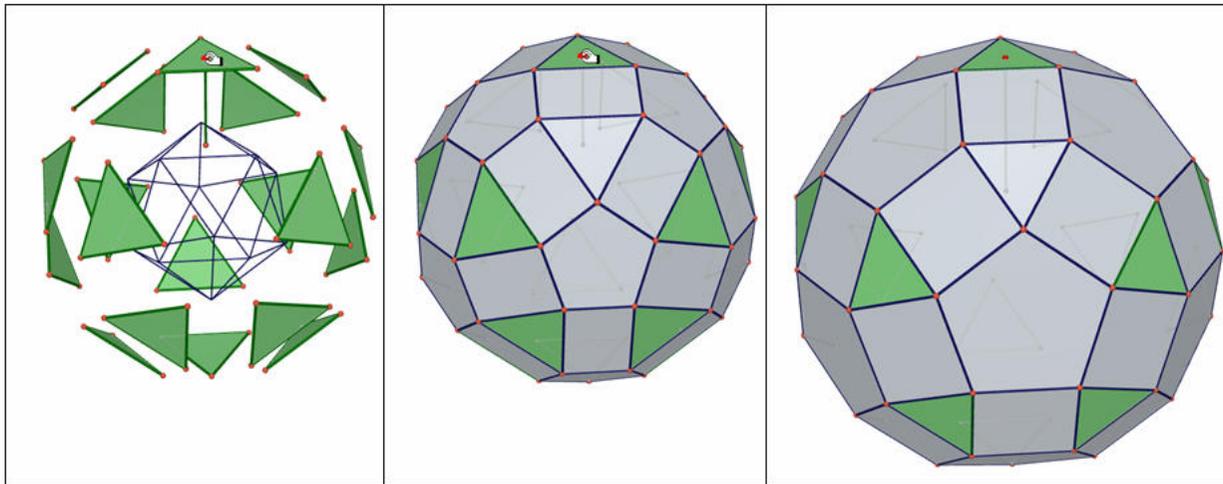
Beispiel aus der Verschiebungsschar des Dodekaeders

**Iksaederstumpf**



Grenzlage:  
**Iksidodekaeder**

**Vom Dodekaeder zum Rhombenikosidodekaeder**

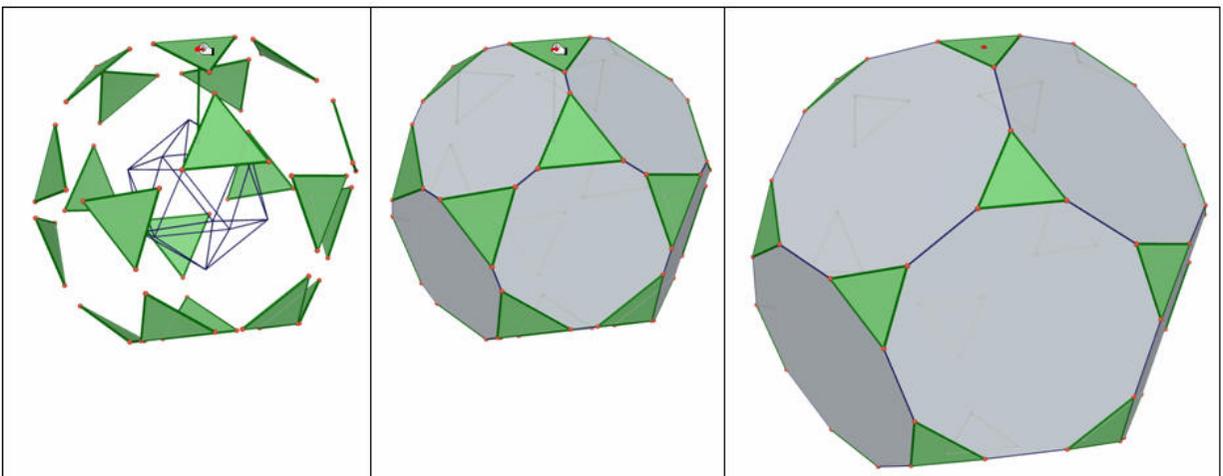


Parallelverschiebung  
der Dreieckflächen des  
Ikosaeders

Beispiel aus der  
Verschiebungsschar des  
Ikosaeders

**Rhombenikosidodekaeder**

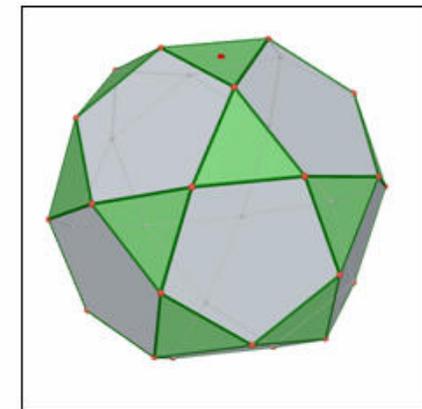
**Vom Dodekaeder zum Dodekaederstumpf und Ikosidodekaeder**



Parallelverschiebung  
der um 60° gedrehten  
Dreieckflächen des  
Ikosaeders

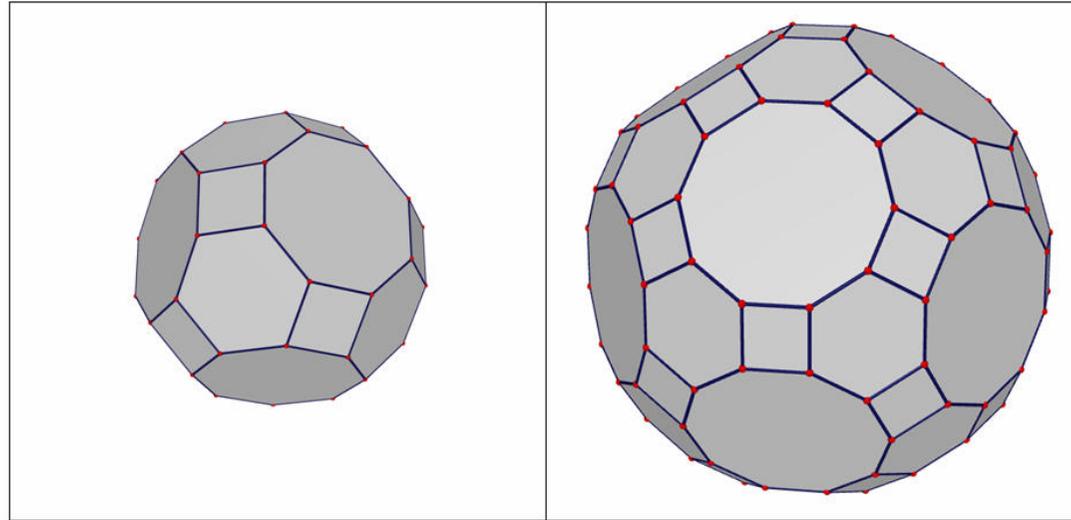
Beispiel aus der  
entsprechenden  
Verschiebungsschar  
des Ikosaeders

**Dodekaederstumpf**



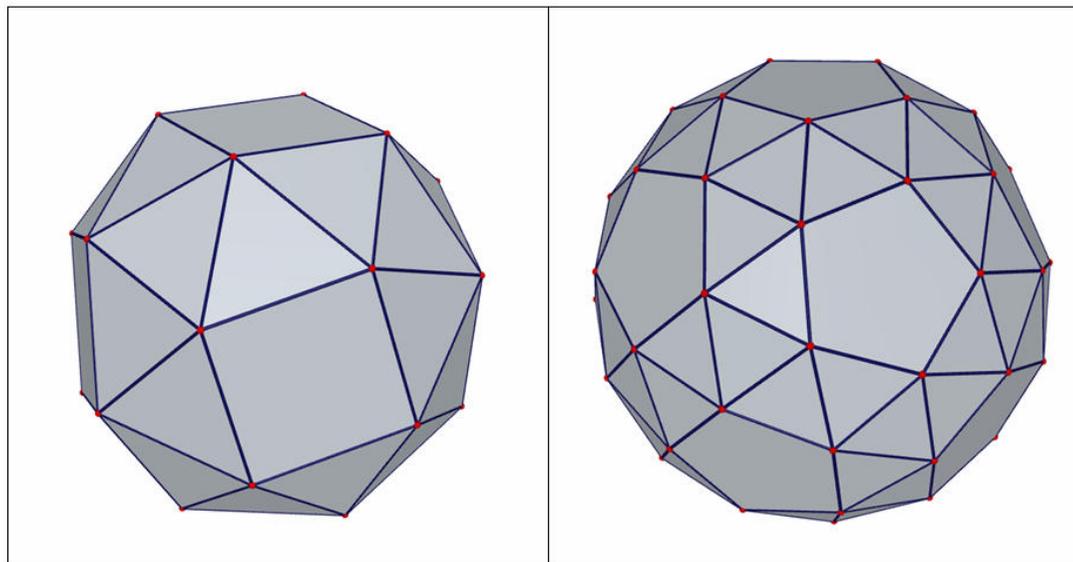
Grenzlage:  
**Ikosidodekaeder**

## Welche Archimedischen Körper fehlen noch?



Kuboktaederstumpf (Großes  
Rhombenkuboktaeder)

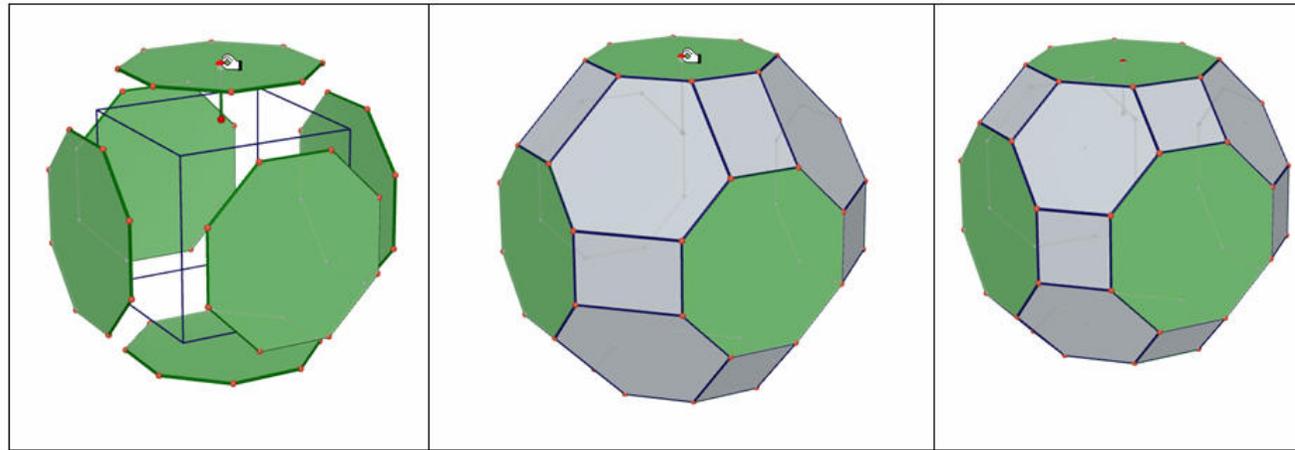
Ikosidodekaederstumpf  
(Rhombenikosidodekaeder)



Abgeschrägter Würfel

Abgeschrägtes Dodekaeder

**Vom Würfel mit ‚Oberflächen-Achteck‘ zum Kuboktaederstumpf:**

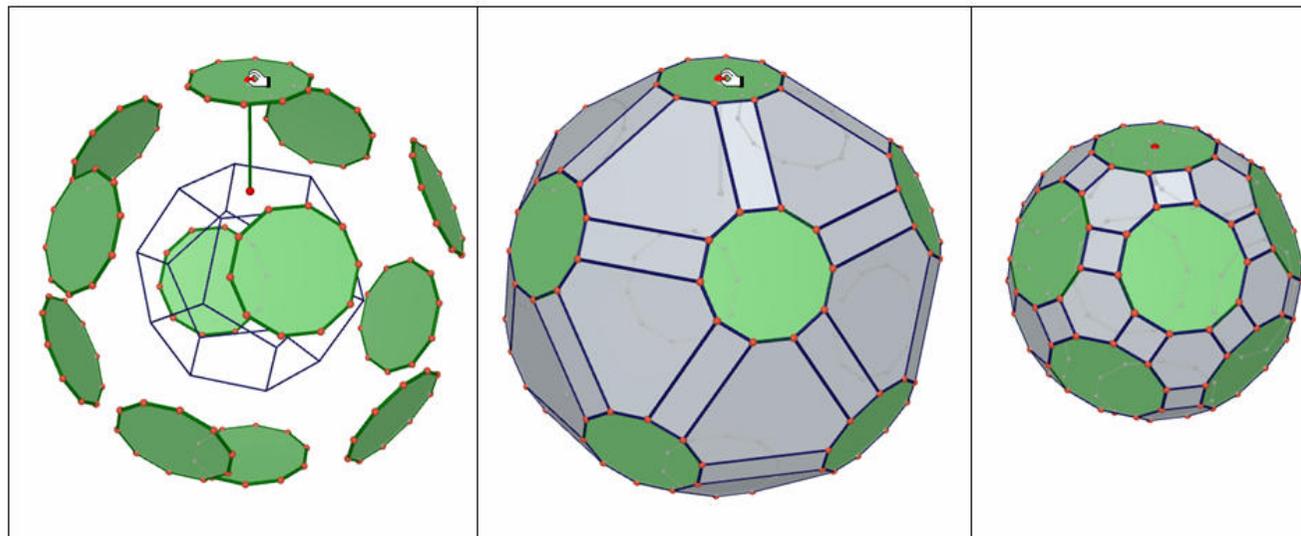


Parallelverschiebung der  
Achteckflächen des  
Würfels

Beispiel aus der  
Verschiebungsschar des  
Würfels

**Kuboktaederstumpf**

**Vom Dodekaeder mit ‚Oberflächen-Zehneck‘ zum Ikosidodekaederstumpf**



Parallelverschiebung der  
Zehneckflächen des  
Dodekaeders

Beispiel aus der  
Verschiebungsschar des  
Dodekaeders

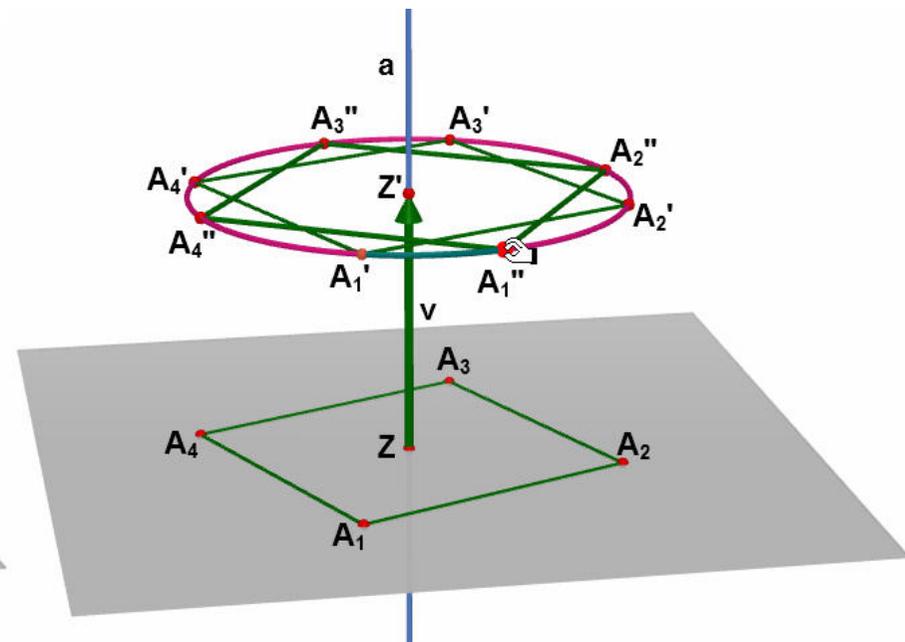
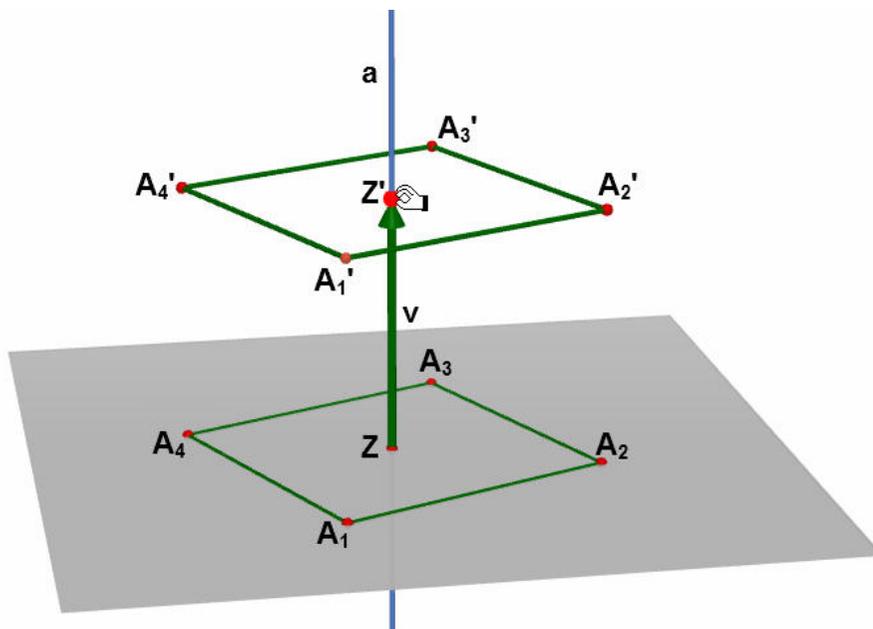
**Ikosidodekaeder-  
stumpf**

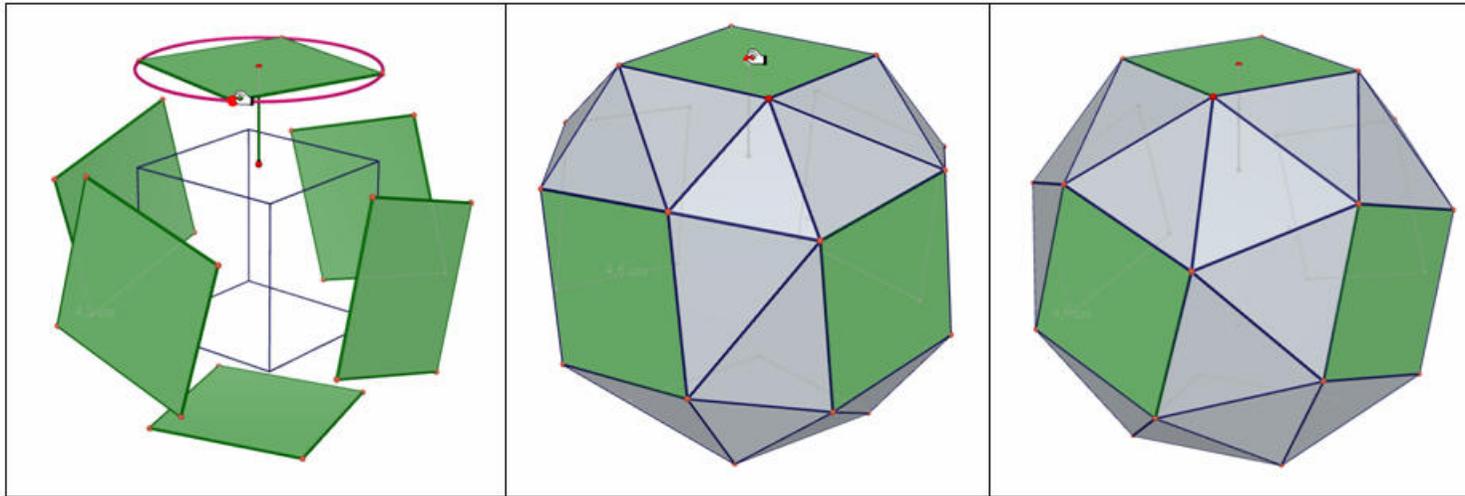
# Torsion

„Torsionspolyeder“ von Ueli Witthoff

Vortrag: „Reguläre und halbreguläre Polyeder sowie Torsionspolyeder“

40. Österreichische Fortbildungstagung für Geometrie Strobl, 7. bis 9.11.19

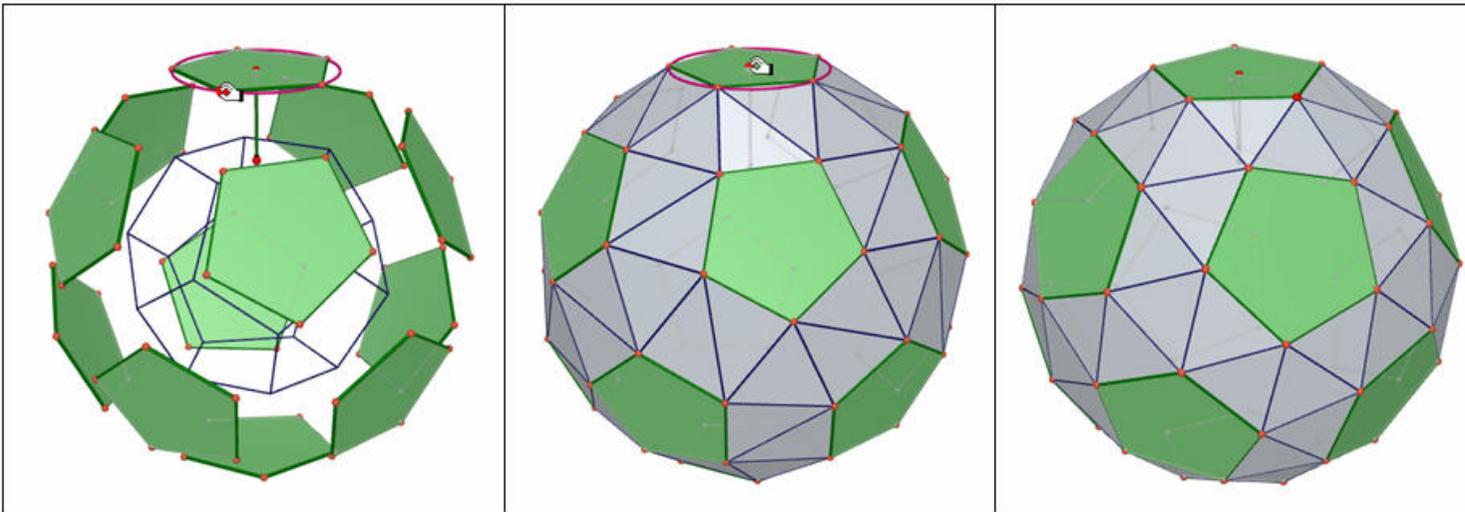




Torsion der  
Quadratflächen des  
Würfels

Beispiel aus der  
Torsionsschar des  
Würfels

**Abgeschrägter Würfel**



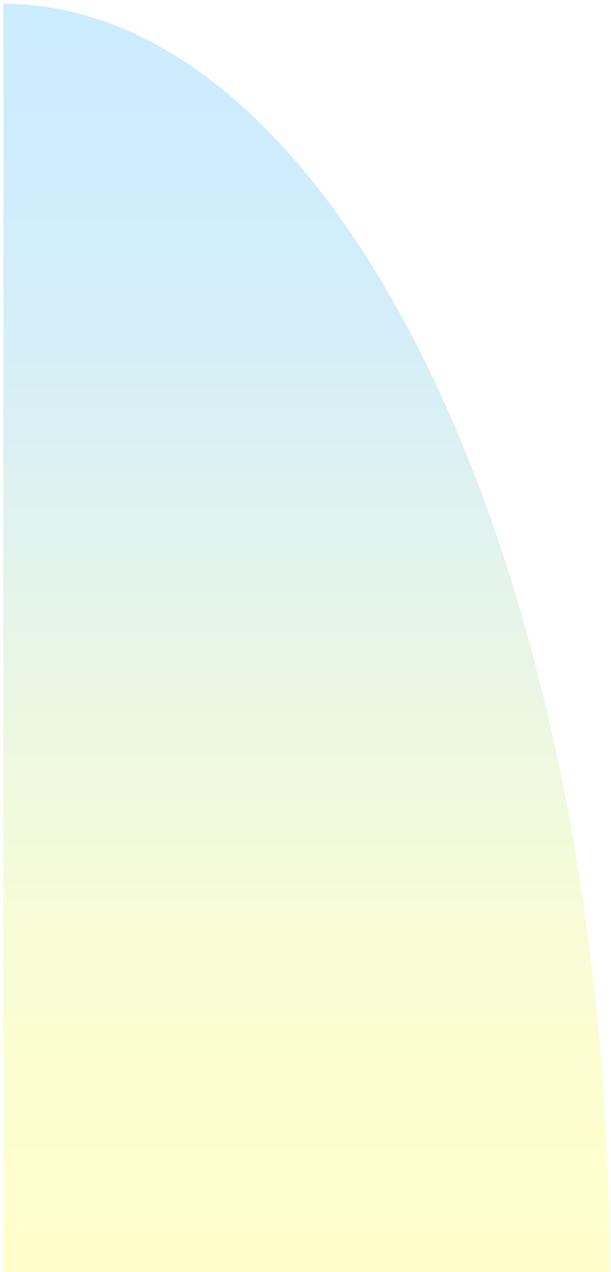
Torsion der  
Fünfeckflächen des  
Dodekaeders

Beispiel aus der  
Torsionsschar des  
Dodekaeders

**Abgeschrägtes  
Dodekaeder**

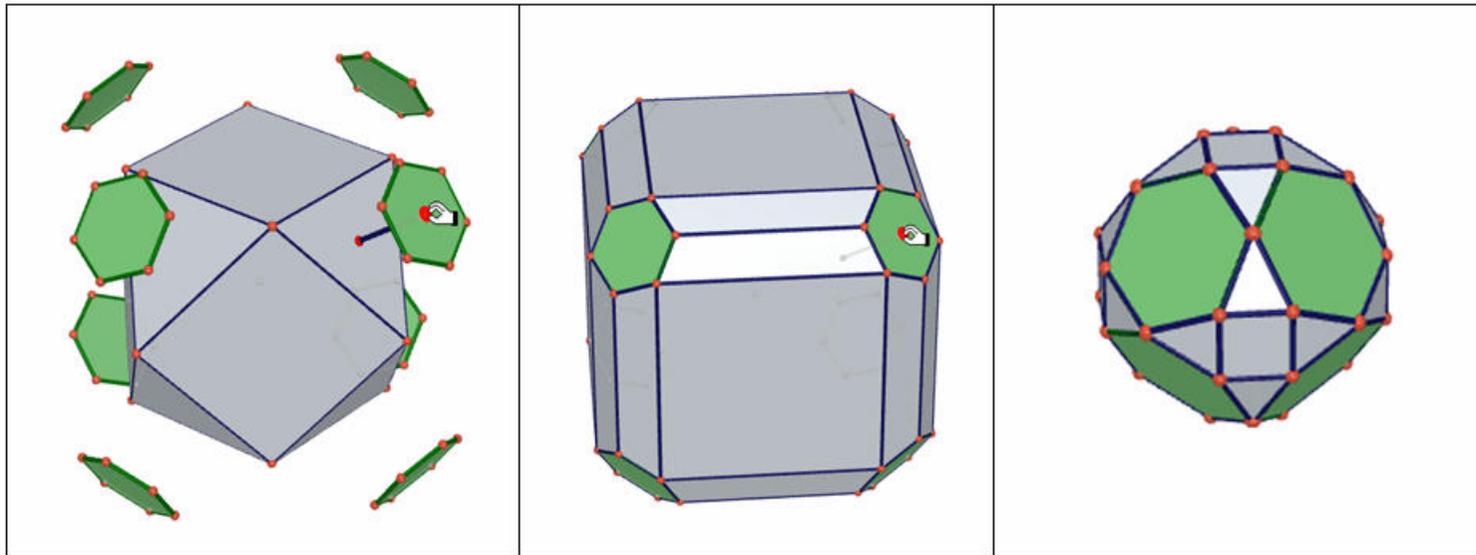
## **Bewertung der Methode „Flächenverschiebung“**

**Die metrischen Formen der Archimedischen Polyeder können mit Flächenverschiebung konstruiert werden, mit Ausnahme des abgeschrägten Würfels und des abgeschrägten Dodekaeders. Zu deren Konstruktion bedarf es jeweils einer Torsion („Verschiebung mit Drehung“).**



## **Schlussbemerkung**

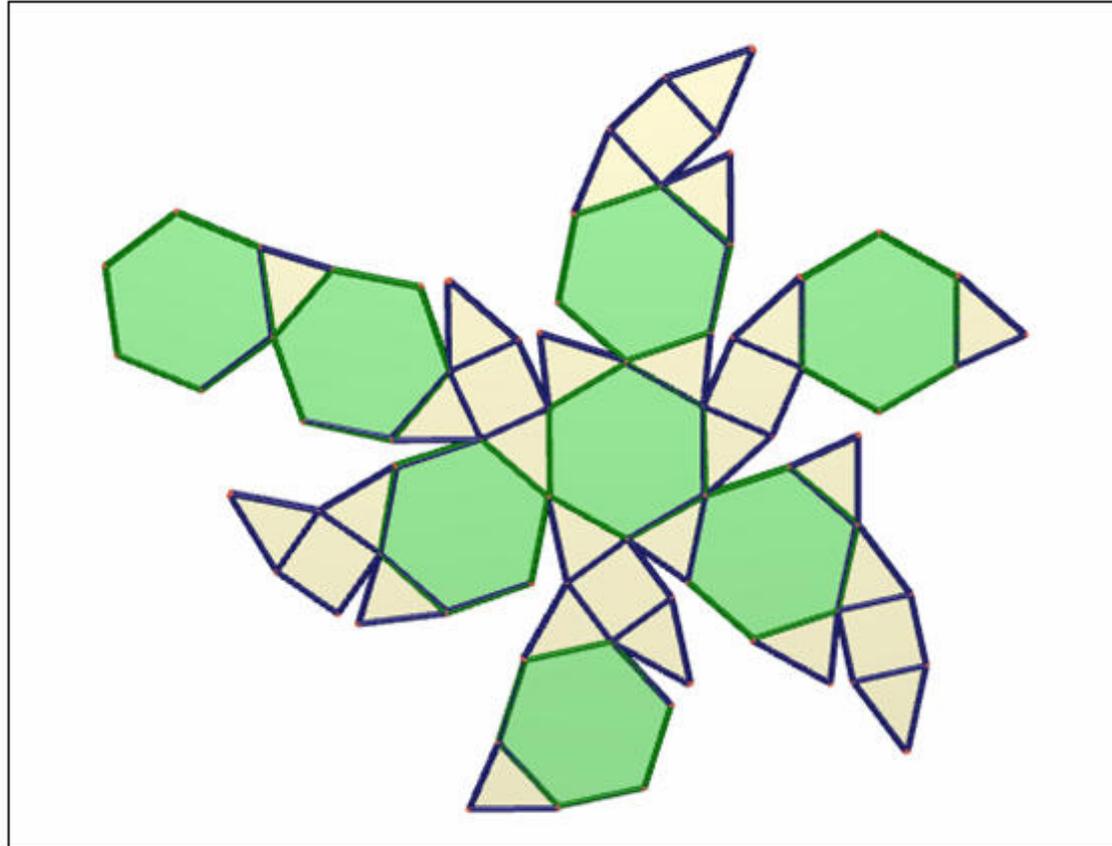
## Anwendung der Flächenverschiebungsmethode auf andere Polyederklassen am Beispiel der Archimedischen Körper



Parallelverschiebung der  
Sechseck über  
Kuboktaeder-  
Dreiecksflächen

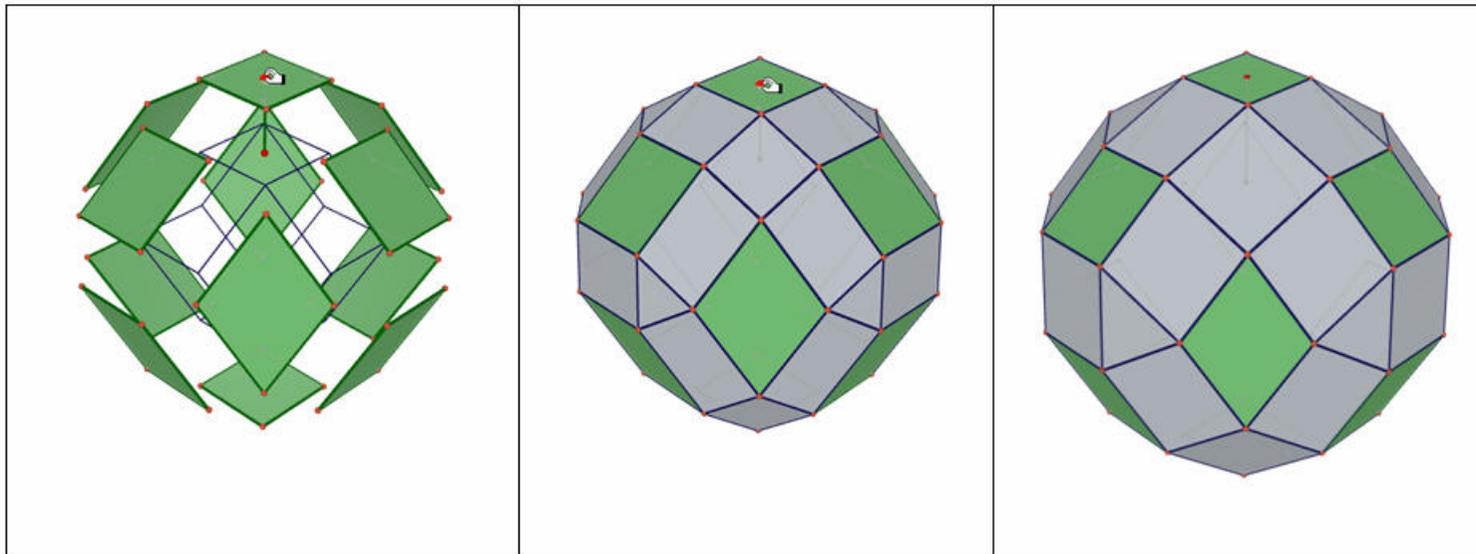
Ein Beispiel aus der  
Verschiebungsschar

Kuboktaeder-Derivat



Ein Netz des **Kuboktaeder-Derivats**

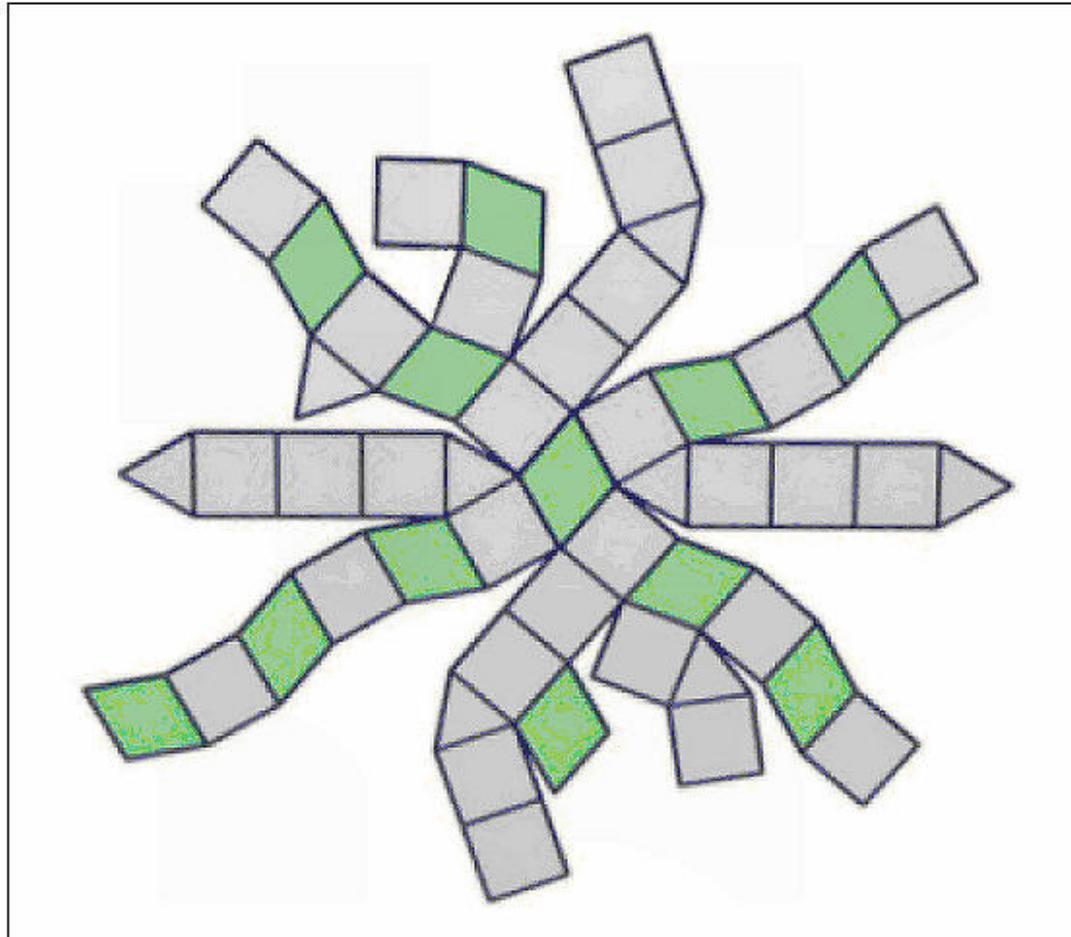
## Anwendung der Flächenverschiebungsmethode auf andere Polyederklassen



Parallelverschiebung der  
Rhombenflächen des  
Rhombendodekaeders

Ein Beispiel aus der  
Verschiebungsschar des  
Rhombendodekaeders

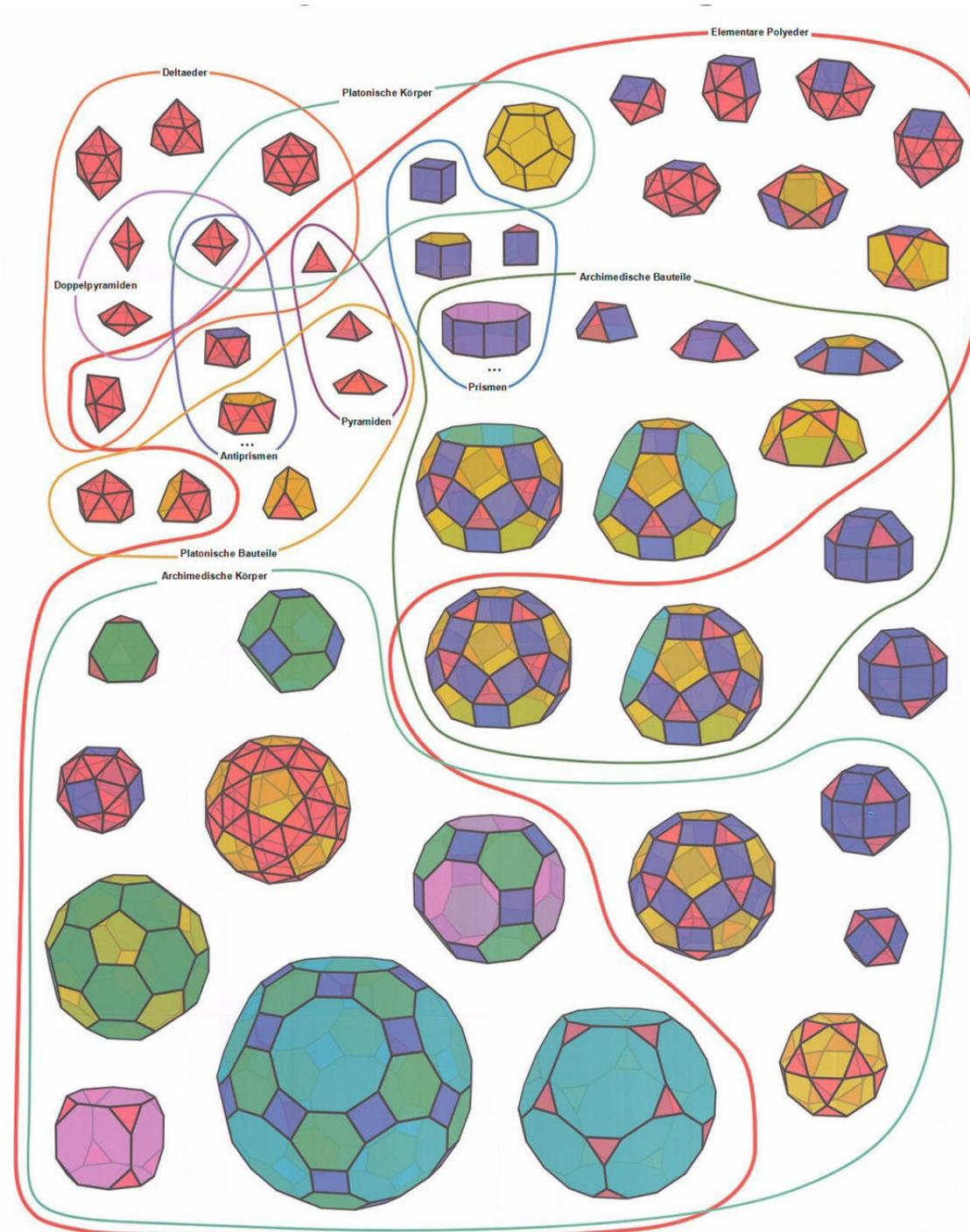
„Rhombi-  
Rhombendodekaeder“



Ein Netz des **Rhombi-Rhombendodekaeders**

**Entdeckungsfeld für  
Flächenverschiebungen:  
Konvexe Polyeder aus  
regelmäßigen Polygonen**

**Abbildung aus P. Cromwell  
“Shapes in Space“, ATM, 2004**





**Danke für Ihre Aufmerksamkeit!**

