

Pythagoras und Thales: zwei Kreativitäts-Herausforderungen

Gunter Weiss
TU Dresden und TU Wien

40. Österreichische Fortbildungstagung für Geometrie,
Strobl 7.-9.11.2019

Es soll gesprochen werden über

- **zwei elementargeometrische Sachverhalte von – hoffentlich – allgemeiner Bekanntheit,**
- **etwas, das als “Advanced Elementary Geometry” aufgefasst werden könnte**
- **das kreative Spiel mit einigen klassischen Beispielen, was Interesse wecken und Mut zu eigenem Forschen machen soll, und das daher**
- **möglicherweise auch für vorwissenschaftliche Arbeiten Brauchbares enthält.**

“Elementargeometrie” – eine Definition

Schauplatz ist die naiv-anschauliche Ebene und der Anschauungsraum, beide also **euklidisch**.

EG handelt von **Punkten, Geraden, Kreisen**,
von **Kegelschnitten** und **Kurven** (als geometrischen Örtern),
von **Ebenen, Kugeln**, “primitives”.

EG handelt von **Längen, Winkeln, Teilverhältnissen**

EG betrifft **unerwartete Inzidenzen**.

(z.B. mehr als 2 Geraden durch einen Punkt, mehr als 2 Punkte auf einer Geraden, mehr als drei Punkte auf einem Kreis, ...)

Inhalt

Die Sätze von Pythagoras and Thales sind Ausgangspunkt für Analogien und Verallgemeinerungen, die zu „Merkwürdigkeiten“ Anlass geben.

Es gibt ein mageres TOOL KIT als Verallgemeinerungs-Prinzipien:

- iteriere,
- tausche Angabeelemente gegen „Komplizierteres“ aus,
- wechsle den Schauplatz (z.B. zu „nicht-euklidisch“)
- erhöhe die Dimension

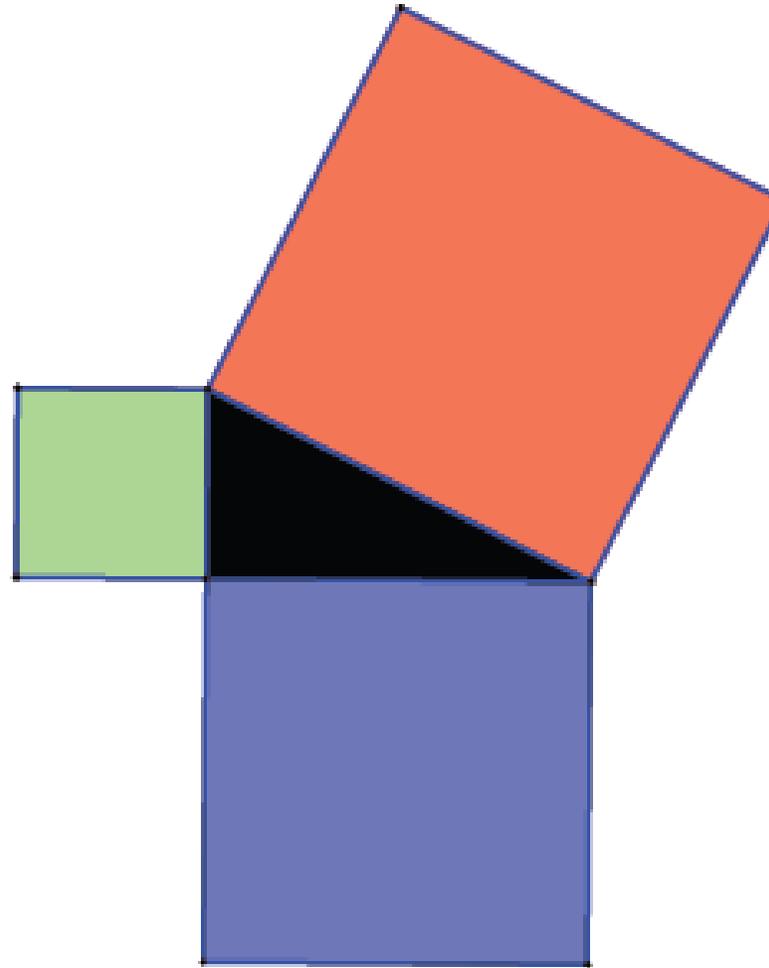
Ebenso für „synthetische Beweise“ im Sinne der Elementargeometrie:

- Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze, Satz von Pythagoras,
- Perspektivitäten und Teilverhältnis („Proportion“), Doppelverhältnis
- Peripheriewinkel- und Thalesatz,
- Kegelschnitt-Definitionen und Eigenschaften

(Ab und zu sind auch Rechen-Beweise elegant oder unvermeidbar, (GeoGebra).)

1) Der Satz von Pythagoras

**Ist das wirklich
alles, was man
über den
“Pythagoras”
wissen sollte?**



1) Der Satz von Pythagoras

... einmal etwas ungewöhnlich betrachtet:

$$(a, b, c) \rightarrow (a^2, b^2, c^2) \rightarrow a^2 - c^2 + b^2 =: f(a, b, c)$$

1) Der Satz von Pythagoras

... einmal etwas ungewöhnlich betrachtet:

$$(a, b, c) \mapsto f(a, b, c) = a^2 - c^2 + b^2 = 0$$

1) Der Satz von Pythagoras

... einmal etwas ungewöhnlich betrachtet:

$$(a, b, c) \rightarrow f(a, b, c) = a^2 - w c^2 + b^2 = 0$$

$$w = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \quad w > 0, \quad w =: v^2$$

1) Der Satz von Pythagoras

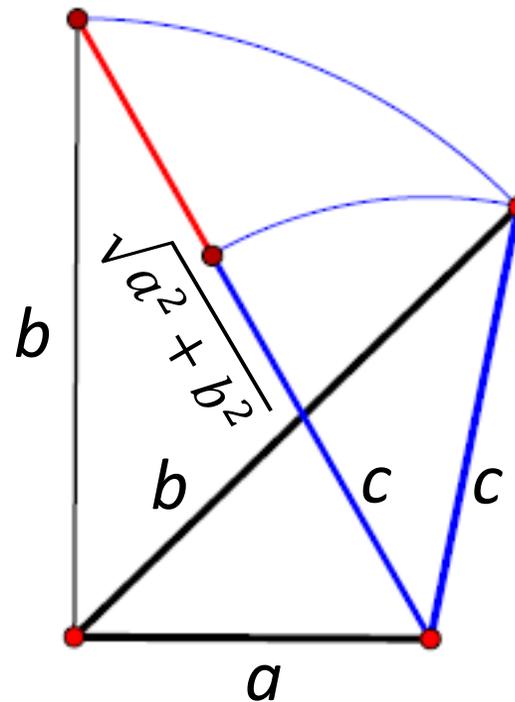
... einmal etwas ungewöhnlich betrachtet:

$$(a, b, c) \rightarrow f(a, b, c) = a^2 - wc^2 + b^2 = 0$$

$$w = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \quad w > 0, \quad w =: v^2$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2} / c$$

v ist also ein Teilverhältnis!



v misst die Abweichung eines Dreiecks von einem rechtwinkligen Dreieck

1) Der Satz von Pythagoras

$$(a, b, c) \mapsto f(a, b, c) = a^2 - wc^2 + b^2 = 0 \implies w = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \quad w > 0, \quad w =: v^2$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}/c$$

v ist ein Teilverhältnis!

v misst die Abweichung eines Dreiecks von einem rechtwinkligen Dreieck, dabei kommt es nicht auf die Größe des Dreiecks an, sondern nur auf die Gestalt!

$\implies v$ ist eine Dreiecksinvariante bzgl. Ähnlichkeiten

\implies Seitenlängen als homogene Koord. verwenden:

$$\text{Dreieck } \Delta \rightarrow (a : b : c) \mathbb{R} \mapsto f(\Delta) = a^2 - v^2 c^2 + b^2 = 0$$

$$(x_1 : x_2 : x_0) \quad f(x_1 : x_2 : x_0) = x_1^2 + x_2^2 - v^2 x_0^2 = 0$$

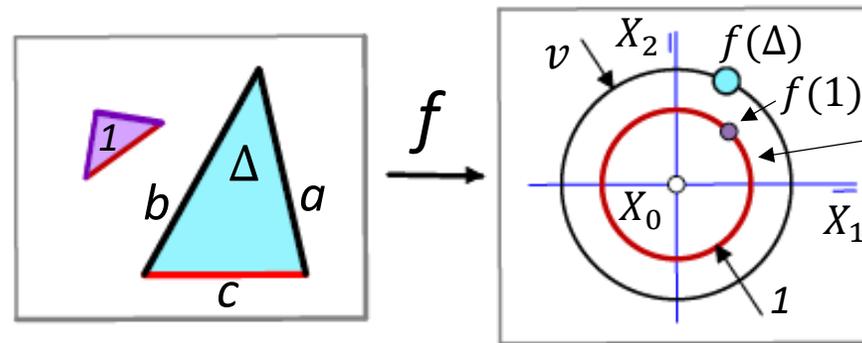
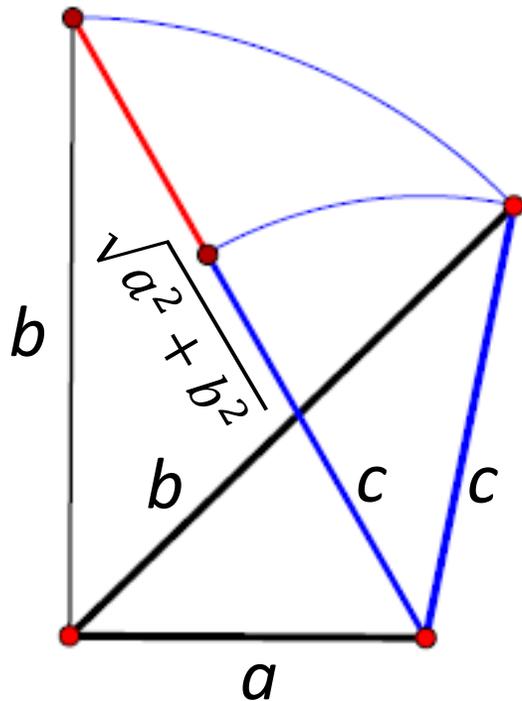


Bild aller rechtwinkligen Dreiecke mit Katheten a, b

1) Der Satz von Pythagoras

... noch einmal etwas ungewöhnlich betrachtet:

$$(a, b, c) \rightarrow f(a, b, c) = a^2 - c^2 + b^2 = w$$

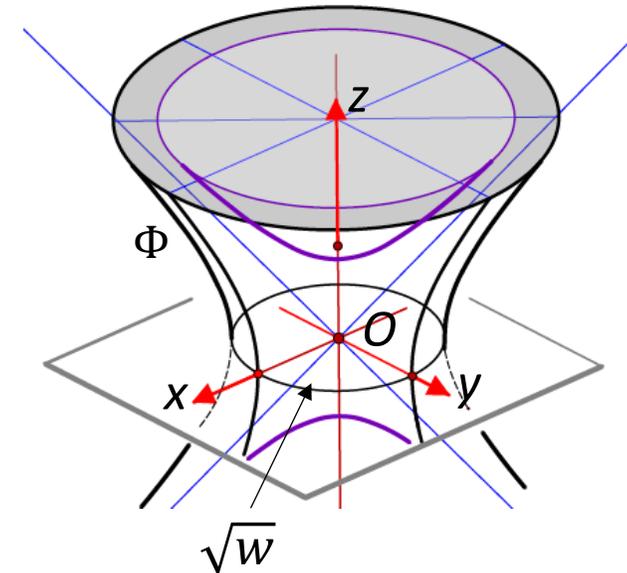
$$w \in \mathbb{R},$$

$$\left. \begin{array}{l} a =: x \\ b =: y \\ c =: z \end{array} \right\}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = w$$

$w \neq 0 \Leftrightarrow \Phi$...gleichs. Drehhyperboloid,
Jeder Punkt ist Bild eines beschrifteten Dreiecks,
dessen Seiten zum selben w -Wert führen.

$w = 0 \Leftrightarrow \Phi$...Drehkegel, Bild des „Pythagoras“



1) Der Satz von Pythagoras

... und noch einmal etwas ungewöhnlich betrachtet:

Es kommt doch nur auf die Seitenverhältnisse an!

Der Pythagoras ist eine „ähnlichkeitsgeometrische Aussage“!

$$\begin{array}{ccc} (a:b:c) & \mapsto & f(a:b:c) = (a^2 - c^2 + b^2)/c^2 = w \\ \uparrow & & \downarrow \\ (x_1:x_2:x_0) & & f(x_1:x_2:x_0) = x_1^2 + x_2^2 - (1+w)x_0^2 = 0 \end{array}$$

...oder affin/euklidisch geschrieben:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (1+w)z^2 = 0$$

1) Der Satz von Pythagoras

... und noch einmal etwas ungewöhnlich betrachtet:

Es kommt ja doch nur auf die Seitenverhältnisse an!

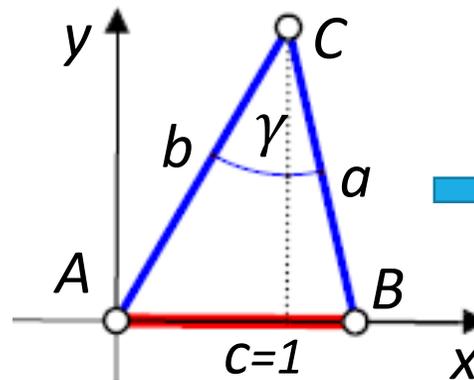
Der Pythagoras ist eine „ähnlichkeitsgeometrische Aussage“!

$$(a:b:c) \rightarrow f(a:b:c) \stackrel{\downarrow}{=} a^2 - c^2 + b^2 = w c^2$$
$$\begin{matrix} \uparrow \\ (x_1:x_2:x_0) \end{matrix} \quad f(x_1:x_2:x_0) \stackrel{\downarrow}{=} x_1^2 + x_2^2 - (1+w)x_0^2 = 0,$$

...oder affin/euklidisch geschrieben:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = (1+w)$$

Das ist i.w. die gleiche Dreiecksabbildung, wie vorhin, nur hat w eine andere Bedeutung. (l.f. $w =: z$)



mittels **Cosinus-Satz** folgt

$$w = -2ab \cdot \cos \gamma$$

u. damit ein Zus.hang mit dem **Peripheriewinkelsatz**

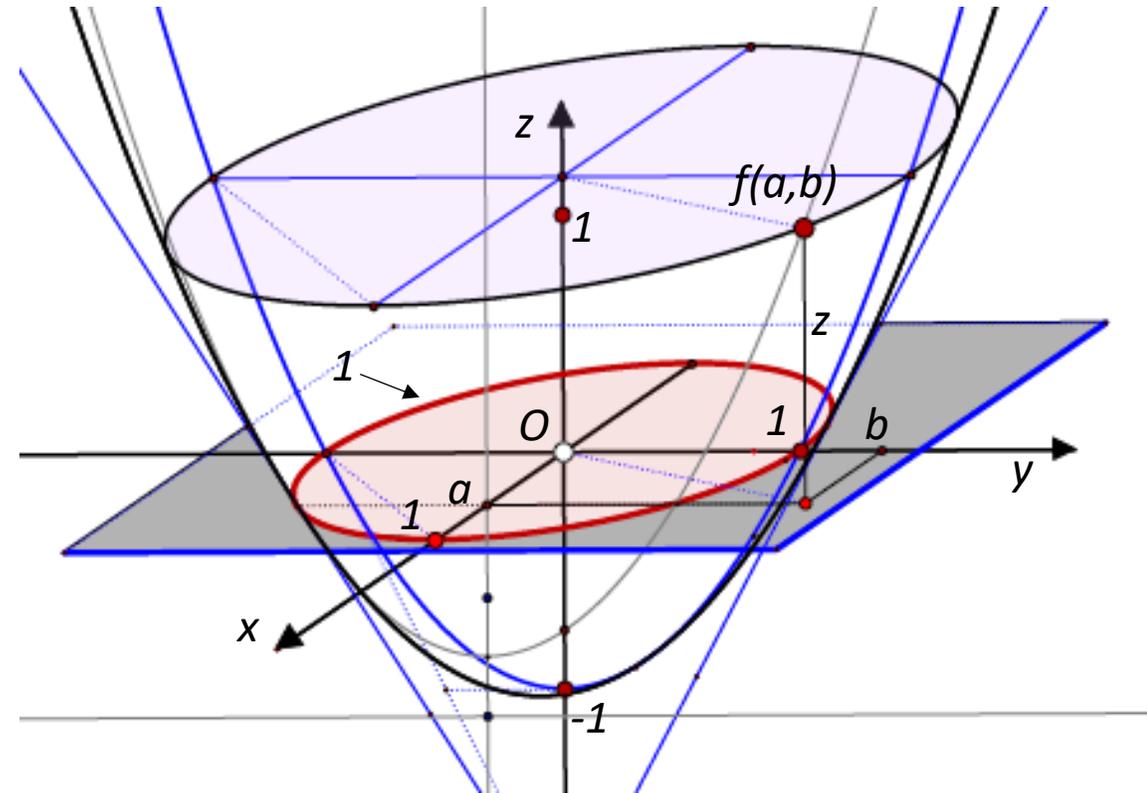
1) Der Satz von Pythagoras

$$(x_1 : x_2 : x_0) \mapsto f(x_1 : x_2 : x_0) = x_1^2 + x_2^2 - (1 + w)x_0^2 = 0,$$

...oder affin/euklidisch geschrieben mit $w =: z$, $x_0 = 1$:

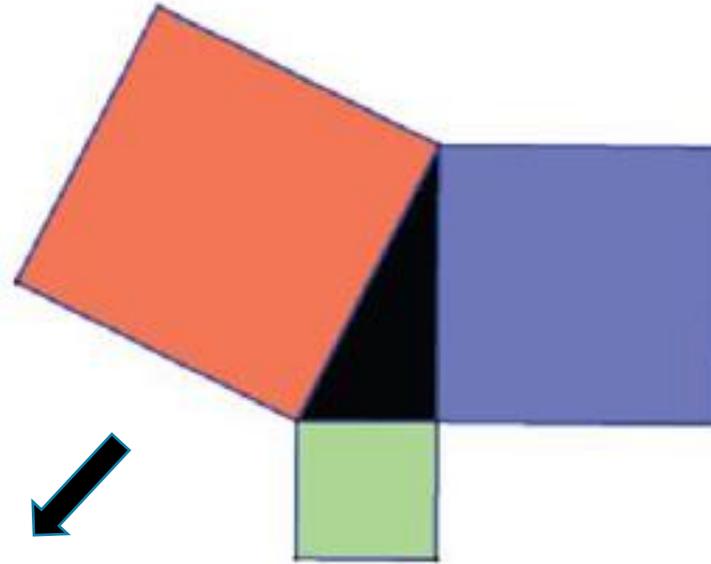
$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 1 + z$$

Das Drehparaboloid ist Bild aller Dreiecke mit Seiten $a, b, c = 1$. Der Einheitskreis in der xy -Ebene ist Bild rechtwinkliger Dreiecke mit **Katheten** a, b . (Dreiecke mit $a \perp c, b \perp c$ sind so nicht sichtbar!)

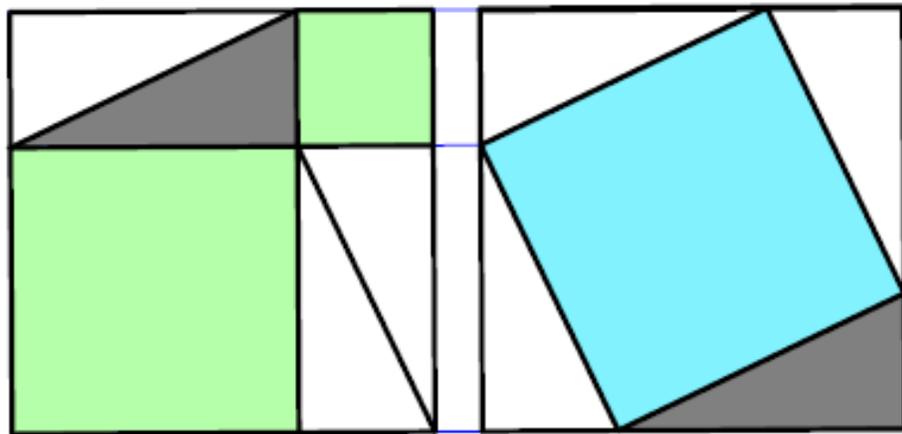


1) Der Satz von Pythagoras

Es gibt eine Unzahl vernünftiger Beweise des Satzes von Pythagoras

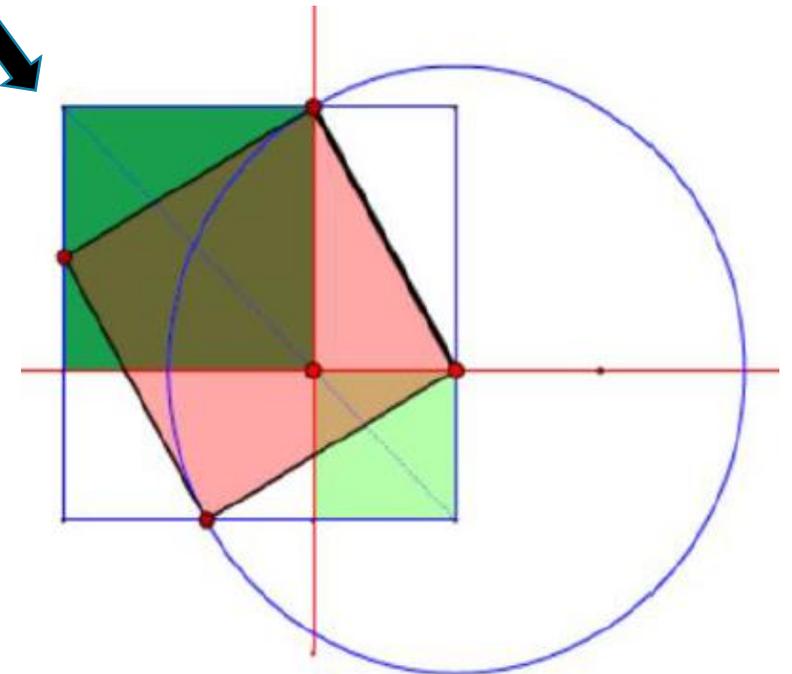


Einige davon sind „**Beweise ohne Worte**“, wenn sie durch **geeignete** Figuren visualisiert werden.



Links: ein in die Augen fallender Beweis.

Die rechte Figur ist eher eine Denksport-Aufgabe.



1) Die Sätze von Pythagoras

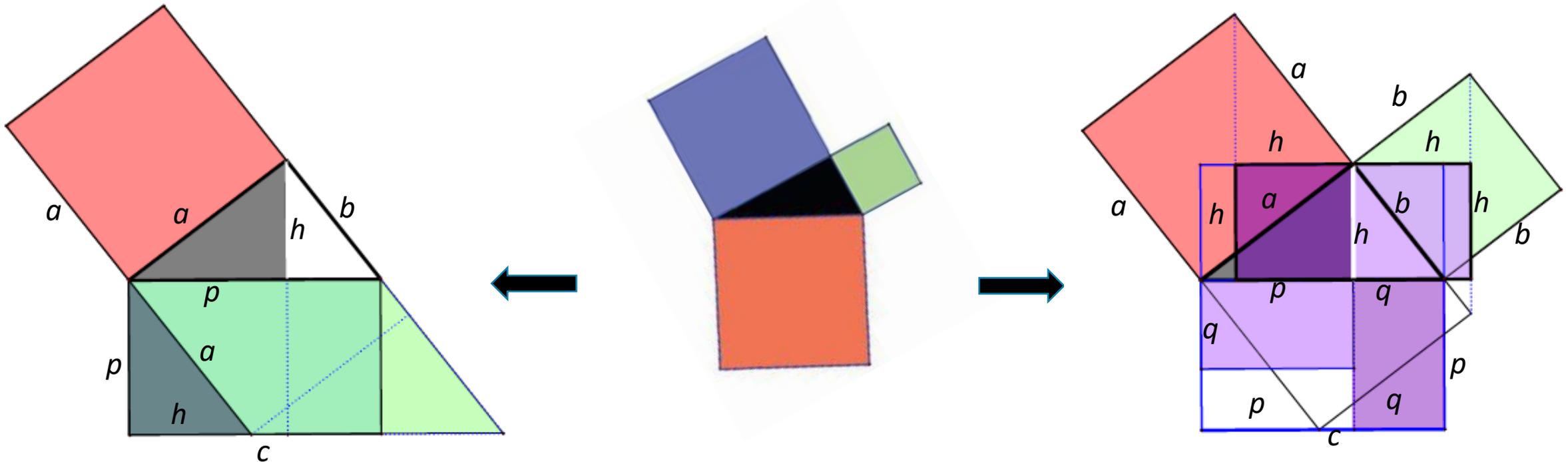
Zum Satz von Pythagoras gehören auch

der „**Katheten-Satz**“ $a^2 = p \cdot c$

und der

„**Höhen-Satz**“ $h^2 = p \cdot q$,

Beide repräsentieren ein **geometrisches Mittel**.



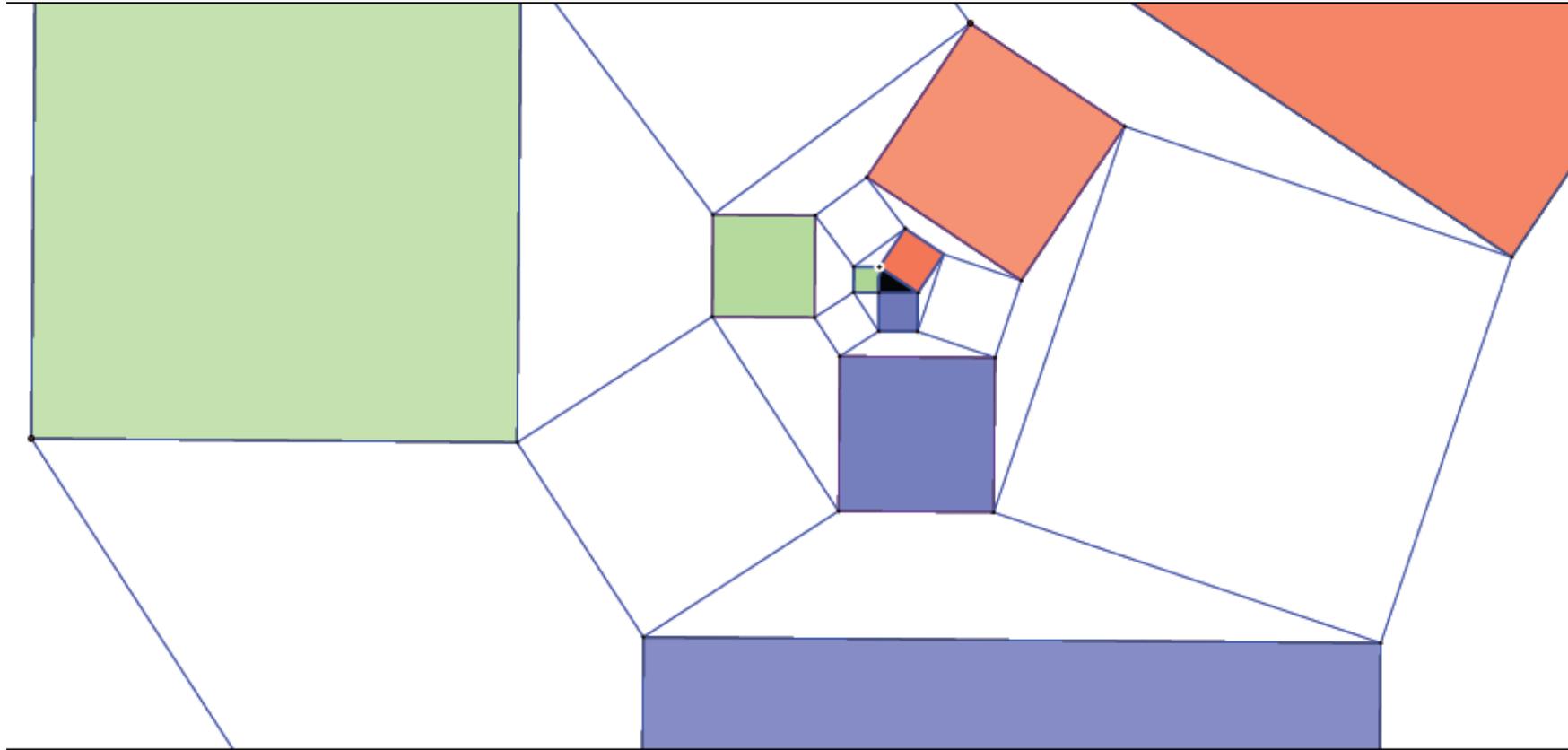
Der analytisch geführte Beweis benützt Proportionen

$$a:p = c:a \Rightarrow a^2 = p \cdot c$$

$$h:p = b:a \wedge h:q = a:b \Rightarrow h^2 = p \cdot q$$

2) Die Sätze von Pythagoras-Ebisui

Die Idee von Hirotaka EBISUI (2012): Iteriere das Ansetzen von Quadraten!



H.EBISUI: „I found a new theorem, please enjoy!

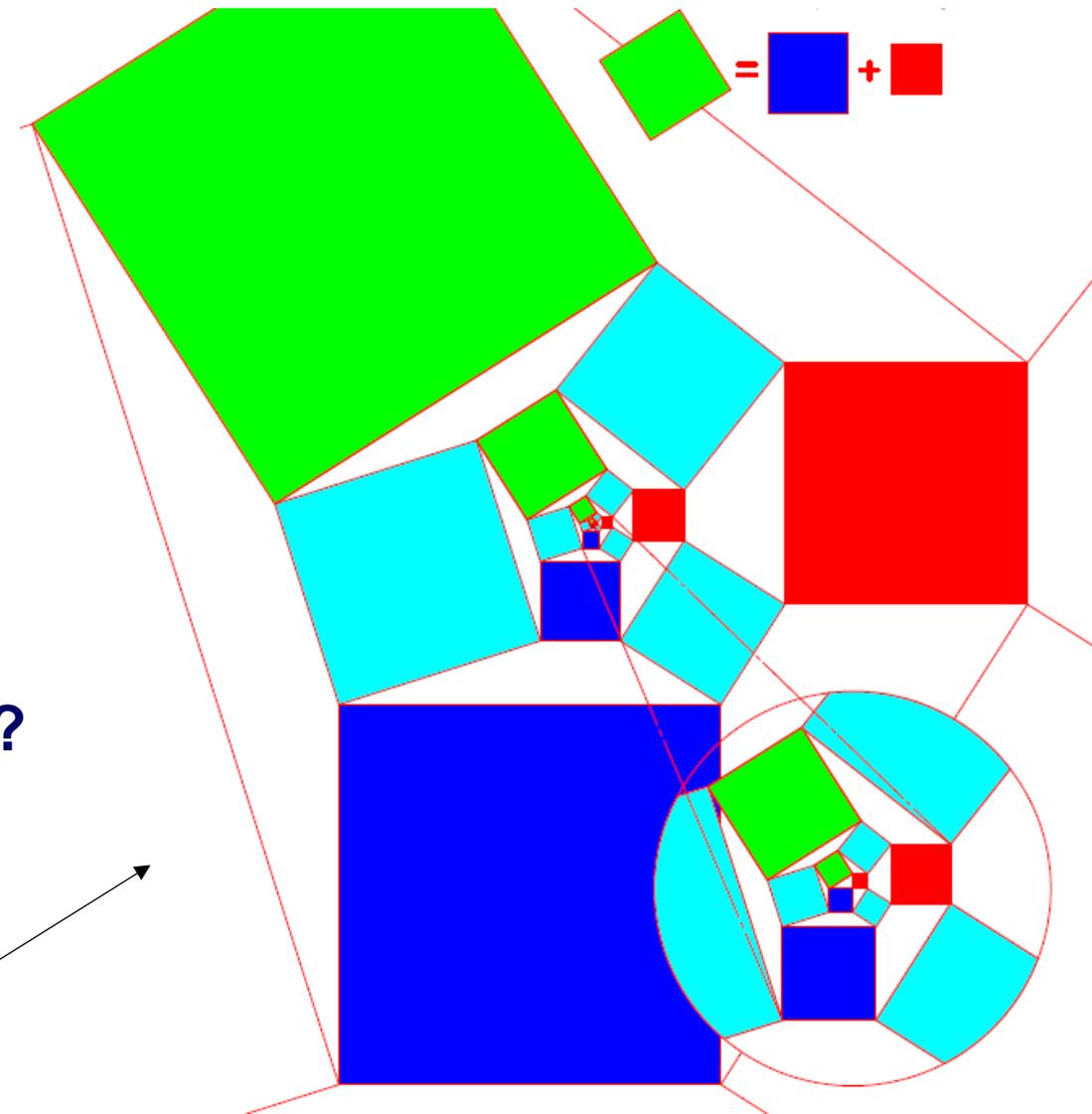
2) Die Sätze von Pythagoras-Ebisui

Pythagoras-Ebisui-Theorem 1:

In jedem Schritt gilt:
„blau“ + „rot“ = „grün“

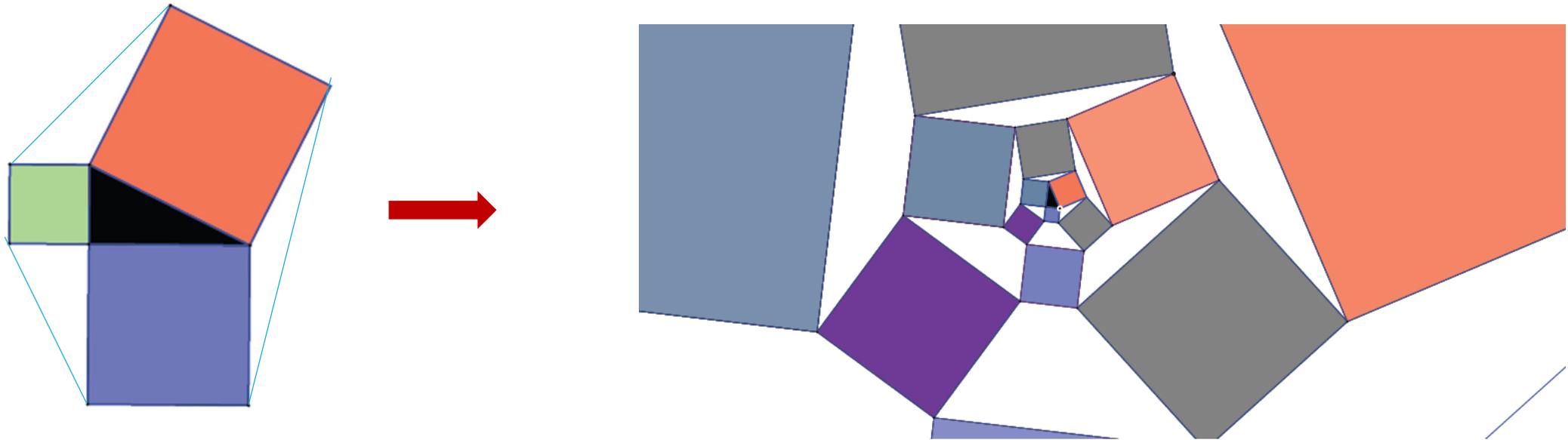
Und was ist mit den lichtblauen Quadraten?

Die Original-Figur
von H.Ebisui



2) Die Sätze von Pythagoras-Ebisui

Die Idee von Hirotaka EBISUI (2012): Iteriere das Ansetzen von Quadraten!



P-E-Theorem 1 + 2: Bei jedem Schritt gilt „*blau* + *blau* = *rot*“, „*grau* + *grau* = 5 × *violett*“

P-E-Theorem 3: Für die Summe aller Schritte gilt „ $\sum \textit{blau} = \sum \textit{rot}$ “, „ $\sum \textit{grau} = 5 \times \textit{violett}$ “

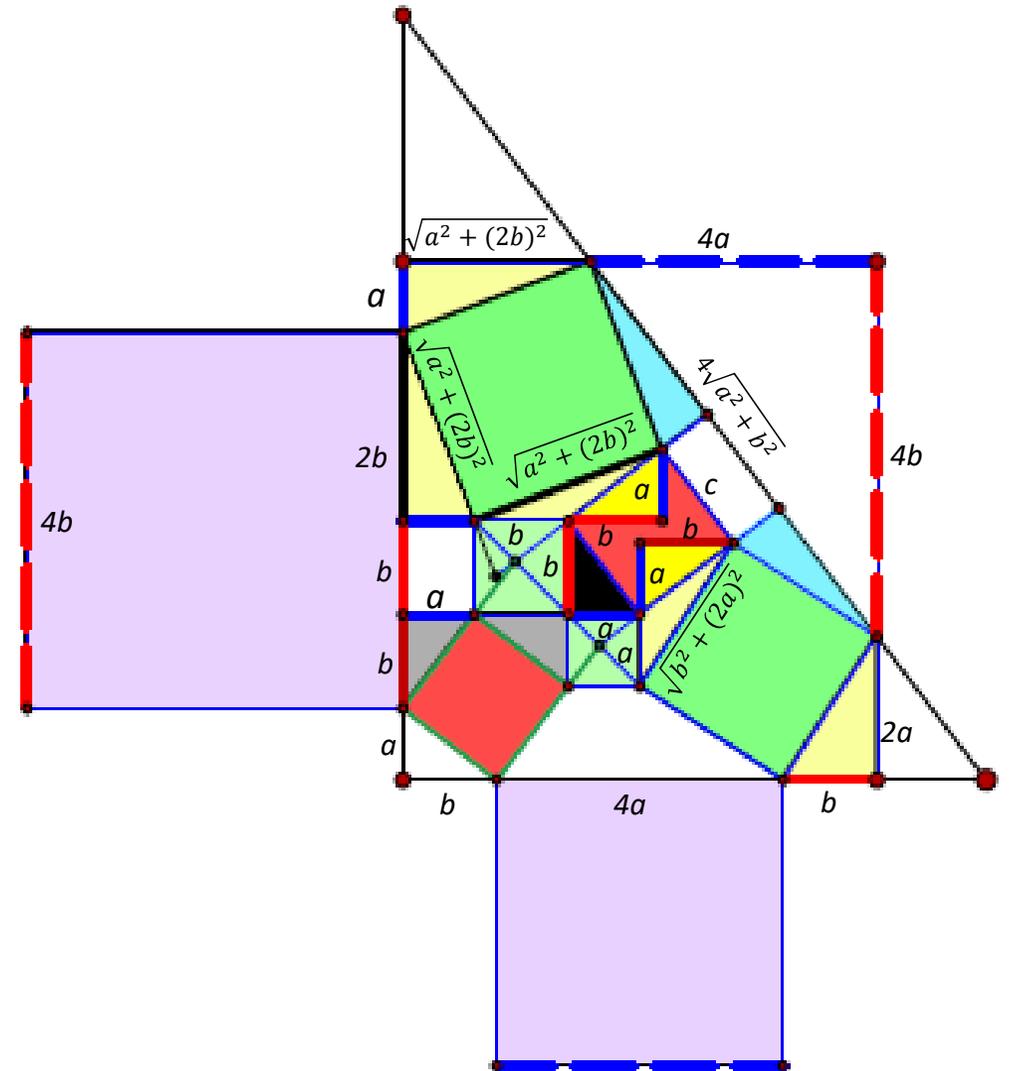
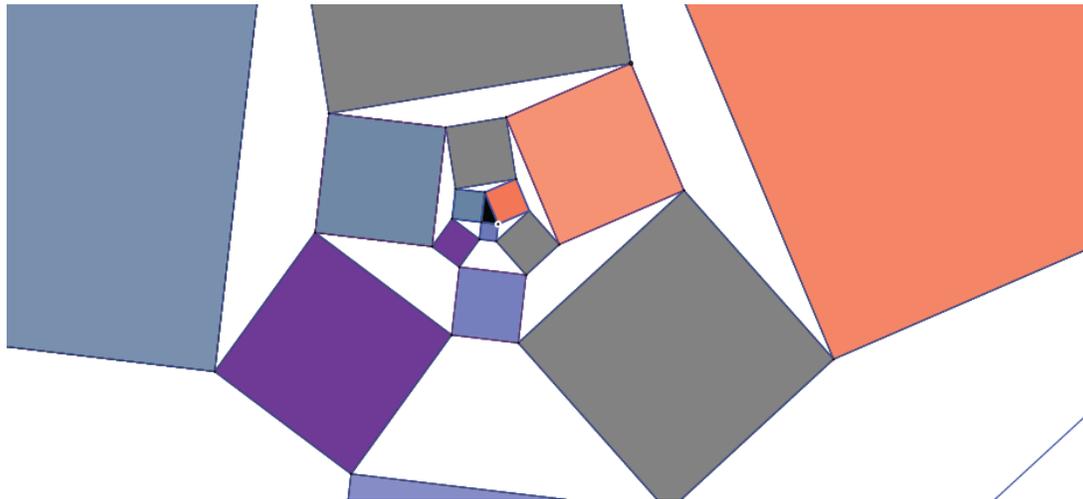
(Ein adäquater Beweis rechnet in der Gaußschen Zahlenebene. (I.w. nur Multiplikationen mit $i = \sqrt{-1}$.) und Pythagoras-Anwendung auf die Strecken in jedem Iterationsschritt.)

2) Die Sätze von Pythagoras-Ebisui

P-E-Theorem 1 + 2: „*blau* + *blau* = *rot*“,
„*grau* + *grau* = 5 × *violett*“

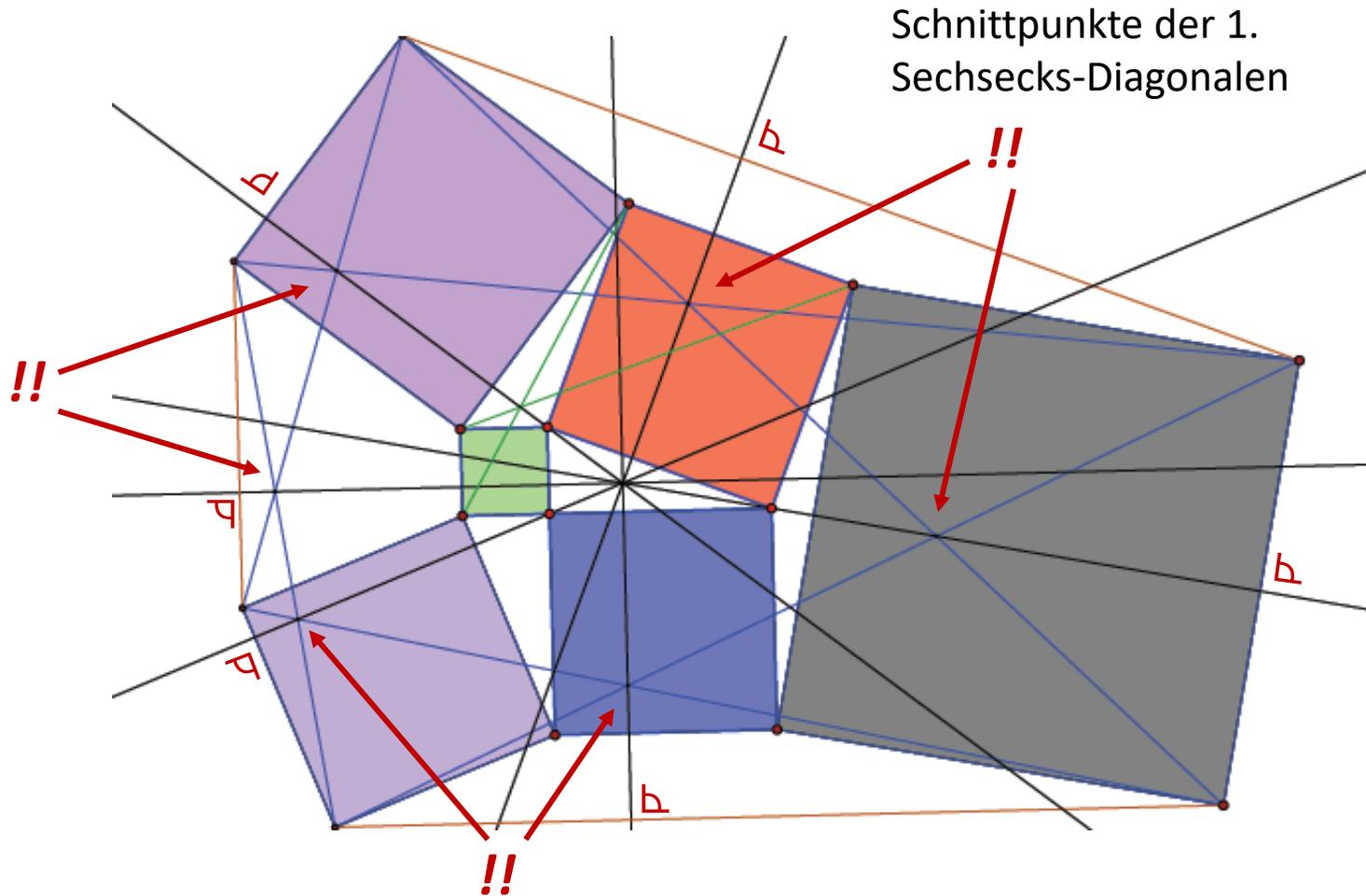
P-E-Theorem 3: „ \sum *blau* = \sum *rot*“,
„ \sum *grau* = 5 × *violett*“

Ein elementargeometrischer Beweis findet die Längen der Quadratseiten mittels Pythagoras heraus. \Rightarrow **Schul-Verwendbarkeit !!**



2) Die Sätze von Pythagoras-Ebisui

H.EBISUI: „I found a new theorem, please enjoy!“

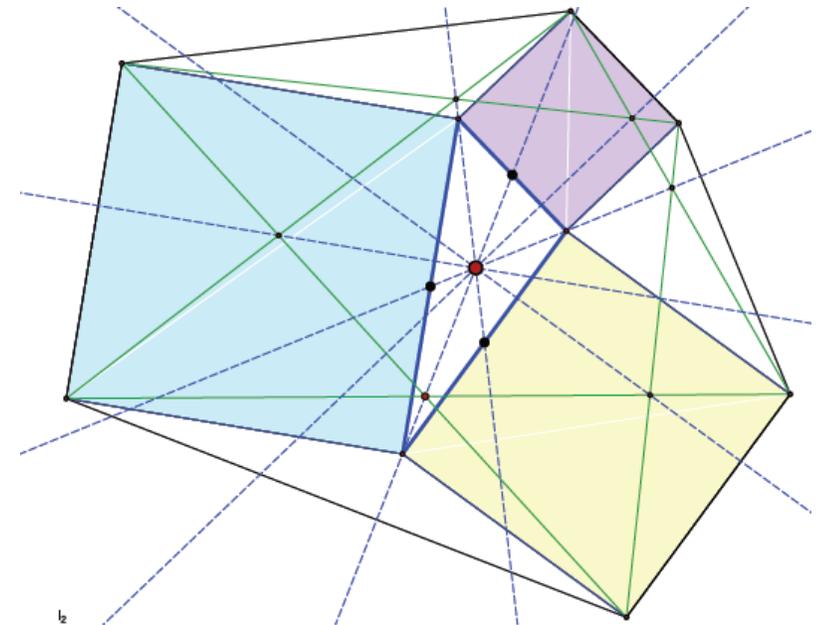
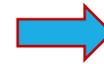
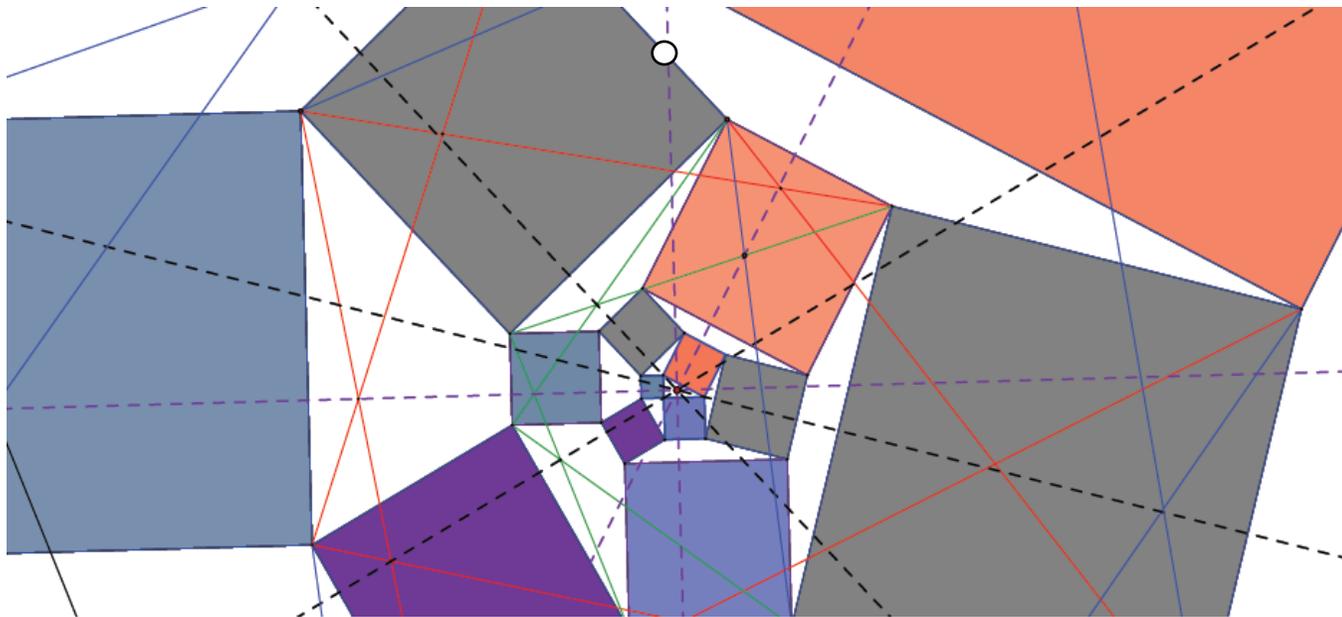


P-E-Theorem 4: In jedem Schritt gilt: Die 6 Normalen zu den Sechseck-Seiten durch die Schnittpunkte der 1. Diagonalen gehen durch einen Punkt !

Ist das ein neuer „merkwürdiger Punkt“ nur für rechtwinklige Dreiecke?

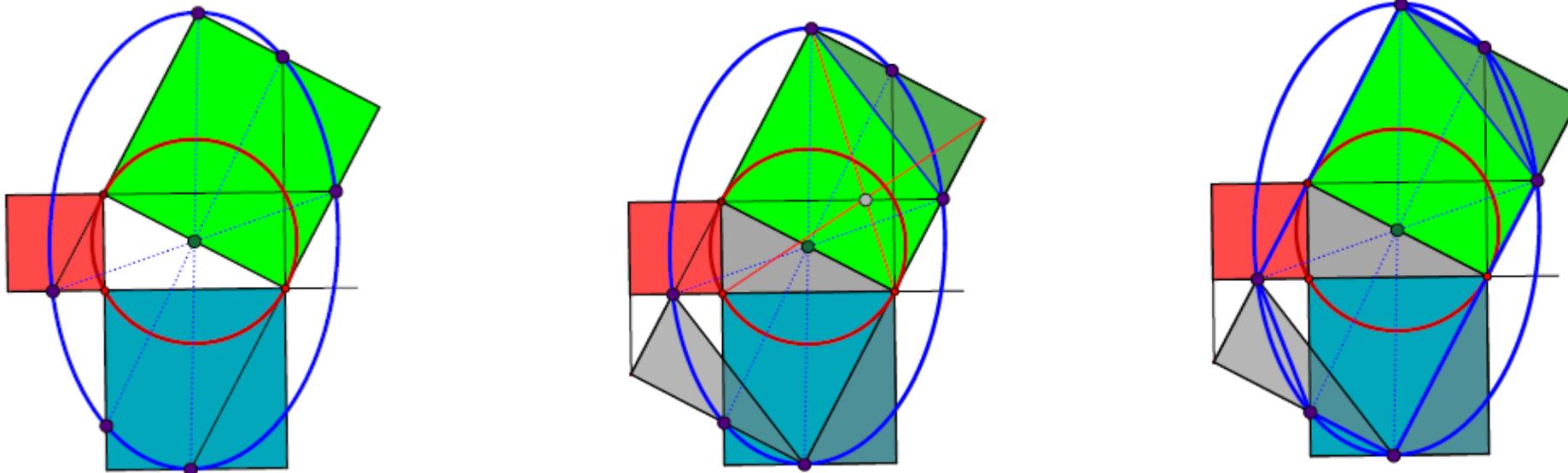
2) Die Sätze von Pythagoras-Ebisui

P-E-W-Theorem 5: P-E-Theorem 4 bleibt gültig auch wenn man allgemeinen Dreiecken Quadrate ansetzt. Der Schnittpunkt der Normalen zu den sechs Seiten der entstehenden Sechsecke durch deren erste Diagonalen-Schnittpunkte ist der (**Ecken-**) **Schwerpunkt** des Ausgangsdreiecks.



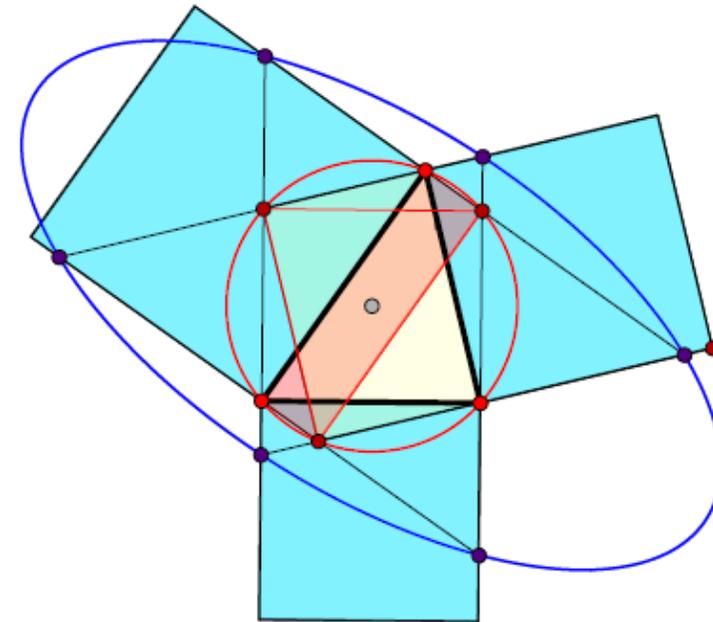
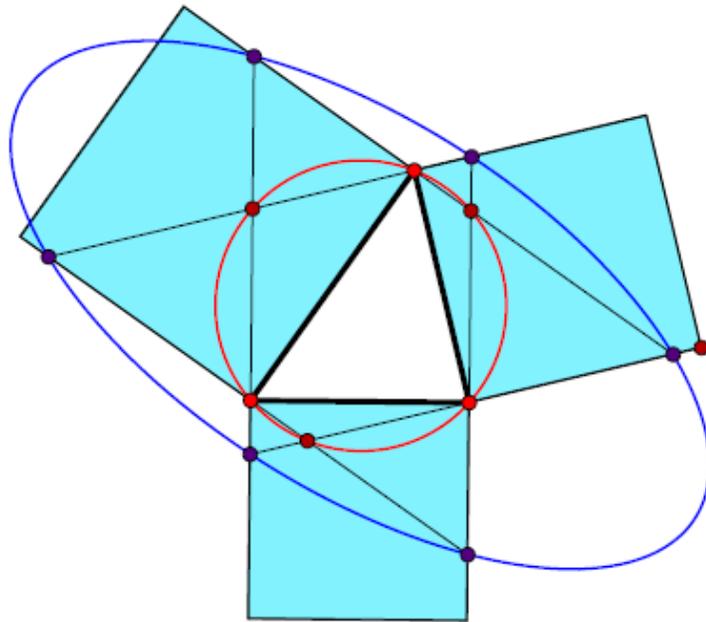
3) Pythagoras-Quadratseiten schneiden

Man bekommt 6 Punkte einer Ellipse, die mit dem Dreiecks-Umkreis konzentrisch ist.

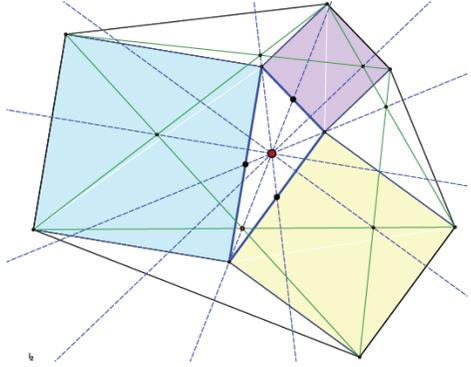


3) Pythagoras-Quadratseiten schneiden

Auch bei allgemeinem Dreieck als Startfigur:
Man bekommt 6 Punkte einer Ellipse, die mit dem Dreiecks-Umkreis konzentrisch ist,
sowie drei weitere Punkte, die auf dem Dreiecks-Umreis liegen.

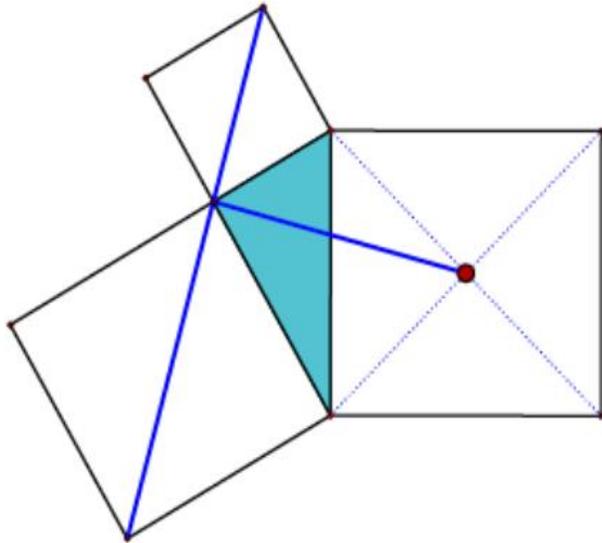


4) Pythagoras und Quadratketten

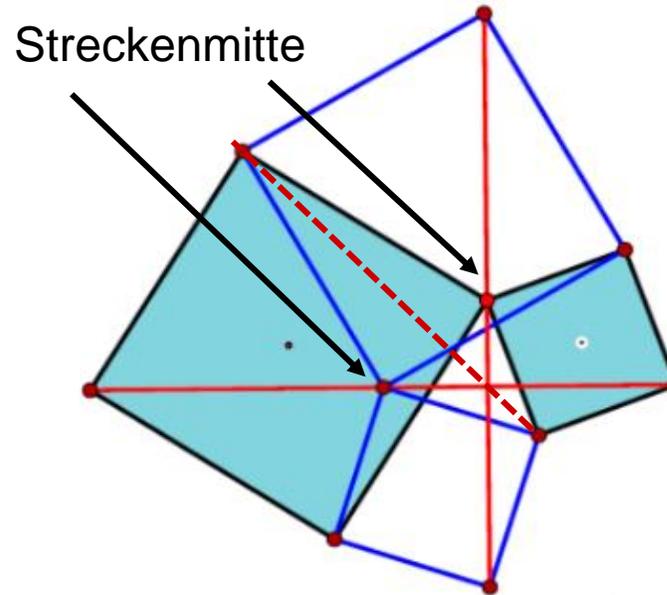


Quadrate hängen zusammen, bilden eine geschlossene Kette. Von jedem Quadrat zum nächsten wirkt eine Ähnlichkeitsabb. Das Produkt dieser Ähnlichkeiten ist offenbar die Identität.

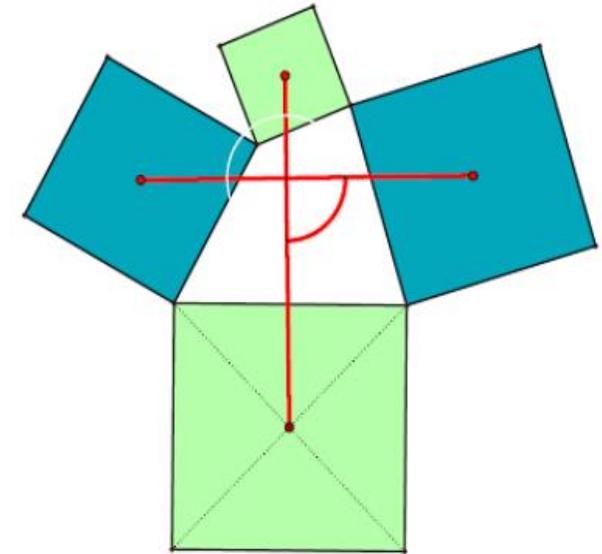
Beispiele von Quadratketten mit „merkwürdigen“ Eigenschaften:



Orthogonale Strecken

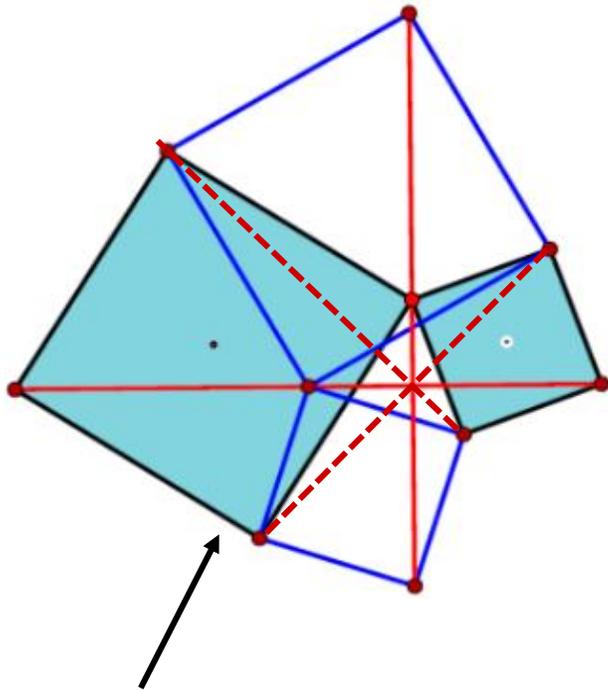


Orthogonale Strecken gleicher Länge



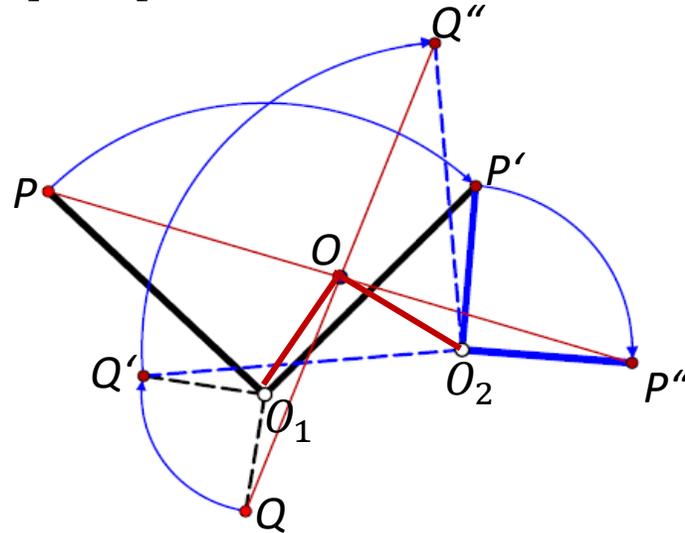
4) Quadratketten

Merkwürdigkeiten bei Ketten von Quadraten



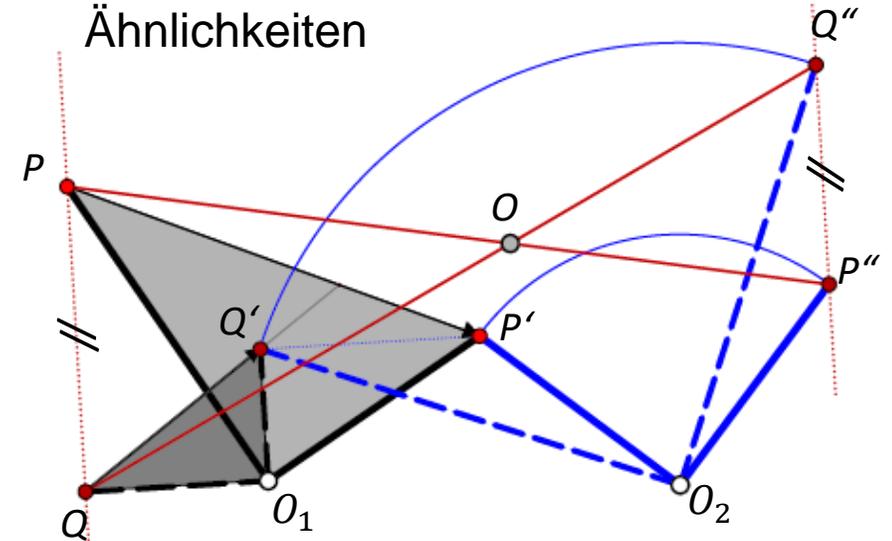
Startfigur für „fractale Iteration“

Beweis, dass O Mittelpunkt von $[P, P'']$ ist



Das Produkt von zwei 90° -Drehungen ist eine 180° -Drehung, also eine Punkt-Spiegelung.
 $d[OO_1] = d[OO_2], [OO_1] \perp [OO_2]$

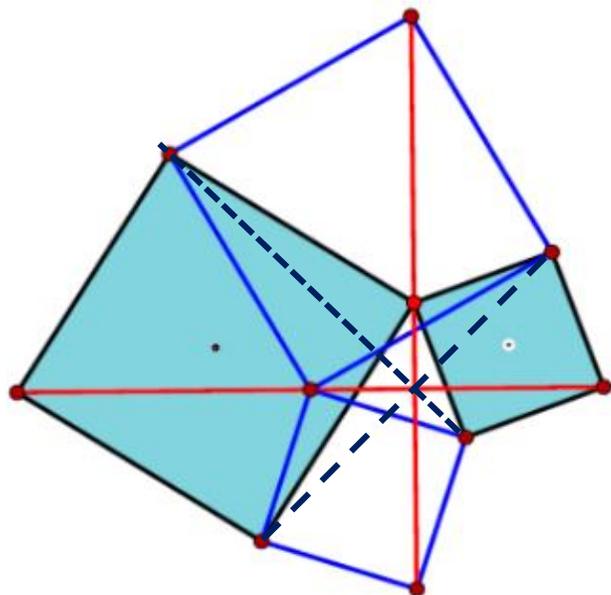
Bemerkung: Das funktioniert auch für das Produkt zweier Ähnlichkeiten



Wenn der Drehanteil der Ähnlichkeiten sich zu 180° aufsummiert, ist das Produkt eine zentrische Streckung.

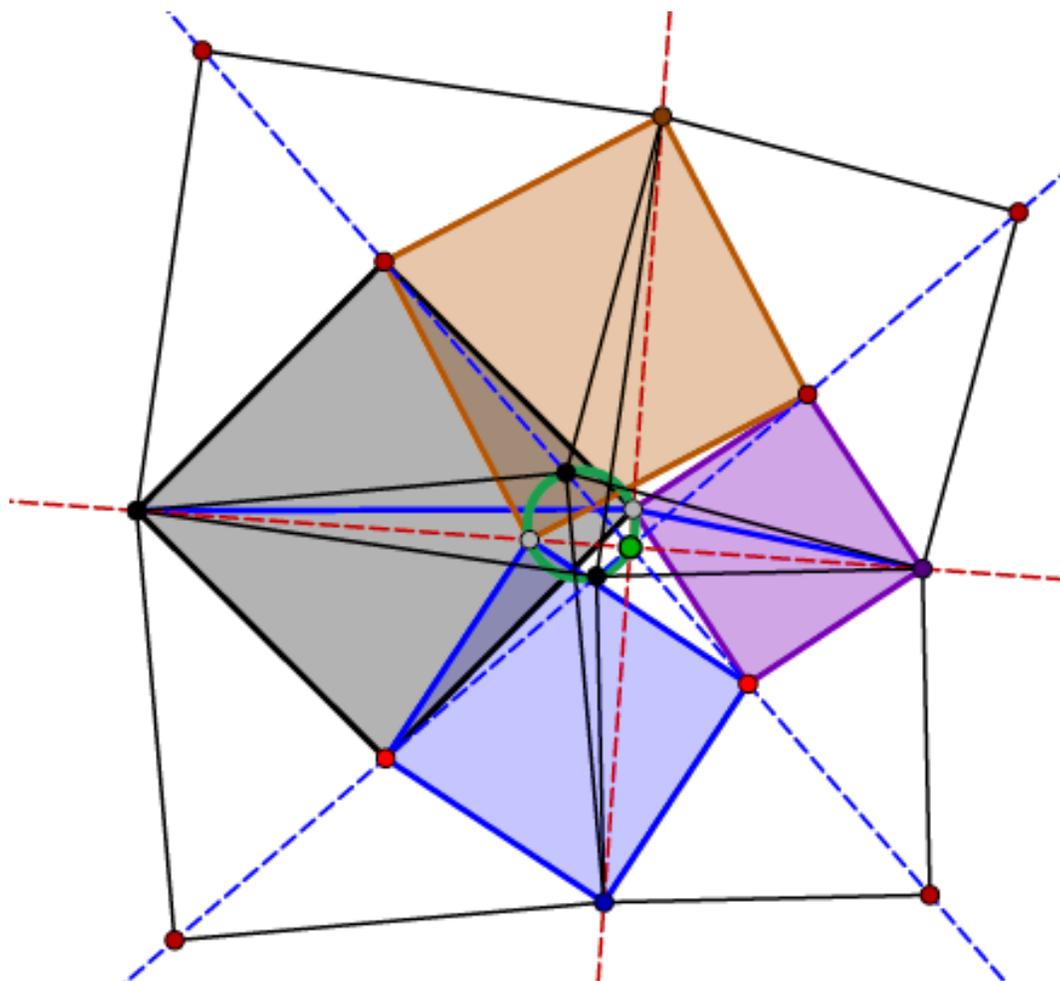
3) Chains of squares

Iteriere das „Vervollständigen von Rechtwinkelhaken zu Quadraten“



Vom Diagonalen-Mittelpunkt sieht man die Scheitel der Rechtwinkelhaken unter rechtem Winkel und äquidistant. 

Vervollständige zu Quadraten:
Zwei neue Paarungen der vier Quadrate sind möglich.



Die neuen Quadrate sind mit den alten verkettet
Neue Diagonalen (blau) sind Winkelsymmetralen der alten, orthogonalen Diagonalen (rot)!

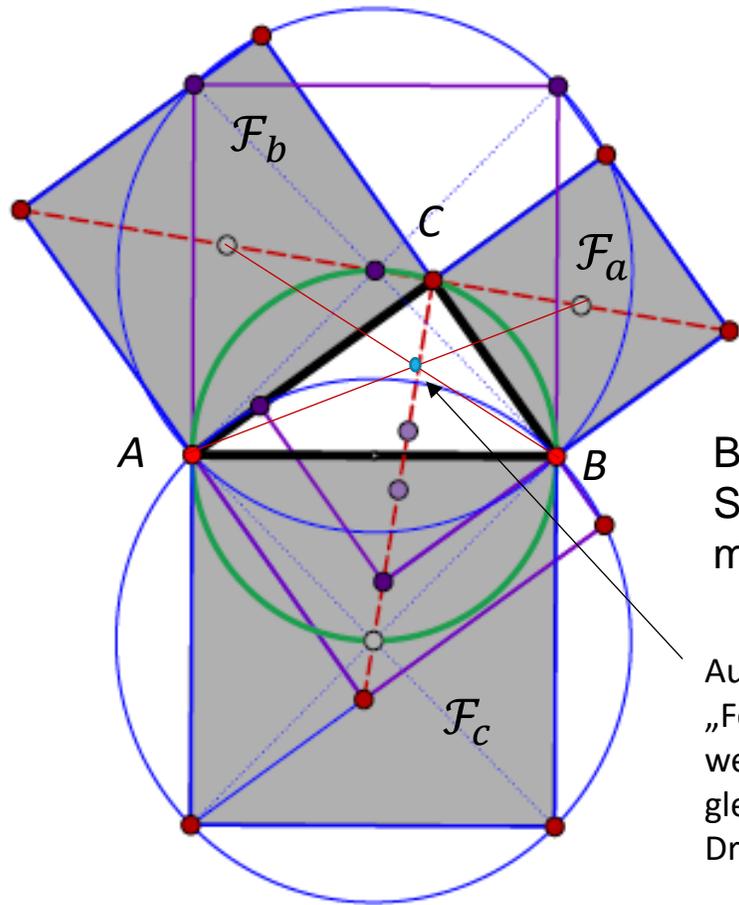
Vier Diagonal-Mittelpunkte und der gemeinsame Punkt der Diagonalen sind konzyklisch (grün)!

Die neuen Mittelpunkte (schwarz) geben Anlass zu 4 verketteten Quadraten mit Ecken auf den blauen und roten Diagonalen. Diagonalen-Mitten sind dabei fix.

Iteriere und kopple neu entstandene Quadratpaare!
Man erhält ein „Fractal“.

4) Pythagoras mit reg. Polygonen statt Quadraten

Pythagoras mit „inneren“ and „äußeren“ Quadraten bzw. Dreiecken

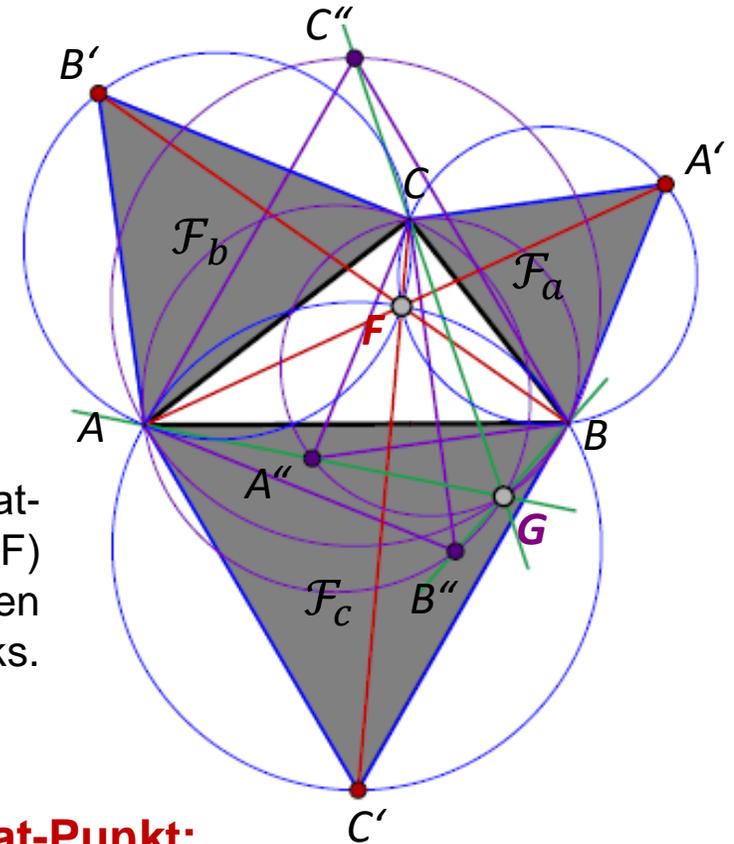


$$\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_c$$

Beachte die Schnittpunkte mit Umkreisen!!

Auch quasi ein „Fermat-Punkt“, wenn man rechth. gleichschenkelige Dreiecke ansetzt.

Es entsteht ein „Fermat-Punkt“ im Inneren (F) und einer im Äußeren (G) des Dreiecks.



F... Fermat-Punkt:

für allgemeines spitzwinkliges Dreieck gilt:

$$\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} \text{ minimal, } \overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$$

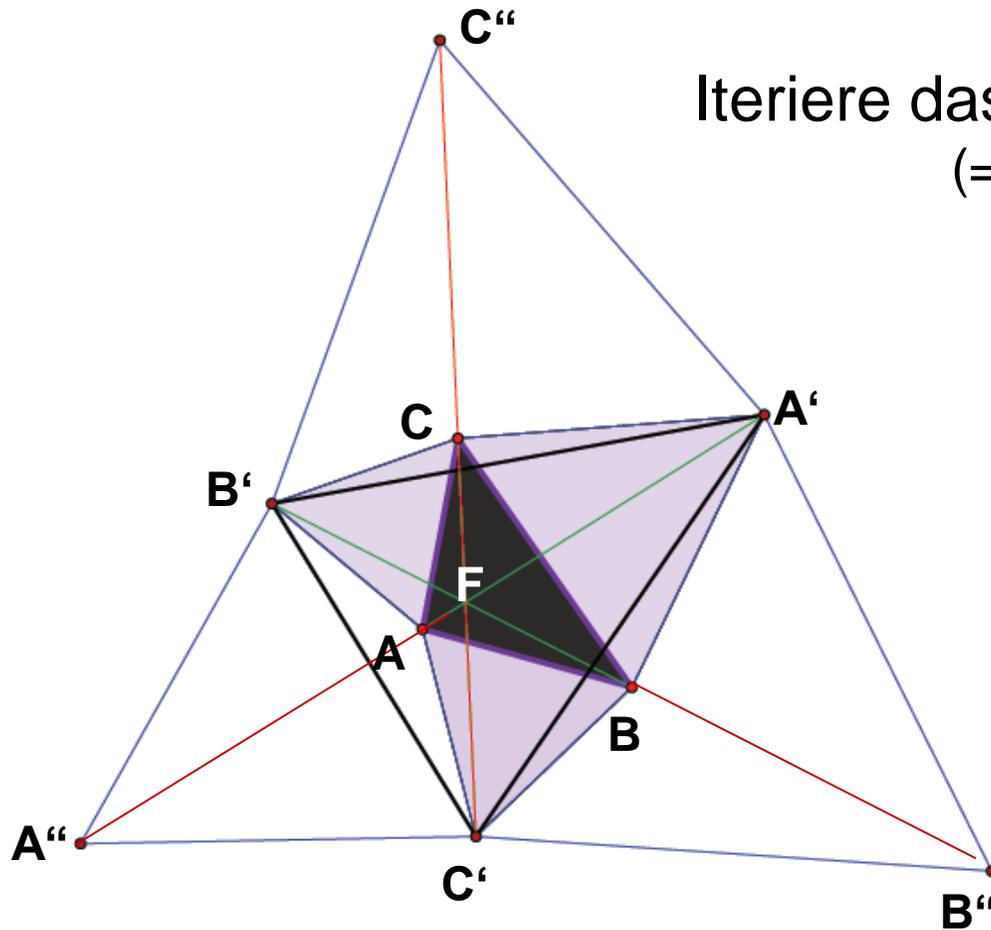
$$\sphericalangle FA = \sphericalangle FB = \sphericalangle FC = 120^\circ$$

4) Pythagoras mit reg. Polygonen statt Quadraten

Beispiel: gleichseitige Dreiecke anfügen



Hat der Fermat-Punkt noch weitere Eigenschaften ?



Iteriere das Anfügen von gleichseitigen Dreiecken:
(= Nachahmen des Ebnisui-Verfahrens)

Ergebnis 1: Alle Dreiecke $A^{(n+1)}B^{(n+1)}C^{(n+1)}$ und $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ sind „ F -perspektiv“ mit den selben Perspektivitätsgeraden FA^i , FB^i , FC^i .

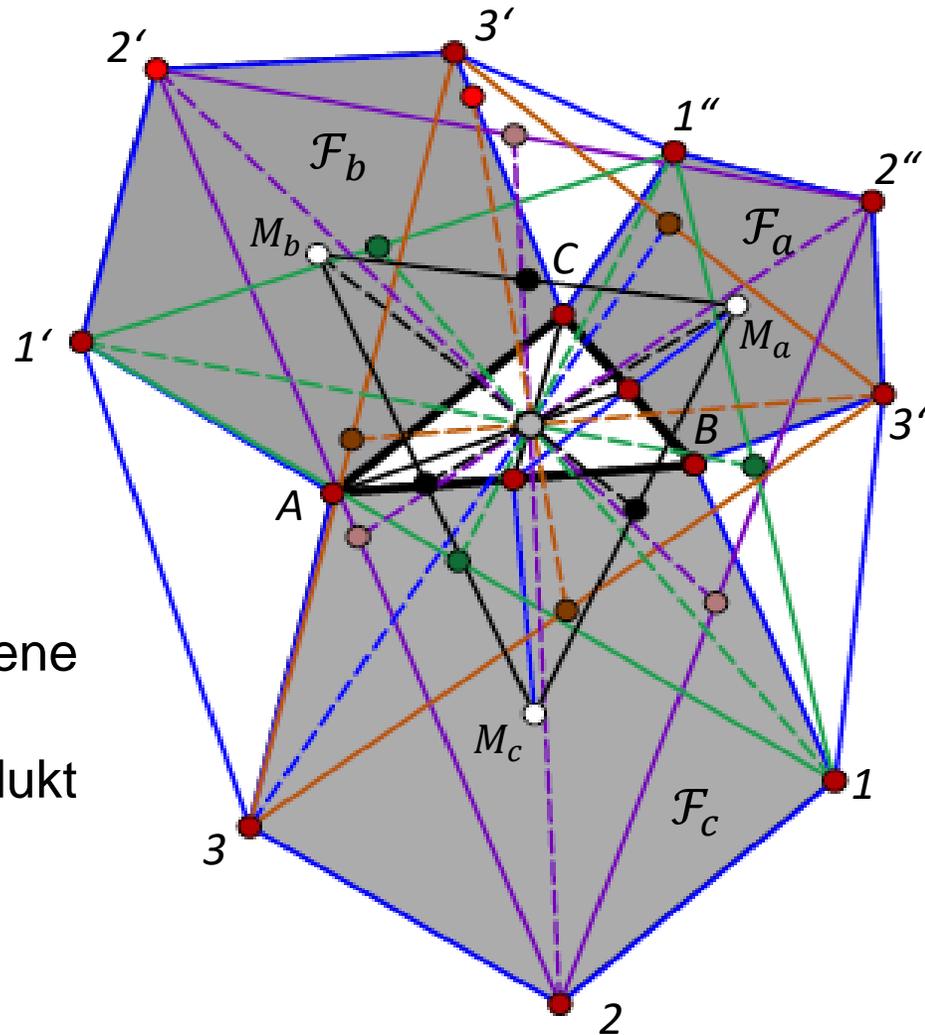
Ergebnis 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)})$ ist gleichseitig.

4) Pythagoras mit reg. Polygonen statt Quadraten

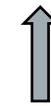
Beispiel: reguläre Fünfecke ansetzen

$$\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_c$$

Beachte: Geschlossene Ketten von gleichsinnig ähnlichen Polygonen definieren eine geschlossene Kette von gleichsinnigen Ähnlichkeiten. Deren Produkt ist die Identität.



Ergebnis: Die Dreiecke $11'1''$, $22'2''$, $33'3''$, $M_aM_bM_c$ sind ähnlich mit gemeinsamem Schwerpunkt. Dieser ist auch Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks

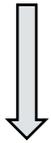


Das gilt auch für allgemeine Dreiecke

5) Pythagoras und Zahlenfolgen

$$\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_c$$

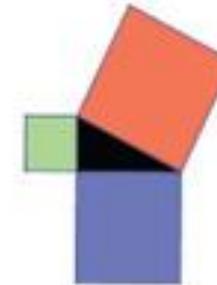
Iteriere und erhalte
rekursive Prozesse



Visualisiere die
entsprechenden
Zahlenfolgen
durch rechtwinklige
Dreiecke

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= d^2 \\ a^2 + d^2 &= e^2 \\ a^2 + e^2 &= f^2 \\ &\dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= d^2 \\ c^2 + d^2 &= e^2 \\ d^2 + e^2 &= f^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$a = b = 1 :$$

1, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ergebnis: natürliche
Zahlen \mathbb{N}

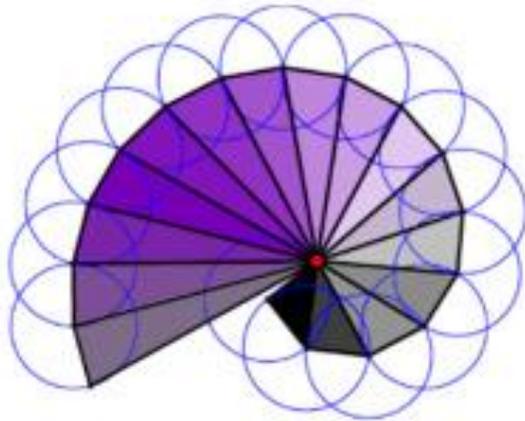
1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Ergebnis: Fibonacci
Zahlenfolge

5) Pythagoras und Zahlenfolgen

Visualisieren der entsprechenden Folgen mit rechtwinkligen Dreiecken

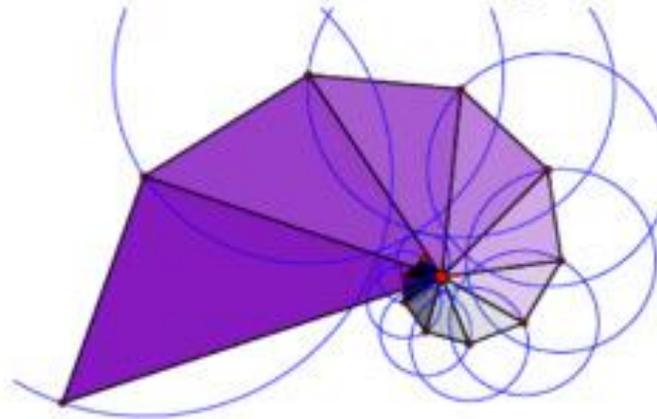
1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,



$$1: \sqrt{n}: \sqrt{n+1}$$

„Wurzelspirale“

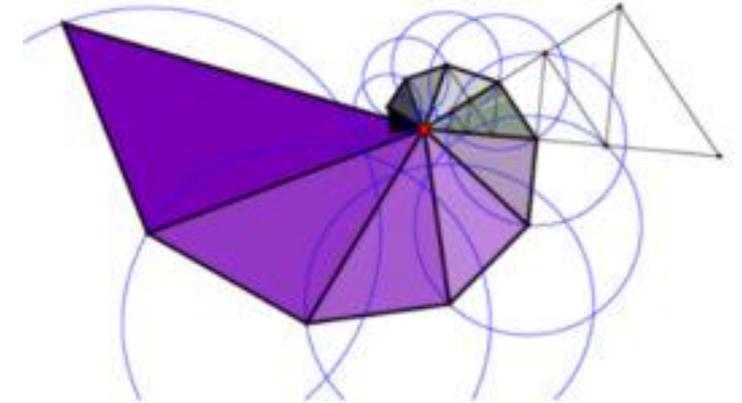
1, 1, 2, 3, 5, 8,, F_n ,



$$\sqrt{F_{n-1}}: \sqrt{F_n}: \sqrt{F_{n+1}}$$

Spiral-Dreiecke
haben Seitenlängen
= $\sqrt{\text{Fibonacci-Zahl}}$

„Limes-Figur“ = „Goldene Spirale“



$$1: \sqrt{\phi}: \sqrt{\phi^2}$$

Dreiecke haben Seitenlängen
= $\sqrt{\text{Potenzen von } \phi}$
 ϕ ... Goldenes Mittel

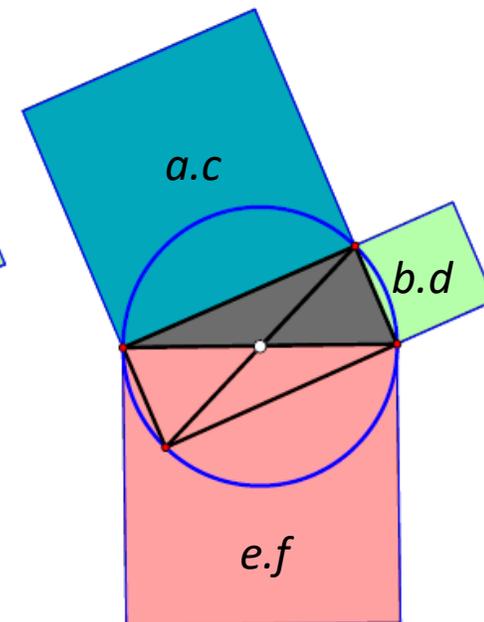
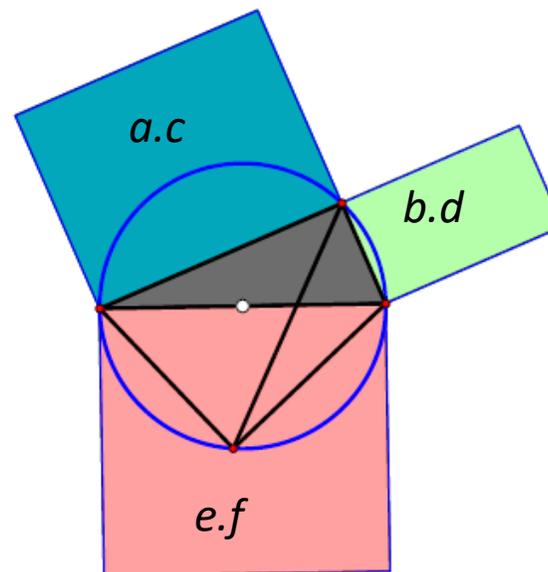
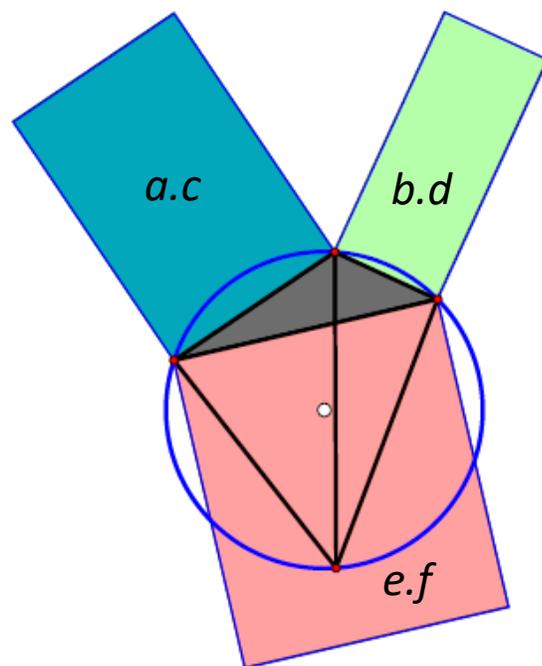
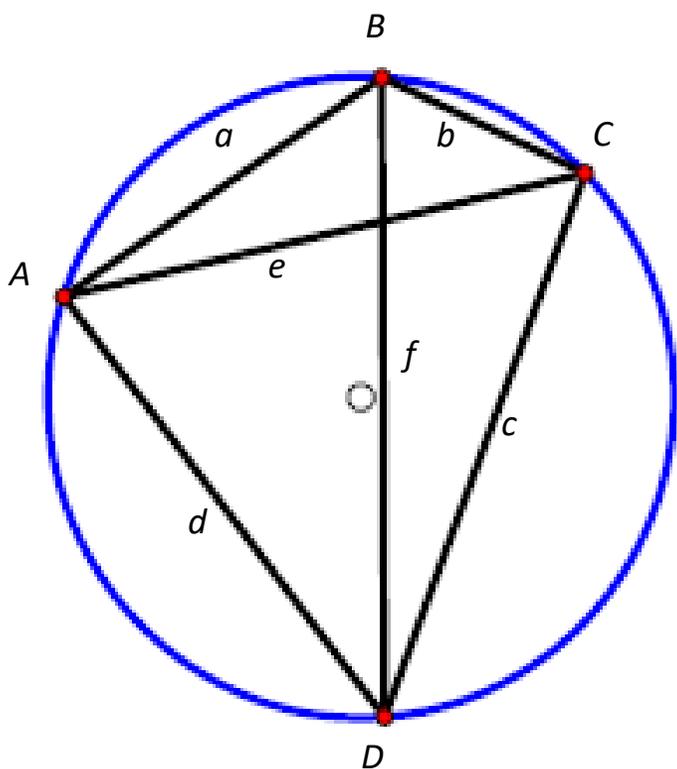
6) Pythagoras und Ptolemäus

Der Satz von Ptolemäus für Kreisvierecke:

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$



„Pythagoras“ ist nur ein Sonderfall davon!
Somit ist der „Pythagoras“ ein Satz über
Vierecke und nicht über Dreiecke!
Und er hat mit dem **Thaleskreis** zu tun.



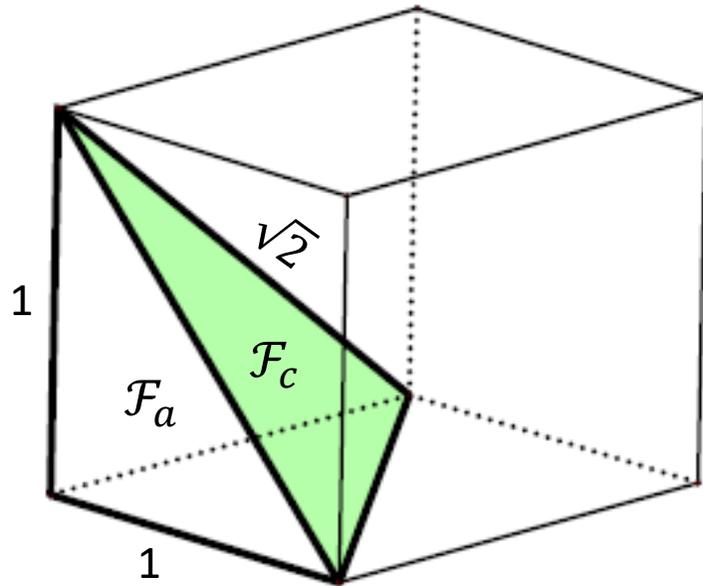
Bemerkung: Standard-Visualisierungen behindern das Erkennen von Zusammenhängen!

7) Pythagoras in höheren Dimensionen

Eine 3D-Version eines Pythagoras-Satzes

(H. Dirnböck & J. Kofler (2005?))

Beispiel: Würfel

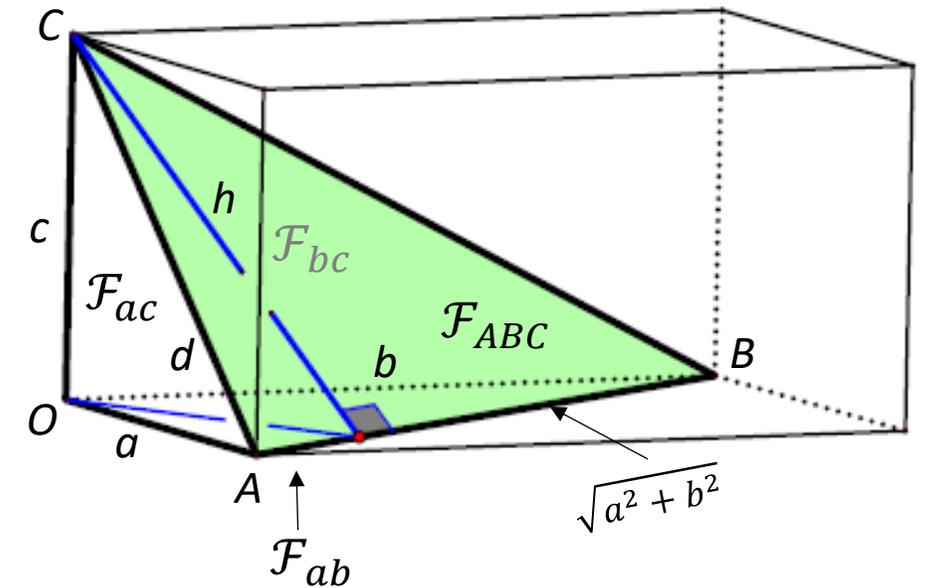


$$\mathcal{F}_c^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2, \quad \mathcal{F}_a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\mathcal{F}_c^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2, \quad \mathcal{F}_a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow 3 \cdot \mathcal{F}_a^2 = \mathcal{F}_c^2$$

Allgemeines Prisma



Ergebnis: $\mathcal{F}_{ab}^2 + \mathcal{F}_{bc}^2 + \mathcal{F}_{ca}^2 = \mathcal{F}_{ABC}^2$

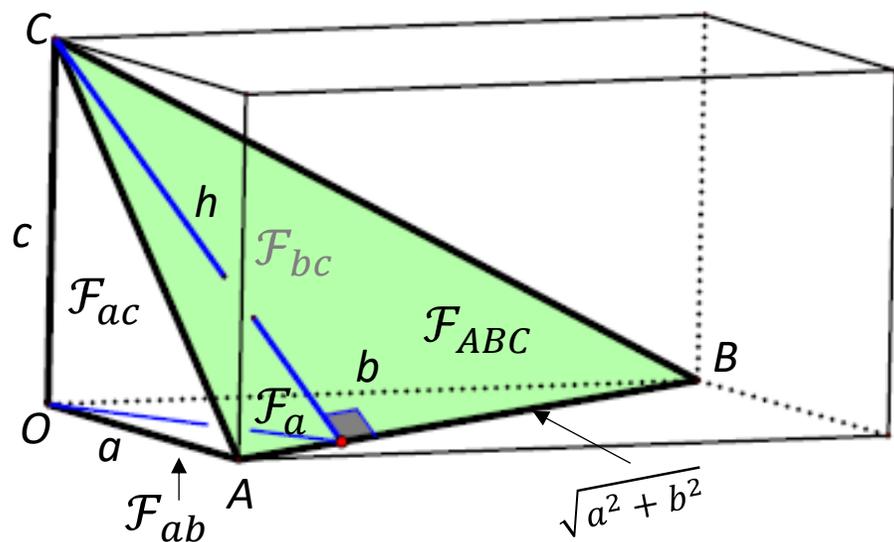
Beweis: Besser NICHT mit der „Heron-Formel“!
 $\mathcal{F}_{abc}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)h^2, \quad h^2 = c^2 + d^2, \quad d\sqrt{a^2 + b^2} = ab$

7) Pythagoras in höheren Dimensionen

3D-Version eines Pythagoras-Satzes

(H. Dirnböck & J. Kofler (2005?))

Allgemeines Prisma



Ergebnis: $\mathcal{F}_{ab}^2 + \mathcal{F}_{bc}^2 + \mathcal{F}_{ca}^2 = \mathcal{F}_{ABC}^2$

Aber: Während beim 2D-Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a \perp b$$

Ist das nicht der Fall beim 3D-Pythagoras !

$$\mathcal{F}_{ab}^2 + \mathcal{F}_{bc}^2 + \mathcal{F}_{ca}^2 = \mathcal{F}_{ABC}^2 \not\Leftrightarrow a \perp b \perp c \perp a$$

Problem: Vervollständige ein gegebenes Dreieck ABC zu einem Tetraeder, sodass der „3D-Pythagoras“ gilt.

Verwende $(a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc)$,
 $(a \times b)^2 = a^2b^2 - (ab)^2$,

und erhalte damit die Bedingung

$$(a \times b)(b \times c) + (b \times c)(c \times a) + (c \times a)(a \times b) = 0.$$

Diese Bedingung wird auch von Tripeln nicht-orthogonaler Vektoren a, b, c erfüllt !

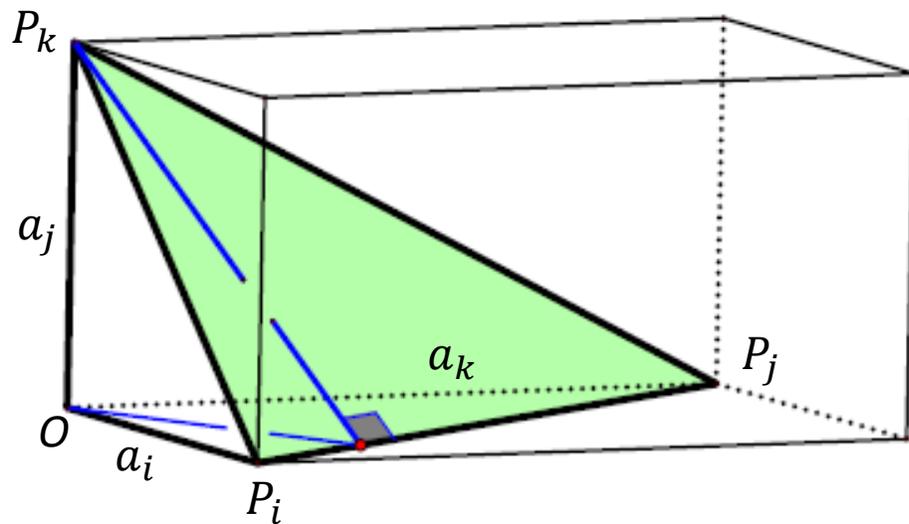
Z.B $a = (1,0,0)$, $b = (-1,2,0)$, $c = (0,1,\sqrt{3})$

7) Pythagoras in höheren Dimensionen

nD-Version eines Pythagoras-Satzes

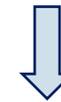
(mit gleicher Methode, wie H. Dirnböck & J. Kofler (2005?)

Allgemeines Orthoschema



$$V^i = \frac{1}{n-1} \prod a_j, j \in \{1 \dots n\} \setminus i$$

$$\mathcal{F}_{ab}^2 + \mathcal{F}_{bc}^2 + \mathcal{F}_{ca}^2 = \mathcal{F}_{ABC}^2$$



$$a_j, j \in \{1 \dots n\} \setminus i$$

$$\sum \left(V_{\prod a_j, j \in \{1 \dots n\} \setminus i}^i \right)^2 = V_{P_1 \dots P_n}^2$$

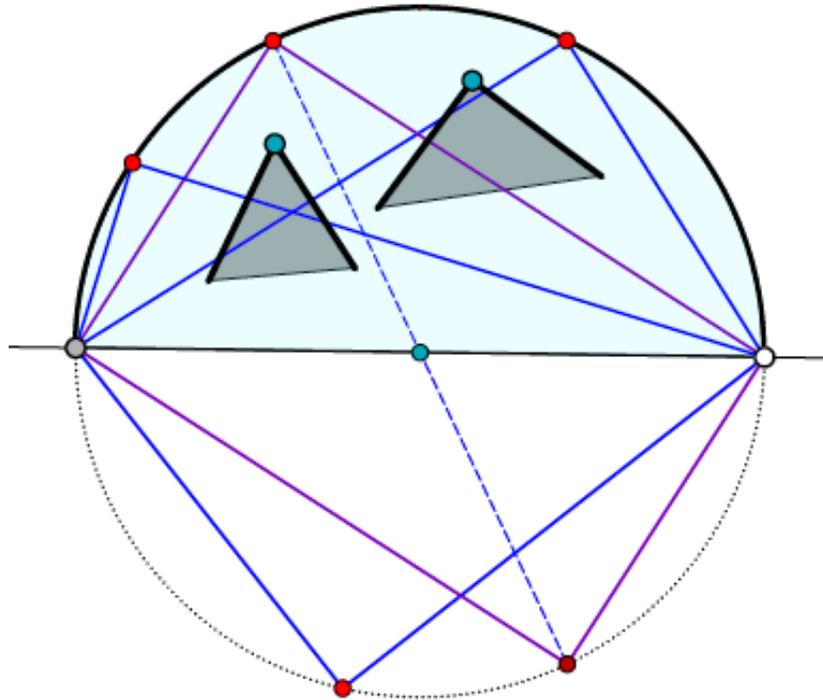
Facetten-Orthoschema

Simplex

Nun noch einige Bemerkungen zum Satz von Thales

nach einer kurzen Pause

1) Der Satz von Thales

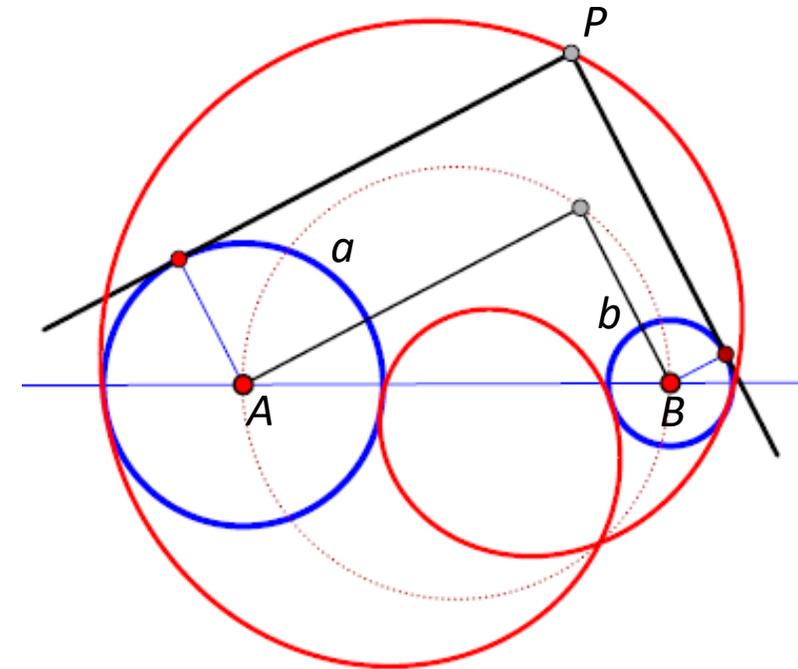
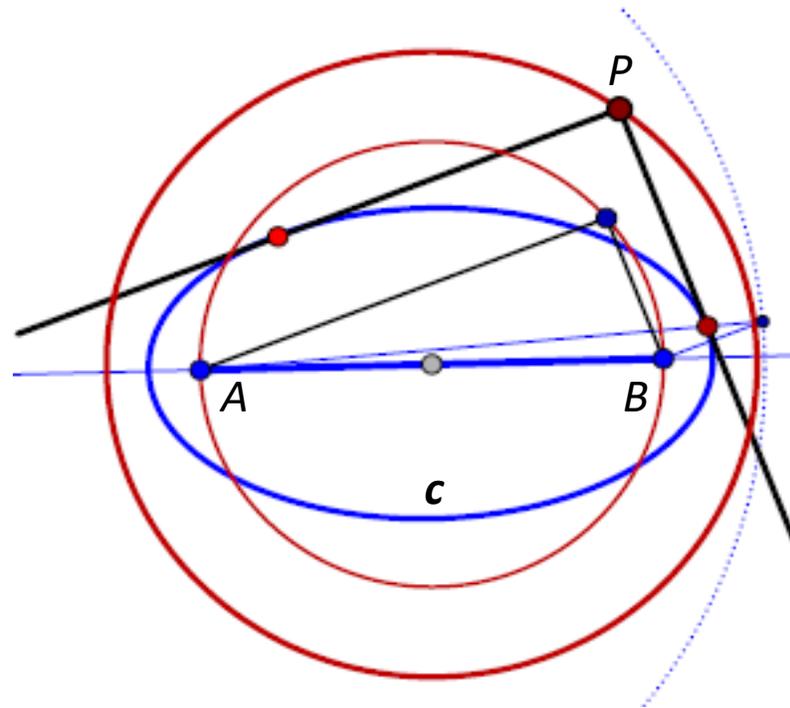
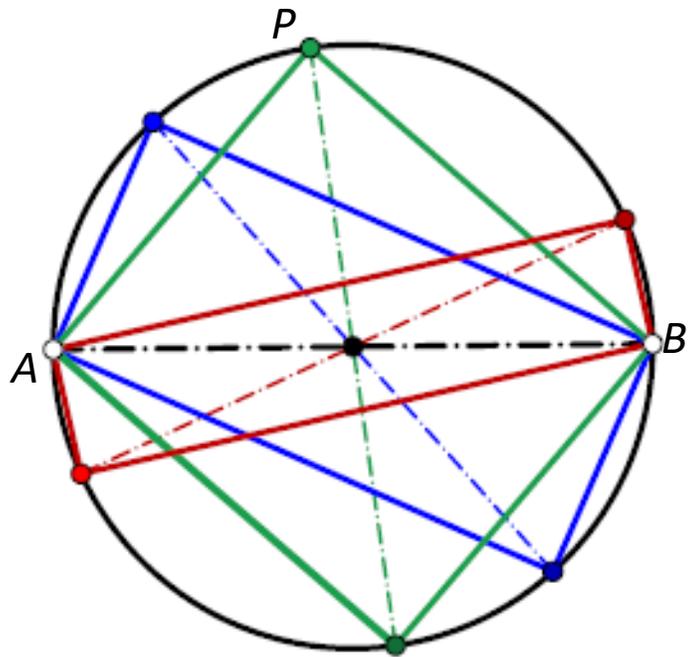


„Jeder Winkel im
Halbkreis ist ein
rechter.“

„Den Satz von Thales verallgemeinern - aber wie?“
(mit **F. Gruber**) [KoG 12 (2008), 7-18]

2) Verallgemeinerungen des Satzes von Thales

1. Verallgemeinerung: Thales-Satz \Rightarrow „Peripheriewinkel-Satz“.
2. Verallgemeinerung: Durchmesser $[A, B]$ ist eine singuläre Kurve c 2. Ordnung
 $\Rightarrow \Rightarrow c \dots$ regulär
3. Verallgemeinerung: Mache aus $A, B \Rightarrow$ Kreise a, b .

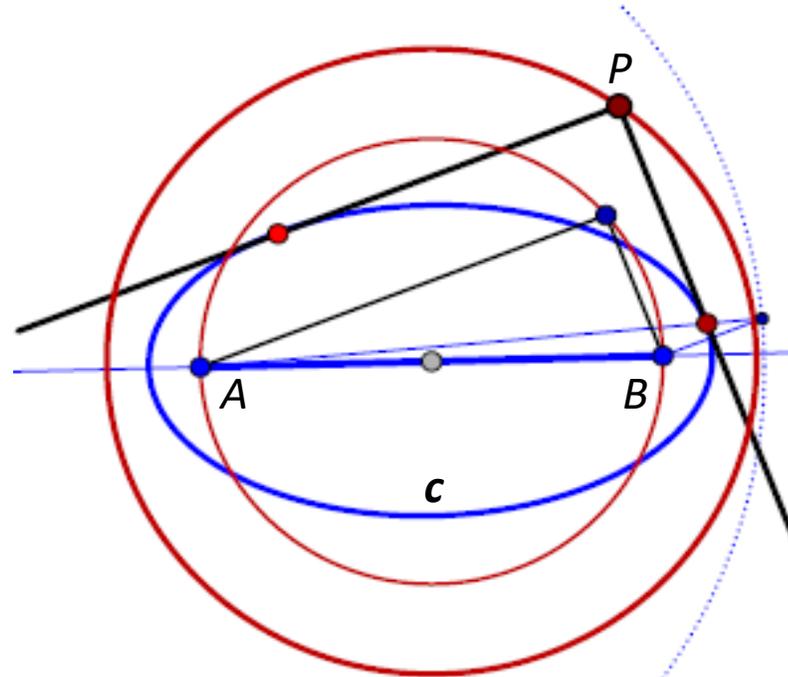
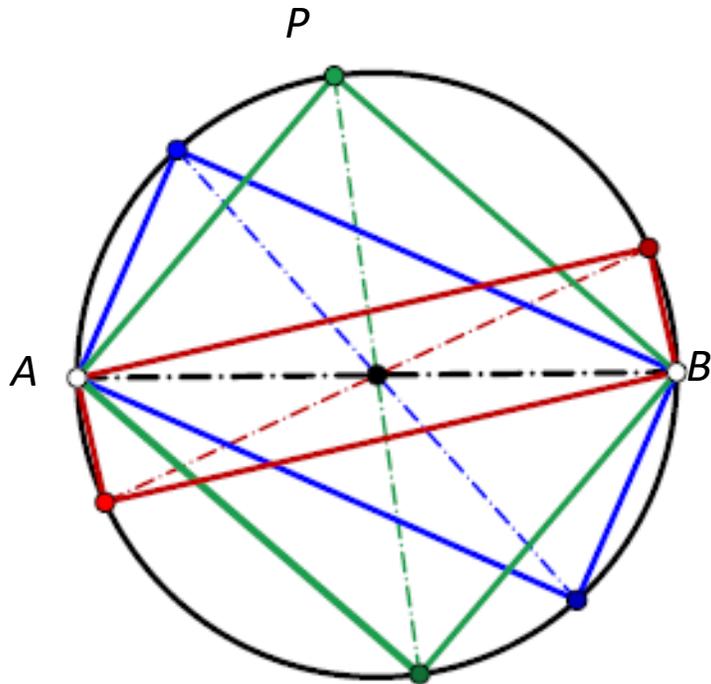


2) Verallgemeinerungen des Satzes von Thales

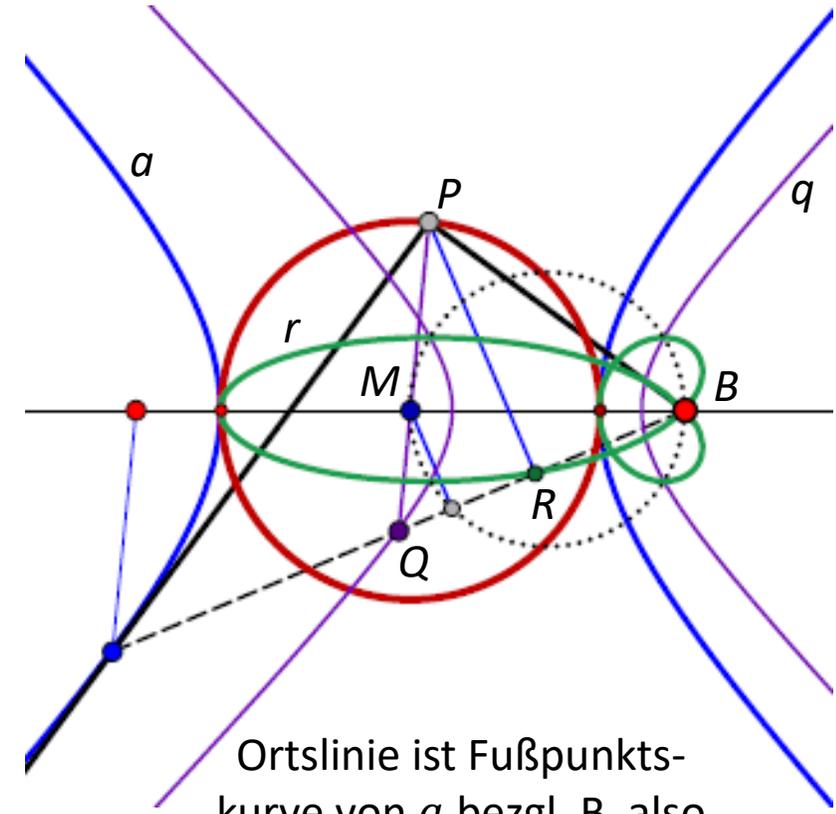
Verallgemeinere die 2. Verallgemeinerung:

(Durchmesser $[A, B]$ ist eine singuläre Kurve c 2. Ordnung $\Rightarrow c \dots$ regulär)

\Rightarrow **4. Verallgemeinerung:** $A \Rightarrow$ Kegelschnitt a , $B \Rightarrow$ ein Brennpunkt von a



Ortslinie ist ein Kreis konzentrisch mit dem Thales-Kreis über der Brennpunktstrecke.



Ortslinie ist Fußpunktskurve von a bezgl. B , also der Scheitelkreis von a

2) Verallgemeinerungen des Satzes von Thales

Bisher:

1. Verallgemeinerung: Thales-Satz \rightarrow „Peripheriewinkel-Satz“
2. Verallgemeinerung: ersetze die singuläre Kurve 2.Ord. $[A, B]$ durch einen KS c .
3. Verallgemeinerung: ersetze A, B durch Kreise a, b
4. Verallgemeinerung: ersetze A durch Kegelschnitt a , B durch Brennpunkt von a

Weitere Verallgemeinerungsmöglichkeiten:

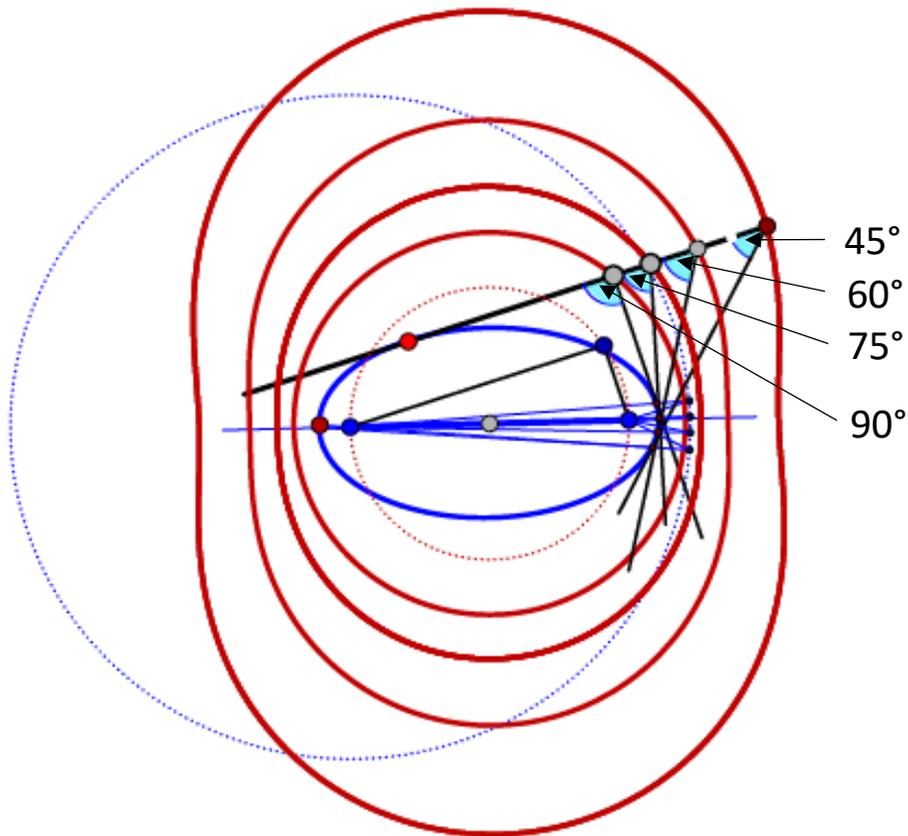
- Nicht-euklidischer Schauplatz: Wie sieht der Thales-Satz aus? Wie sehen seine bisherigen Verallgemeinerungen aus?
- Gibt es einen „kreisgeometrischen Aspekt“? (Möbius- bzw. Laguerre-Geometrie)
- Thales-Satz in höheren Dimensionen. (Welche Verallgemeinerungsmöglichkeiten sind sinnvoll, welche liefern auch „schöne“ Ergebnisse?)
- Gibt es Zusammenhänge mit anderen elementargeometrischen Sätzen?

2) Verallgemeinerungen des Satzes von Thales

Beispiele weitere Verallgemeinerungen:

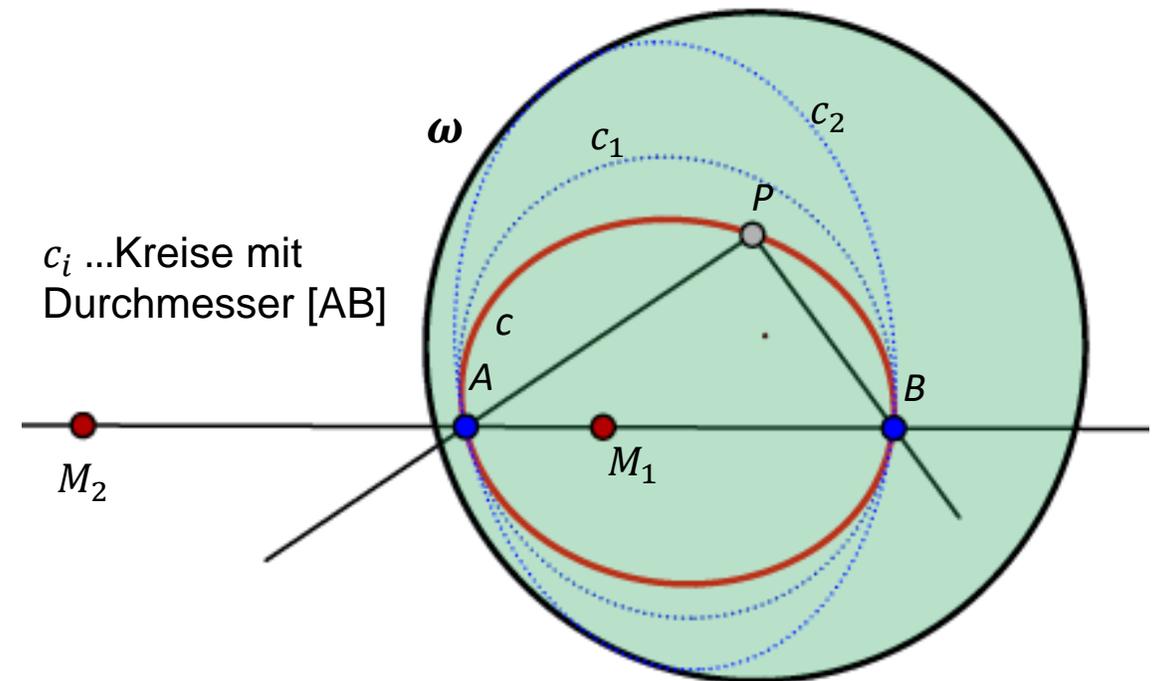
- Peripheriewinkel-Satz bei Verwendung eines Kegelschnittes anstelle eines Punktepaars:

Ergebnis: „**Isoptische Kurven**“ eines Kegelschnittes



- Thales-Satz in der hyperbolischen Ebene (F.Klein-Modell)

Ergebnis: c ... **Thales Kegelschnitt** mit Mittelpunkten M_1, M_2 .

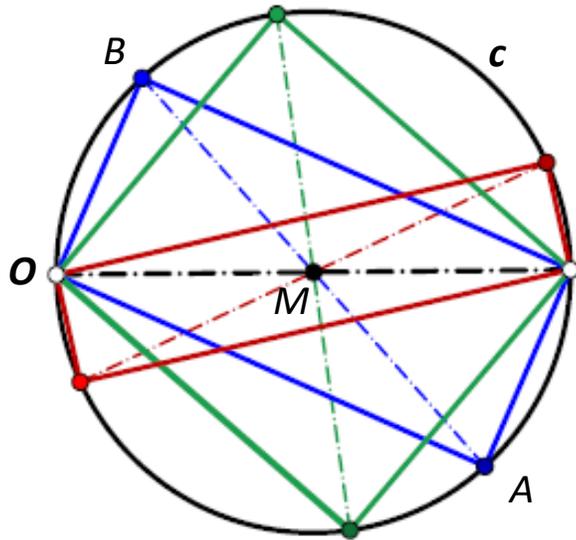


3) Vom Thales-Satz zu Sätzen von Frégier und Pech

Beispiele weitere Verallgemeinerungen:

Anstelle der fixen Hypotenuse (bzw. der einen Rechtecks-Diagonale) $[AB]$ halte die Ecke O fest.

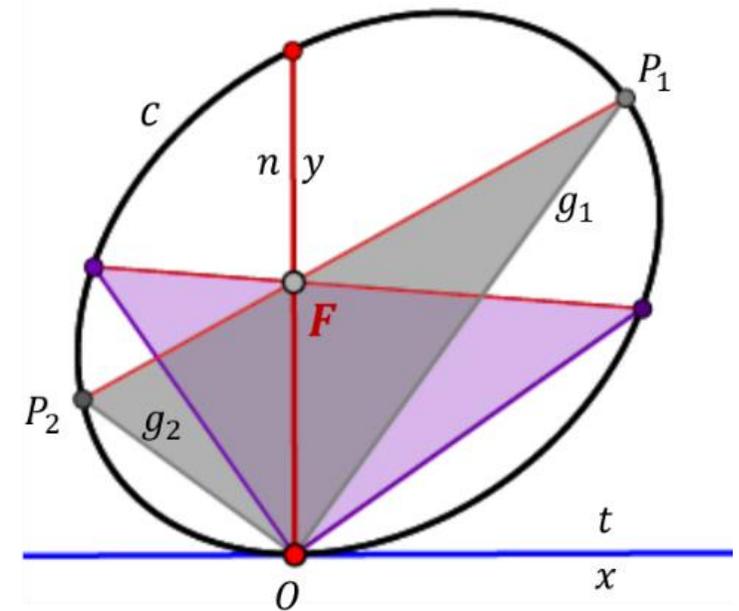
Ergebnis: Für den Thales-Kreis c gehen die Hypotenusen durch den Mittelpunkt M von c .



1. Verallgemeinerung: $c \rightarrow$ Kegelschnitt

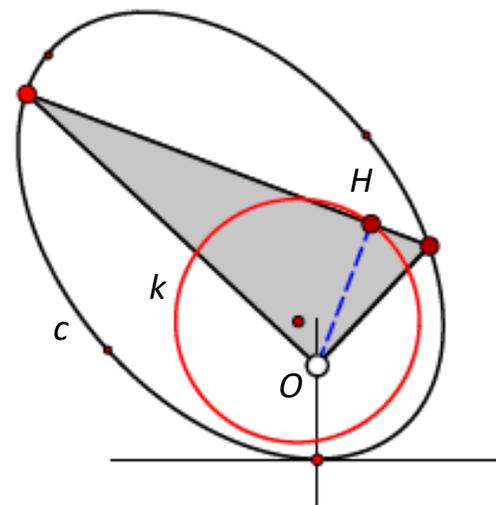
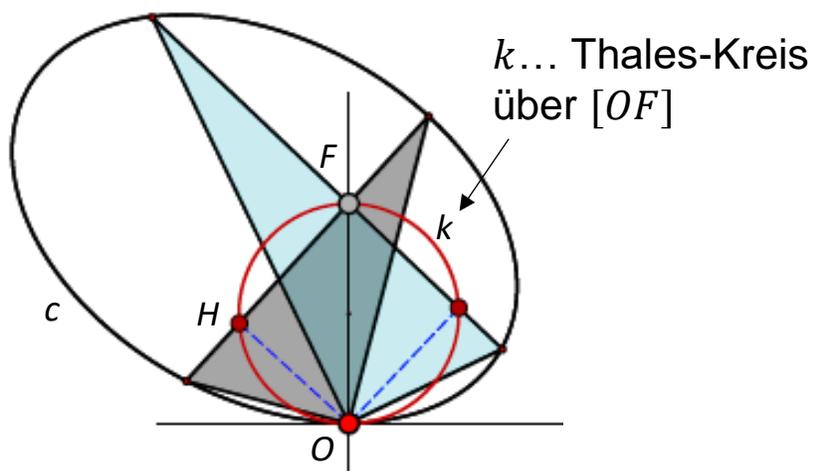
\Rightarrow Theorem von Frégier

Ergebnis: Die Hypotenusen gehen durch einen Punkt F , den Frégier-Punkt zu O bezüglich c .



3) Vom Thales-Satz zu Sätzen von Frégier und Pech

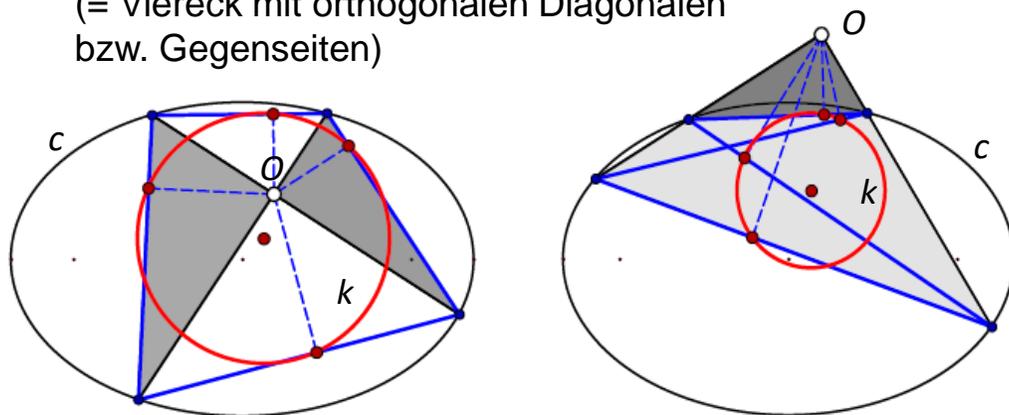
Vom Theorem von Frégier zum Satz von Pech (Pech P. (2018), G.W.)



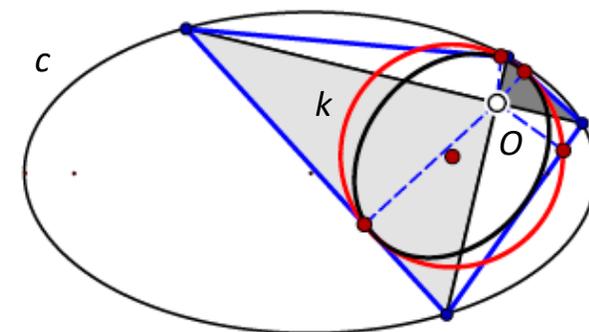
Satz von Pech: $O \notin c$ ist Scheitel rechth. Dreiecke mit Ecken auf c . Diese Dreiecke haben ihren **Höhenfußpunkt** auf einem Kreis k .

Beweis: Rechnung mit GeoGebra

Vervollständigung der „Pech-Satz Figur“:
(= Viereck mit orthogonalen Diagonalen bzw. Gegenseiten)



Geometrischer Beweis:
Hypotenusen umhüllen einen Kegelschnitt, für den O Brennpunkt ist. Daher ist dessen Fußpunktskurve aus O ein Kreis, der Scheitelkreis.



4) 3D-Versionen des Thales-Satzes

5. Verallgemeinerung : höher-dimensionale Versionen des Satzes von Thales

a) Bette A, B in den euklidischen 3-Raum (n-Raum) ein.

Ergebnis: $\{P \mid AP \perp PB\} = \Phi$
... Kugel resp. Hypersphäre

b) Ersetze im 3-Raum A, B durch windschiefe Geraden a, b und $AP \perp PB$ durch $aP \perp Pb$.

Man betrachtet also zwei Ebenenbündel, für die \perp eine Zuordnung definiert.

Ergebnis: $\{P \mid Pa \perp Pb\} = \Phi$
... orthogonales Hyperboloid

c) a^{d_1}, b^{d_2} sind Unterräume im n-Raum.

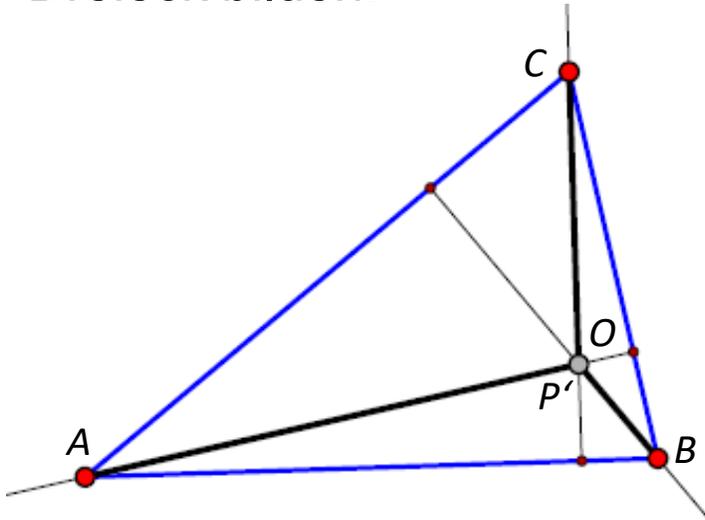
$a^{d_1}P \perp b^{d_2}P$ definiert dann eine „Thales-Punktmenge“

d) In der Ebene sind AP, PB „Hyperebenen“. Eine 3D-Verallgemeinerung kann einerseits auf **Dreibeine** $PA \perp PB \perp PC$ fokussieren und andererseits auch die **Dreibeinebenen** α, β, γ (also Hyperebenen im 3-Raum) in den Vordergrund stellen.

4) 3D-Versionen des Thales-Satzes

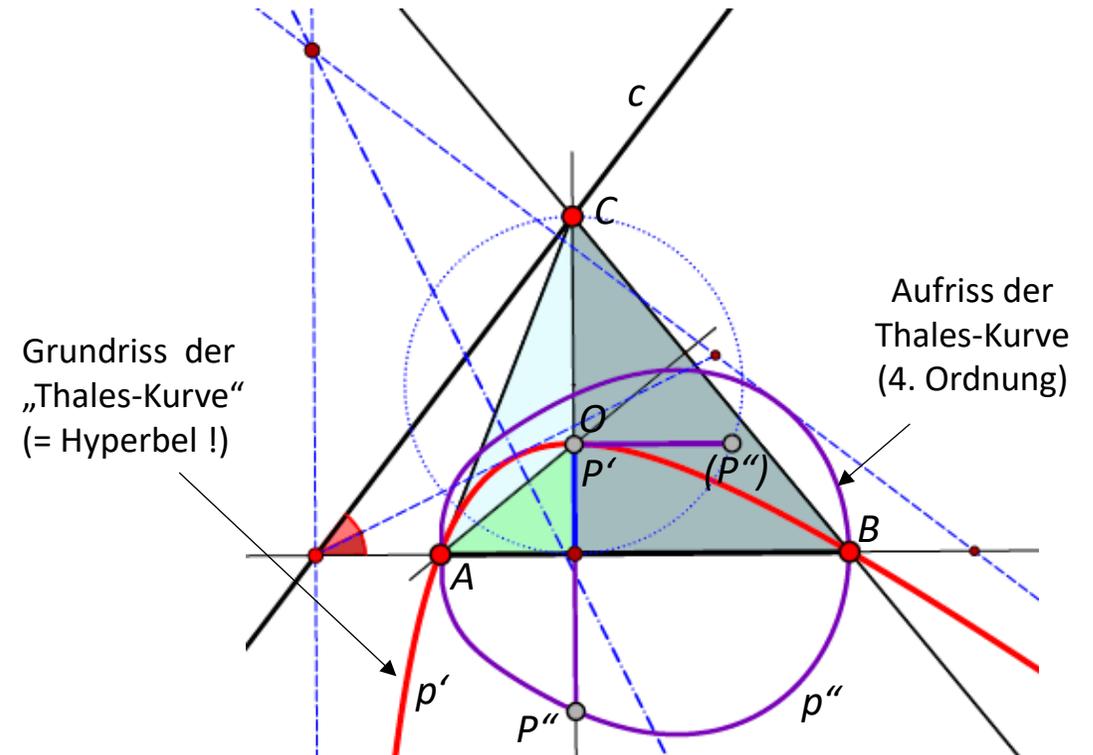
5. Verallgemeinerung : höher-dimensionale Versionen des Satzes von Thales

3D: Gegeben sind 3 Punkte A, B, C , die ein spitzwinkliges Dreieck bilden.



\Rightarrow Höhenschnittpunkt O und Höhen sind Normalriss von 3 paarweise orthogonalen Geraden. $\Rightarrow \exists$ genau 2 Dreibeine durch ABC .

3D: Gegeben sind 2 Punkte A, B und eine Gerade c . Sei $C \in c$ so, dass ABC ein spitzwinkliges Dreieck bilden.

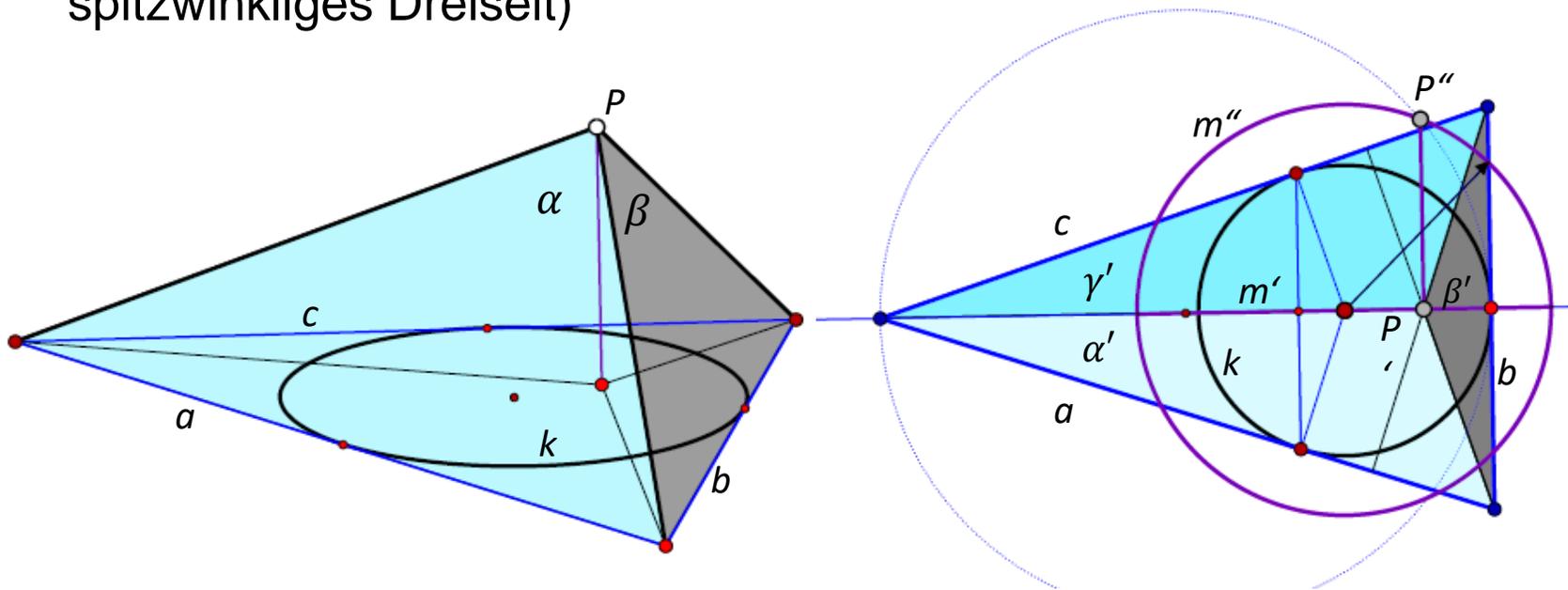


4) 3D-Versionen des Thales-Satzes

5. Verallgemeinerung : höher-dimensionale Versionen des Satzes von Thales

3D, „Hyperebenen-Auffassung“ der Thales-Katheten

Gegeben ist ein Kreis k , konstruiere die Menge von Tripeln paarweise orthogonaler Ebenen α, β, γ , die k berühren. (Annahmen: Radius r von k ist 1; die (k berührenden) Spuren a, b, c bilden ein spitzwinkliges Dreieit)



Ergebnis: $\{P\}$ ist eine Drehfläche mit kreisförmigem Meridian m mit Radius $\sqrt{2}$ und der mit k konzentrisch ist. $\Rightarrow \{P\}$ ist eine Kugel, die „**Thales-Kugel**“ über k !

4) 3D-Versionen des Thales-Satzes

5. Verallgemeinerung : höher-dimensionale Versionen des Satzes von Thales
3D, „Hyperebenen-Auffassung“ der Thales-Katheten

Gegeben ist eine Kugel Σ , konstruiere die Menge von Tripeln paarweise orthogonaler Ebenen α, β, γ , die Σ berühren. (Annahme: Radius r von Σ ist 1)

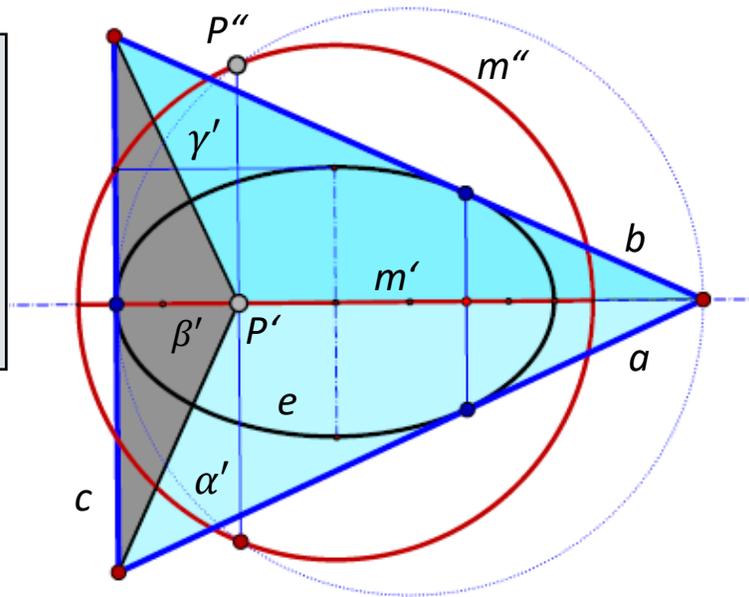
⇒ **Ergebnis:** $\{P\}$ ist wieder eine Kugel, diesmal vom Radius $\sqrt{3}$, die „**Thales-Kugel**“ über Σ !

4) 3D-Versionen des Thales-Satzes

3D, „Hyperebenen-Auffassung“ der Thales-Katheten

Zu einer **Ellipse** e mit Halbachsen p, q konstruiere die Menge von Tripeln paarweise orthogonaler Ebenen α, β, γ , die e berühren. (Annahme: die (e berührenden) Spuren a, b, c bilden ein spitzwinkliges Dreieit)

⇒ **Ergebnis:** $\{P\}$ ist eine mit e konzentrische Kugel vom Radius $\sqrt{p^2 + q^2}$, also wieder eine „**Thales-Kugel**“ !

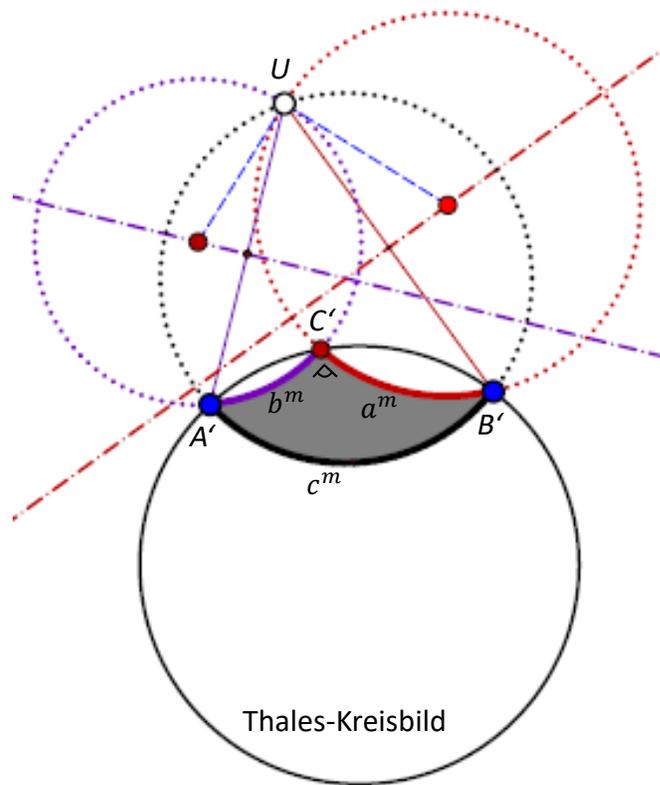


Wenn man e durch ein **Ellipsoid** (**Quadrik**) Φ mit Halbachsen p, q, r ersetzt, erhält man eine Thales-Kugel $\{P\}$ vom Radius $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ als „**isoptische Punktmenge**“ von Φ .

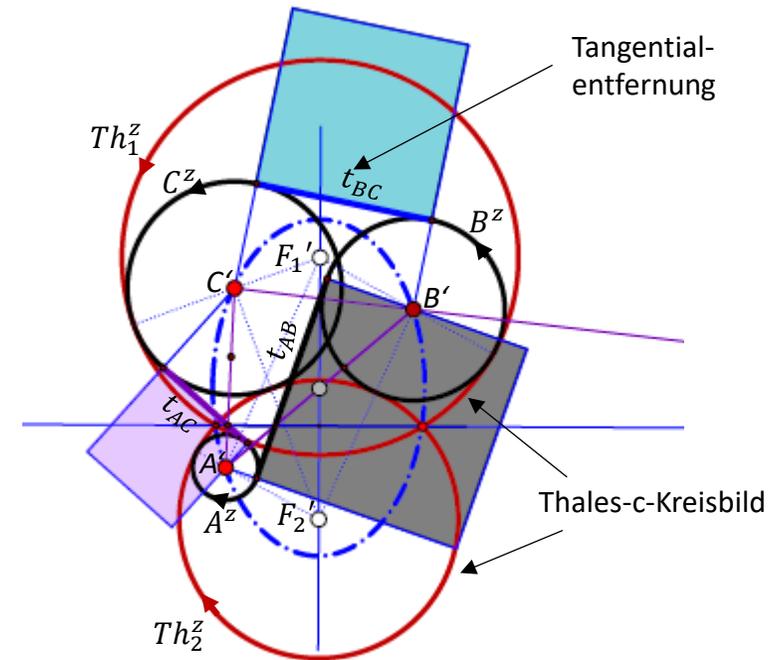
⇒ Die „richtige“ nD - Verallgemeinerung ist also die Hyperebenen-Auffassung, also ein n -Tupel paarweise normaler Hyperebenen statt des n -Beins.

5) Der Thales-Satz in der Kreisgeometrie

Thales-Satz
in der Möbius-Ebene



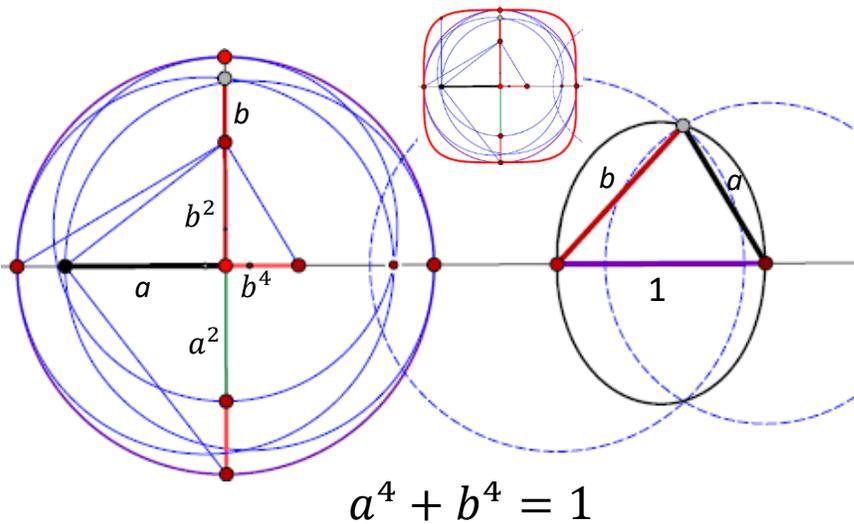
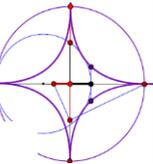
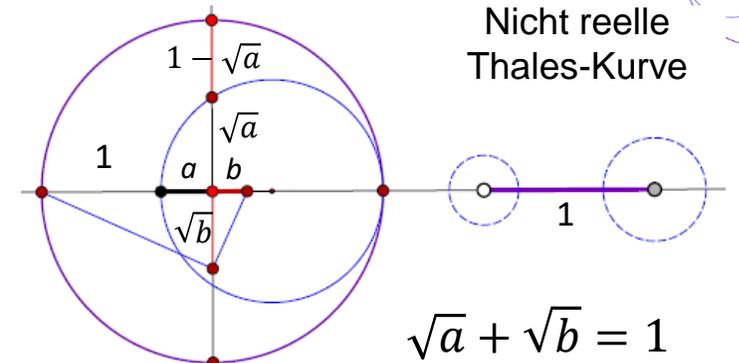
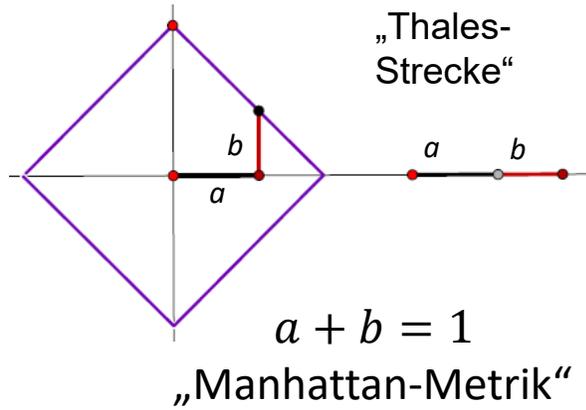
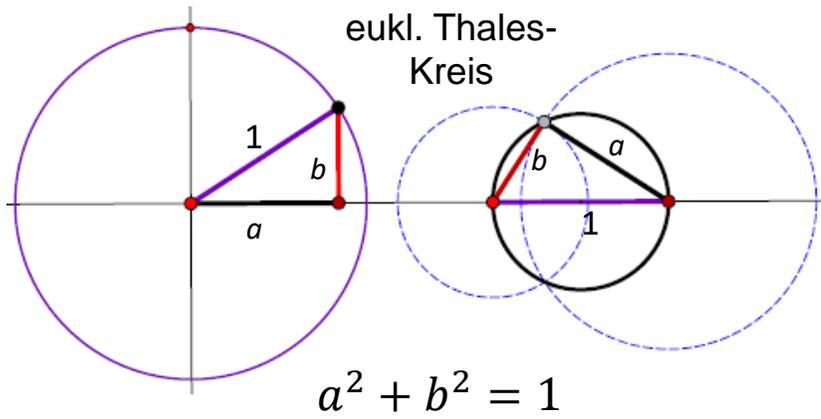
Thales-Pythagoras
in der Laguerre-Ebene



$$t_{AC}^2 + t_{BC}^2 = t_{AB}^2$$

6) "Pythagoras-Thales" in Minkowski-Ebenen

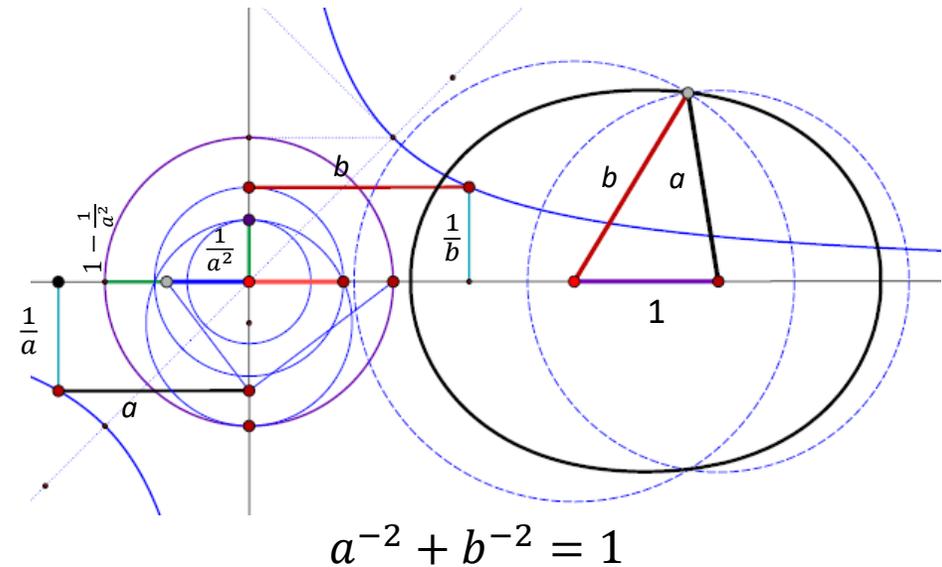
$a^2 + b^2 = 1$ verallgemeinern zu $a^p + b^p = 1, \quad p \in \mathbb{R}$



„Pythagoras-Kurve“

$$x(a) = \frac{1}{2}(\sqrt[p]{(1-a^p)^2} - a^2)$$

$$y(a) = \sqrt{a^2 - (x(a) - \frac{1}{2})^2}$$



6) “Pythagoras-Thales” in Minkowski-Ebenen

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{verallgemeinern zu} \quad a^p + b^p = c^p, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$(a, b, c) \mapsto f(a, b, c) = a^p - c^p + b^p$$

$$f(a, b, c) = 0 \iff c = \sqrt[p]{a^p + b^p}$$

... und damit weiter „forschen“,
ohne von „Minkowski-Ebenen zu reden.

Schlussbemerkung

„Ob eine Inzidenzaussage wahr ist“ ist Sache etwa von GeoGebra,
„Warum sie wahr ist“ kann GeoGebra nicht beantworten.
Das ist Sache geometrischer Beweisführung mit logischer
Schlussfolgerung!

Darum die Bitte: Erziehen Sie Schüler/Studenten so,
dass sie auch „Warum?“ fragen!

**Das war's schon für jetzt!
Danke!**

