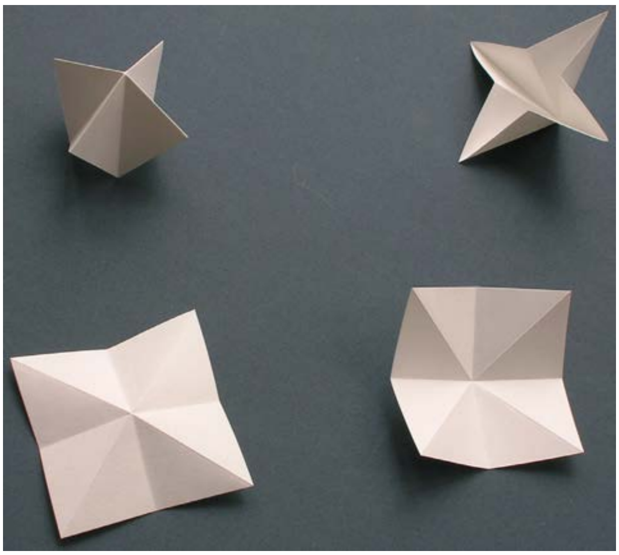
Falt-Polyeder: Eine west-östliche Verbindung

Alexander Heinz

Bergweg 50, D 58313 Herdecke
mail@geomenta.com

Zu den schönsten Dingen der räumlichen Geometrie gehören zweifellos die regulären und halbregulären Polyeder, die auch als Platonische oder Archimedische und Polararchimedische (bzw. Catalanische) Körper bekannt sind. An der Vollkommenheit dieser Gebilde kann man sich stets aufs Neue freuen. Als Falt-Polyeder lassen sie sich als Kanten- und Flächenmodelle bilden; hier sind sie als Eck-Modelle (von den Ecken her) konstruiert. Der Schritt von der Fläche zum Raum ist für manche Schüler im Geometrie-Unterricht eine Herausforderung. Dies lässt sich hier spielerisch üben. Für das Klassenzimmer ist dies eine dankbare Arbeitsweise. Nur allereinfachste Mittel werden benötigt: zugeschnittenes Papier und die eigenen Finger. Auf Klebstoff kann verzichtet werden. Wichtig ist nur, dass die Arbeitsschritte strikt eingehalten und ordentlich ausgeführt werden.

Ausgangspunkt für die Idee, die regulären und halbregulären Polyeder in Origami-Technik umzusetzen war ein aus quadratischen Flächen gefaltetes und zusammengestecktes Oktaeder. Durch weiteres Probieren quadratischen Flächen ergaben sich schnell weitere ansehnliche Ergebnisse. Hinzu kamen das Falten mit dreieckigen Papierflächen, und dann das Kombinieren mit den Quadraten. Bis zu den abgebildeten weißen Modellen war es dann noch ein weiter Weg. Manches musste zunächst überlegt, und dann praktisch erprobt werden, bis es möglich wurde ein bestimmtes Modell zu bauen. Neue Ideen kamen hinzu: Fünfecke, Waben, zusätzliche Falten wurden nötig, andere mussten weg gelassen werden. Neue auftretende Klippen erforderten neue Lösungen. Letztlich sind die theoretischen Überlegungen und Erkenntnisse unmittelbar aus der praktischen Arbeit erwachsen.



Hier mag das gefaltete Oktaeder als Anfang genügen: alle benötigten zwölf quadratischen und gleichgroßen Flächen werden in derselben Weise gefaltet: erst kreuzweise diagonal, und dann (nach dem Wenden des Blattes!) kreuzweise kantenparallel [Abb.1 unten]. Wichtig ist, dass nun eine „Landschaft" aus Berg- und Talfalten entstanden ist, in der sich Bergrücken und Täler abwechseln, wenn man rund um die Blattmitte herum wandert. Das Blatt liegt nun nicht mehr glatt auf dem Tisch: die Berge heben sich. Und hilft man dem etwas nach, so entsteht ein Faltgebilde, das an das „Himmel-und-Hölle-Spiel" erinnert. Je nachdem, nach welcher Seite das Blatt aufgefaltet wird, findet es in die eine Form, die dann eine „Ross"-Funktion [Abb.1 oben rechts; hier umgedreht] bekommt, oder die im nächsten Schritt darauf aufsitzende „Reiter"-Form [Abb.1 oben links].

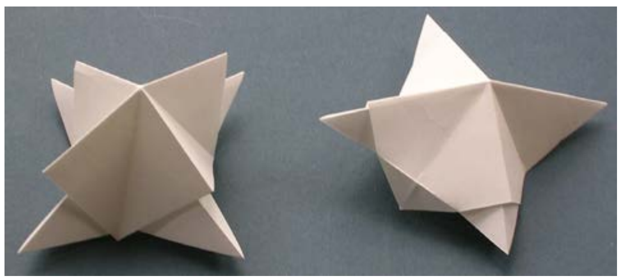
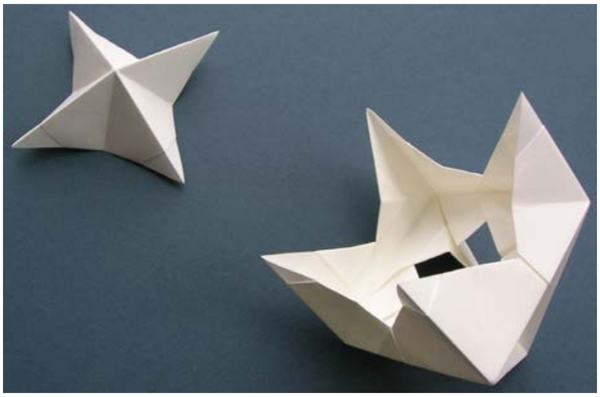


Abb. 1,2: gefaltete Ausgangsfläche wird zu Ross oder Reiter

Sitzt der „Reiter" auf dem „Ross" (nicht umgekehrt!), so müssen nun noch die unter den „Bauch" des „Pferdes" ragenden „Arme" und „Beine" des „Reiters" in die innere „Bauch"-Falte des „Rosses" eingefaltet werden [Abb.2]. Damit hat man nun ein erstes Eck-Element. Die herausragenden Beine des Rosses werden zwischen Ross und Reiter der benachbarten Eck-Elemente geschoben [Abb.3]. Wichtig ist beim Oktaeder, dass immer drei Eckelemente zu einem Dreier-Verbund (dreieckiges „Fenster") zusammengesteckt werden. Sechs Eck-Elemente aus zwölf Quadraten ergeben dann ein Oktaeder [Abb.3 bis 6]. Sind alle Schritte in der nötigen Sorgfalt ausgeführt, ist die einzige echte Klippe das Zusammenstecken der letzten Verbindungen.



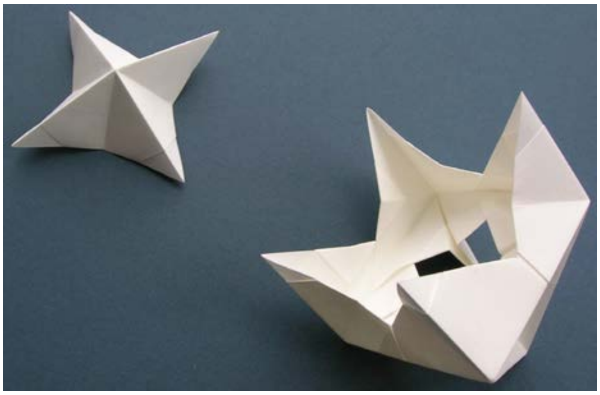
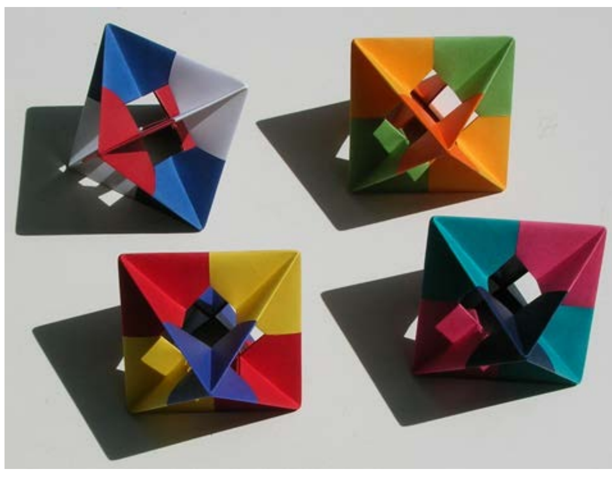


Abb. 3, 4, 5, 6: vom Eck-Element zum ganzen Gebilde

In der Vollkommenheit des fertigen Modells ist das Ganze in seiner Symmetrie nun mehr als die Summe seiner Einzelteile. Für eine Umsetzung mit Schülern bietet sich eine dreifarbige Umsetzung besonders gut an [Abb.6, 7, 8]. Unmittelbar praktisch lässt sich diese Arbeit in viele Richtungen erweitern, was und wie man einzelne Elemente sonst noch verbinden kann. Zum Beispiel weitere halbreguläre Polyeder [Abb. 8] oder kettenartige Gebilde. Es empfehlen sich entsprechende Materialvorräte von festem, formsteifen Papier. Es bieten sich auch theoretische Anknüpfungspunkte, etwa die der Statik, Verbindungstechnik und der Kombinatorik. Alle hier farbig abgebildeten Modelle las-



sen sich gut mit Schülern umsetzen; ähnliches gilt für einige Modelle, die aus Dreiecken gefaltet werden (Dodekaeder. Tetraeder- und Oktaeder- und Ikosaederstumpf).

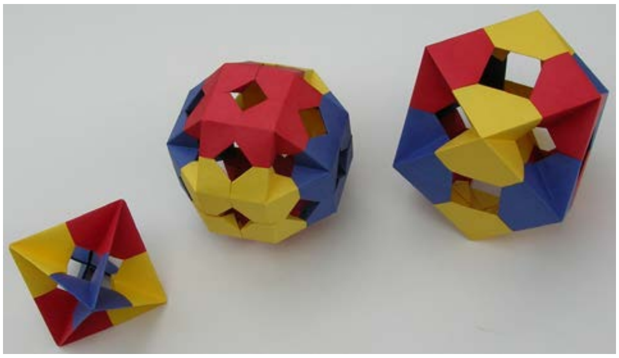


Abb. 7, 8: Farben und Verbindungen können variieren

Älteren und besonders begabten Schülern kann man auch die Aufgabe geben, von einem fertigen Modell die Konstruktion abzuleiten: rein durch die Beschreibung: ohne, dass das ein entsprechendes Vorzeige-Modell geöffnet wird. Eines von vielen erfolgreichen Faltprojekten (BRG Petersgasse in Graz, Abb. 9, 10) wurde möglich durch eine großzügige Spende aus der Papierindustrie.

Abb. 9,10: Faltprojekt mit Schülern

Das erste Modell kann Anlass geben zu folgender Überlegung: streng genommen handelt es sich bei dem gefalteten Oktaeder nicht um einen Acht-Flächner, denn statt der acht Flächen hat das Faltobjekt acht dreieckige „Fenster". Und man kann sagen: ich habe doch 12 Flächen hergenommen, also habe ich einen Zwölf-Flächner vor mir (oder doch wenigstens einen doppelten Sechsflächner). Es zeigt sich, dass der Name, den ich meinem Faltobjekt gebe, davon abhängt, wie ich auf meine Arbeit schaue: gehe ich von den Einzelteilen aus, oder von der Gestalt des zusammengefügten (topologischen) Ganzen. Beides ist möglich und richtig.

Eine andere interessante Frage ist: wie kommt es, dass sich aus Quadraten nicht etwa ein Würfel falten lässt, sondern ausgerechnet das Oktaeder, das als polares Gebilde gewissermaßen das Gegenteil des Würfels darstellt? Die Polaritäten zwischen den regulären und halbregulären Polyedern zeigen sich in der Anzahl von Flächen und Ecken. So hat der Würfel sechs Flächen und acht Ecken, das Oktaeder umgekehrt acht Flächen und sechs Ecken. Die Lösung ist einfach:

Wir sind es gewohnt, Polyeder aus Flächen zusammengesetzt zu denken. Durch das kreuzweise Falten durch die Blattmitte ergibt sich – produktionstechnisch – zuerst eine (spätere) Modell-Ecke. Es zeigt sich also, dass in unserem Fall die Modelle eigentlich nicht von der Fläche, sondern von den Ecken her zusammengesetzt werden. Dies fügt sich harmonisch in einen übergeordneten Zusammenhang, der ebenfalls Polaritäten oder Gegensätze zu verbinden sucht. Dies hat vielleicht keinen unmittelbaren praktischen Nutzen, mag aber von allgemeinem Interesse sein.

Die geometrisch regelmäßigsten Raumgebilde stehen in einer langen westlichen Tradition: vor allem Platon und Archimedes erwähnen sie bereits etwa 300 Jahre v. Chr. Es ist mit großer Sicherheit anzunehmen, dass diese Formen schon lange vorher im alten Ägypten bekannt waren und durch Pythagoras nach Griechenland gelangten. Auch steinzeitliche Funde von den Britischen Inseln zeugen von einer weit zurück liegenden Kenntnis im Westen. In der Renaissance stellten unter anderen Leonardo und Dürer diese Formen bildlich dar in den ersten geometrischen Lehrbüchern der Neuzeit. Neben den Platonischen und Archimedischen Körpern gehören auch die polar-archimedischen Raumgebilde mit hinzu, die erst Eugéne Catalan im 19. Jahrhundert vollständig beschrieben hat.

Der räumlich-regelmäßigen Tradition des Westens steht in den hier vorgestelten Modellen eine flächig-regelmäßige Tradition des Ostens gegenüber: in der Kunst des Origami (von oru, falten + kami, Papier = origami). Aus der immer gleichen quadratischen Ausgangsform lassen sich unzählige dekorative und freie, aber auch streng geometrische Formen falten („mathematical origami"). Teils aus einzelnen Blättchen, teils auch aus mehreren Blättchen modular zusammengesetzt („modular origami“, „unit-origami“).

Beide Traditionen sind in den hier dargestellten Modellen vereint. Dabei sind in der modularen Technik das Faltens und (zusammen-) Steckens die einzelnen Falt-Elemente formschlüssig miteinander verbunden. Sie halten einander vor allem durch die Form. Beide Traditionen gewinnen in dieser Symbiose: die östliche Fläche wird in den Raum erhoben und die westlichen Polyeder-Formen bekommen Durchblicke und werden dadurch transparent.

Die Symbiose von westlicher Idee und östlicher Umsetzung entspricht den naturwissenschaftlichen Bestrebungen Goethes. Dieser suchte die unterschiedlichen – und doch zueinander gehörigen – Enden der Welt zu verbinden. Das zeigt sich in seinen naturwissenschaftlichen Schriften, aber auch in seiner Dichtung.

In dem Gedicht über den Ginkgo-Baum aus seinem West-östlichen Divan kommt diese Herangehensweise sehr gut zur Geltung:

Ginkgo biloba

Dieses Baums Blatt, der von Osten
Meinem Garten anvertraut
Gibt geheimen Sinn zu kosten
Wie’s den Wissenden erbaut.
Ist es ein lebendig Wesen,
Das sich in sich selbst getrennt?
Sind es zwei, die sich erlesen,
Dass man sie als Eines kennt?
Solche Frage zu erwidern
Fand ich wohl den rechten Sinn;
Fühlst Du nicht an meinen Liedern,
Dass ich eins und doppelt bin?

Abb. 11: Falt-Würfel und Blatt vom Ginkgo-Baum

Diese hier beschriebene Verbindung von Gegensätzen berührt ein Urphänomen, das in vielen Lebensbereichen wirksam ist: die Unterscheidung (Analyse) und Synthese (Zusammenschau) von polaren Gegensätzen und die Metamorphose als verändernd-verbindendes Element dazwischen wirken auch in die Faltmodelle. Sie reichen bis in die unterschiedlichen Konstruktionen der einzelnen Modelle.

Die Konstruktion des ersten Oktaeders zeigte mir Gert Hansen, Lehrer für das Fach Buchbinden an der Kopenhagener Waldorf-Schule. Davon ausgehend habe ich das Konstruktions-Prinzip durchdekliniert (auf alle regelmäßigen und halbregelmäßigen Polyeder in dieser Modellreihe angewendet). Tatsächlich gibt es für alle regulären und halbregulären Formen technische Lösungen. Wegen des besonderen Aufwandes sind derzeit noch nicht alle Modelle fertiggestellt. Für diese Arbeit habe ich 2010 den von Friedhelm Kürpig gestifteten Phänomena-Preis gewonnen.

Die hier verwendeten Bezeichnungen („Namen“ der Polyeder) bezieht sich auf die topologische Form [Abbildungen weiße Modelle]. Die Betrachtung der Modelle nebeneinander [Abb12] birgt manche Überraschung. Einige der Lösungen habe ich später in Origami-Büchern wiederentdeckt. Allen, die nun Lust bekommen haben, es selbst zu probieren wünsche ich ein gutes Gelingen und viel Spass.

Abb 12: eine Reihe von FS Modellen auf der Strobl Tagung 2011

For English-Readers: An english version is available, please contact the author.

Literatur:

Ziegler, Renatus (Hrgb.): Platonische Körper. Verwandtschaften, Metamorphosen, Umstülpungen. Dornach, 2008.

Arnstein, Bennet und Rona Gurkewitz: Multimodular Origami Polyhedra. Archimedeans, Buckyballs, and Duality. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2003

Das Gedicht von Goethe wurde zitiert nach:

Goethe, Werke in zwei Bänden. München und Wien: Hanser, 1981

Material:

Fertig zugeschnittenes Material (quadratisch und dreieckig) kann in verschiedenen Farben und Mengen vom Autor bezogen werden:

Alexander Heinz
Bergweg 50
D 58313 Herdecke
mail@geomenta.com

Die folgenden ästhetisch ansprechenden Fotos von Michael von der Lohe geben einen Einblick in die Vielfalt der mit Falttechnik herstellbaren Polyeder.

Die platonischen Körper

Kuboktaeder

Ikosidodekaeder

Cubus simus

Deltoid-24-Flächner

Pentagon-24-Flächner

Deltoid-60-Flächner

Rhomben-12-Flächner

Würfelstumpf

Rhomben-30-Flächner

Oktaederstumpf