



Wir sind beschränkt durch die Medien,
welche wir gewohnheitsmäßig nutzen.
H. Schumann

Kanzlerin Merkels „Raute“

Vom ebenen zum räumlichen Viereck

Prof. Dr. Heinz Schumann

PH Weingarten

Fak. II, Mathematik

schumann@ph-weingarten.de

37. Geometrie-Tagung

Strobl 10.11.-12.11.2016

Räumliches Viereck

Google-Suche 29.10.16

"räumliches Viereck" OR "windschiefes Viereck"

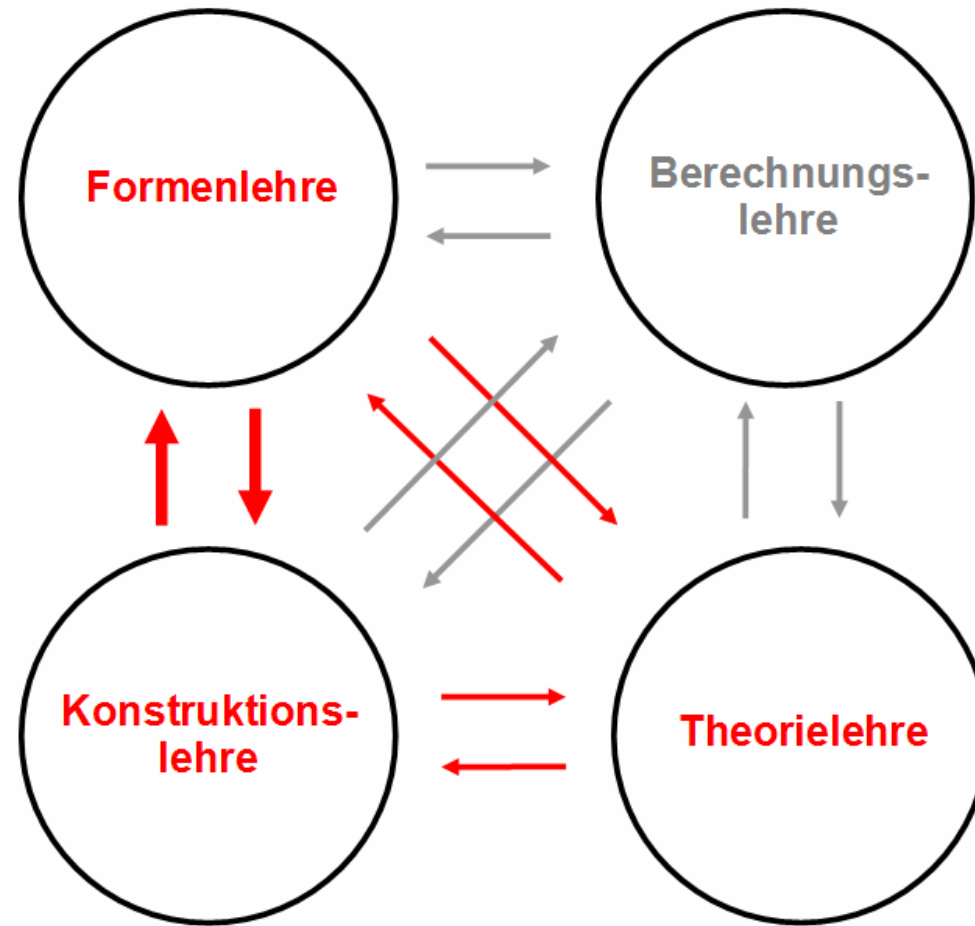
486 Links (ca. 2,1 Millionen für "Viereck")

"spatial quadrilateral" OR "skew quadrilateral" OR "3d quadrilateral"
OR "spatial quadrangle" OR "skew quadrangle" OR "3d quadrangle"

2510 Links (ca. 8,5 Millionen für "quadrangle" OR "quadrilateral")

Prolog

Die schulgeometrische Formenlehre räumlicher Figuren ist geprägt durch einen bescheidenen Vorrat an Figuren
- meist als dienende Magd für Berechnungen!

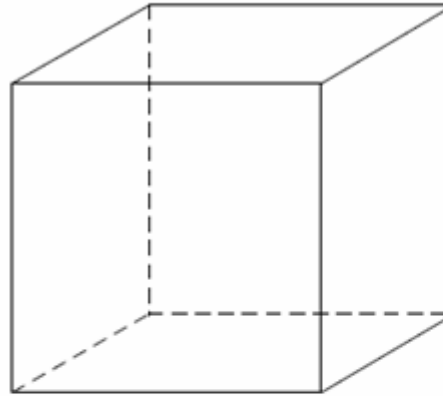


Stoffdidaktische Bereiche der (Raum-)Geometrie

Aufgabe 26: Würfel erforschen



Gegeben ist ein Würfel mit 4 cm Kantenlänge.



Aufgabe 26.1: Würfel erforschen

Berechne das Volumen.

Aufgabe 26.2: Würfel erforschen

Berechne den Oberflächeninhalt.

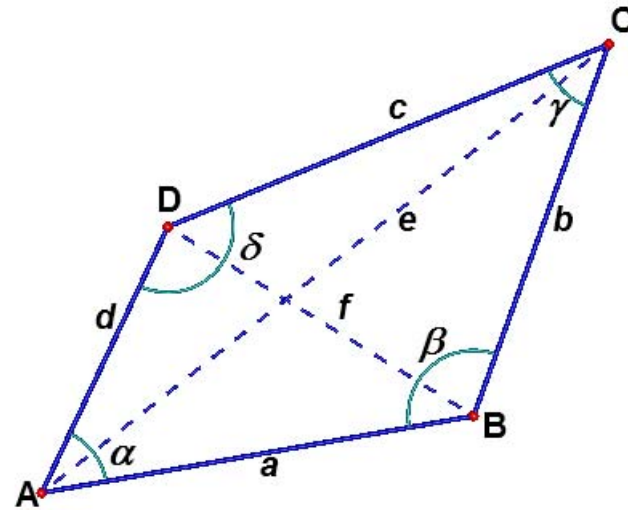
Vergleichsarbeiten Klasse 8 (VERA2 2009)



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

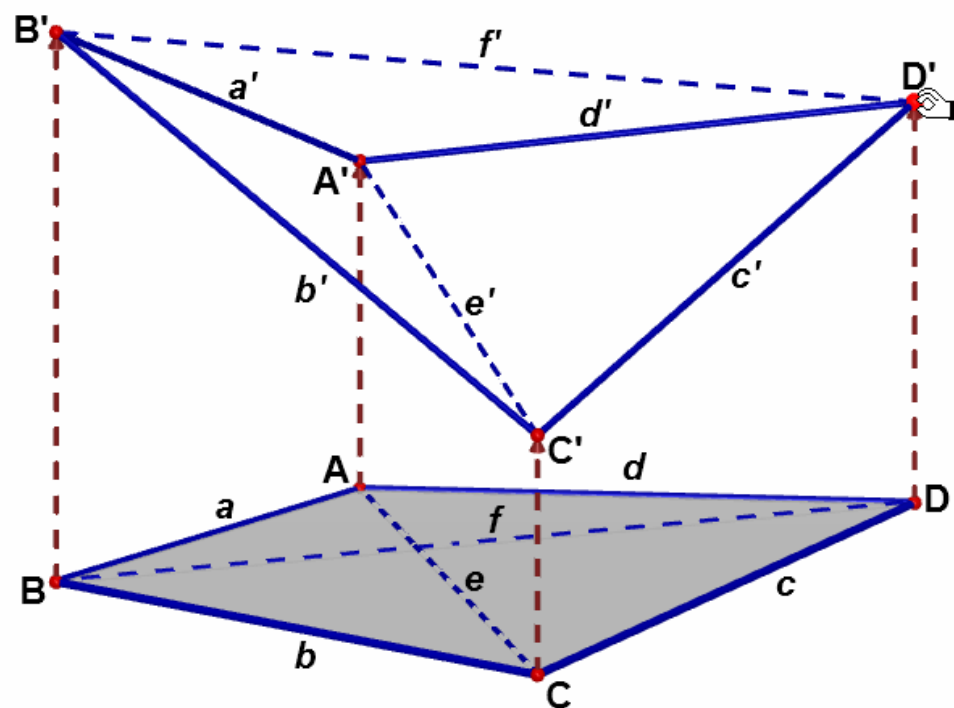
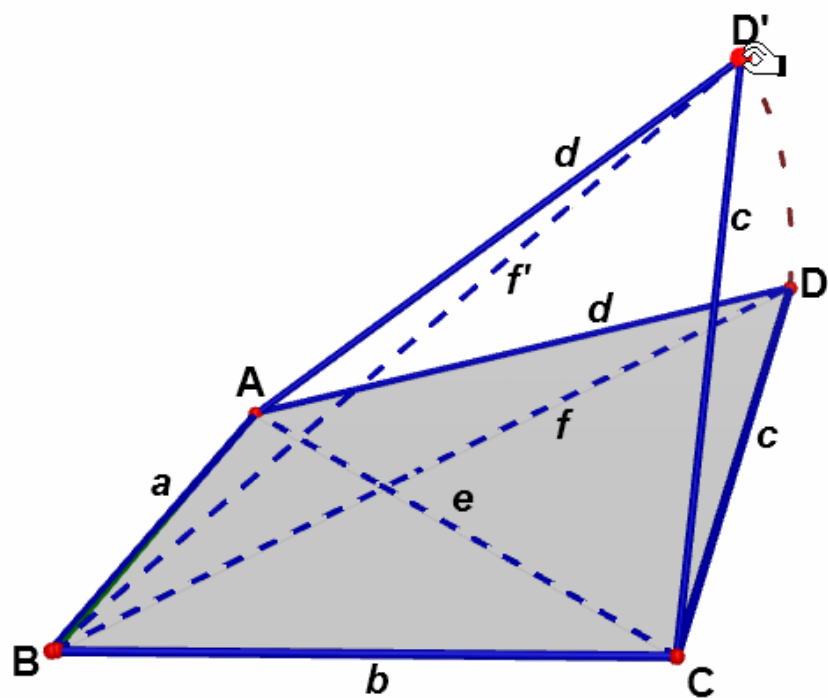
Vom ebenen zum räumlichen Viereck (RV)

1. Begriffsbildung
2. Einige elementare Aussagen
3. Klassifikation einfacher RV
4. Das Inkugelviereck
5. Das Ankugelviereck
6. Das 8-Tangentialkugelviereck
7. RV-Klassifikation nach
Berührungskugel-Eigenschaft
8. Schlussbemerkungen



Das räumliche Viereck

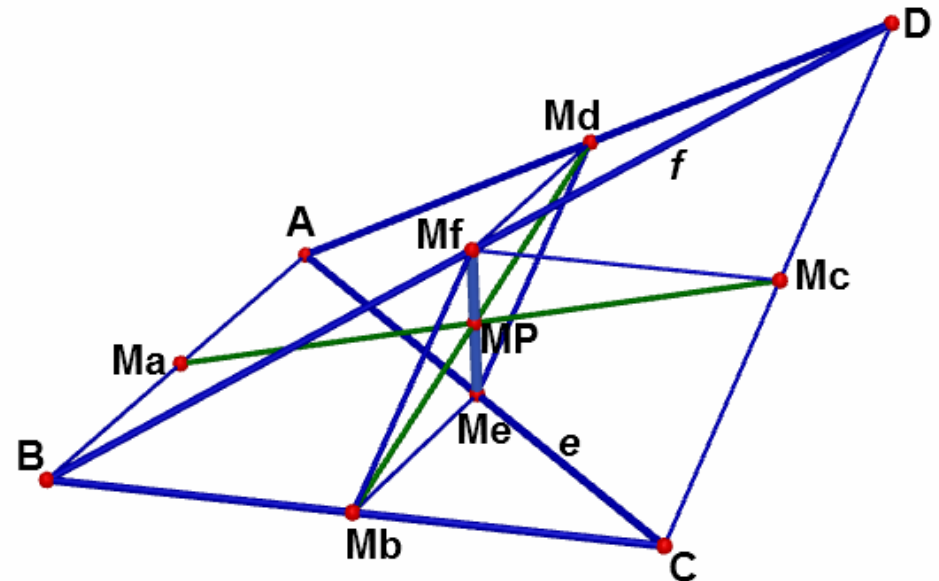
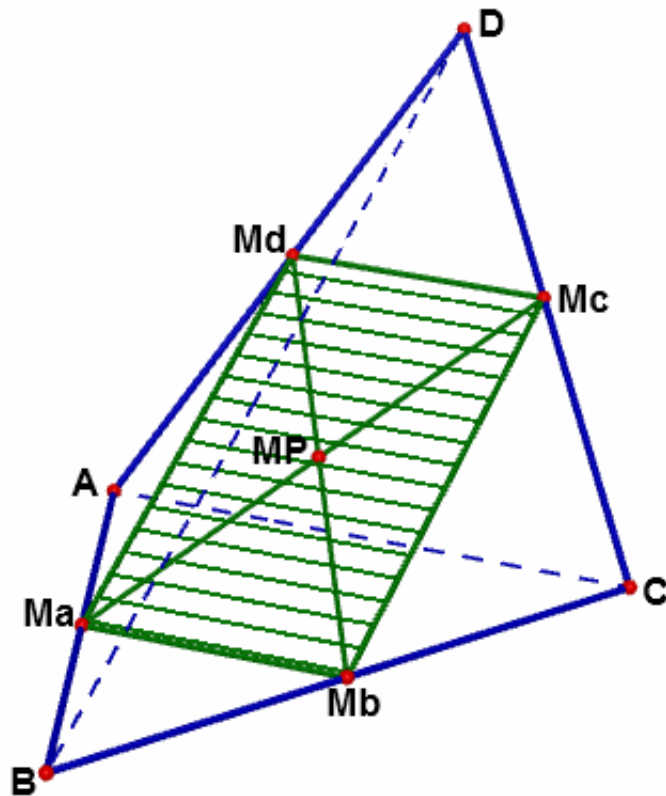
1. Begriffsbildung



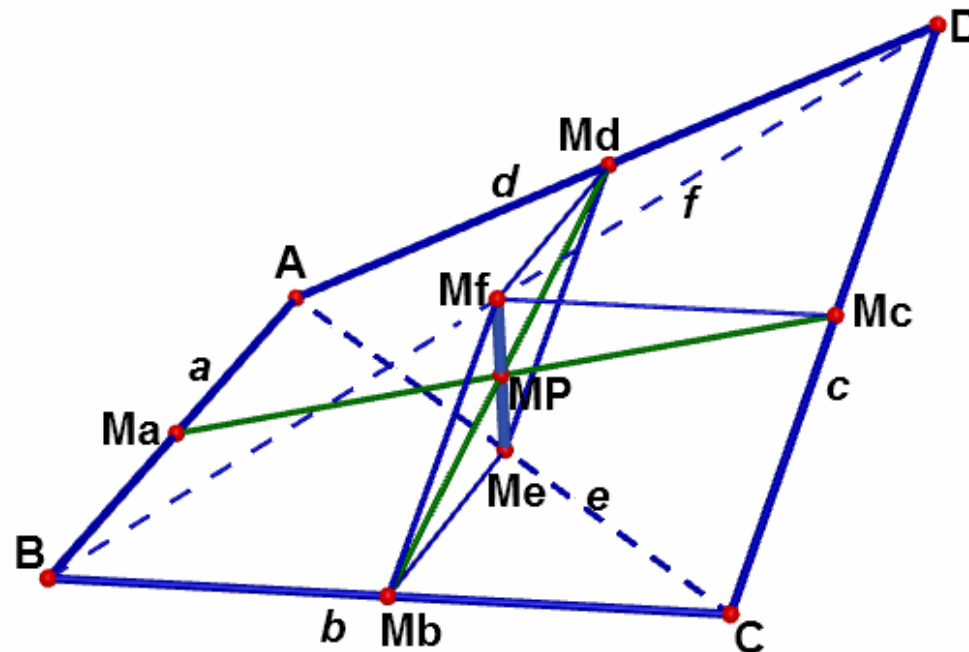


Das räumliche Viereck

2. Einige elementare Aussagen

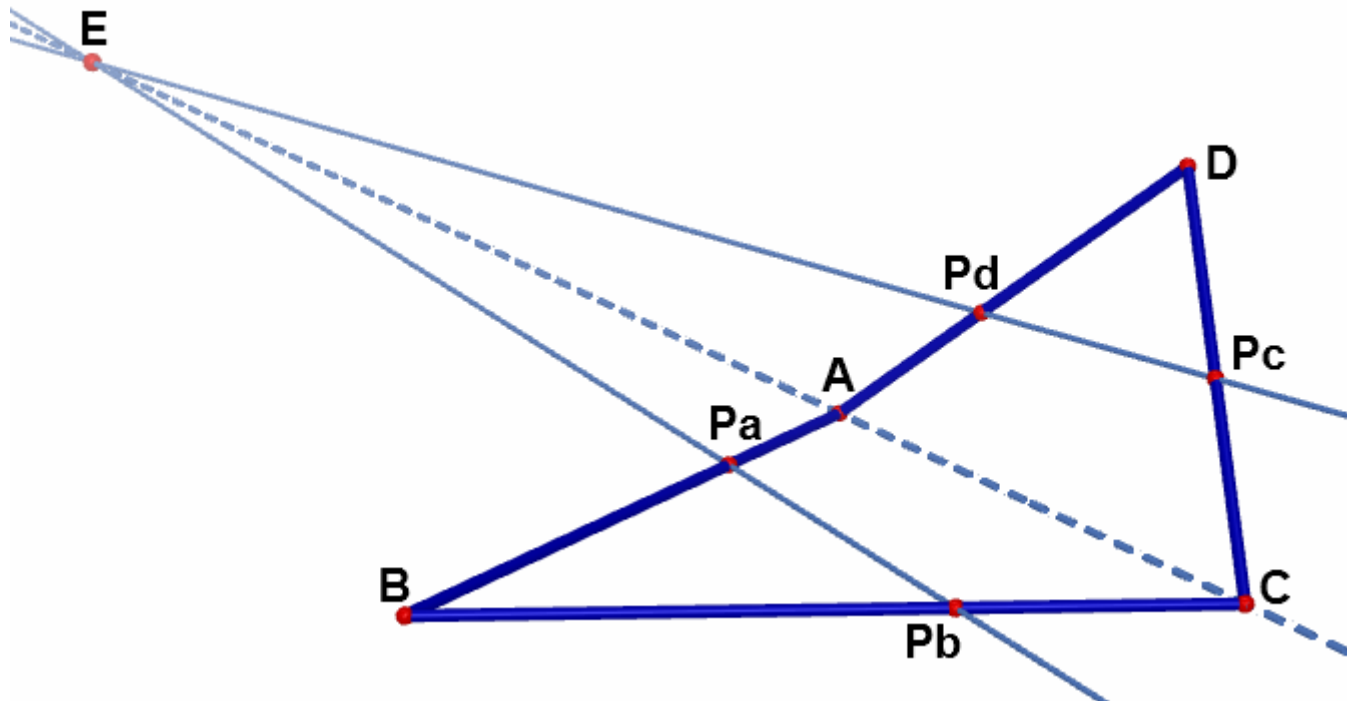


(1) Das Seitenmitten-Viereck eines räumlichen Vierecks ist ein Parallelogramm und deshalb halbieren die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten des Parallelogramms einander im Mittelpunkt des Parallelogramms (Satz von Varignon). Der Mittelpunkt des Seitenmitten-Parallelogramms eines räumlichen Vierecks halbiert die Verbindungsstrecke seiner Diagonalmittelpunkte.



(2) Für ein räumliches Viereck ABCD gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen ist gleich der doppelten Summe aus den Quadraten der Längen seiner Mittellinien: $e^2 + f^2 = 2(|M_a M_c|^2 + |M_b M_d|^2)$

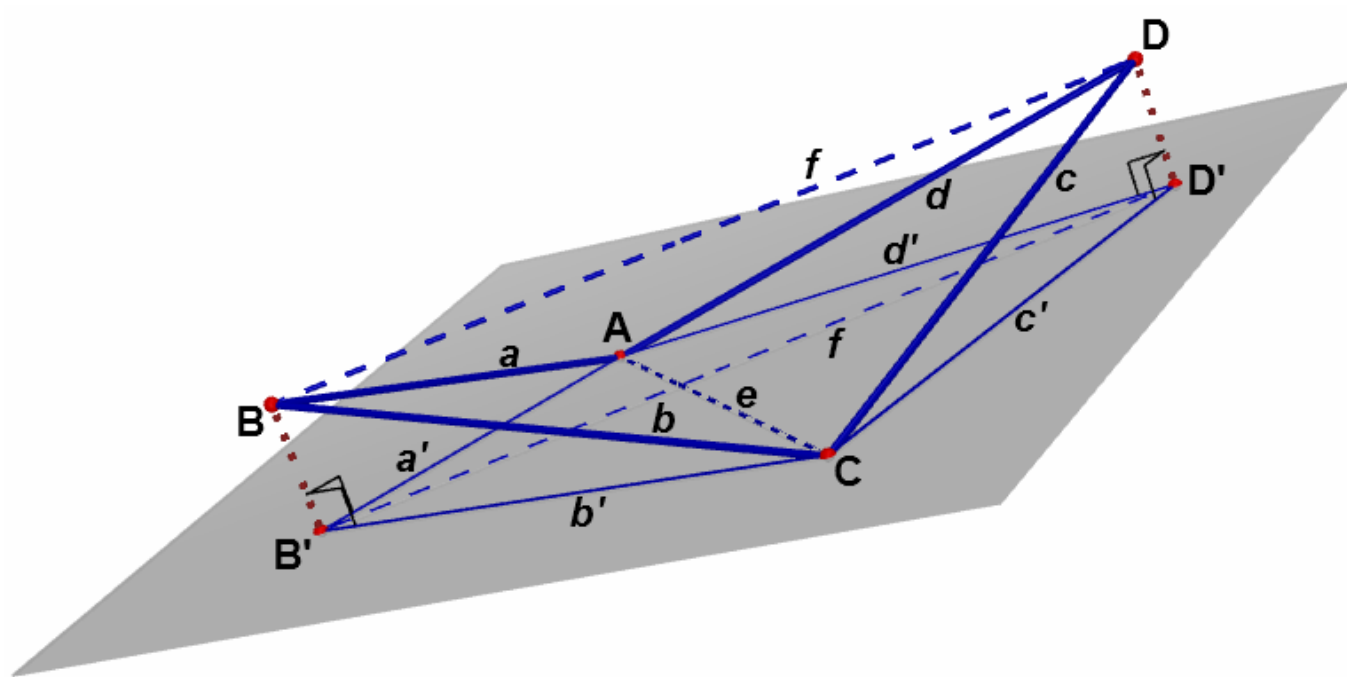
(3) Für ein räumliches Viereck ABCD gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Seiten ist gleich der Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen vermindert um das Vierfache des Quadrats der Distanz seiner Diagonalmitten: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 - 4|M_a M_c|^2$



Satz des Menelaos

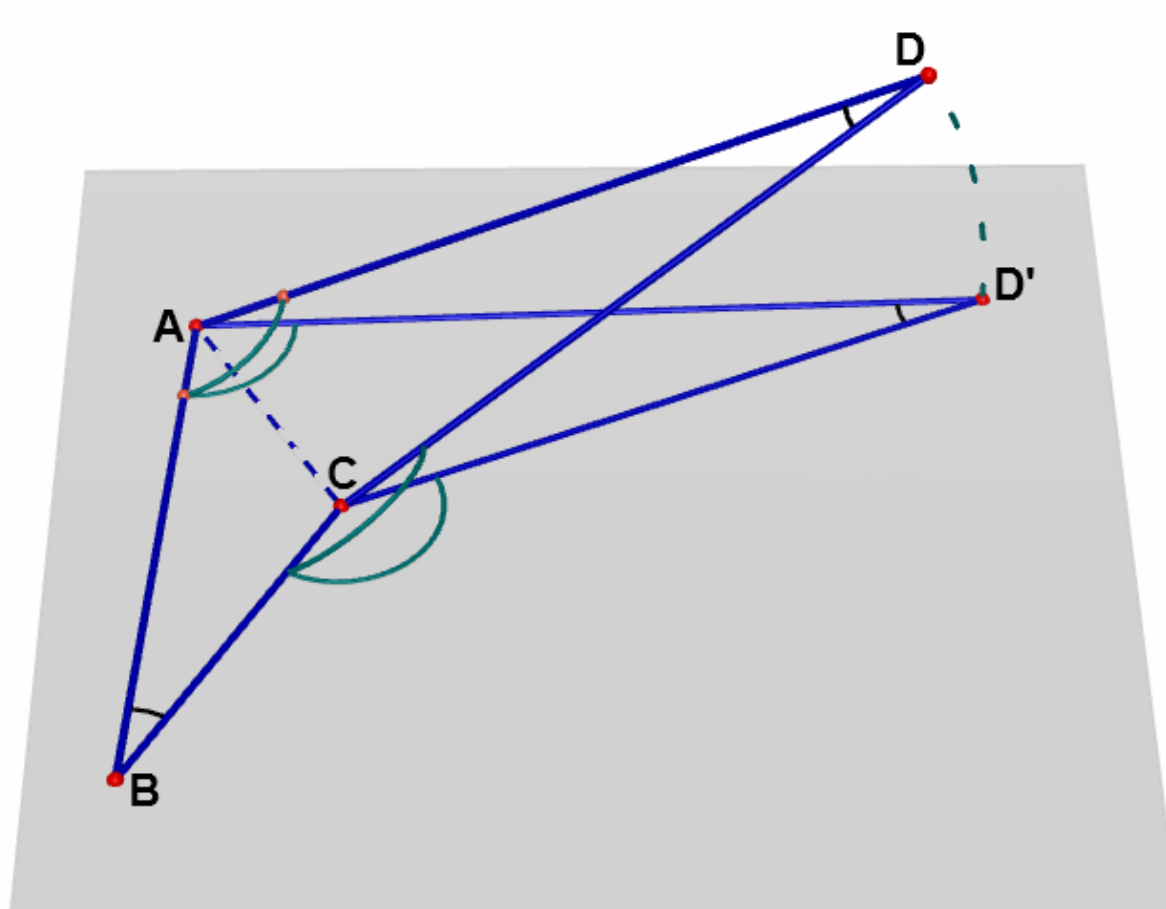
(4) Vier Punkte P_a , P_b , P_c und P_d auf den Seiten bzw. Seitengeraden eines räumlichen Vierecks ABCD mit P_a auf AB, P_b auf BC, P_c auf CD und P_d auf DA liegen in einer Ebene genau dann, wenn gilt:

$$\frac{|AP_a| \cdot |BP_b| \cdot |CP_c| \cdot |DP_d|}{|P_aB| \cdot |P_bC| \cdot |P_cD| \cdot |P_dA|} = 1.$$

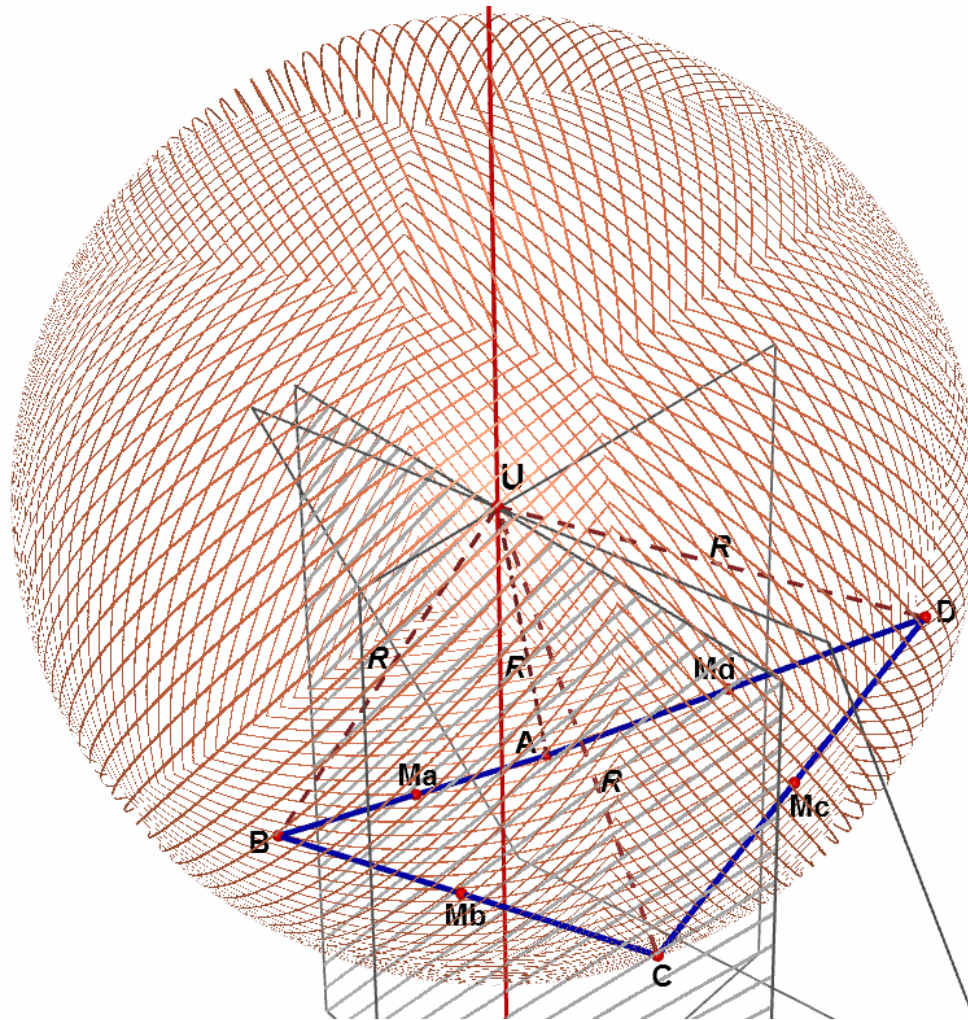


Ungleichung von Ptolemäus

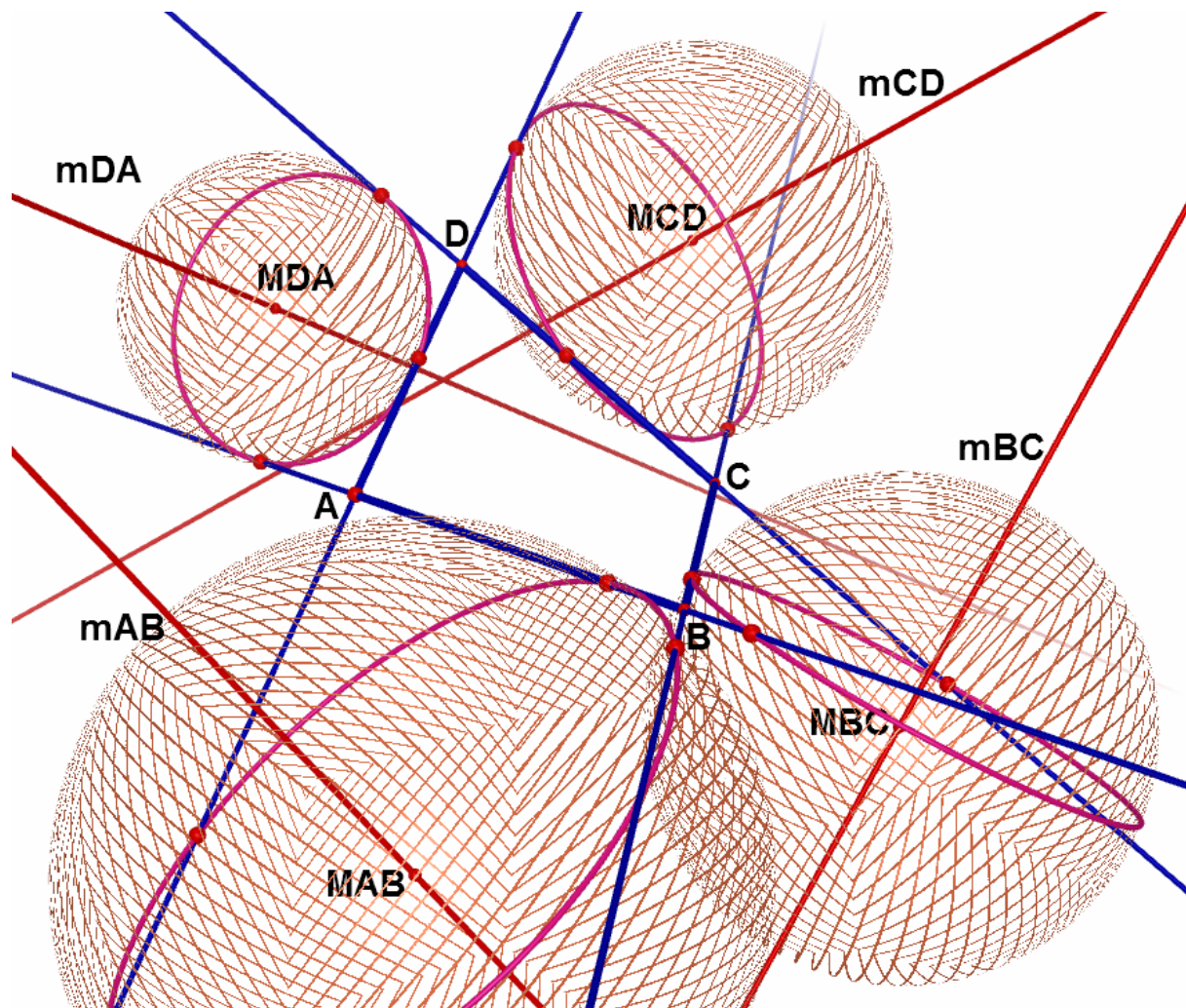
(5) Für ein räumliches Vierecks $ABCD$ gilt: Die Summe der Produkte aus je zwei Gegenseiten ist stets kleiner als das Produkt seiner Diagonalen: $ef < ac + bd$



(6) Die Summe der Innenwinkel in einem räumlichen Viereck ist kleiner als vier rechte Winkel.



(7) Jedes räumliche Viereck besitzt genau eine Umkugel.



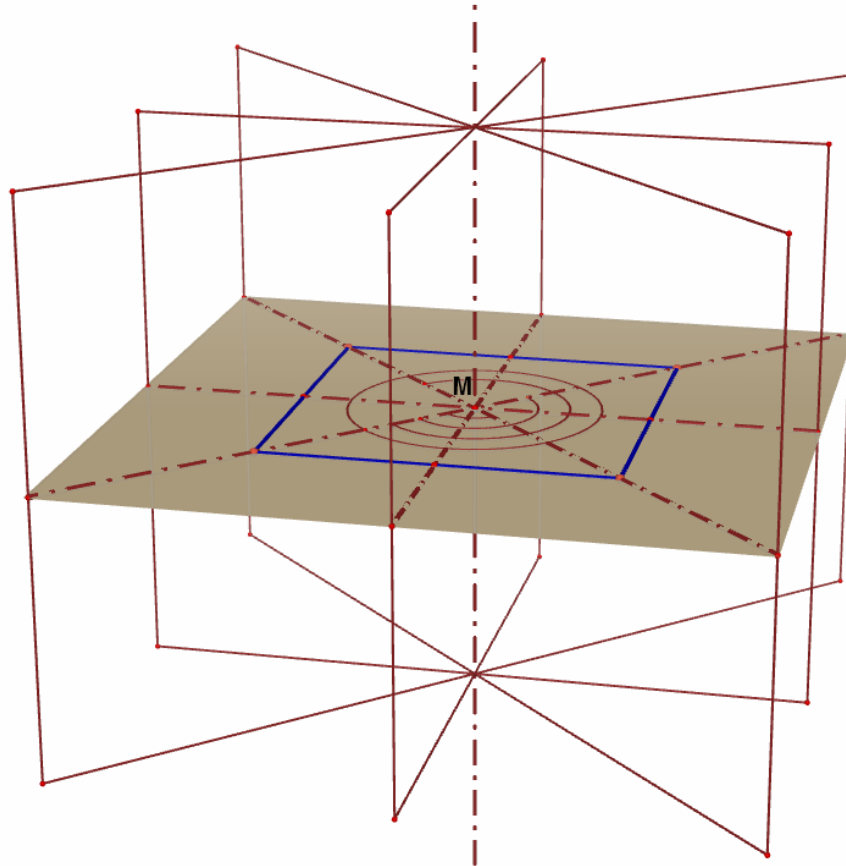
(8) Jedes räumliche Viereck besitzt für jede seiner Seiten unendlich viele Ankugeln.



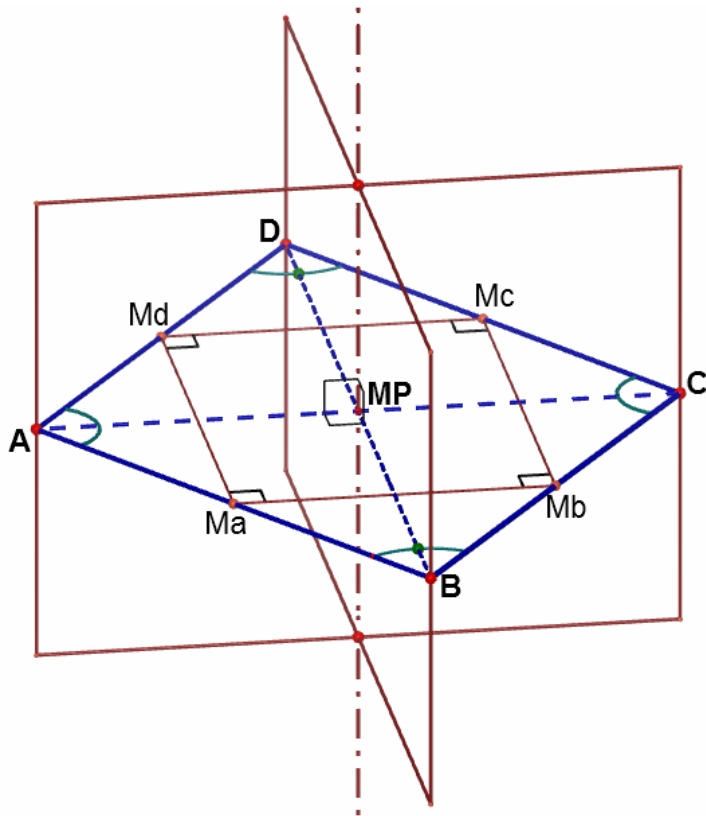
Das räumliche Viereck

3. Klassifikation einfacher RV

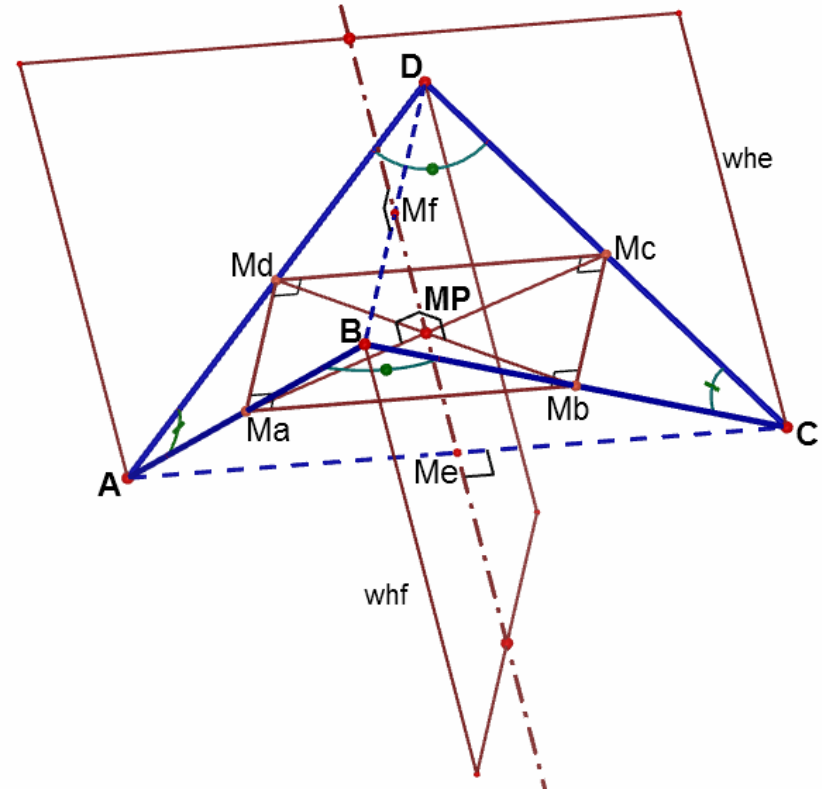
Symmetrien des Quadrats im Raum



Quadrat in der Ebene	Quadrat im Raum
4 2-zählige Symmetrie-Achsen	4 2-zählige Symmetrie-Achsen 4 Symmetrie-Ebenen
4-zähliges Symmetrie-Zentrum (90°-, 180°-, 270°- 360°-Drehung um M)	4-zählige Symmetrie-Achse



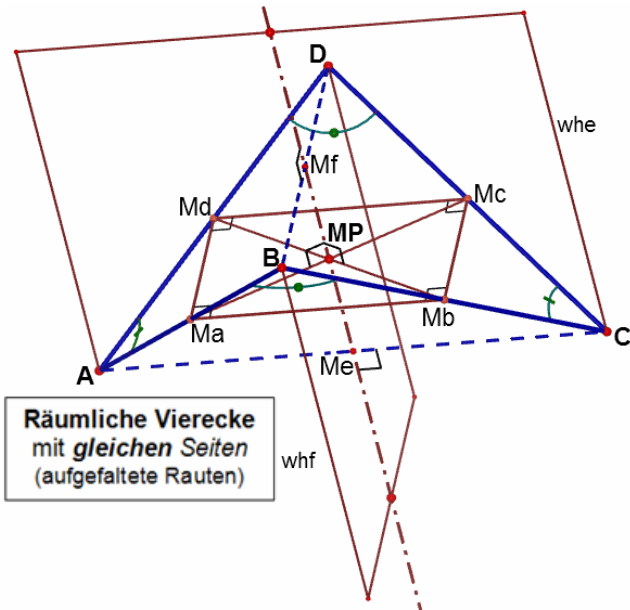
Symmetrien der ebenen Raute
im Raum



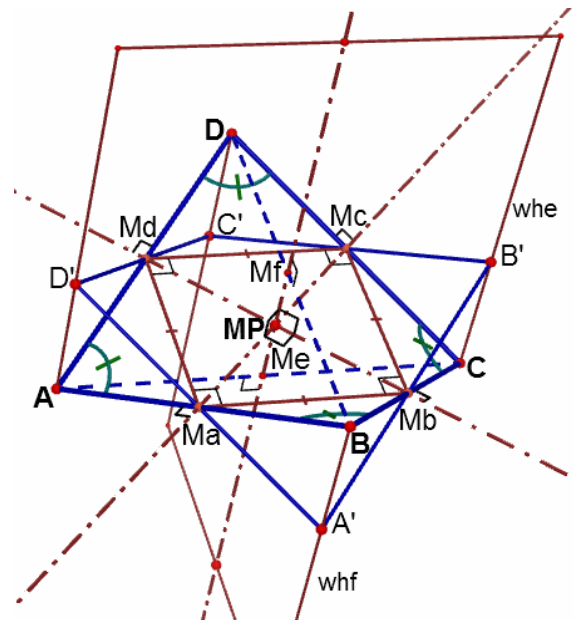
Symmetrien der verräumlichten
Raute



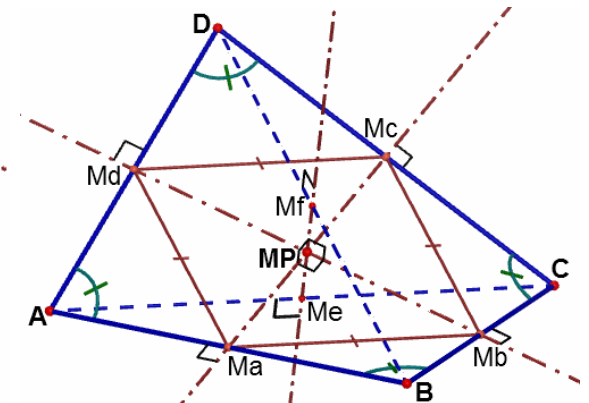
AUFFALTEN



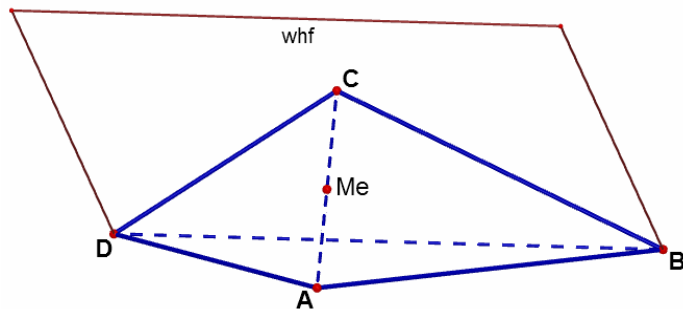
Räumliche Vierecke
mit **gleichen Seiten**
(aufgefaltete Rauten)



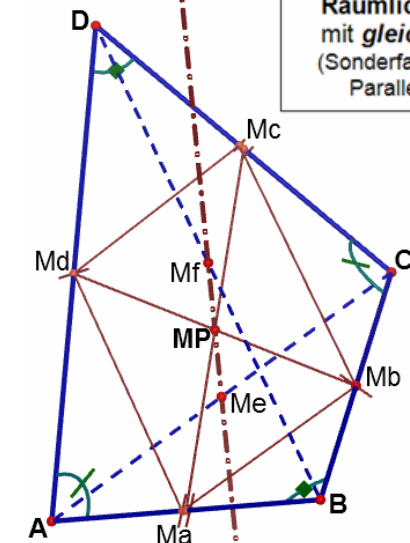
Räumliche Vierecke
mit **gleichen Seiten** und **gleichen Winkeln**
(Sonderfall aufgefalteter Rauten)



Räumliche Vierecke
mit **gleichen Winkeln**
(Sonderfall aufgefalteter
Parallelelogramme)

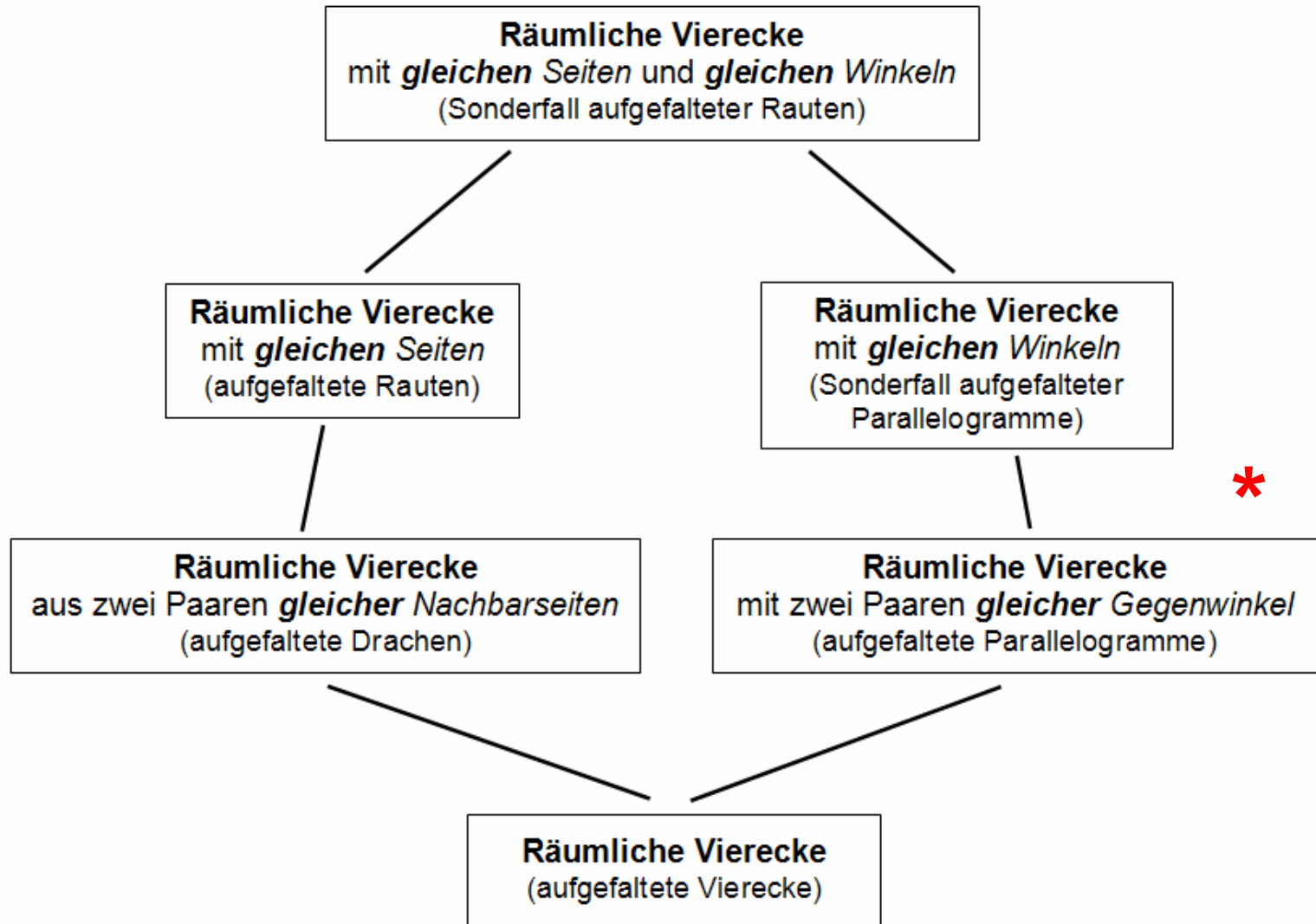


Räumliche Vierecke
aus zwei Paaren **gleicher Nachbarseiten**
(aufgefaltete Drachen)



Räumliche Vierecke
mit zwei Paaren **gleicher Gegenwinkel**
(aufgefaltete Parallelelogramme)

Physische Modelle aus Trinkhalmen und Pfeifenreinigern



Haus der symmetrischen räumlichen Vierecke



In der Ebene sind jeweils Gegenseiten-Gleichheit und Gegenwinkel-Gleichheit das Parallelogramm kennzeichnende Eigenschaften. Gilt das auch für das verräumlichte Parallelogramm?

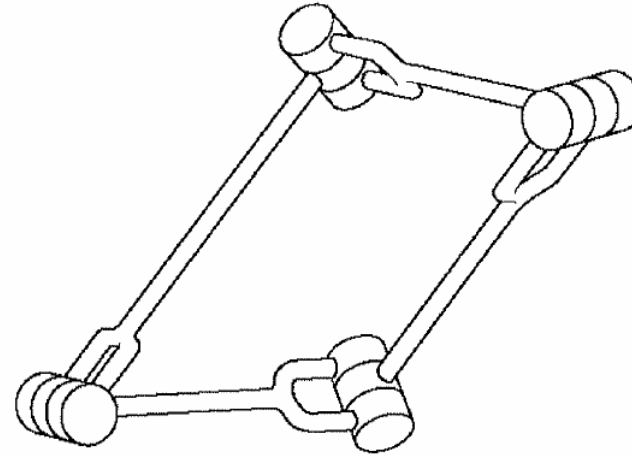
Es ist bei Benutzung des 1. Kongruenzsatzes unmittelbar einzusehen, dass aus der Gleichheit der Gegenseiten eines räumlichen Vierecks die Gleichheit seiner Gegenwinkel folgt.

Im Gegensatz zur Ebene ist aber der Beweis, dass sich aus der Gleichheit der Gegenwinkel eines räumlichen Vierecks die Gleichheit seiner Gegenseiten ergibt, wesentlich schwieriger und umfänglicher.

Thébault, V. (1953): On the Skew Quadrilateral.
In: The American Mathematical Monthly, Vol. 60,
No. 2, p. 102-105

Räumliche Vierecke
mit zwei Paaren *gleicher* Gegenwinkel
(aufgefaltete Parallelogramme)

Ein Gelenkviereck: Das Bennett-Isogramm



Kinematische Geometrie des Bennett-Isogramms

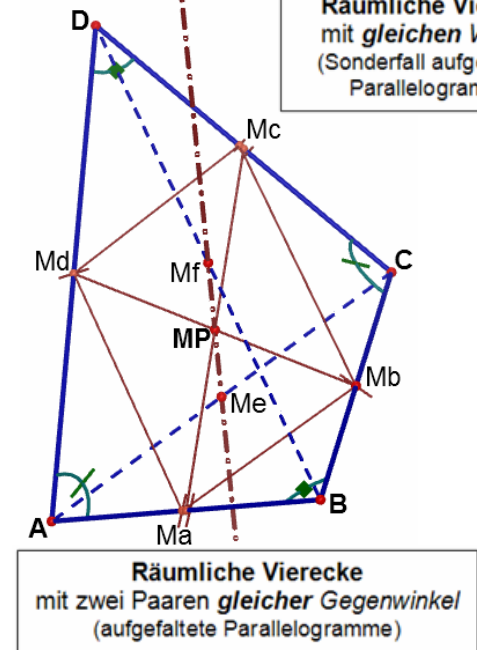
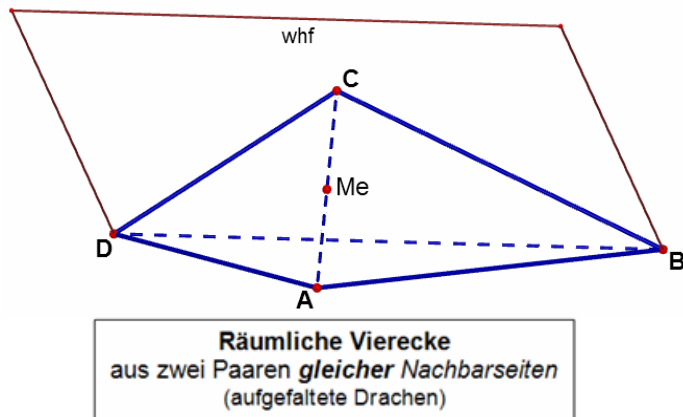
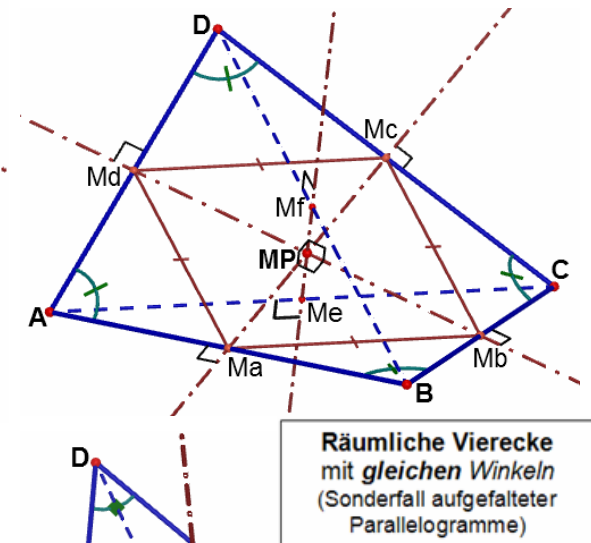
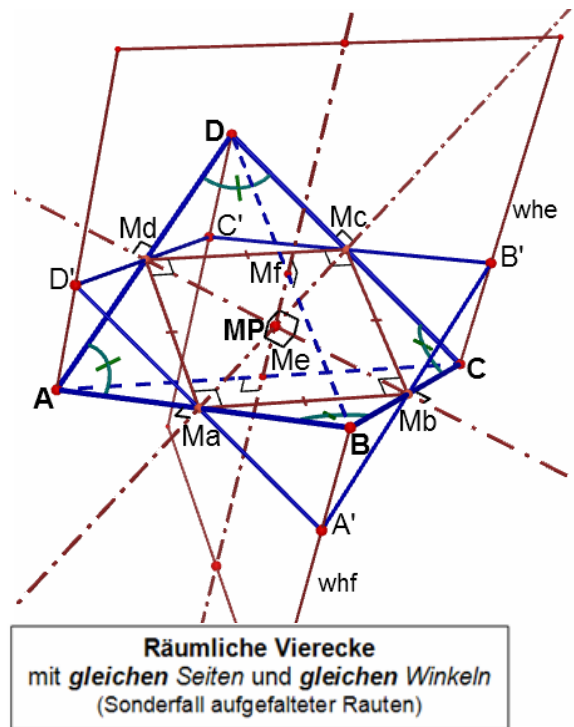
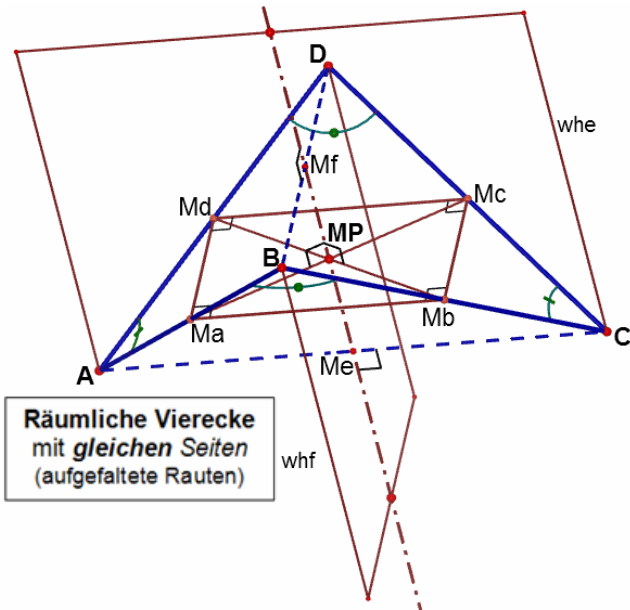
Hausarbeit aus Darstellender Geometrie

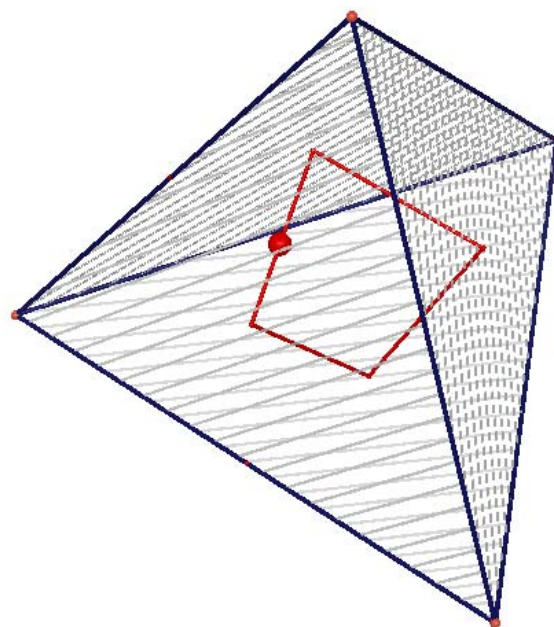
Peter Schreiber

eingereicht bei

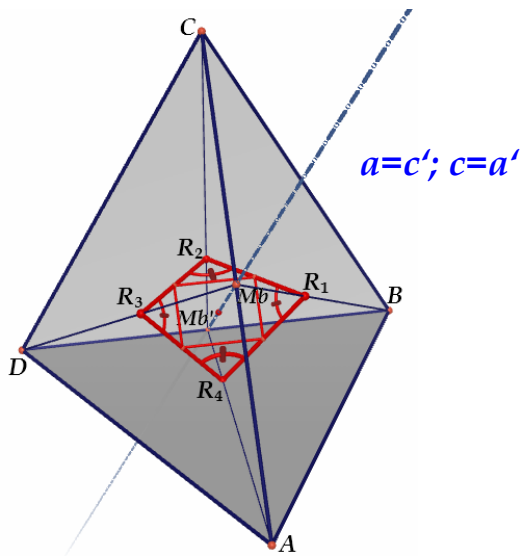
O.Univ.-Prof.Mag.rer.nat.Dr.techn. Hans Vogler
Institut für Geometrie, Technische Universität Graz

Graz, im Jänner 2003

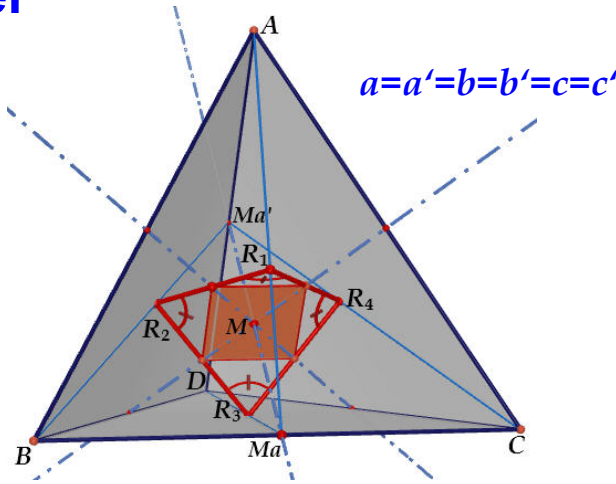




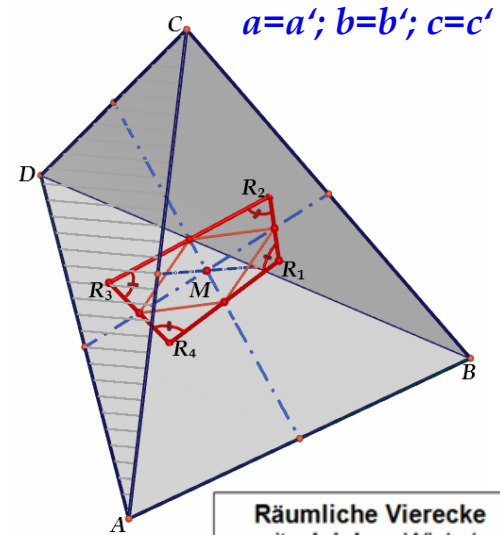
Billardbahnen im Tetraeder



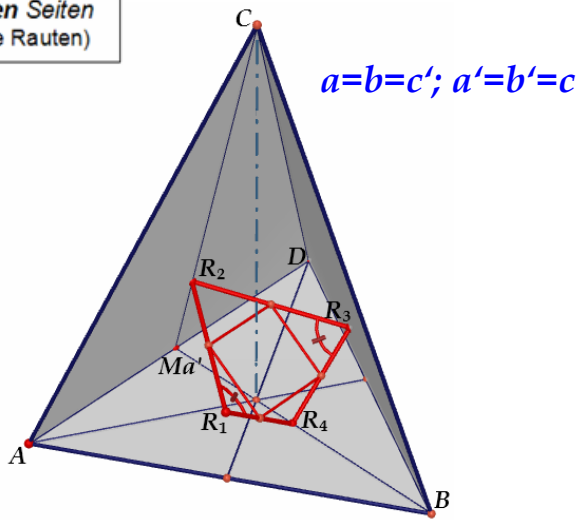
Räumliche Vierecke
mit **gleichen** Seiten
(aufgefaltete Rauten)



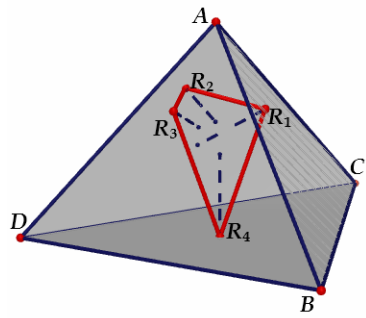
Räumliche Vierecke
mit **gleichen** Seiten und **gleichen** Winkeln
(Sonderfall aufgefalteter Rauten)



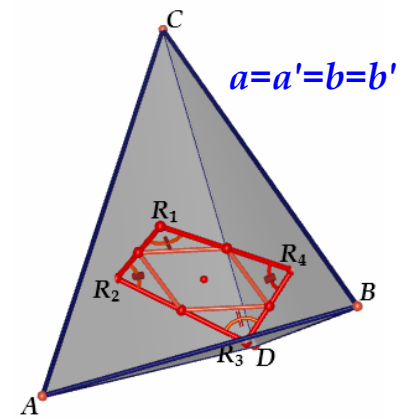
Räumliche Vierecke
mit **gleichen** Winkeln
(Sonderfall aufgefalteter
Parallelelogramme)



Räumliche Vierecke
aus zwei Paaren **gleicher** Nachbarseiten
(aufgefaltete Drachen)



Räumliche Vierecke
(aufgefaltete Vierecke)

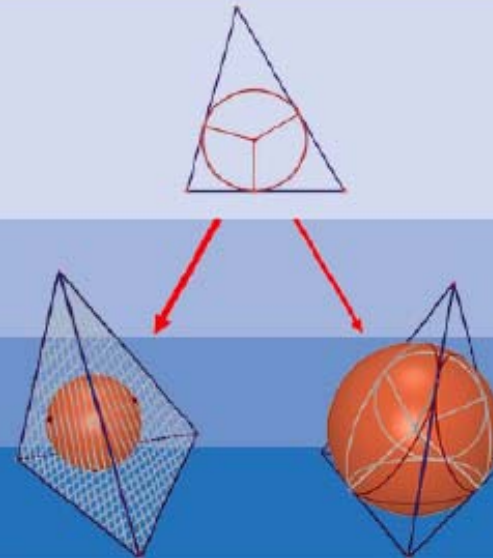


Räumliche Vierecke
mit zwei Paaren **gleicher** Gegenwinkel
(aufgefaltete Parallelelogramme)

Heinz Schumann

Elementare Tetraedergeometrie

Eine Einführung in die Raumgeometrie



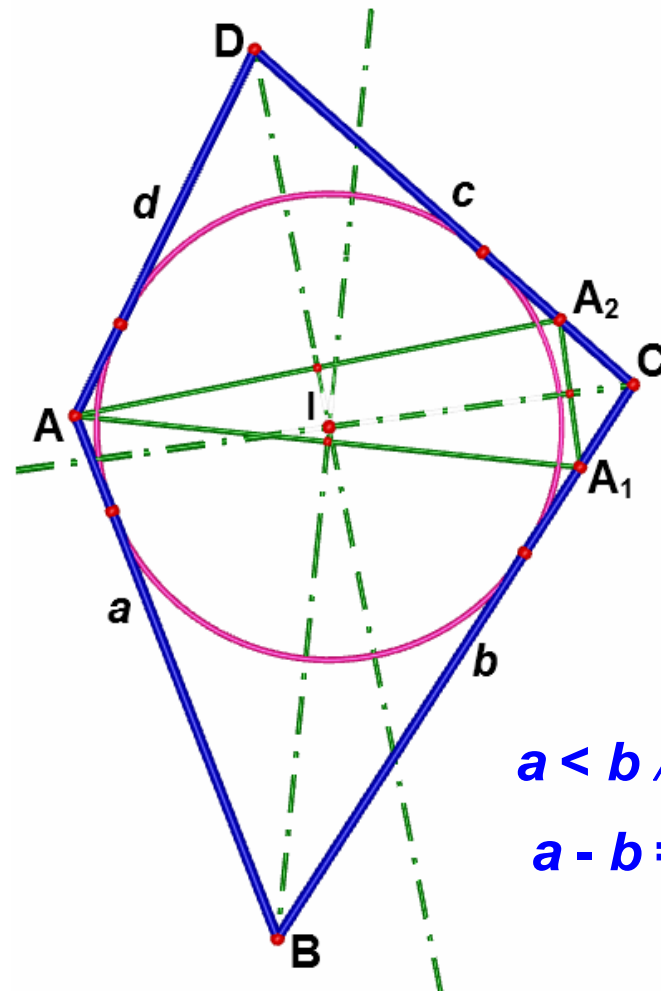
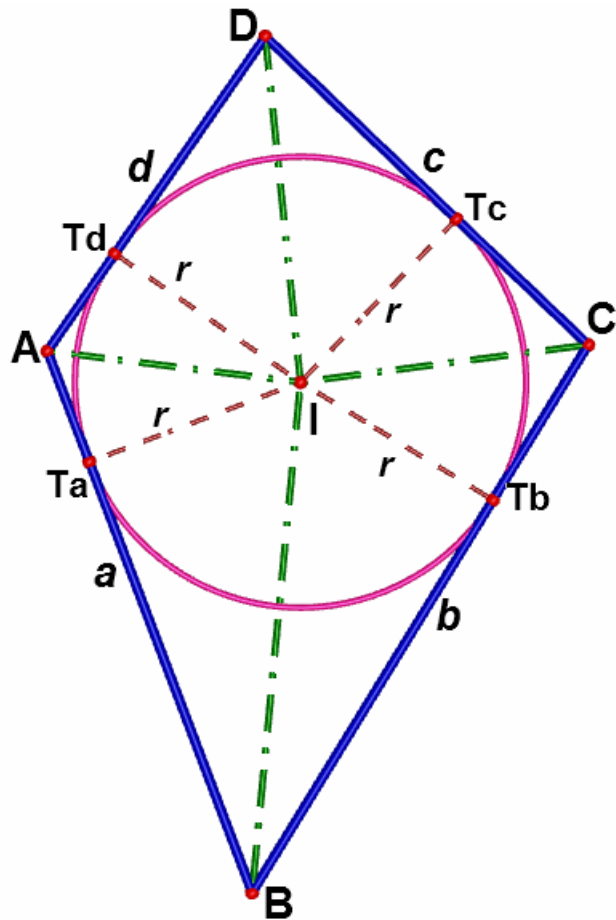
Frenzbecker

2011

A decorative curved bar on the left side of the slide, transitioning from light blue at the top to light yellow at the bottom.

Das räumliche Viereck

4. Das Inkugelviereck

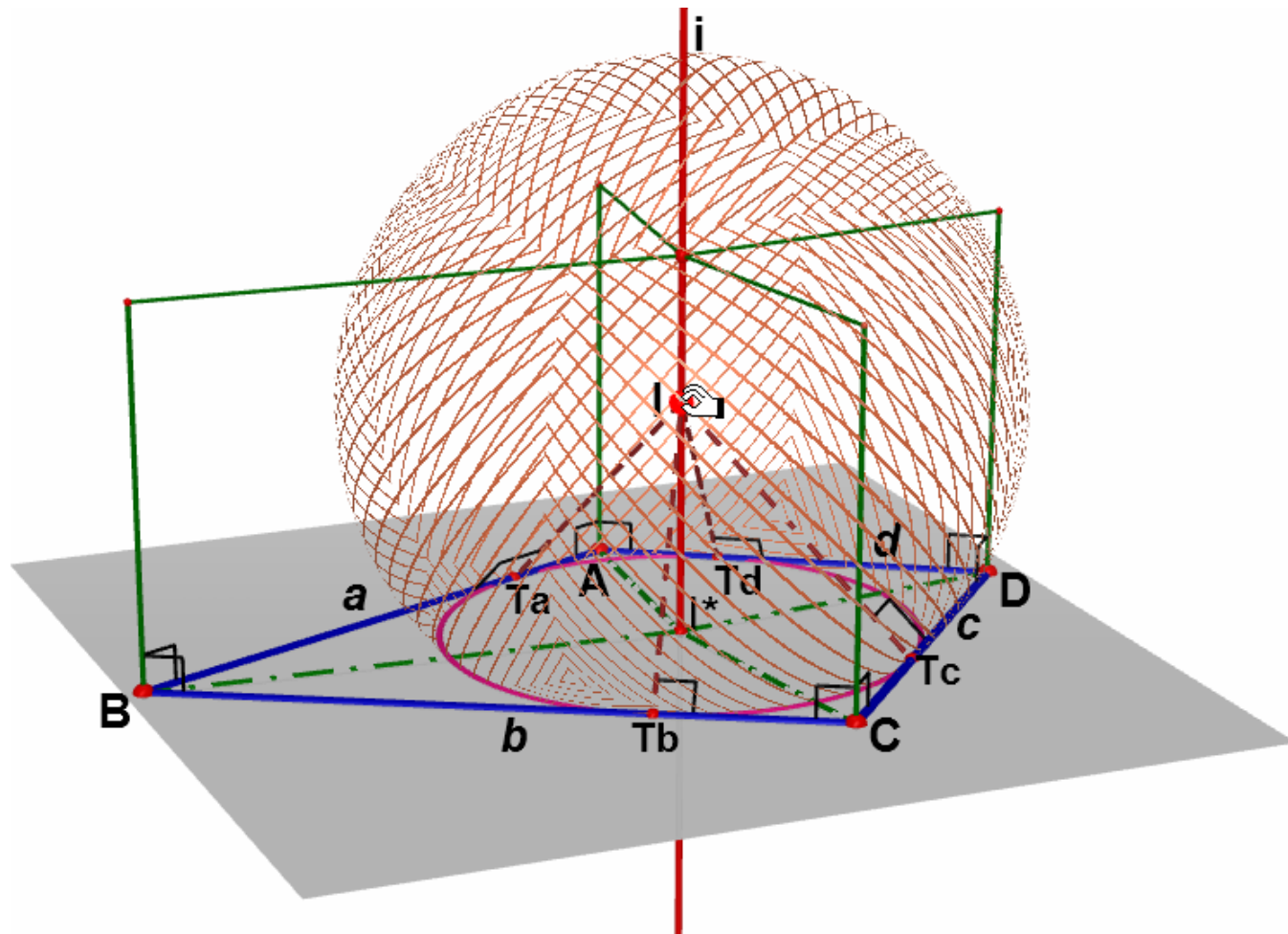


$$a < b \wedge d < c$$

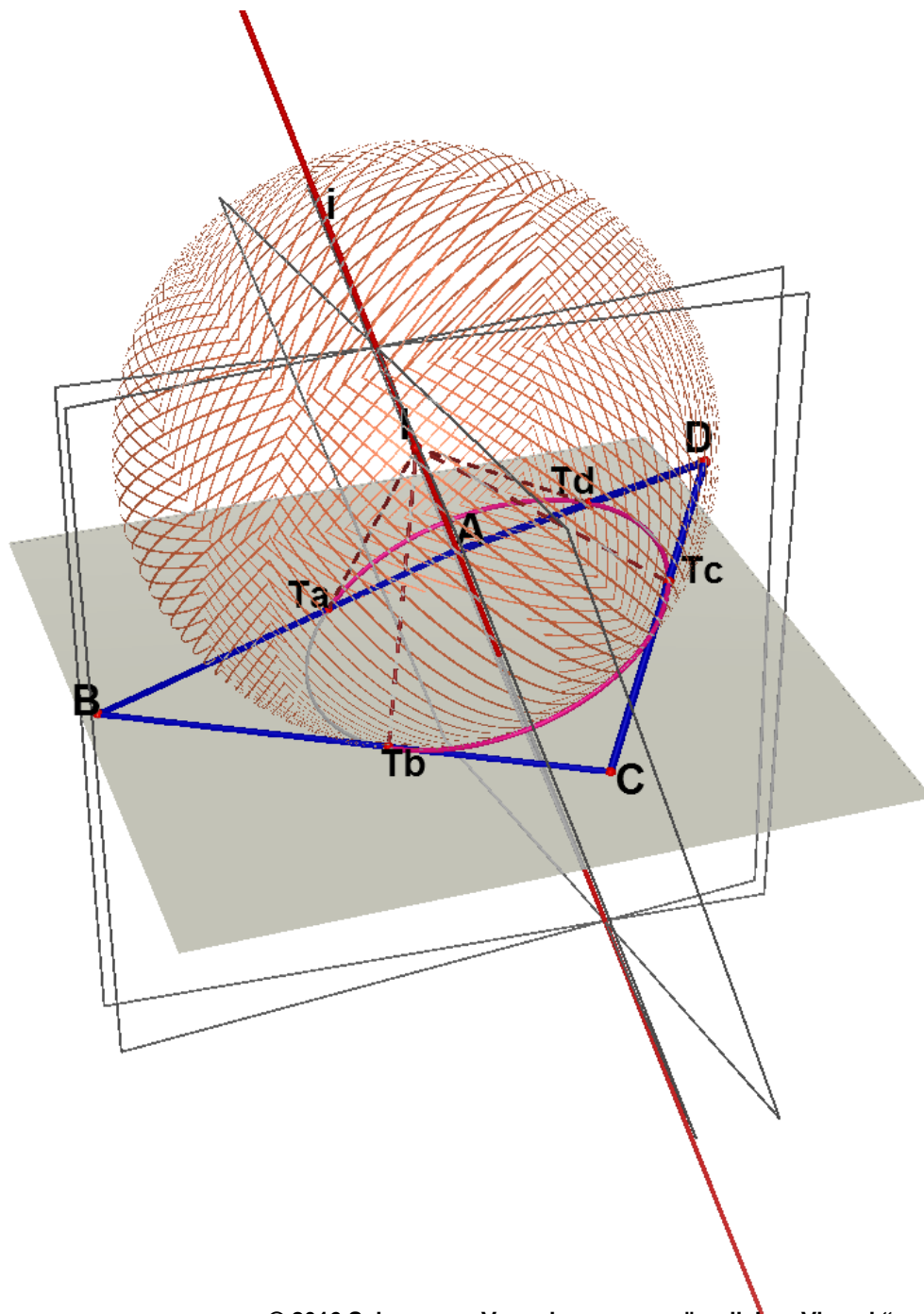
$$a - b = c - d$$

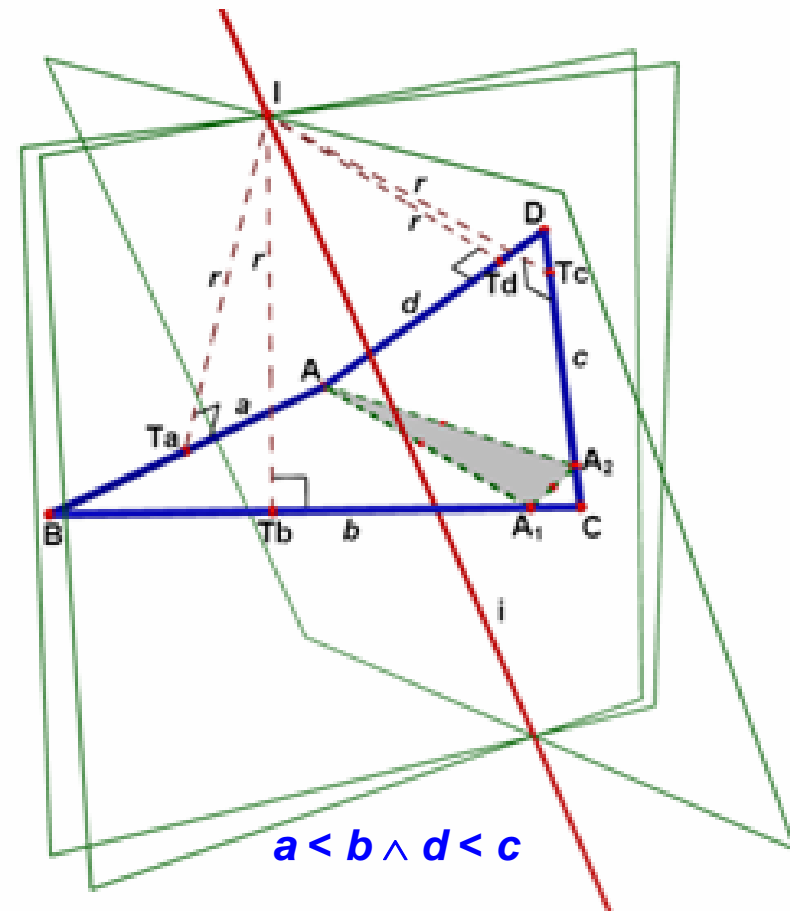
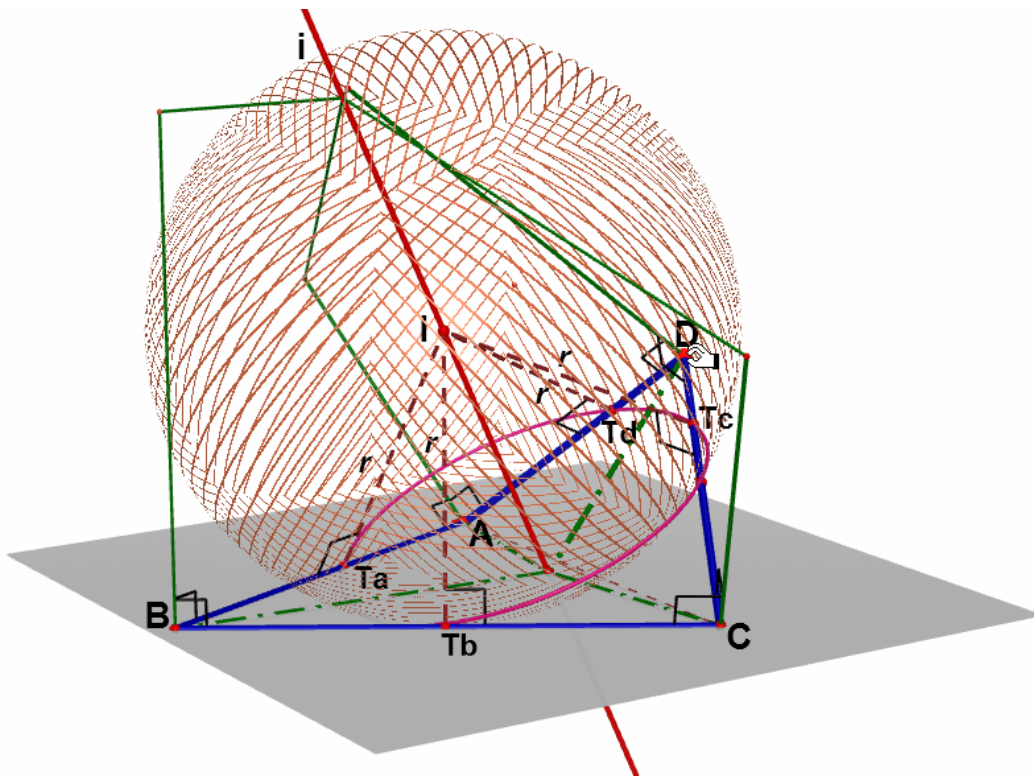
Kreis-Viereck (Tangentenviereck)

(9) Ein konvexes ebenes Vierecks ABCD ist ein Inkreisviereck genau dann, wenn gilt $a + c = b + d$.



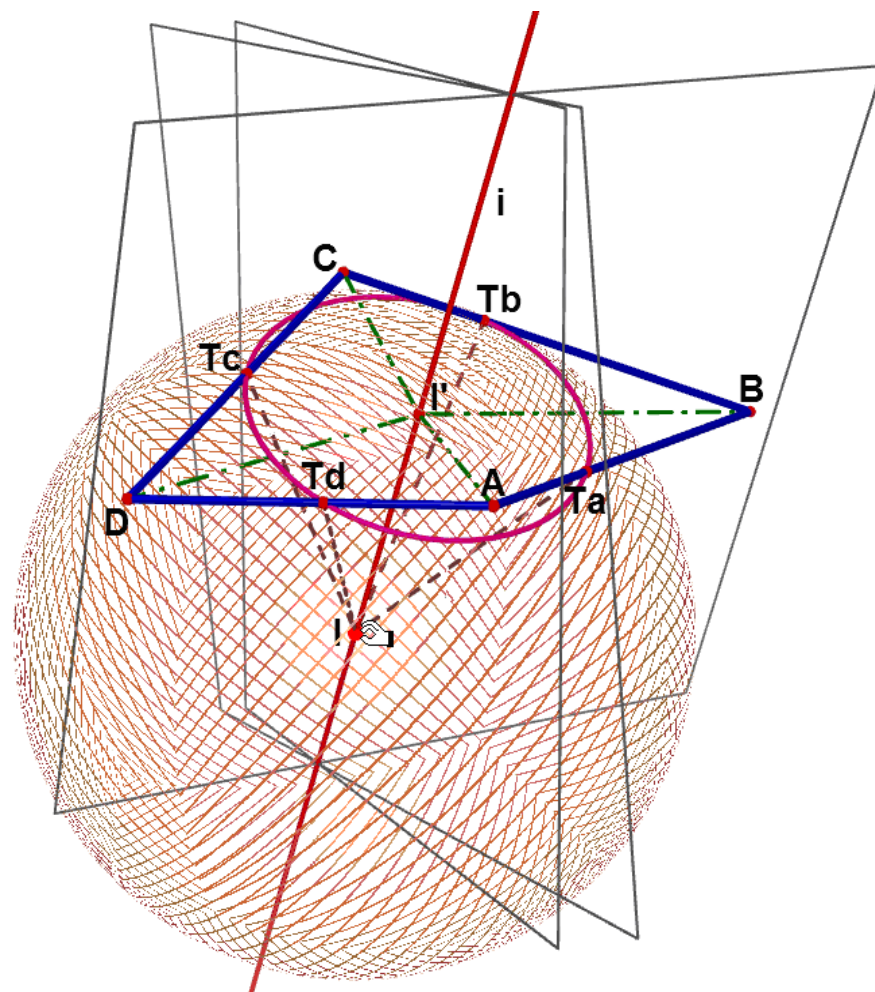
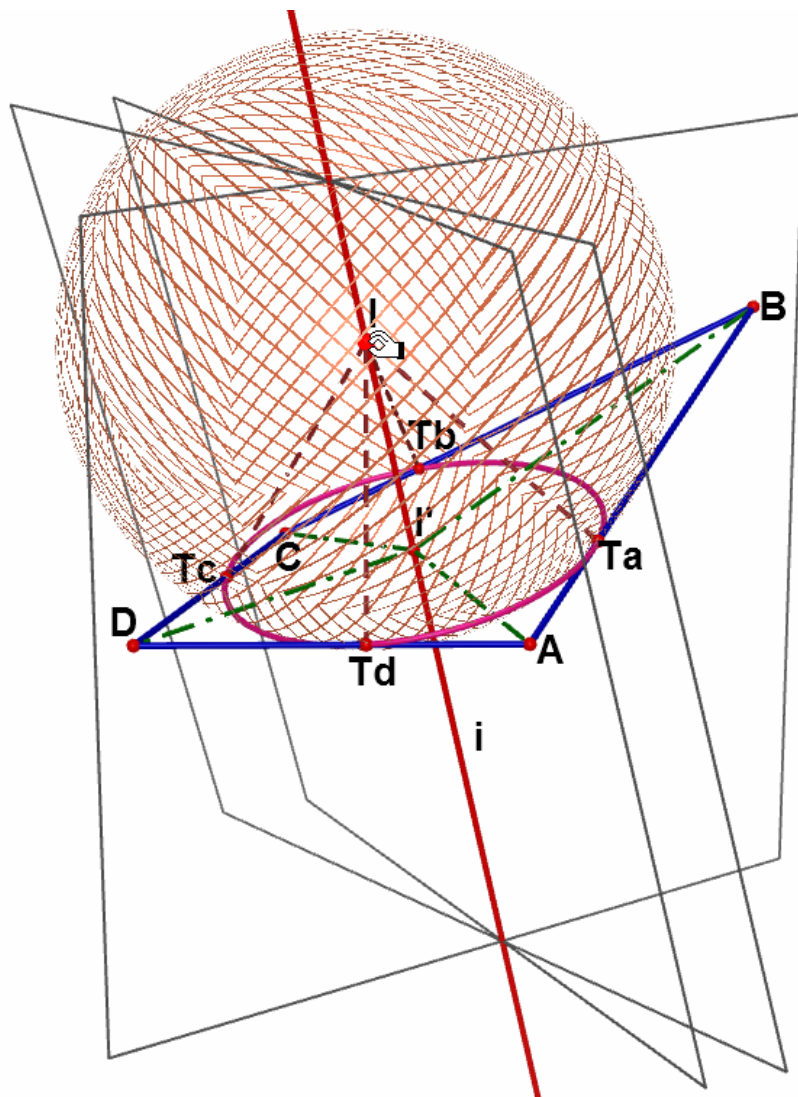
Inkreisviereck im Raum



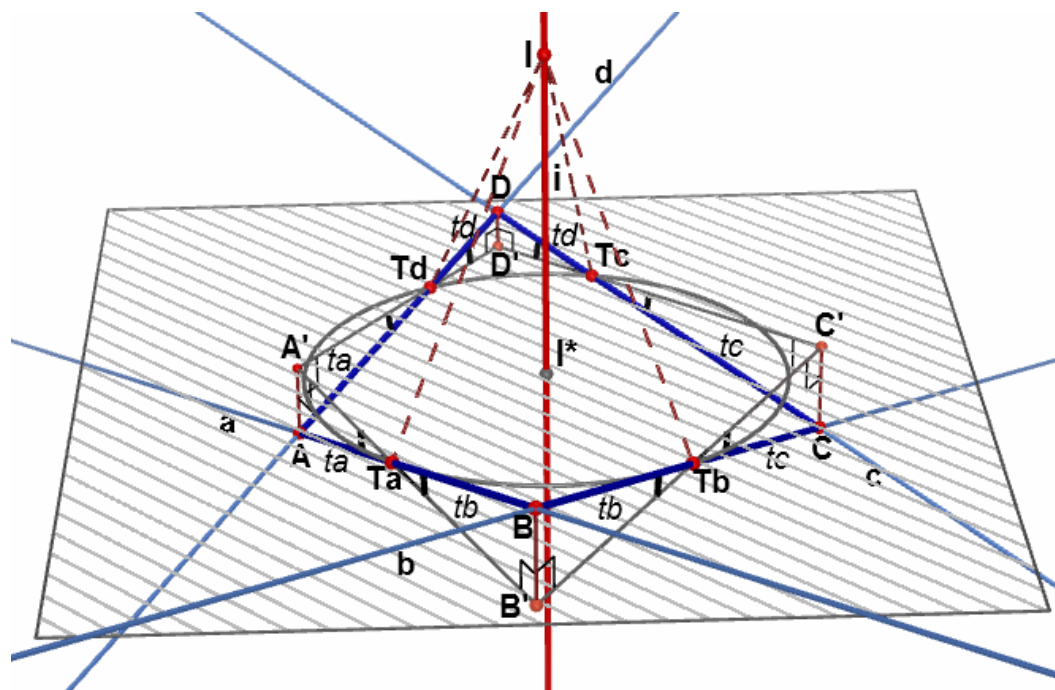
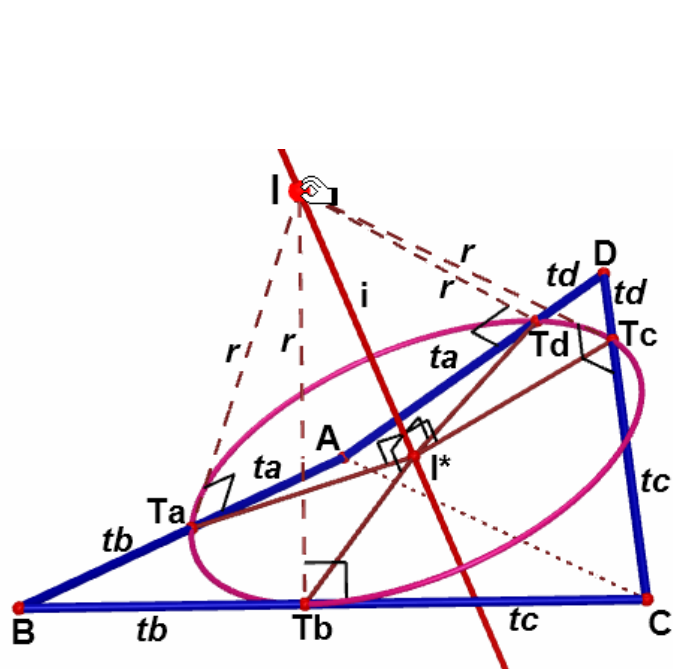


Inkugel-Viereck

(10) Die winkelhalbierenden Ebenen eines räumlichen Vierecks ABCD mit der Eigenschaft $a + c = b + d$ schneiden einander in einer Achse i , deren Punkte Mittelpunkte jener Kugeln sind, welche die Seiten bzw. Seitengeraden des Vierecks berühren.

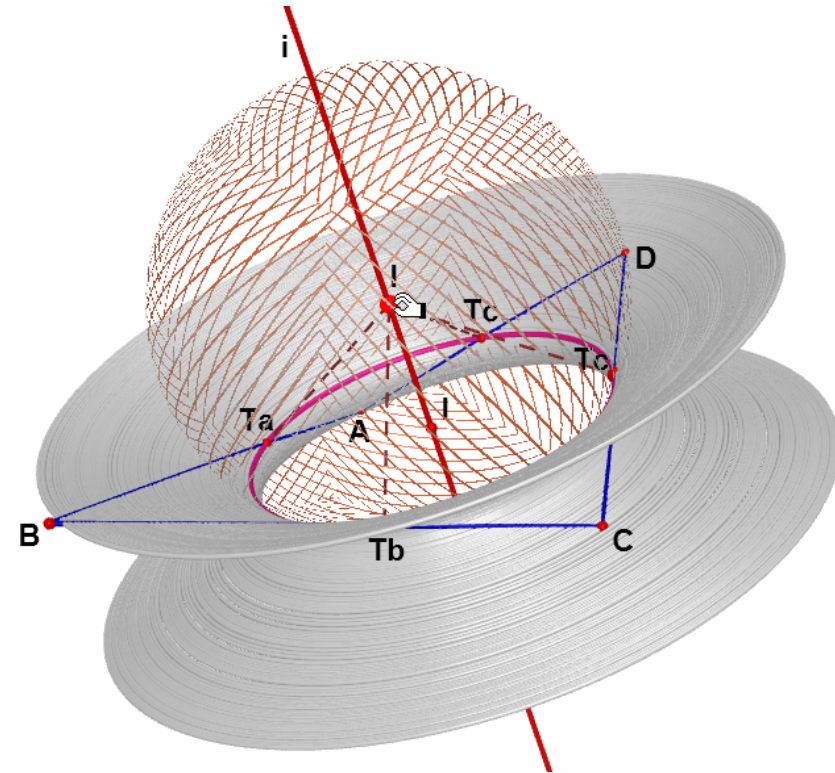
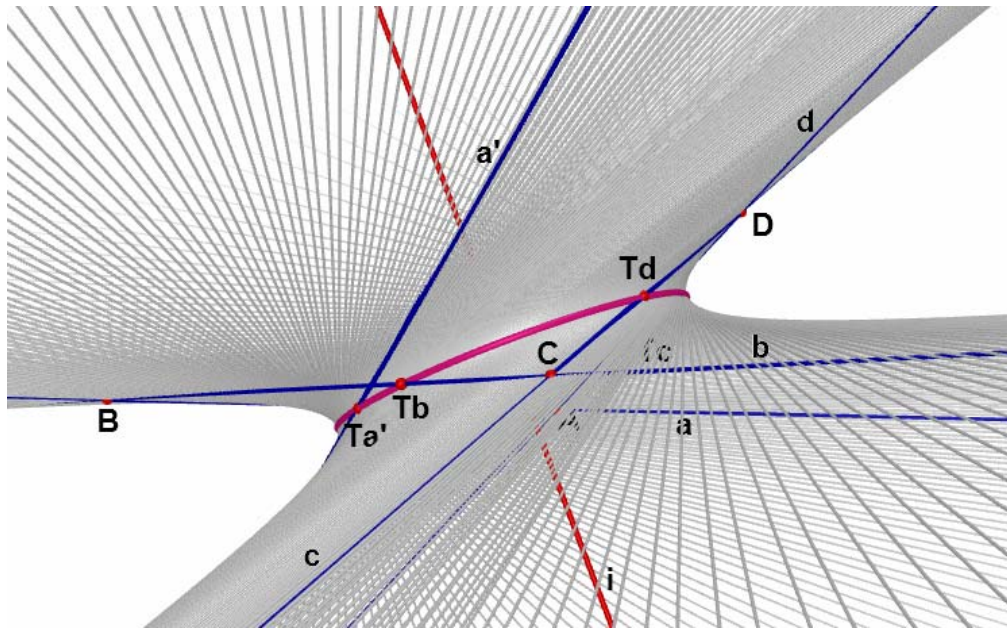


Verräumlichte Drachenvierecke



- (11) Die vier Berührungspunkte jeder dieser Inkugeln liegen in einer Ebene.
 (12) Die vier Berührungspunkte liegen auf einem Kreis in dieser Ebene.
 Die Schnittgerade der vier winkelhalbierenden Ebenen geht durch den Mittelpunkt dieses Kreises und steht senkrecht auf der Kreisebene.
 (13) Die Neigungswinkel der Seitengeraden gegen die Kreisebene sind einander gleich.

Zusatz

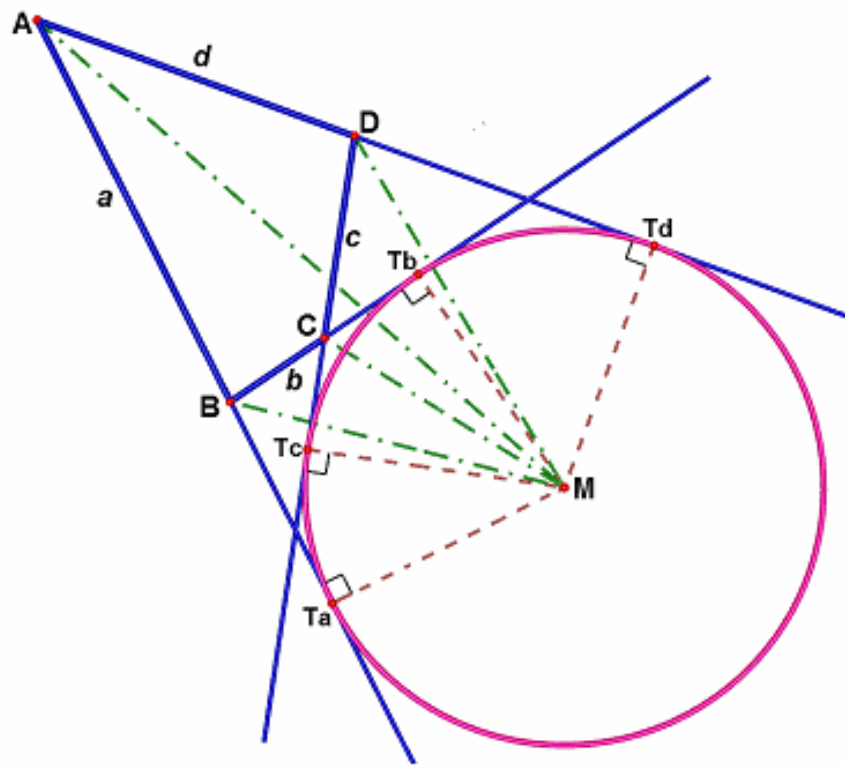


Zu jedem räumlichen Viereck $ABCD$ mit der Eigenschaft $a + c = b + d$ existiert genau ein Rotationshyperboloid, welches alle Seitengeraden des Vierecks enthält und tangential zu allen Berührungskugeln ist.

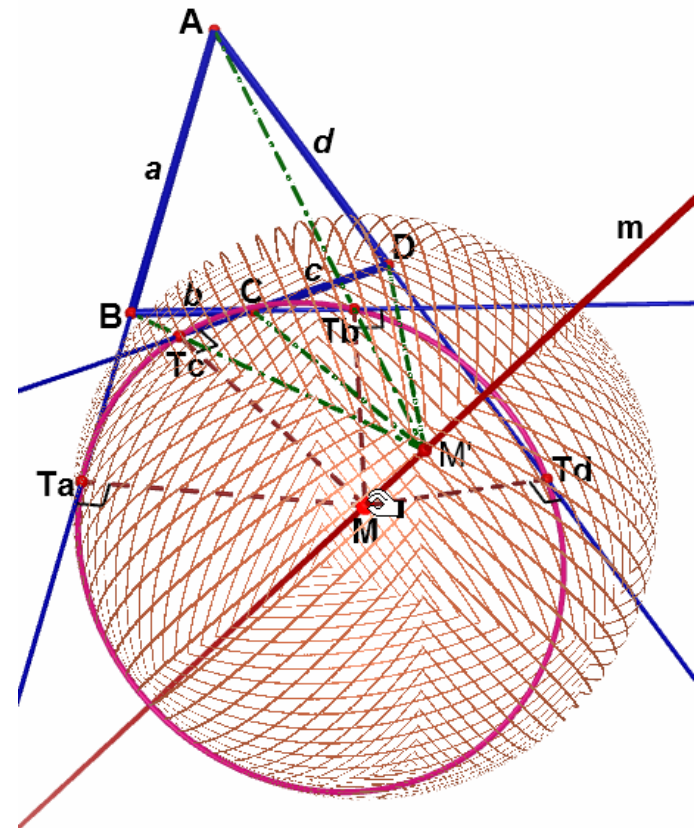
A decorative curved bar on the left side of the slide, transitioning from light blue at the top to light green in the middle, and finally to light yellow at the bottom.

Das räumliche Viereck

5. Das Ankugelviereck



Ankreisviereck



Ankugelviereck

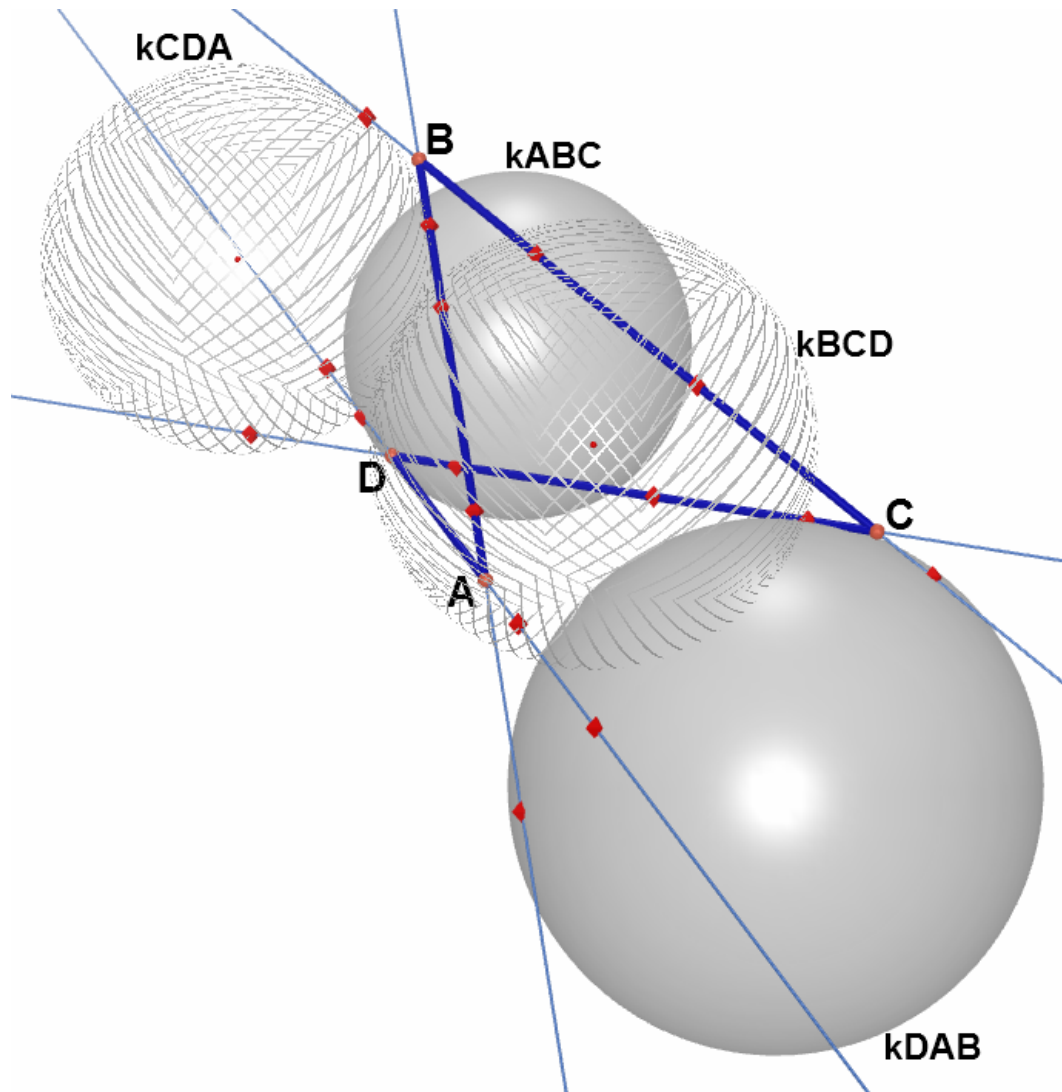
(14) Ein ebenes Viereck ABCD ist ein Ankreisviereck genau dann, wenn gilt:
 $a + b = c + d$.

(15) Ein räumliches Viereck ABCD ist ein Ankugelviereck genau dann, wenn gilt:
 $a + b = c + d$.

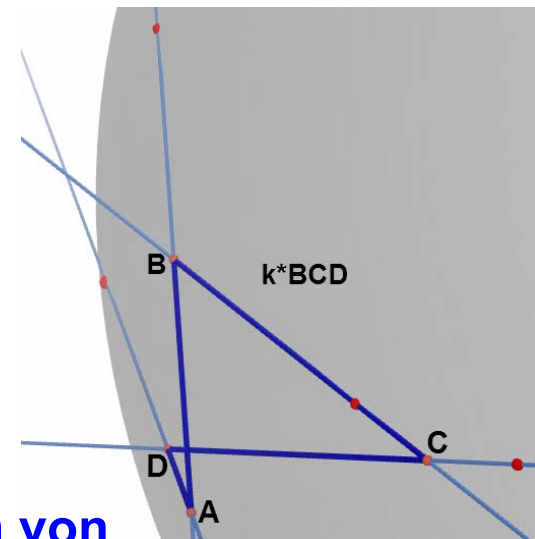
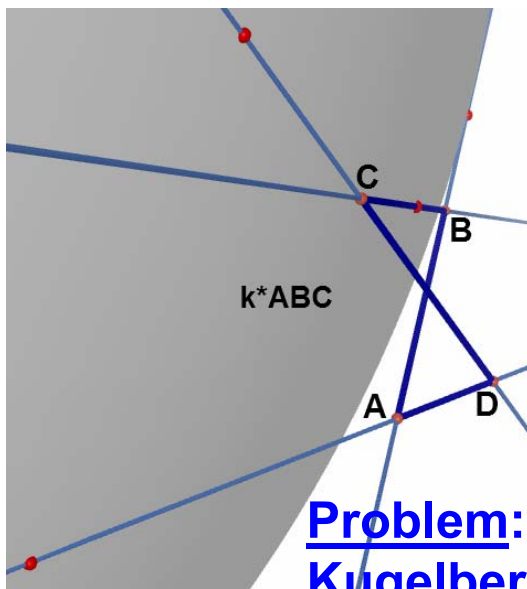


Das räumliche Viereck

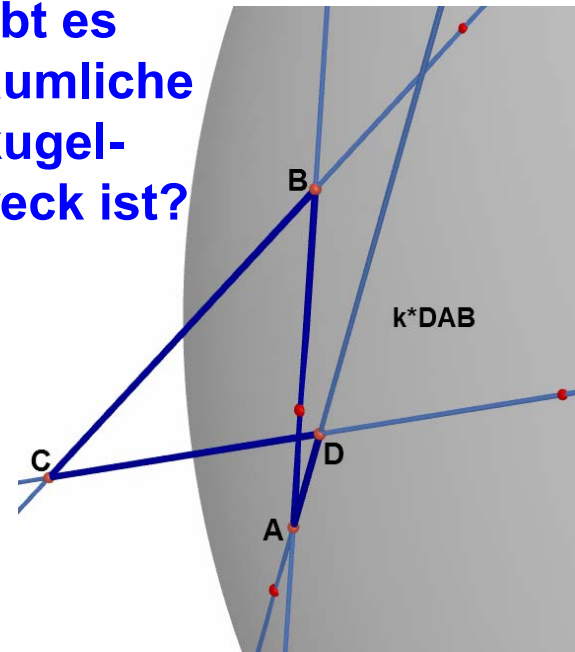
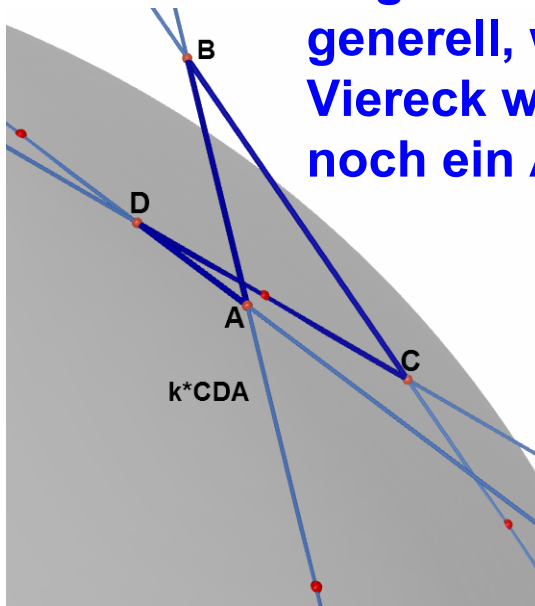
6. Das 8-Tangentialkugelviereck



Die 4 Tangentialkugeln der inneren Winkelhalbierenden eines beliebigen räumlichen Vierecks $ABCD$, welches weder ein Inkugel- noch ein Ankugelviereck ist.

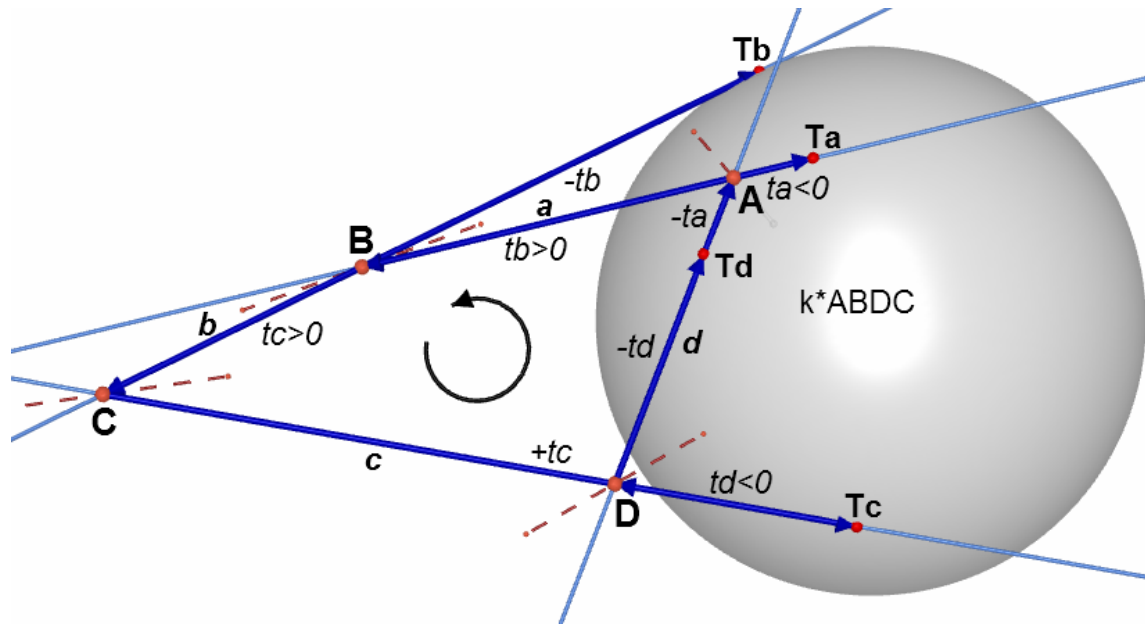


Problem: Welche Arten von Kugelberührungen gibt es generell, wenn das räumliche Viereck weder ein Inkugel- noch ein Ankugelviereck ist?



Die 4 Tangentialkugeln der äußeren Winkelhalbierenden

Beziehung zwischen Viereckseiten und Tangentialabschnitten



Vorzeichen der Tangentialabschnitte: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$

$SOLVE([ta + tb = a, \sigma_2 \cdot tb + tc = b, \sigma_3 \cdot tc + td = c, \sigma_4 \cdot td + \sigma_1 \cdot ta = d], [ta, tb, tc, td])$

$$\left[\begin{aligned} ta &= \frac{a \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - b \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 + c \cdot \sigma_4 - d}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \wedge tb = \frac{-a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - c \cdot \sigma_4 + d}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \wedge tc = \\ &\frac{a \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - b \cdot \sigma_1 + \sigma_2 \cdot (c \cdot \sigma_4 - d)}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \wedge td = \frac{-a \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + b \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - c \cdot \sigma_1 + d \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \end{aligned} \right]$$

Lösbarkeitsbedingung: $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \neq \sigma_1$ (für $\sigma_1 = +1$: $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = -1$ und für $\sigma_1 = -1$: $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = +1$)

Spezifizierte Lösungen:

1. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, +1, +1, -1]$$

$$\left[ta = \frac{a - b + c + d}{2} \wedge tb = \frac{a + b - c - d}{2} \wedge tc = \frac{-a + b + c + d}{2} \wedge td = \frac{a - b + c - d}{2} \right]$$

2. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, +1, -1, +1]$$

$$\left[ta = \frac{a - b - c + d}{2} \wedge tb = \frac{a + b + c - d}{2} \wedge tc = \frac{-a + b - c + d}{2} \wedge td = \frac{-a + b + c + d}{2} \right]$$

3. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, -1, +1, +1]$$

$$\left[ta = \frac{a + b - c + d}{2} \wedge tb = \frac{a - b + c - d}{2} \wedge tc = \frac{a + b + c - d}{2} \wedge td = \frac{-a - b + c + d}{2} \right]$$

4. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, -1, -1, -1]$$

$$\left[ta = \frac{a + b + c + d}{2} \wedge tb = \frac{a - b - c - d}{2} \wedge tc = \frac{a + b - c - d}{2} \wedge td = \frac{a + b + c - d}{2} \right]$$

5. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, +1, +1, +1]$$

$$\left[ta = \frac{a - b + c - d}{2} \wedge tb = \frac{a + b - c + d}{2} \wedge tc = \frac{-a + b + c - d}{2} \wedge td = \frac{a - b + c + d}{2} \right]$$

6. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, +1, -1, -1]$$

$$\left[ta = \frac{a - b - c - d}{2} \wedge tb = \frac{a + b + c + d}{2} \wedge tc = -\frac{a - b + c + d}{2} \wedge td = \frac{-a + b + c - d}{2} \right]$$

7. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, -1, +1, -1]$$

$$\left[ta = \frac{a + b - c - d}{2} \wedge tb = \frac{a - b + c + d}{2} \wedge tc = \frac{a + b + c + d}{2} \wedge td = \frac{-a - b + c - d}{2} \right]$$

8. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, -1, -1, +1]$$

$$\left[ta = \frac{a + b + c - d}{2} \wedge tb = \frac{a - b - c + d}{2} \wedge tc = \frac{a + b - c + d}{2} \wedge td = \frac{a + b + c + d}{2} \right]$$

Jedes räumliche Viereck $ABCD$, das weder ein Inkugel- noch ein Ankugelviereck ist, besitzt genau acht Tangentialkugeln.

Die Mittelpunkte der 8 Berührungskugeln eines Vierecks $ABCD$, das weder ein Inkugel- noch ein Ankugelviereck ist, als Schnittpunkte von innen- und außenwinkelhalbierenden Ebenen:

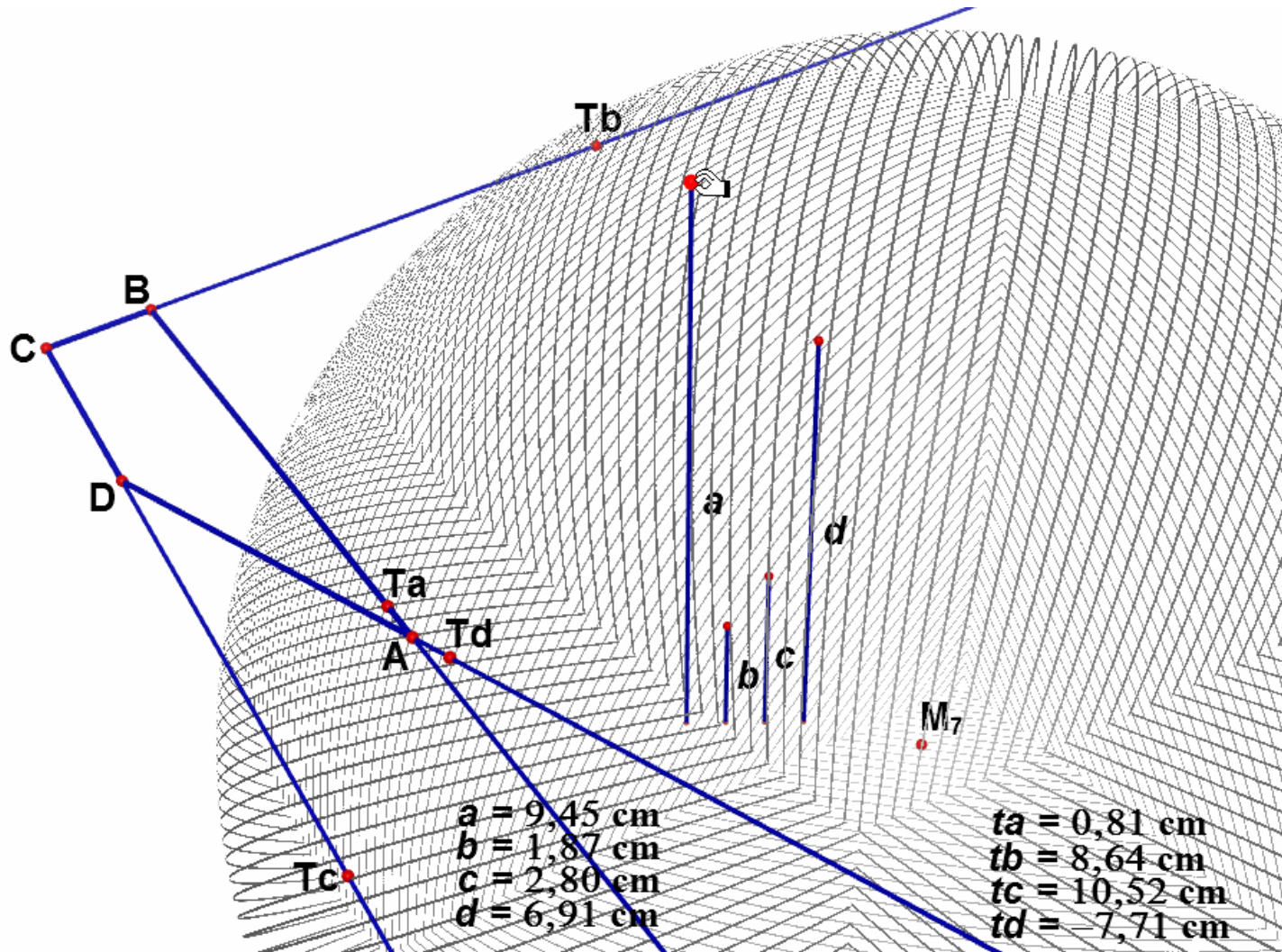
1. Fall: M_1 Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, C und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel D .
2. Fall: M_2 Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, D und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel C .
3. Fall: M_3 Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, C, D und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel B .
4. Fall: M_4 Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln B, C, D und der innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel A .
5. Fall: M_5 Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln B, C, D und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel A .
6. Fall: M_6 Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, C, D und der innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel B .
7. Fall: M_7 Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, D und der Innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel C .
8. Fall: M_8 Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, C und der innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel D .

Kennzeichnung der Tangentialkugeln

Die Fälle 1 - 3 und 5 kennzeichnen die Kugeln 1. Art, also die Berührungskugeln, deren Mittelpunkte Schnitt von jeweils 3 innenwinkelhalbierenden und einer außenwinkelhalbierenden Ebene ist.

Die Fälle 4 und 6 - 8 kennzeichnen die Kugeln 2. Art, also die Berührungskugeln, deren Mittelpunkte Schnitt von jeweils 3 außenwinkelhalbierenden und einer innenwinkelhalbierenden Ebene ist.

Zusatz: Berechnung der Tangentialabschnitte aus den Viereckseiten





Das räumliche Viereck

7. RV-Klassifikation nach Berührungskugel-Eigenschaft

Für $\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - \sigma_1 = 0$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$a = t_a + t_b \wedge b = \sigma_2 t_b + t_c \wedge c = \sigma_3 t_c + t_d \wedge d = \sigma_4 t_d + \sigma_1 t_a$$

1)	$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$	$= [+1, +1, +1, +1]:$	$a + c = d + b$
2)	-	$= [+1, +1, -1, -1]:$	$b = a + c + d$
3)	-	$= [+1, -1, +1, -1]:$	$a + b = c + d$
4)	-	$= [+1, -1, -1, +1]:$	$d = a + b + c$
5)	-	$= [-1, +1, +1, -1]:$	$b = a + c + d$
6)	-	$= [-1, +1, -1, +1]:$	$a + d = b + c$
7)	-	$= [-1, -1, +1, +1]:$	$c = a + b + d$
8)	-	$= [-1, -1, -1, -1]:$	$a + b + c + d = 0$

1. Fall: Inkugelviereck

3. und 6. Fall: Ankugelviereck

Restliche Fälle ohne Ergebnis

Entweder hat ein Viereck im Raum genau acht Tangentialkugeln oder das Viereck ist ein Inkugelviereck oder ein Ankugelviereck oder sowohl ein Inkugelviereck als auch ein Ankugelviereck.



8. Schlussbemerkungen

Die vorstehende Sachanalyse zeigt im Vergleich mit der Lehre des ebenen Vierecks überraschende Ergebnisse u. a. über die Kugelberührungen räumlicher Vierecke.

Anwendungsorientierte, aber anspruchsvollere Erweiterungen wären die Behandlung räumlicher Viereckgelenke und die nicht mehr elementargeometrische Behandlung der zwischen den Viereckseiten aufzuspannenden Minimalflächen.

Als eine Anwendung raumgeometrischen Konstruierens mit DRGSen bietet das formenkundliche Thema „Räumliches Viereck“ ein reichhaltiges und herausforderndes Arbeitsfeld für Studierende des Lehramtes und für leistungsfähige Schüler-/ Schülerinnen der oberen Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II.

Das Thema eignet sich auch für die Projektarbeit, für Schüler-Arbeitsgemeinschaften und für individuelle Schülerarbeiten – und auch für sogenannte raumgeometrische „Forscher“.

**Schüler/-innen als „mathematische Forscher“
– ein neue Form des mathematikdidaktischen
Egozentrismus?**



Danke für Ihre Aufmerksamkeit!



Epilog

***„Ist die Weite des bekannten
geometrischen Wissens mit
der Oberfläche des Ozeans
vergleichbar,
so seine Tiefen mit dem noch
unerforschten raumgeometrischen
Wissen.“***

H. Schumann, Oktober 2016

