

Wir sind beschränkt durch die Medien,  
welche wir gewohnheitsmäßig nutzen.  
H. Schumann

**Kanzlerin Merkels „Raute“**

# Vom ebenen zum räumlichen Viereck

Prof. Dr. Heinz Schumann

PH Weingarten

Fak. II, Mathematik

[schumann@ph-weingarten.de](mailto:schumann@ph-weingarten.de)

**37. Geometrie-Tagung**

Strobl 10.11.-12.11.2016

# Prolog

## Räumliches Viereck

Google-Suche 29.10.16

"räumliches Viereck" OR "windschiefes Viereck"

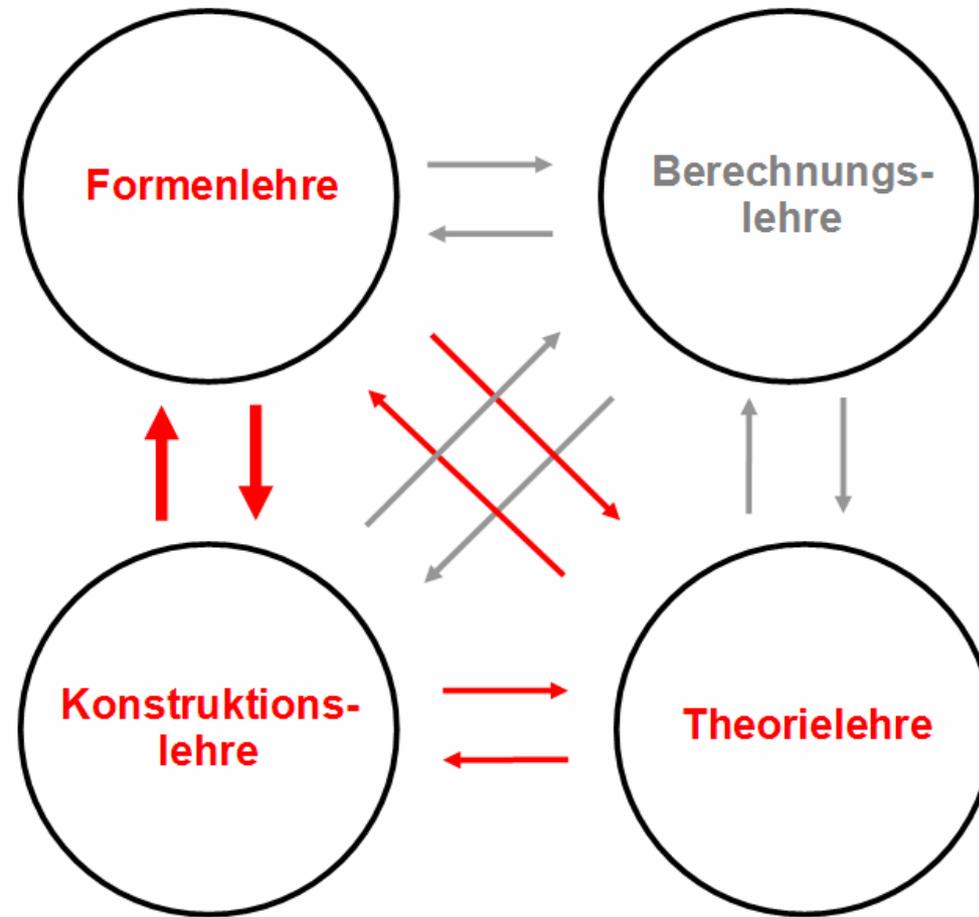
486 Links (ca. 2,1 Millionen für "Viereck")

"spatial quadrilateral" OR "skew quadrilateral" OR "3d quadrilateral"  
OR "spatial quadrangle" OR "skew quadrangle" OR "3d quadrangle"

2510 Links (ca. 8,5 Millionen für "quadrangle" OR "quadrilateral")

# Prolog

Die schulgeometrische Formenlehre räumlicher Figuren ist geprägt durch einen bescheidenen Vorrat an Figuren - meist als dienende Magd für Berechnungen!

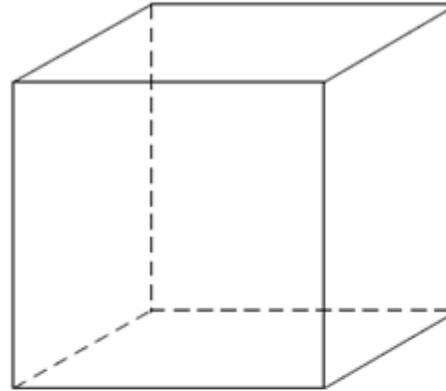


Stoffdidaktische Bereiche der (Raum-)Geometrie

## Aufgabe 26: Würfel erforschen



Gegeben ist ein Würfel mit 4 cm Kantenlänge.



---

### Aufgabe 26.1: Würfel erforschen

Berechne das Volumen.

---

### Aufgabe 26.2: Würfel erforschen

Berechne den Oberflächeninhalt.

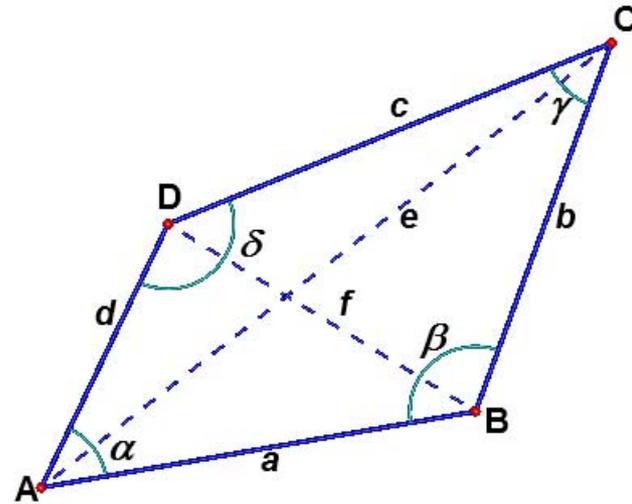
Vergleichsarbeiten Klasse 8 (VERA2 2009)



Institut zur Qualitätsentwicklung  
im Bildungswesen

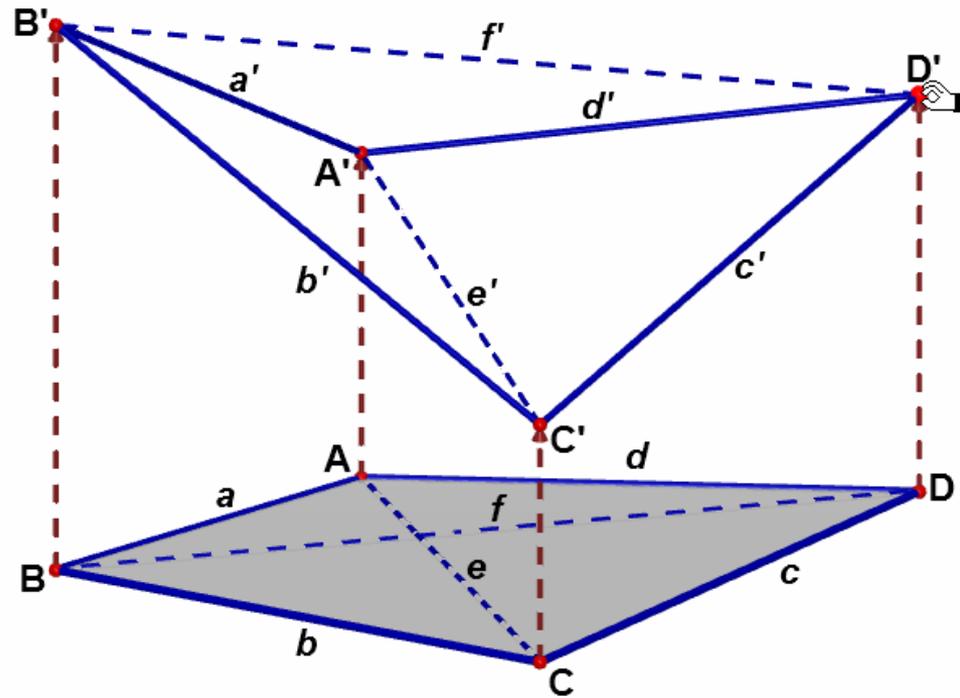
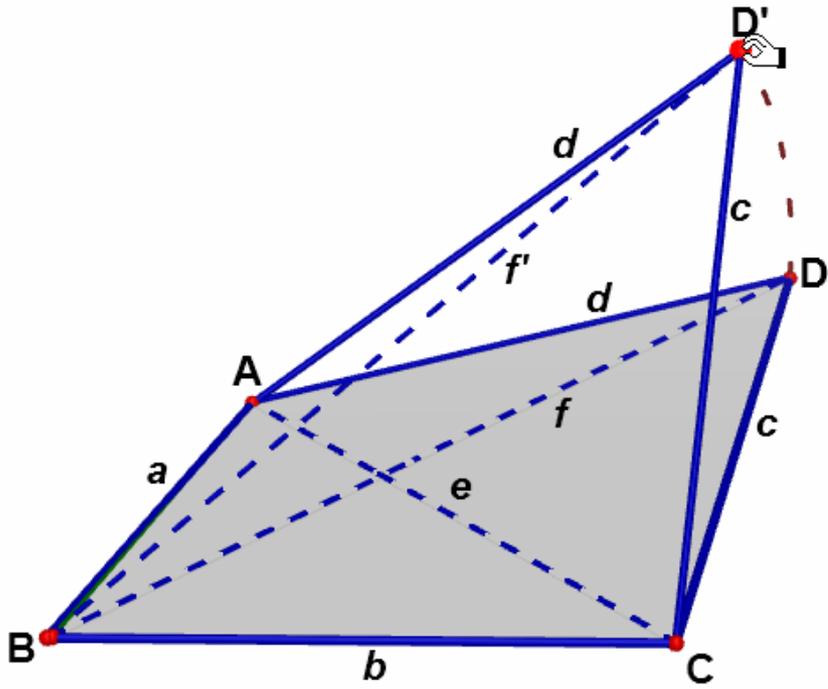
# Vom ebenen zum räumlichen Viereck (RV)

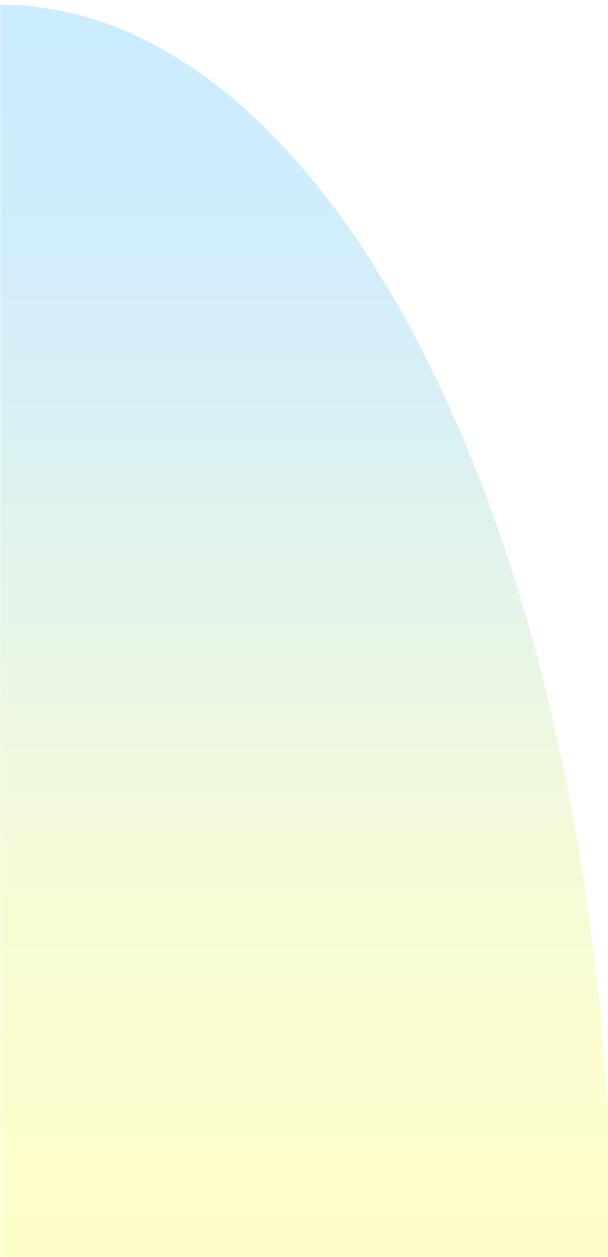
1. Begriffsbildung
2. Einige elementare Aussagen
3. Klassifikation einfacher RV
4. Das Inkugelviereck
5. Das Ankugelviereck
6. Das 8-Tangentialkugelviereck
7. RV-Klassifikation nach  
Berührungskugel-Eigenschaft
8. Schlussbemerkungen



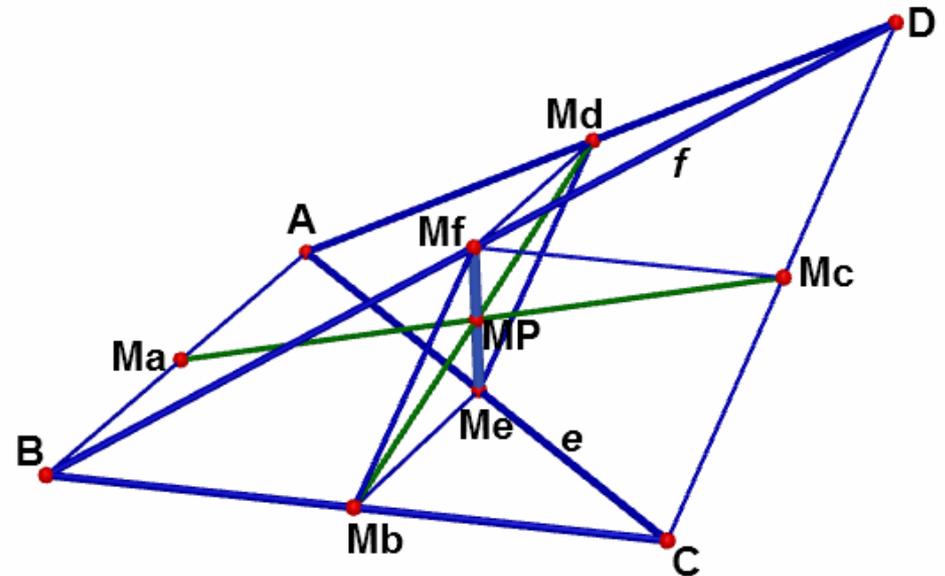
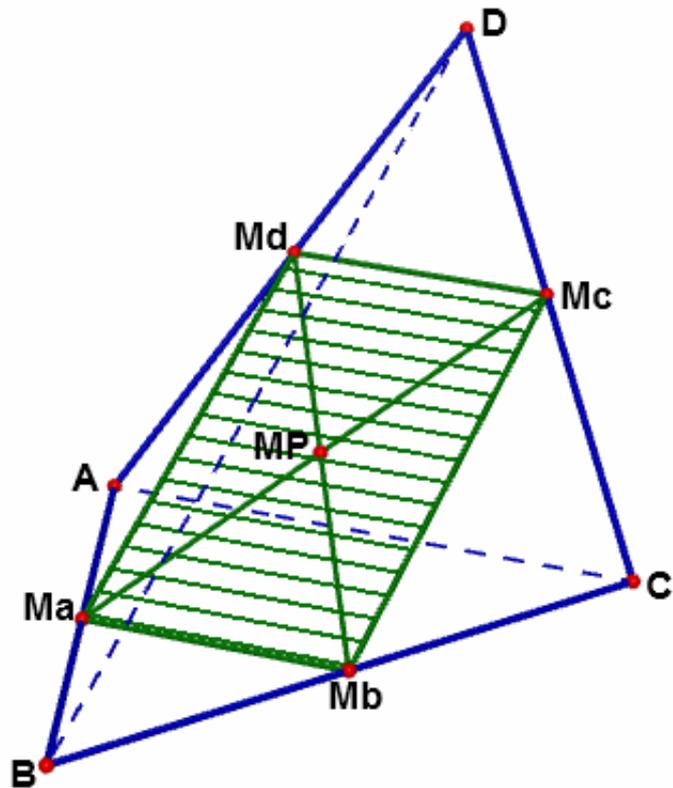
# Das räumliche Viereck

## 1. Begriffsbildung

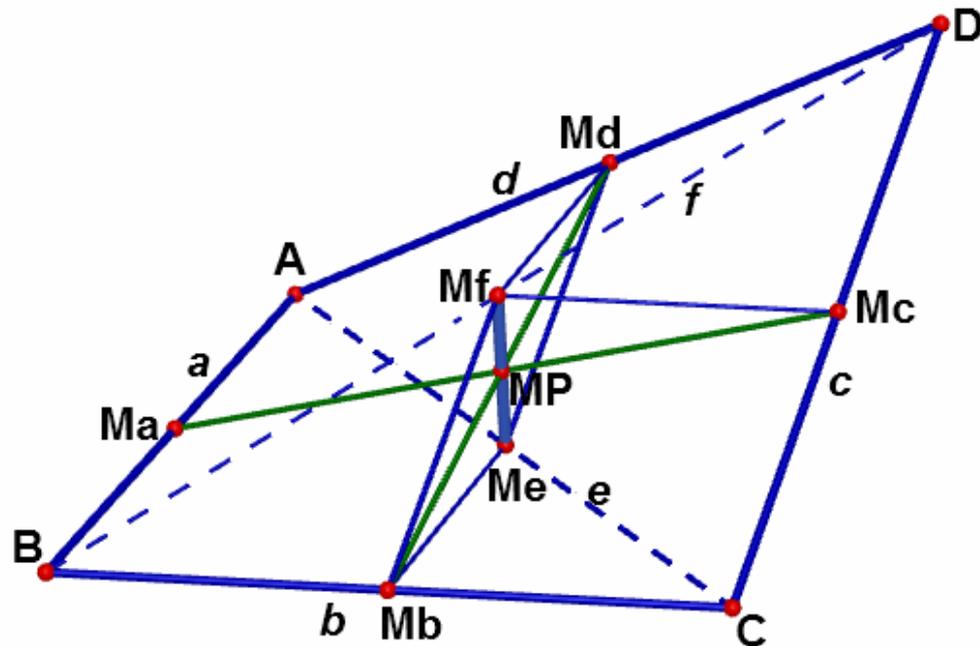




**Das räumliche Viereck**  
**2. Einige elementare Aussagen**

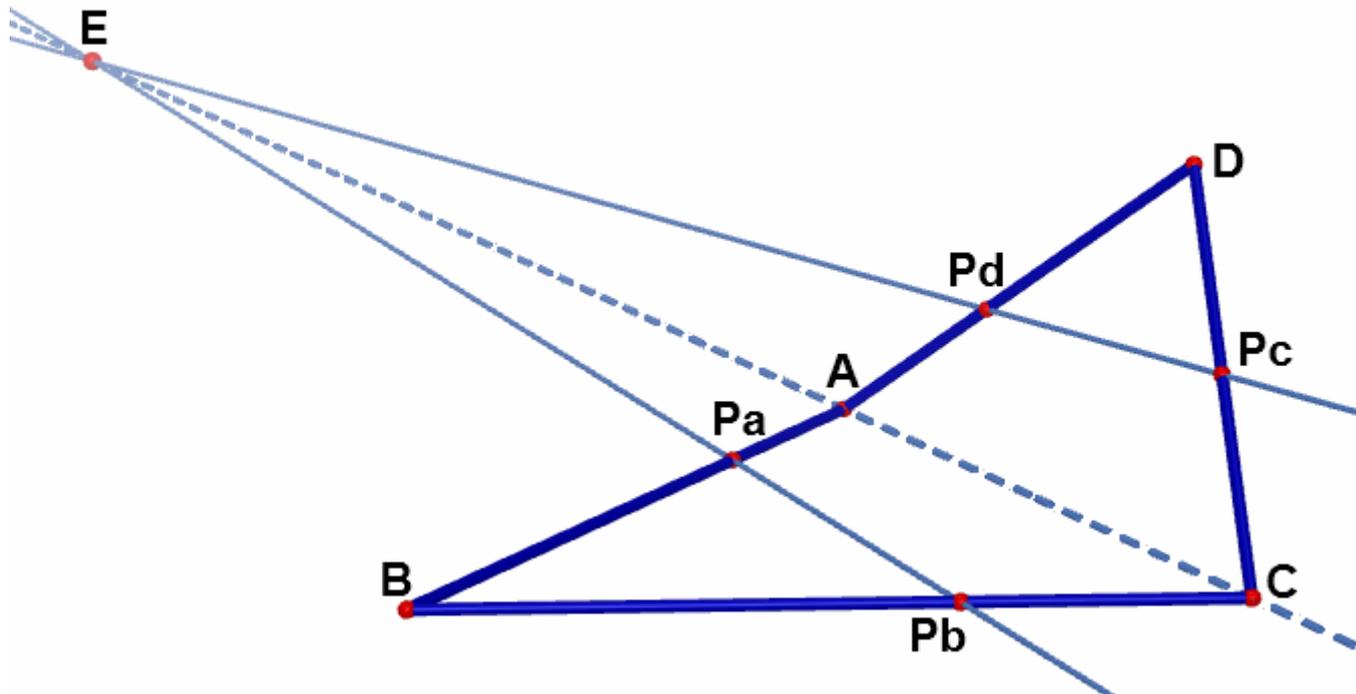


(1) Das Seitenmitten-Viereck eines räumlichen Vierecks ist ein Parallelogramm und deshalb halbieren die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten des Parallelogramms einander im Mittelpunkt des Parallelogramms (Satz von Varignon). Der Mittelpunkt des Seitenmitten-Parallelogramms eines räumlichen Vierecks halbiert die Verbindungsstrecke seiner Diagonalmittelpunkte.



(2) Für ein räumliches Viereck ABCD gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen ist gleich der doppelten Summe aus den Quadraten der Längen seiner Mittellinien:  $e^2 + f^2 = 2(|M_aM_c|^2 + |M_bM_d|^2)$

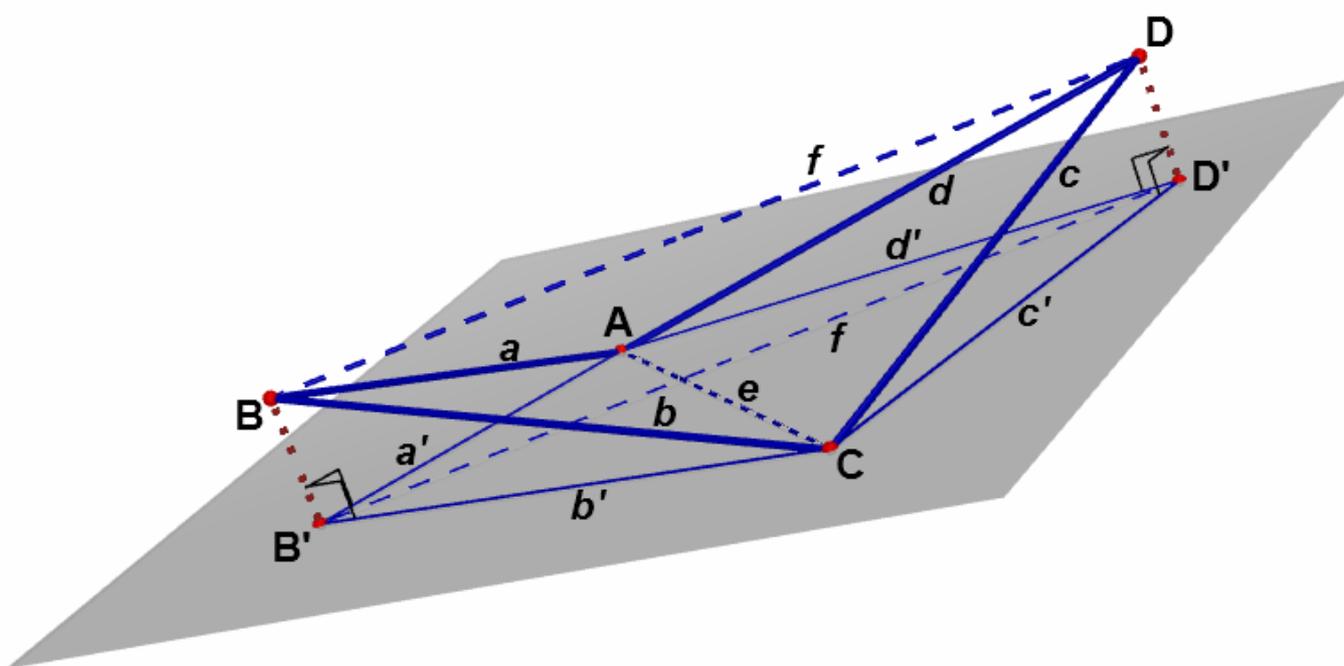
(3) Für ein räumliches Viereck ABCD gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Seiten ist gleich der Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen vermindert um das Vierfache des Quadrats der Distanz seiner Diagonalmitten:  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 - 4|M_aM_c|^2$



## Satz des Menelaos

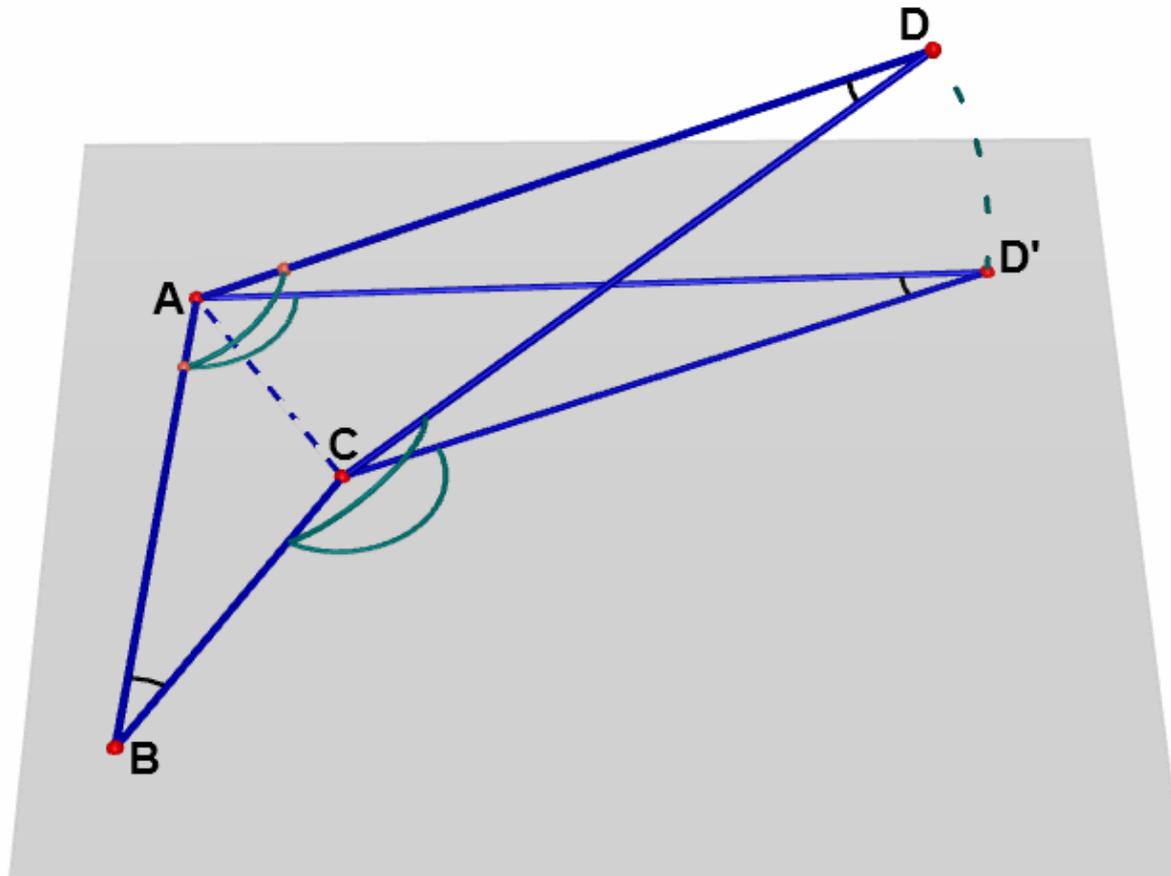
(4) Vier Punkte  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  und  $P_d$  auf den Seiten bzw. Seitengeraden eines räumlichen Vierecks ABCD mit  $P_a$  auf AB,  $P_b$  auf BC,  $P_c$  auf CD und  $P_d$  auf DA liegen in einer Ebene genau dann, wenn gilt:

$$\frac{|AP_a| \cdot |BP_b| \cdot |CP_c| \cdot |DP_d|}{|P_aB| \cdot |P_bC| \cdot |P_cD| \cdot |P_dA|} = 1.$$

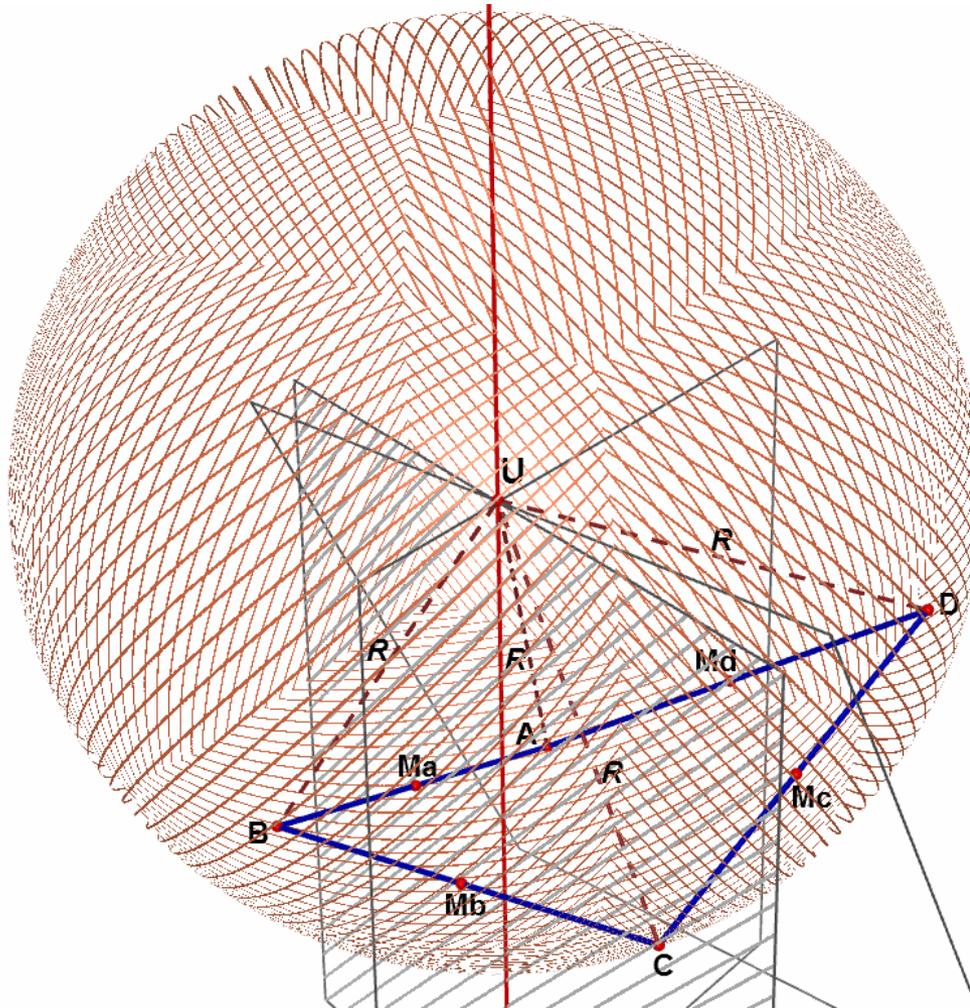


## Ungleichung von Ptolemäus

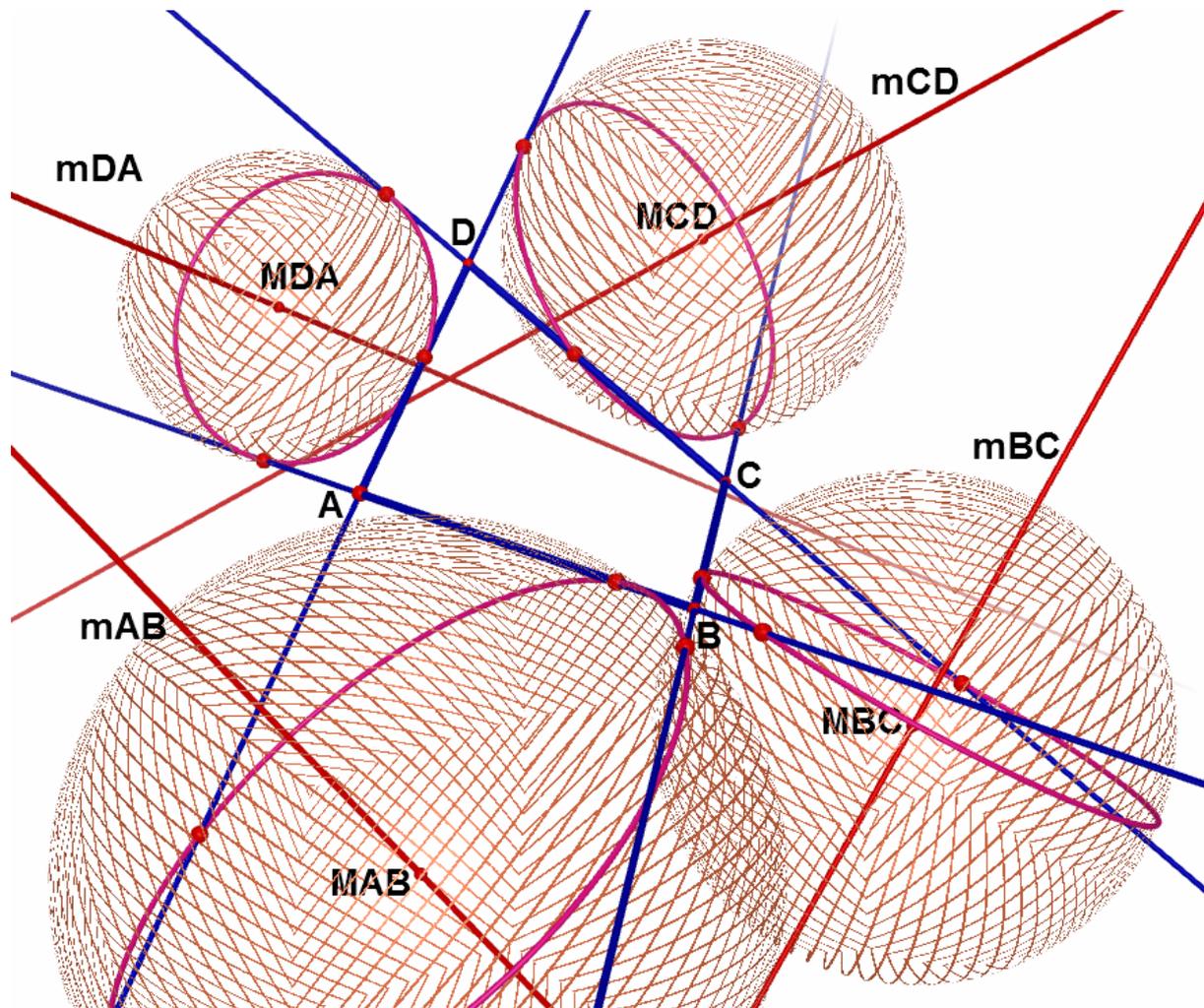
(5) Für ein räumliches Vierecks  $ABCD$  gilt: Die Summe der Produkte aus je zwei Gegenseiten ist stets kleiner als das Produkt seiner Diagonalen:  $ef < ac + bd$



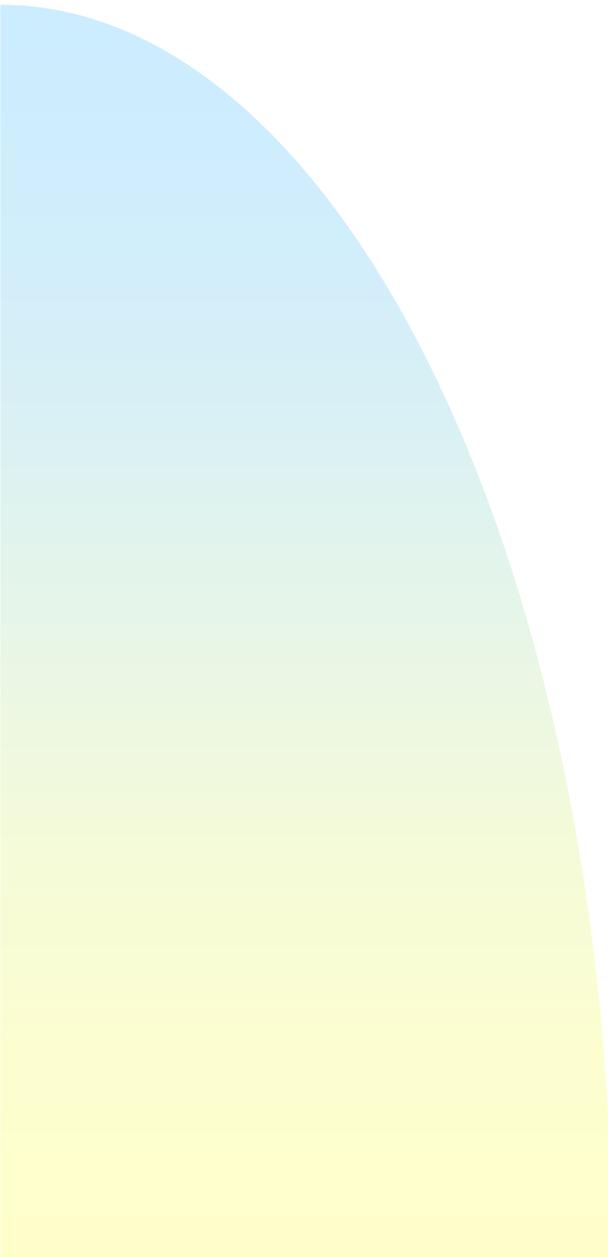
(6) Die Summe der Innenwinkel in einem räumlichen Viereck ist kleiner als vier rechte Winkel.



**(7) Jedes räumliche Viereck besitzt genau eine Umkugel.**

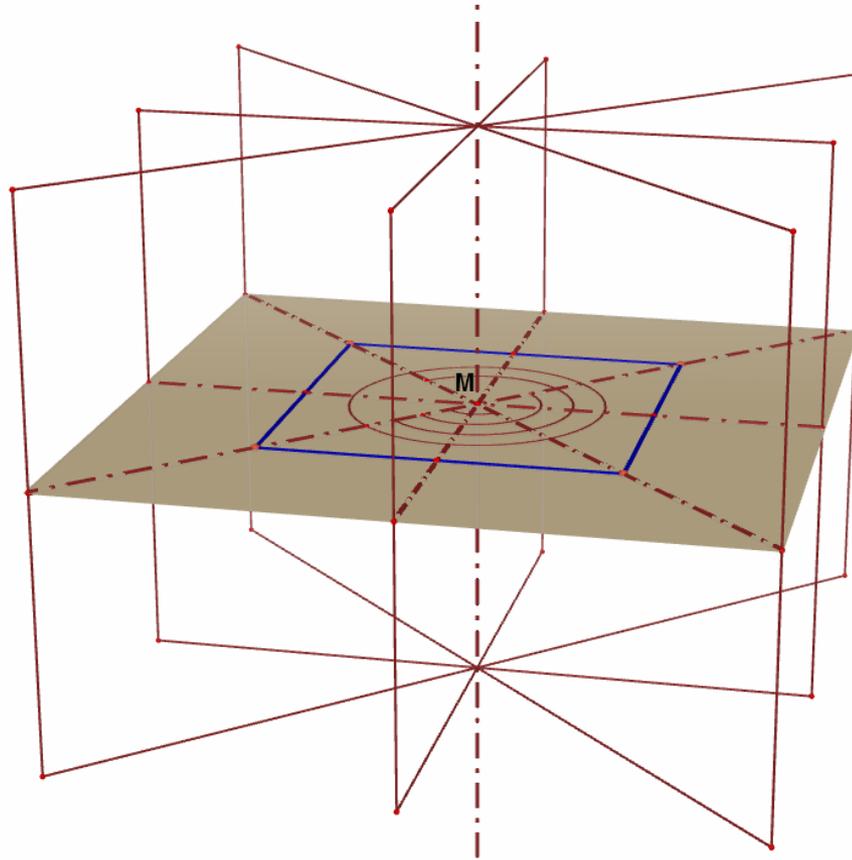


(8) Jedes räumliche Viereck besitzt für jede seiner Seiten unendlich viele Ankugeln.

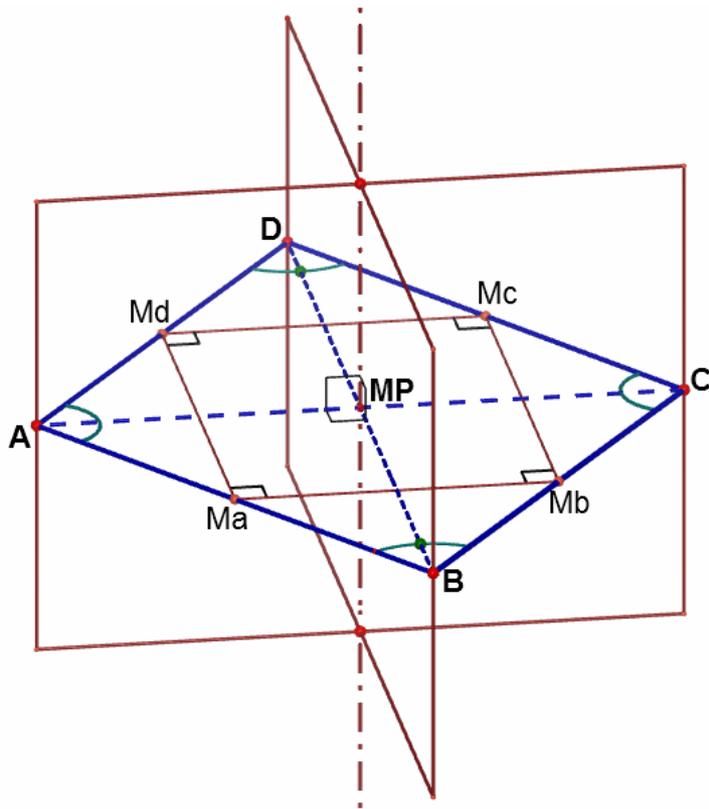


**Das räumliche Viereck**  
**3. Klassifikation einfacher RV**

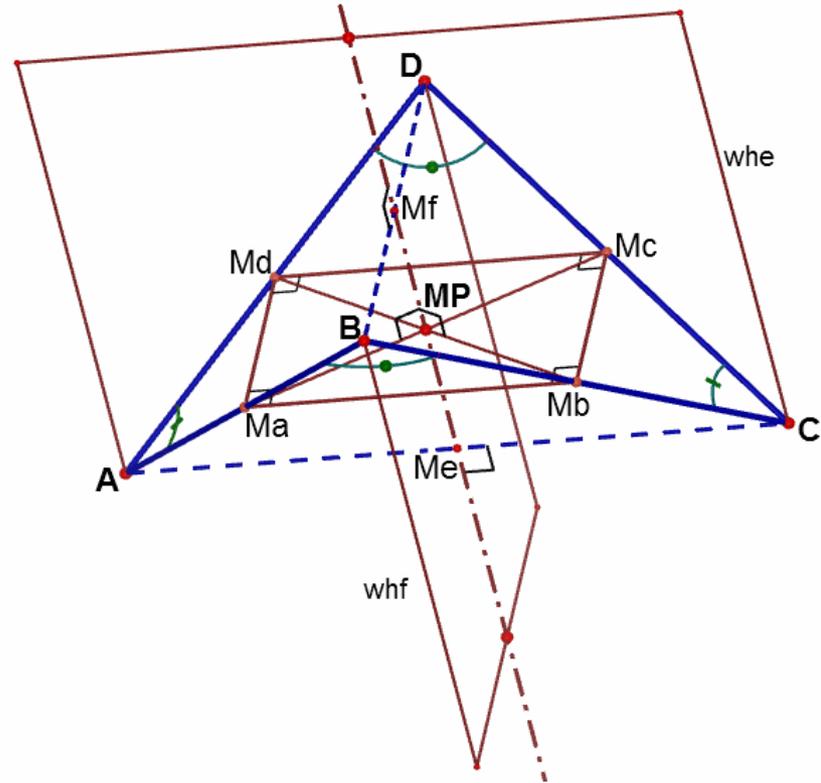
# Symmetrien des Quadrats im Raum



Quadrat in der Ebene	Quadrat im Raum
4 2-zählige Symmetrie-Achsen	4 2-zählige Symmetrie-Achsen 4 Symmetrie-Ebenen
4-zähliges Symmetrie-Zentrum (90°-, 180°-, 270°- 360°-Drehung um M)	4-zählige Symmetrie-Achse



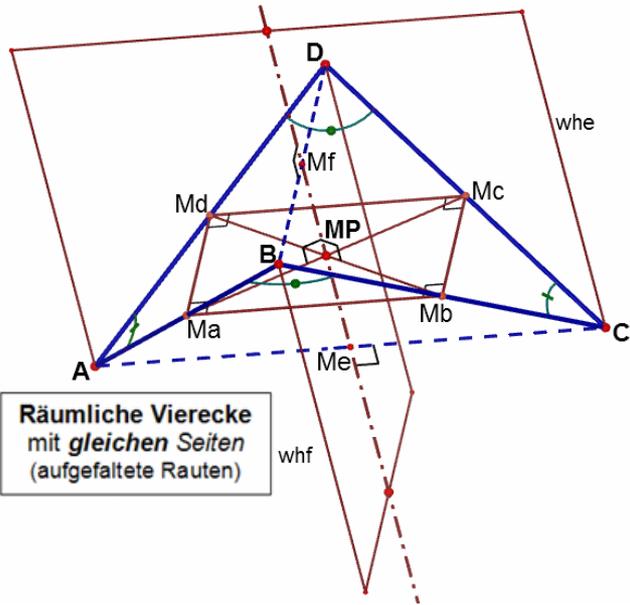
Symmetrien der ebenen Raute  
im Raum



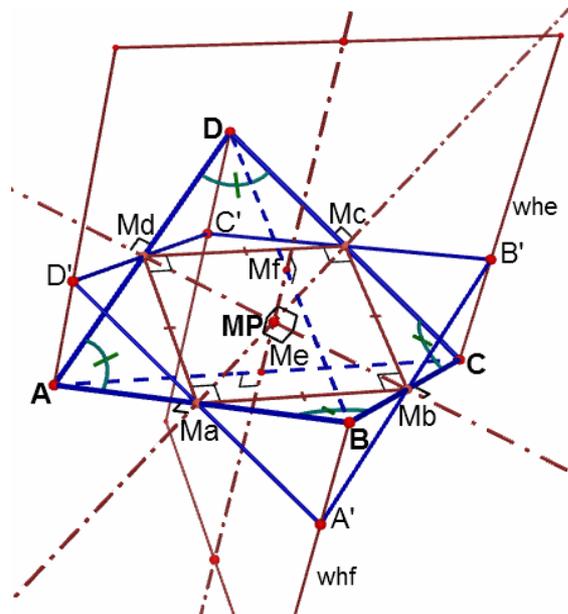
Symmetrien der verräumlichten  
Raute



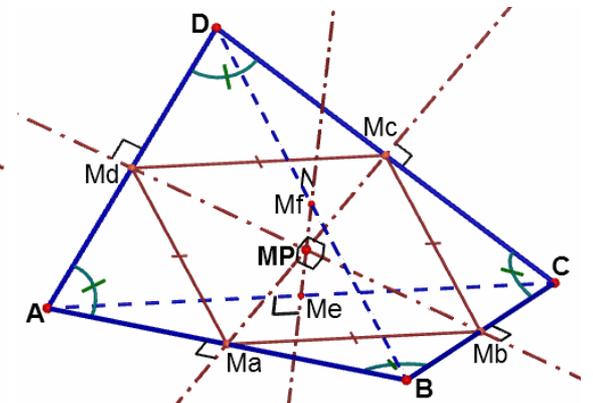
AUFFALTEN



Räumliche Vierecke mit **gleichen Seiten** (aufgefaltete Rauten)

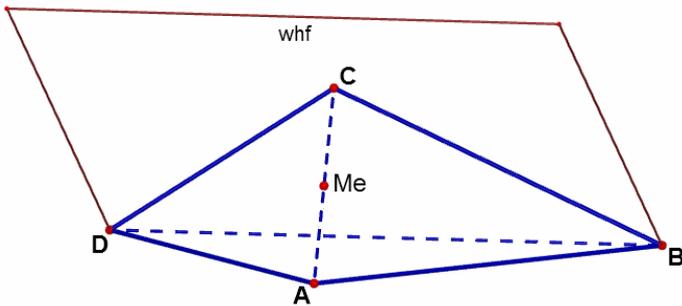


Räumliche Vierecke mit **gleichen Seiten** und **gleichen Winkeln** (Sonderfall aufgefalteter Rauten)

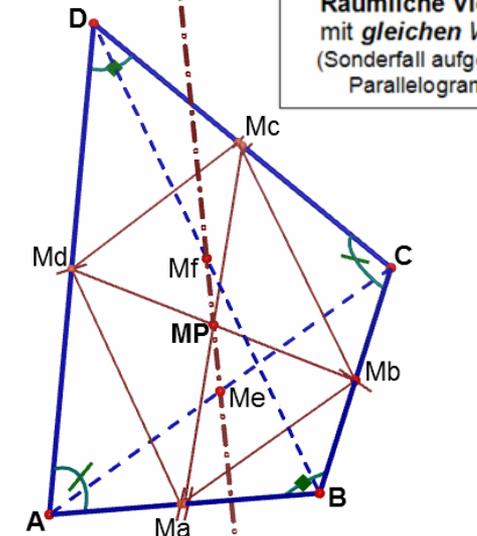


Räumliche Vierecke mit **gleichen Winkeln** (Sonderfall aufgefalteter Parallelogramme)

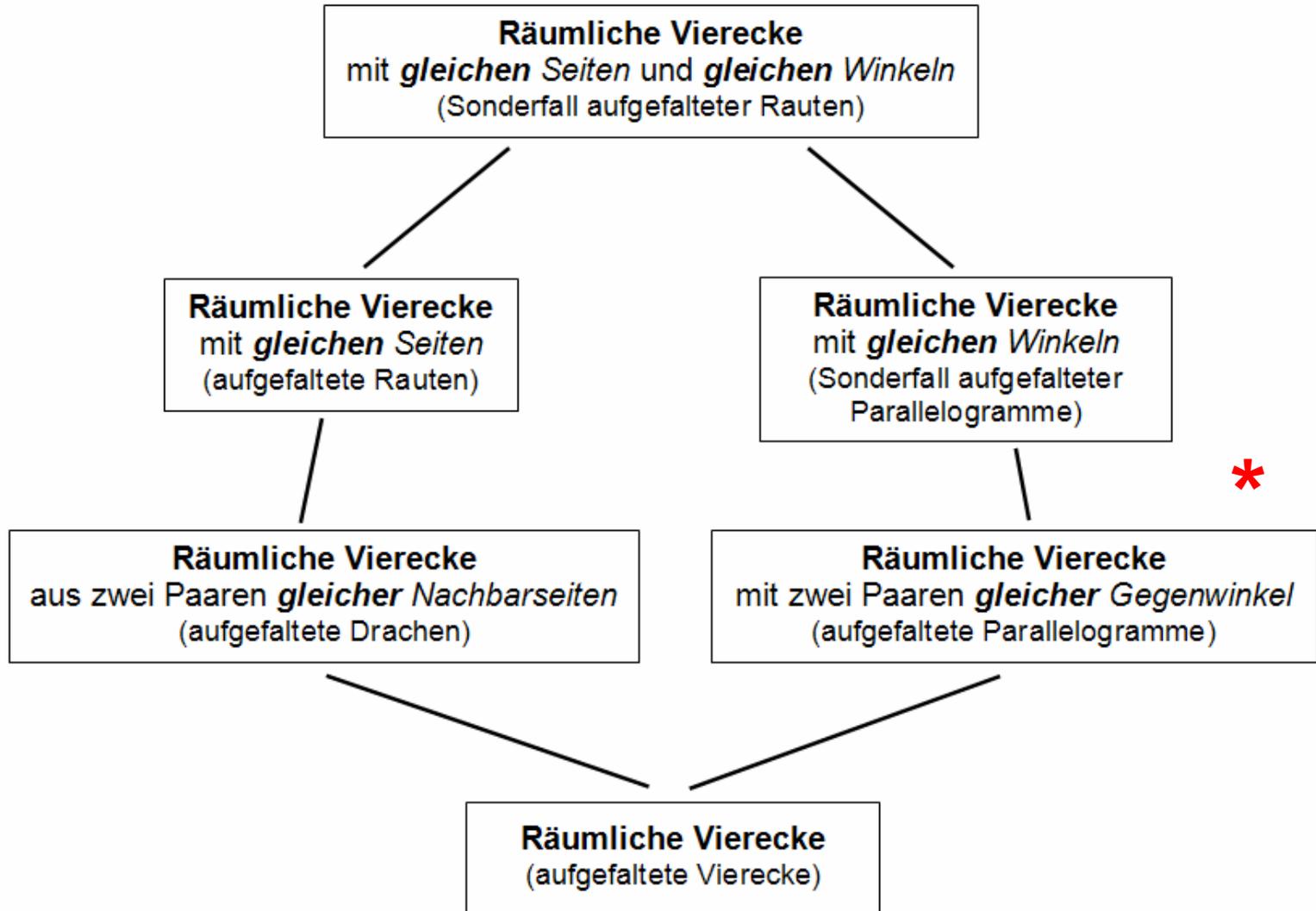
## Physische Modelle aus Trinkhalmen und Pfeifenreinigern



Räumliche Vierecke aus zwei Paaren **gleicher Nachbarseiten** (aufgefaltete Drachen)



Räumliche Vierecke mit zwei Paaren **gleicher Gegenwinkel** (aufgefaltete Parallelogramme)



## Haus der symmetrischen räumlichen Vierecke



In der Ebene sind jeweils Gegenseiten-Gleichheit und Gegenwinkel-Gleichheit das Parallelogramm kennzeichnende Eigenschaften. Gilt das auch für das verräumlichte Parallelogramm?

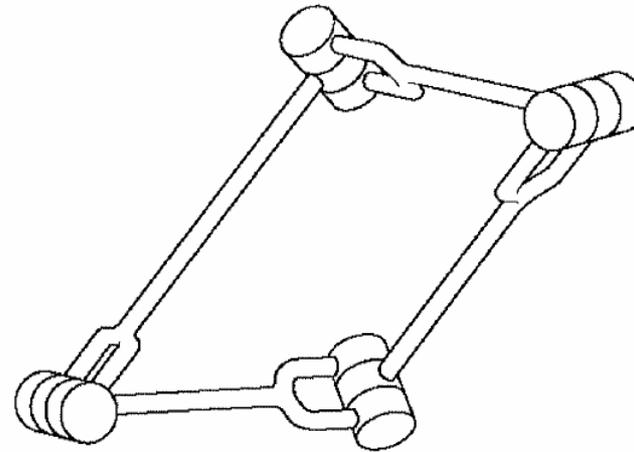
Es ist bei Benutzung des 1. Kongruenzsatzes unmittelbar einzusehen, dass aus der Gleichheit der Gegenseiten eines räumlichen Vierecks die Gleichheit seiner Gegenwinkel folgt.

Im Gegensatz zur Ebene ist aber der Beweis, dass sich aus der Gleichheit der Gegenwinkel eines räumlichen Vierecks die Gleichheit seiner Gegenseiten ergibt, wesentlich schwieriger und umfanglicher.

Thébault, V. (1953): On the Skew Quadrilateral.  
In: The American Mathematical Monthly, Vol. 60,  
No. 2, p. 102-105

**Räumliche Vierecke**  
mit zwei Paaren *gleicher* Gegenwinkel  
(aufgefaltete Parallelogramme)

## Ein Gelenkviereck: Das Bennett-Isogramm



### **Kinematische Geometrie des Bennett-Isogramms**

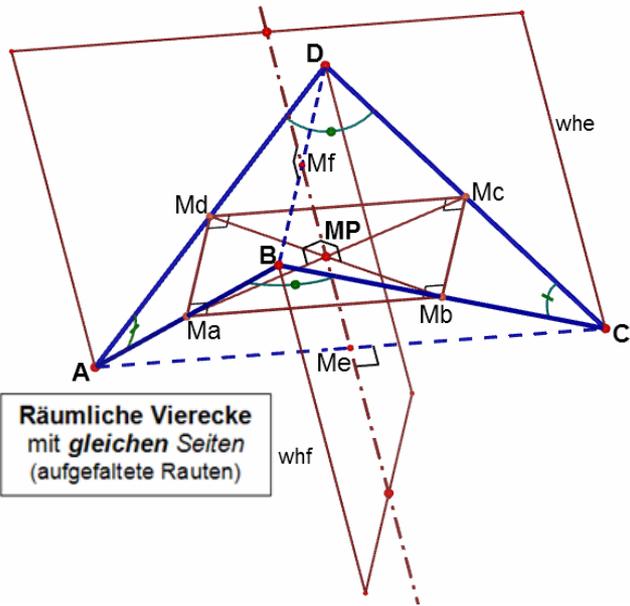
Hausarbeit aus Darstellender Geometrie

Peter Schreiber

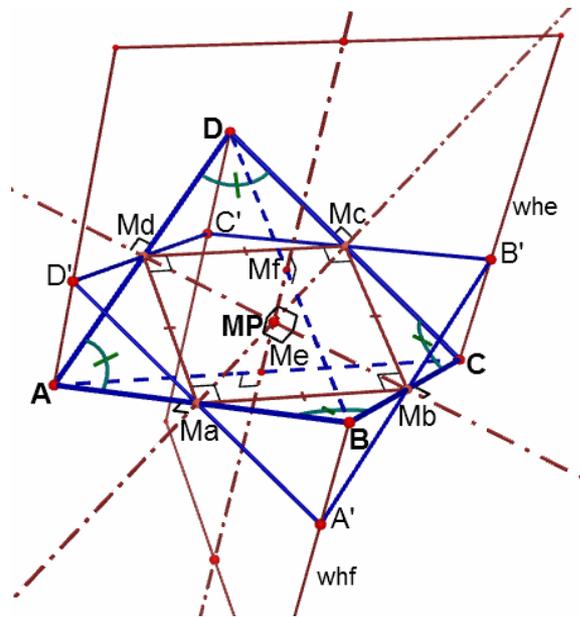
eingereicht bei

O.Univ.-Prof.Mag.rer.nat.Dr.techn. Hans Vogler  
Institut für Geometrie, Technische Universität Graz

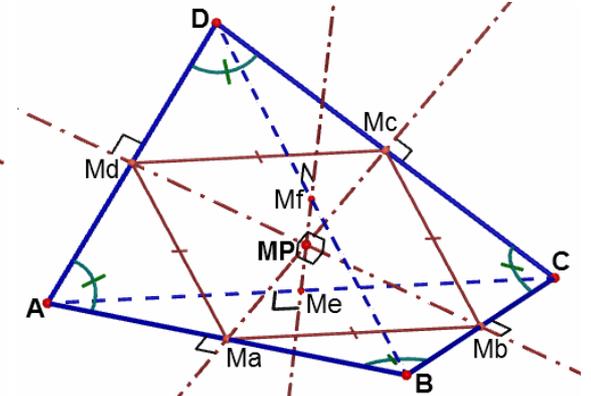
Graz, im Jänner 2003



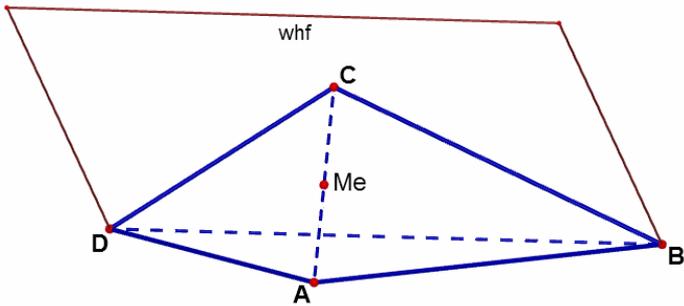
Räumliche Vierecke  
mit **gleichen** Seiten  
(aufgefaltete Rauten)



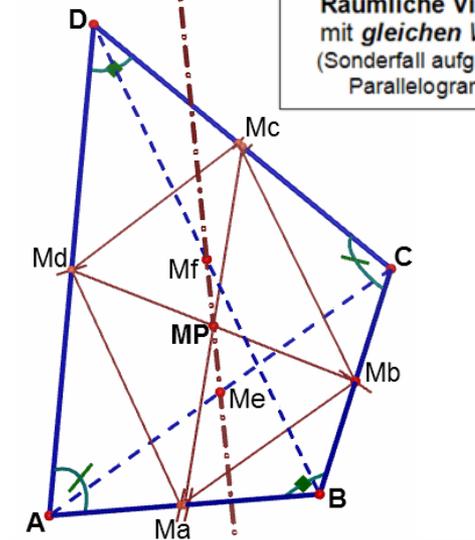
Räumliche Vierecke  
mit **gleichen** Seiten und **gleichen** Winkeln  
(Sonderfall aufgefalteter Rauten)



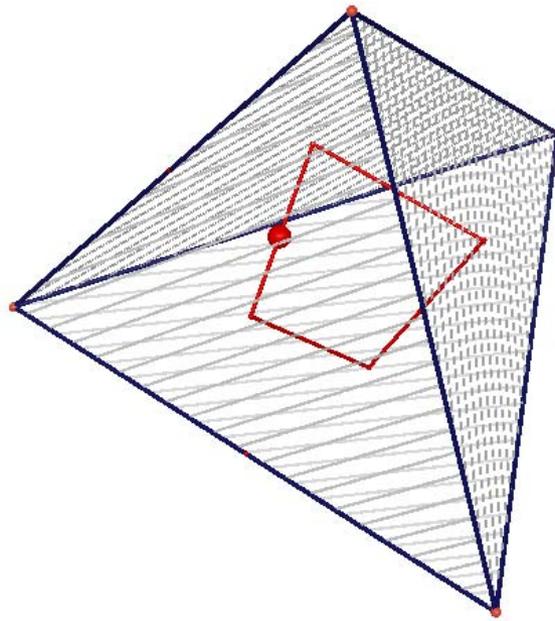
Räumliche Vierecke  
mit **gleichen** Winkeln  
(Sonderfall aufgefalteter  
Parallelogramme)



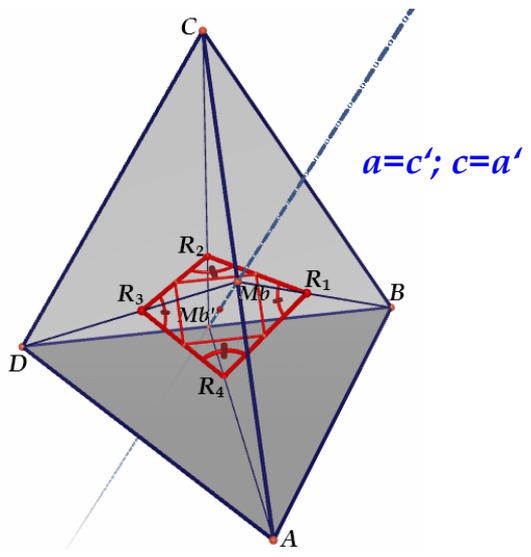
Räumliche Vierecke  
aus zwei Paaren **gleicher** Nachbarseiten  
(aufgefaltete Drachen)



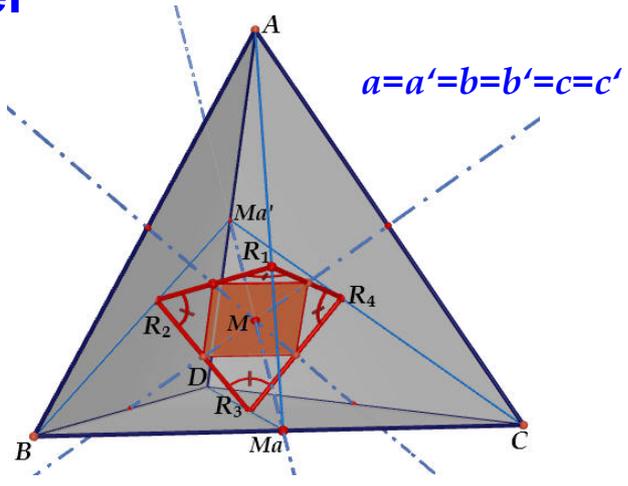
Räumliche Vierecke  
mit zwei Paaren **gleicher** Gegenwinkel  
(aufgefaltete Parallelogramme)



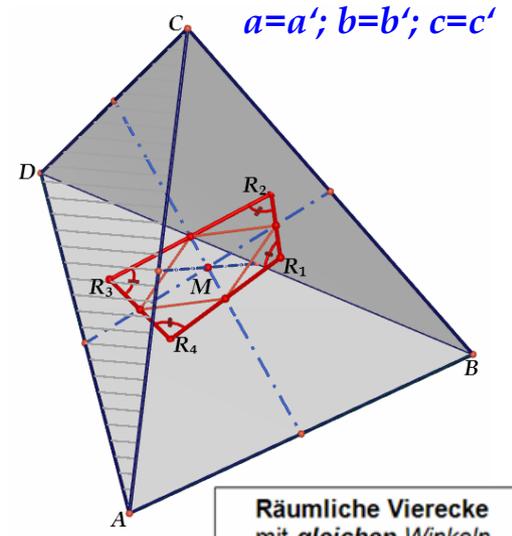
# Billardbahnen im Tetraeder



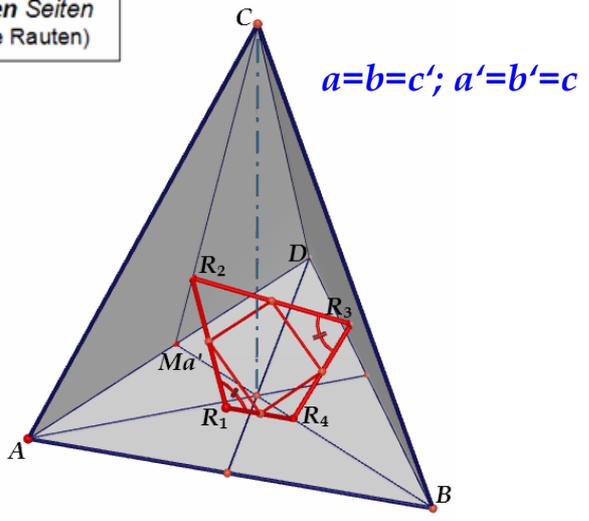
Räumliche Vierecke mit **gleichen Seiten** (aufgefaltete Rauten)



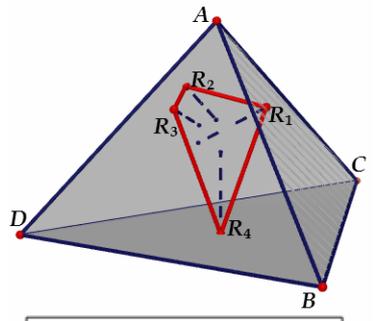
Räumliche Vierecke mit **gleichen Seiten** und **gleichen Winkeln** (Sonderfall aufgefalteter Rauten)



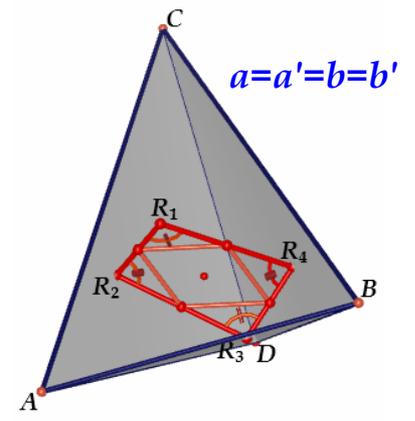
Räumliche Vierecke mit **gleichen Winkeln** (Sonderfall aufgefalteter Parallelogramme)



Räumliche Vierecke aus zwei Paaren **gleicher Nachbarseiten** (aufgefaltete Drachen)



Räumliche Vierecke (aufgefaltete Vierecke)

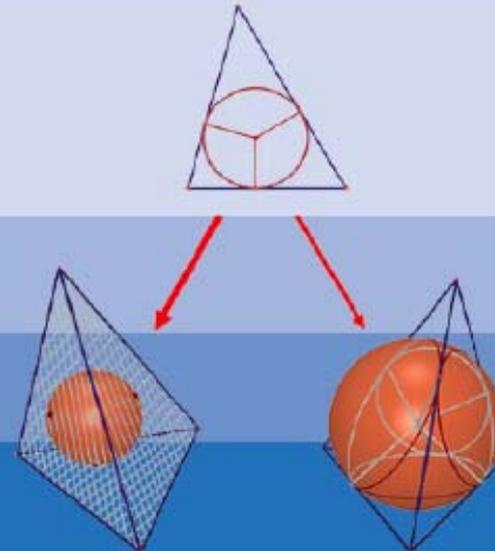


Räumliche Vierecke mit zwei Paaren **gleicher Gegenwinkel** (aufgefaltete Parallelogramme)

Heinz Schumann

# Elementare Tetraedergeometrie

Eine Einführung in die Raumgeometrie

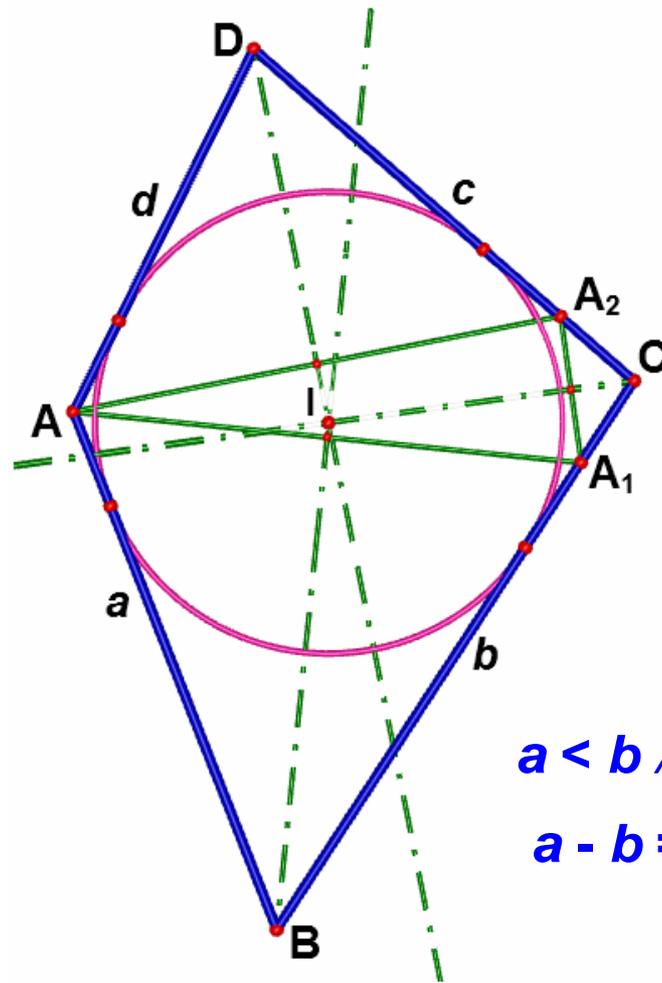
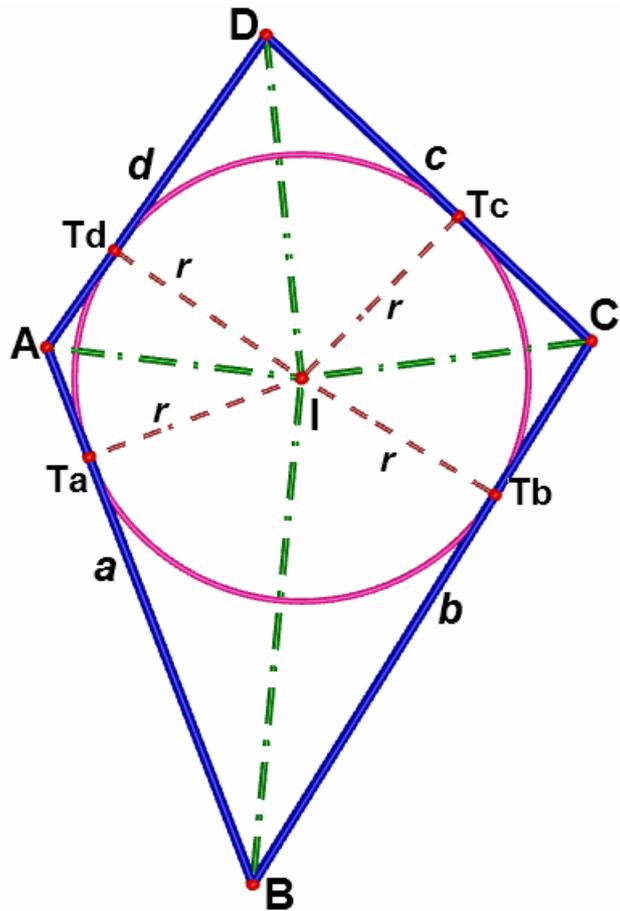


Franzbecker

2011



**Das räumliche Viereck**  
**4. Das Inkugelviereck**

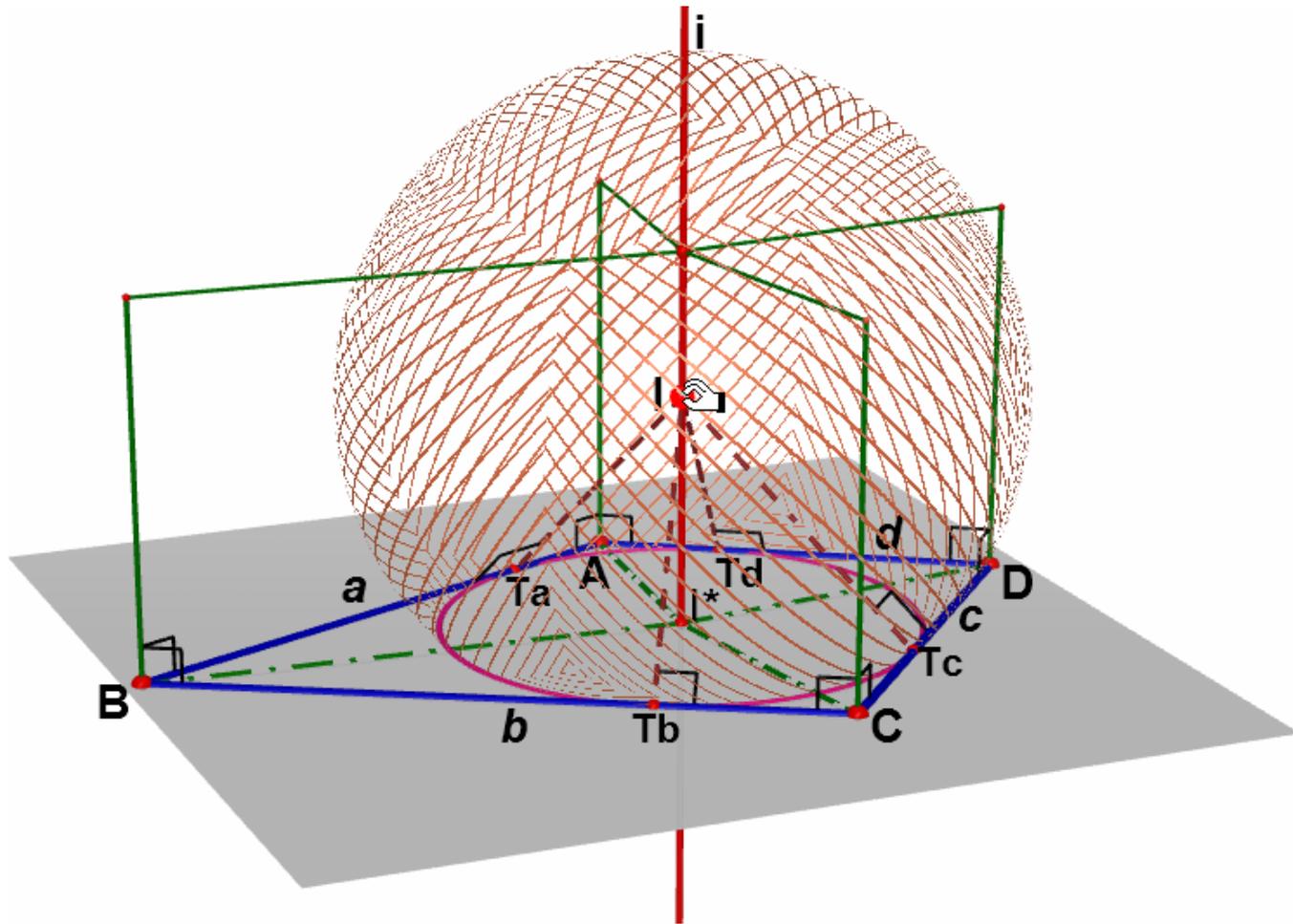


$$a < b \wedge d < c$$

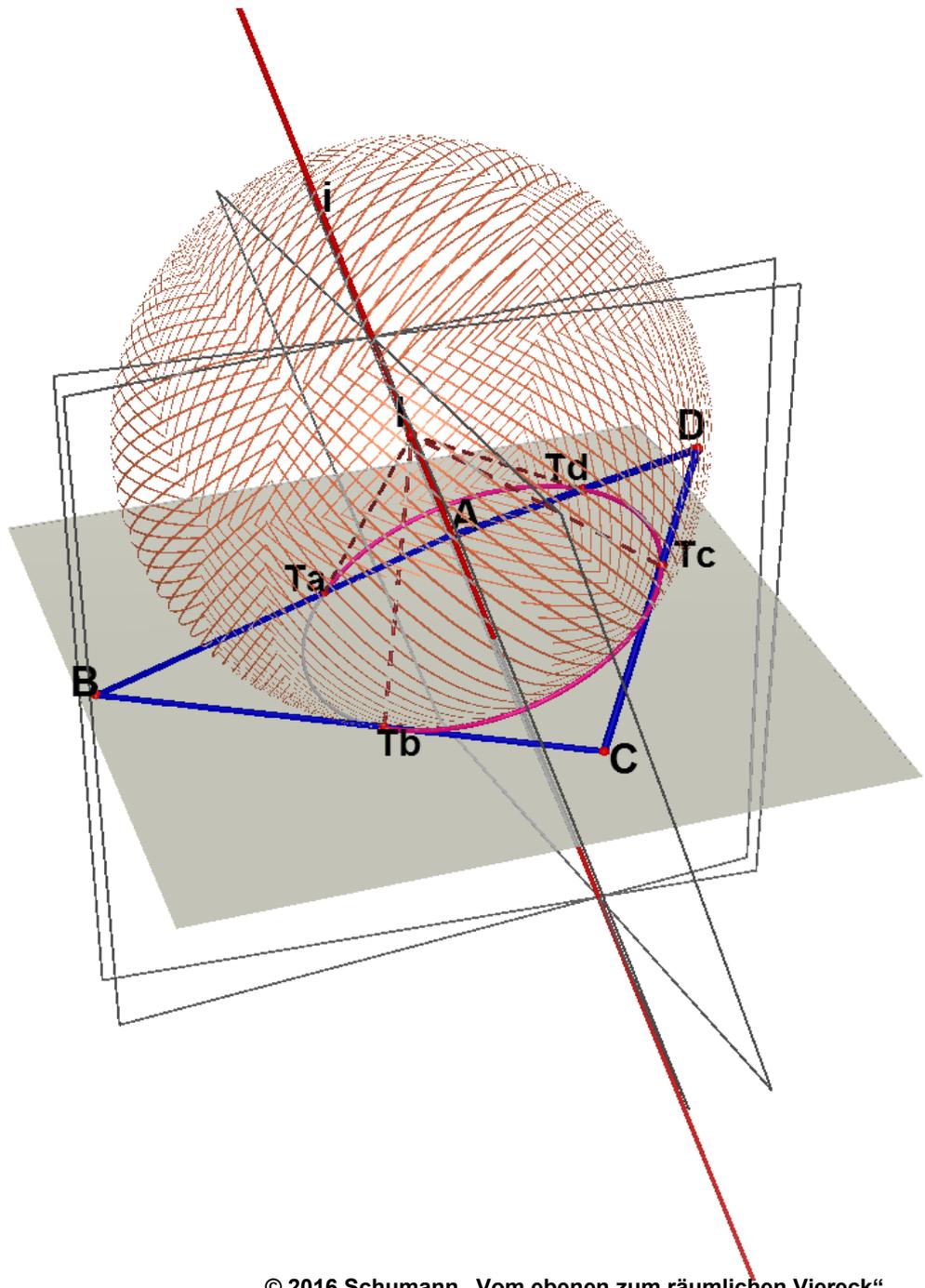
$$a - b = c - d$$

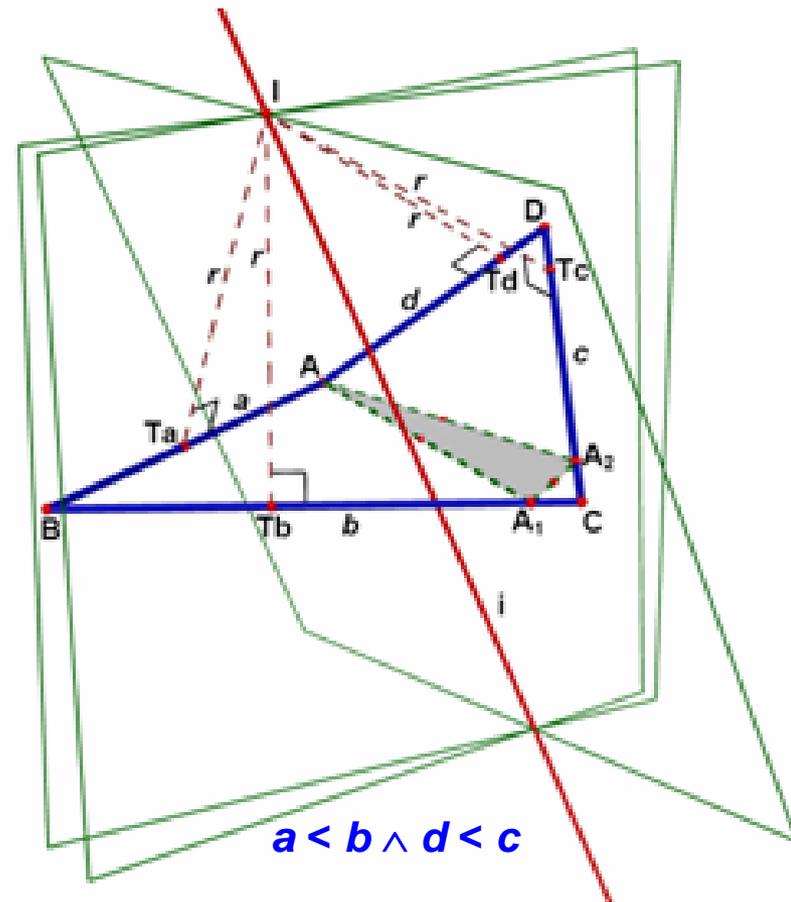
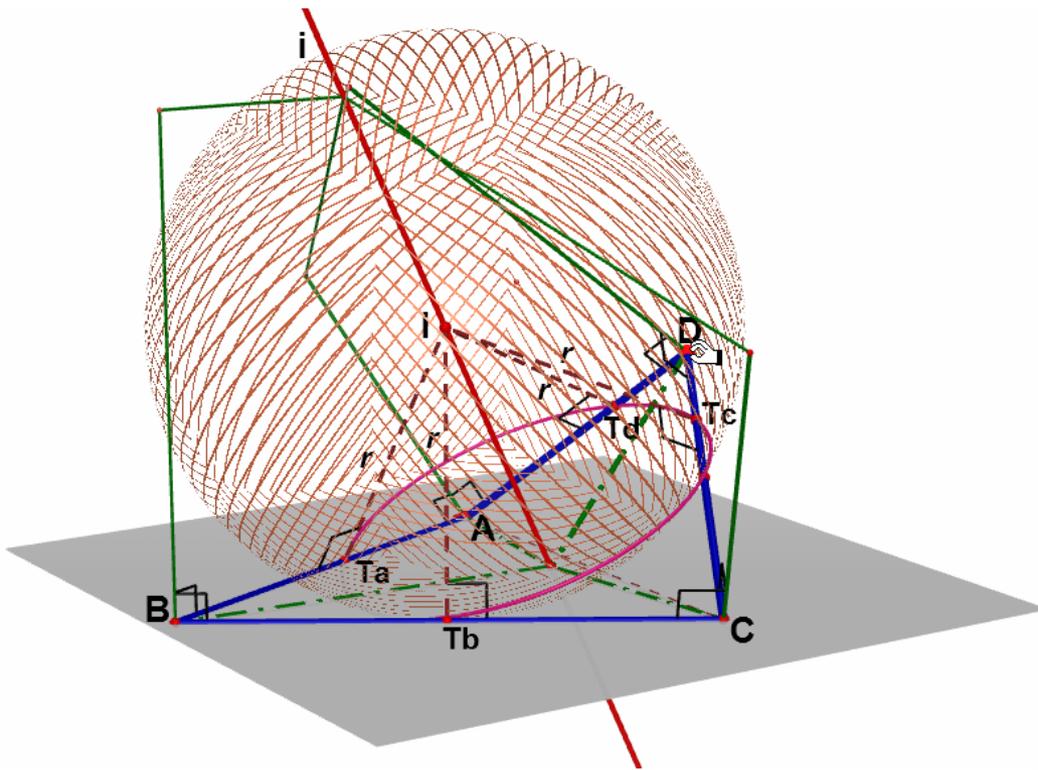
## Kreis-Viereck (Tangentenviereck)

(9) Ein konvexes ebenes Vierecks ABCD ist ein Inkreisviereck genau dann, wenn gilt  $a + c = b + d$ .



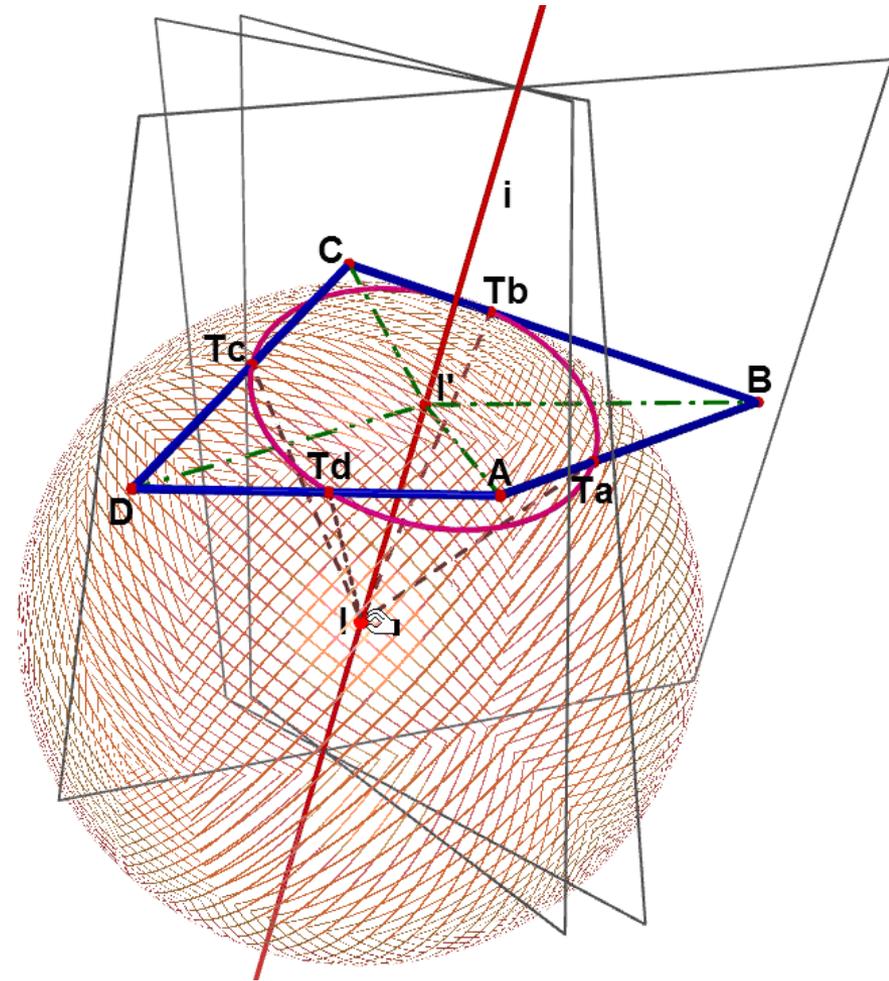
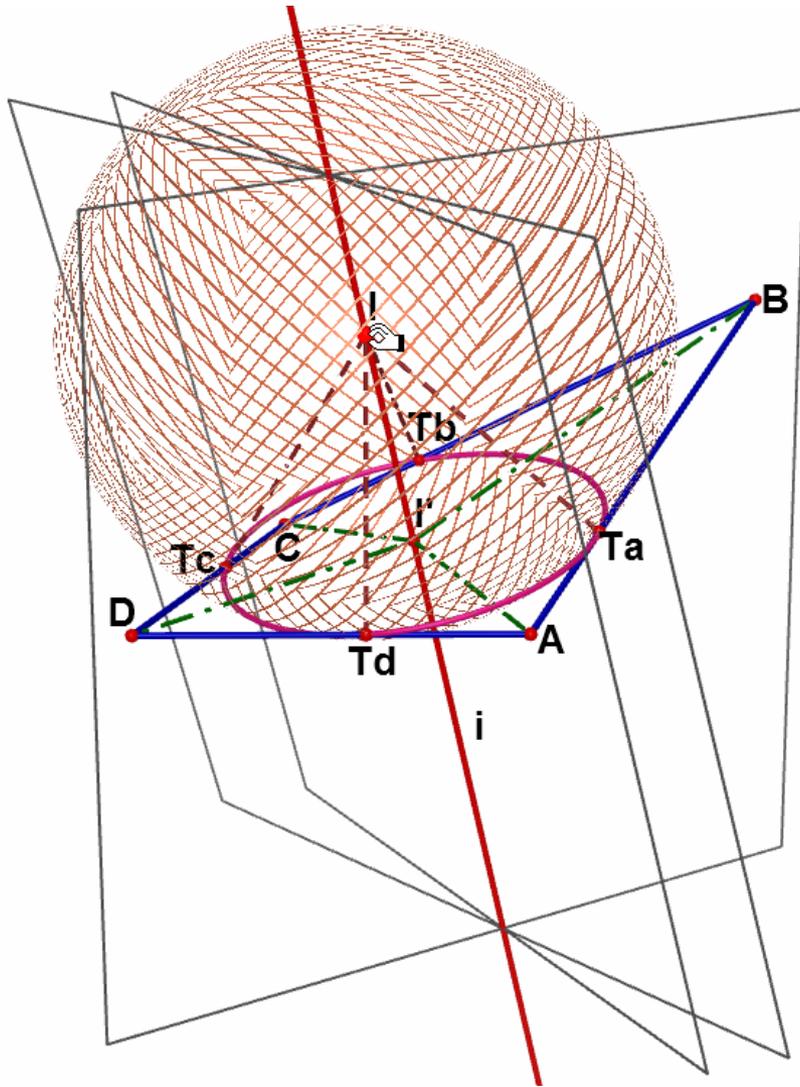
## Inkreisviereck im Raum



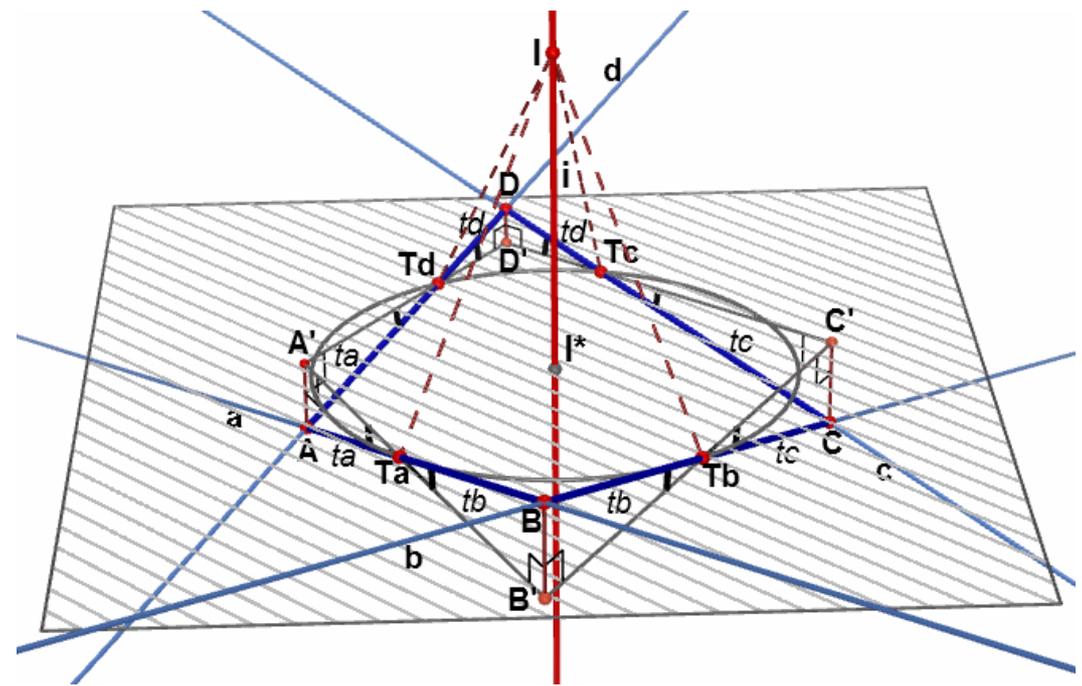
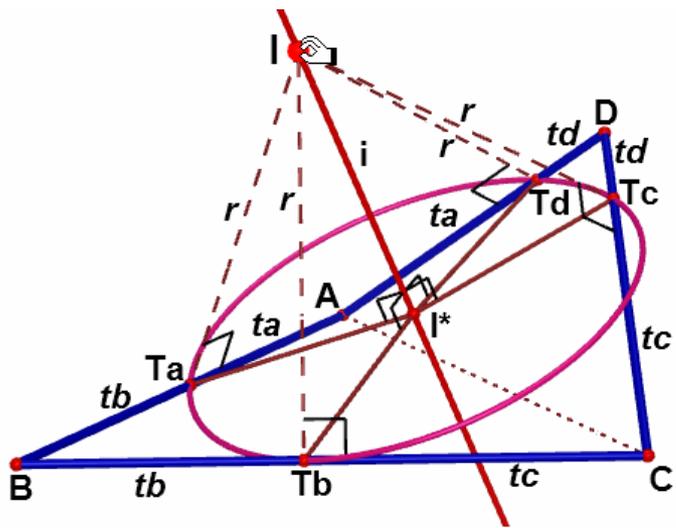


## Inkugel-Viereck

(10) Die winkelhalbierenden Ebenen eines räumlichen Vierecks ABCD mit der Eigenschaft  $a + c = b + d$  schneiden einander in einer Achse  $i$ , deren Punkte Mittelpunkte jener Kugeln sind, welche die Seiten bzw. Seitengeraden des Vierecks berühren.

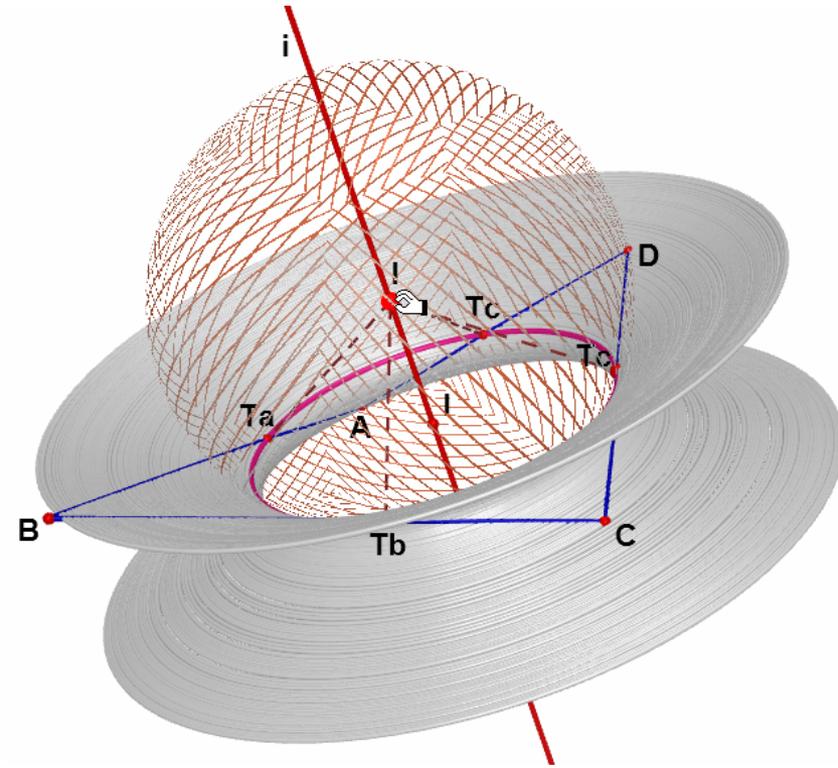
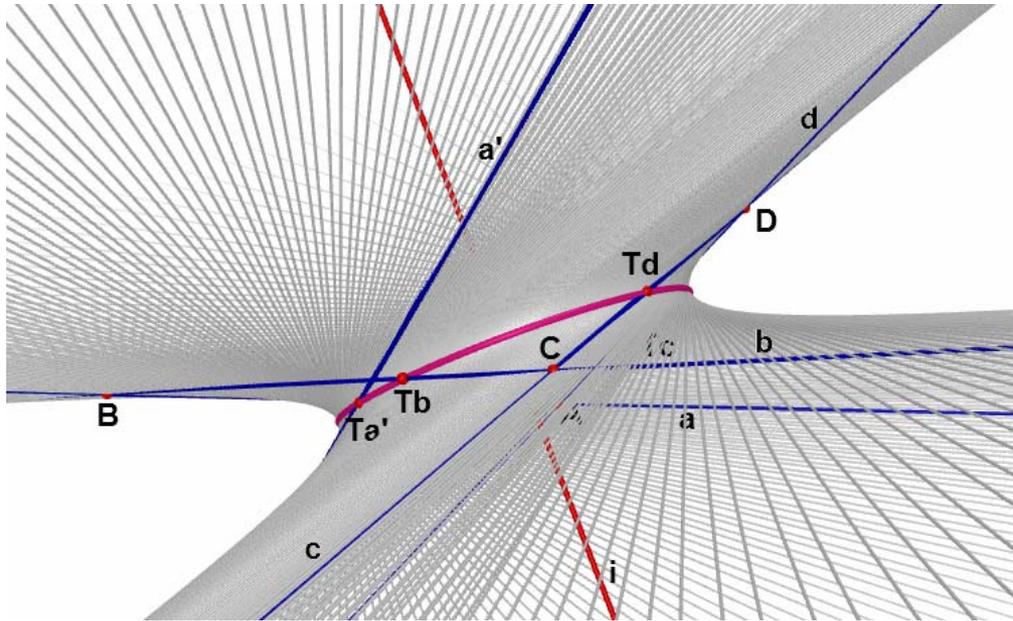


## Verräumlichte Drachenvierecke

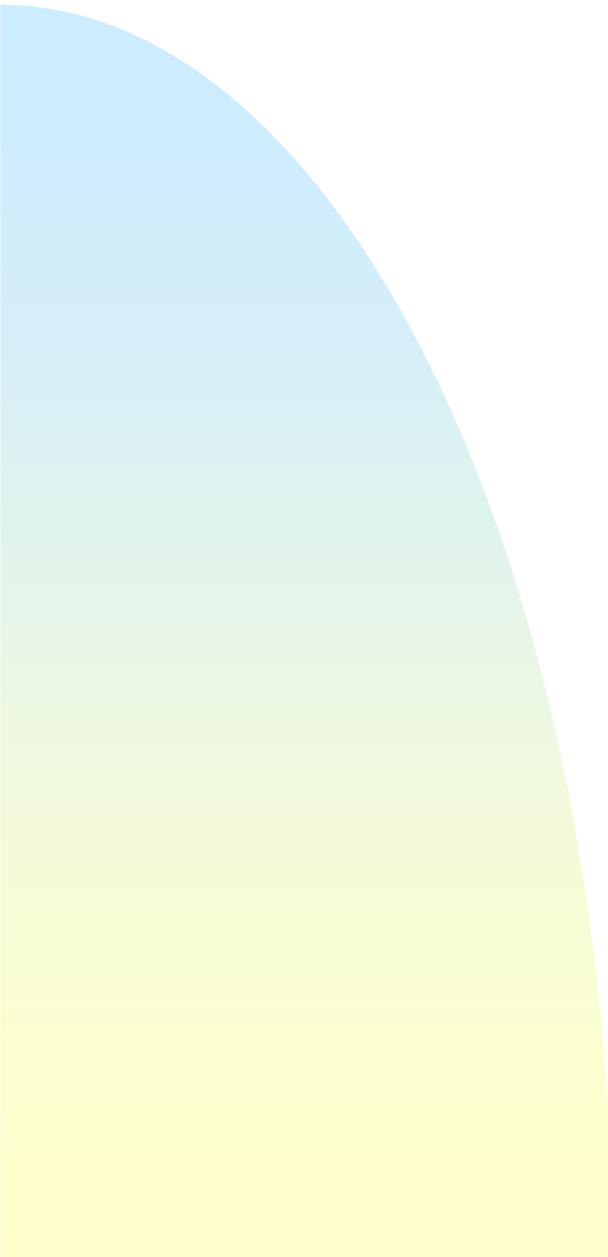


- (11) Die vier Berührungspunkte jeder dieser Inkugeln liegen in einer Ebene.
- (12) Die vier Berührungspunkte liegen auf einem Kreis in dieser Ebene.  
Die Schnittgerade der vier winkelhalbierenden Ebenen geht durch den Mittelpunkt dieses Kreises und steht senkrecht auf der Kreisebene.
- (13) Die Neigungswinkel der Seitengeraden gegen die Kreisebene sind einander gleich.

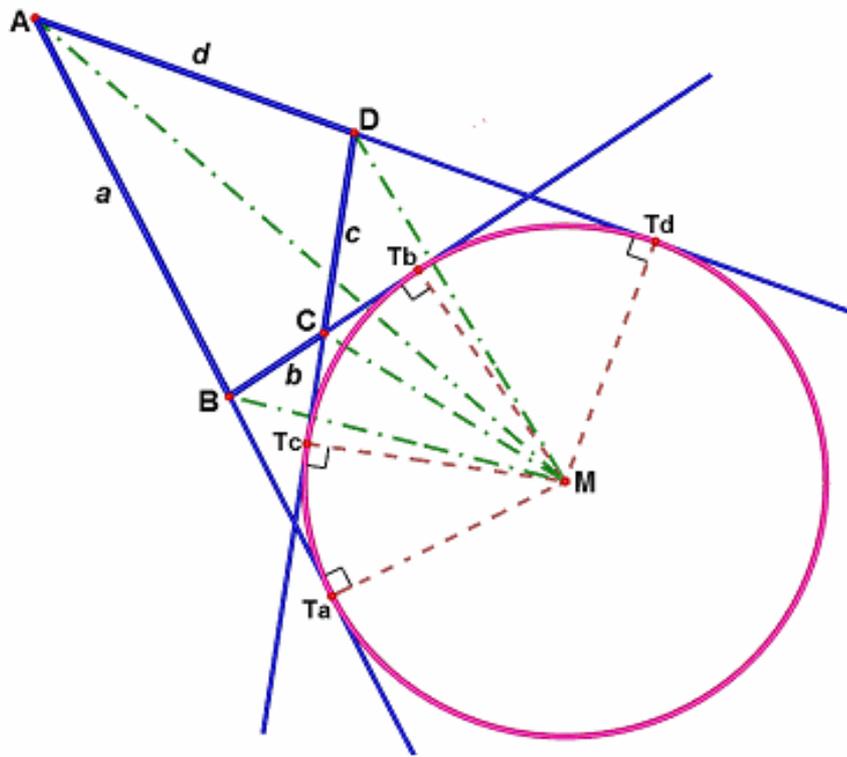
# Zusatz



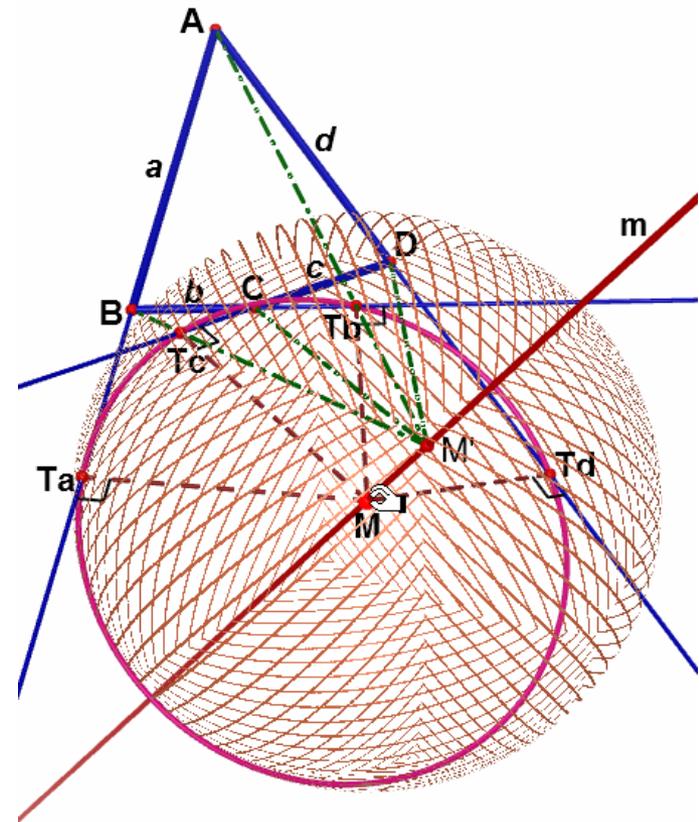
Zu jedem räumlichen Viereck ABCD mit der Eigenschaft  $a + c = b + d$  existiert genau ein Rotationshyperboloid, welches alle Seitengeraden des Vierecks enthält und tangential zu allen Berührungskugeln ist.



**Das räumliche Viereck**  
**5. Das Ankugelviereck**



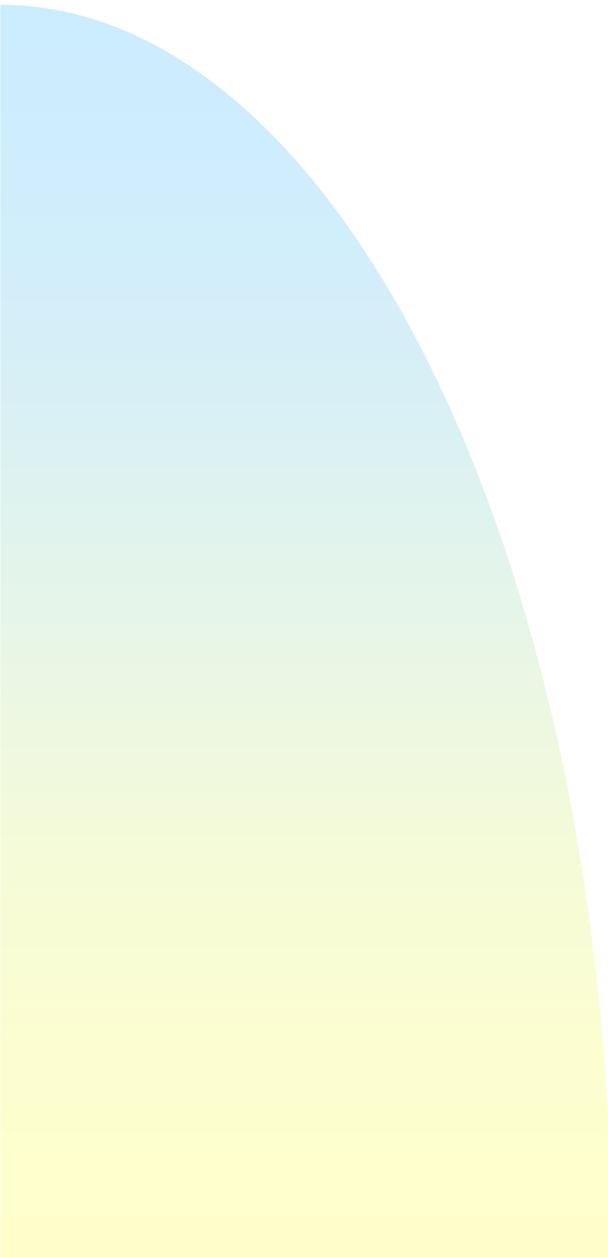
**Ankreisviereck**



**Ankugelviereck**

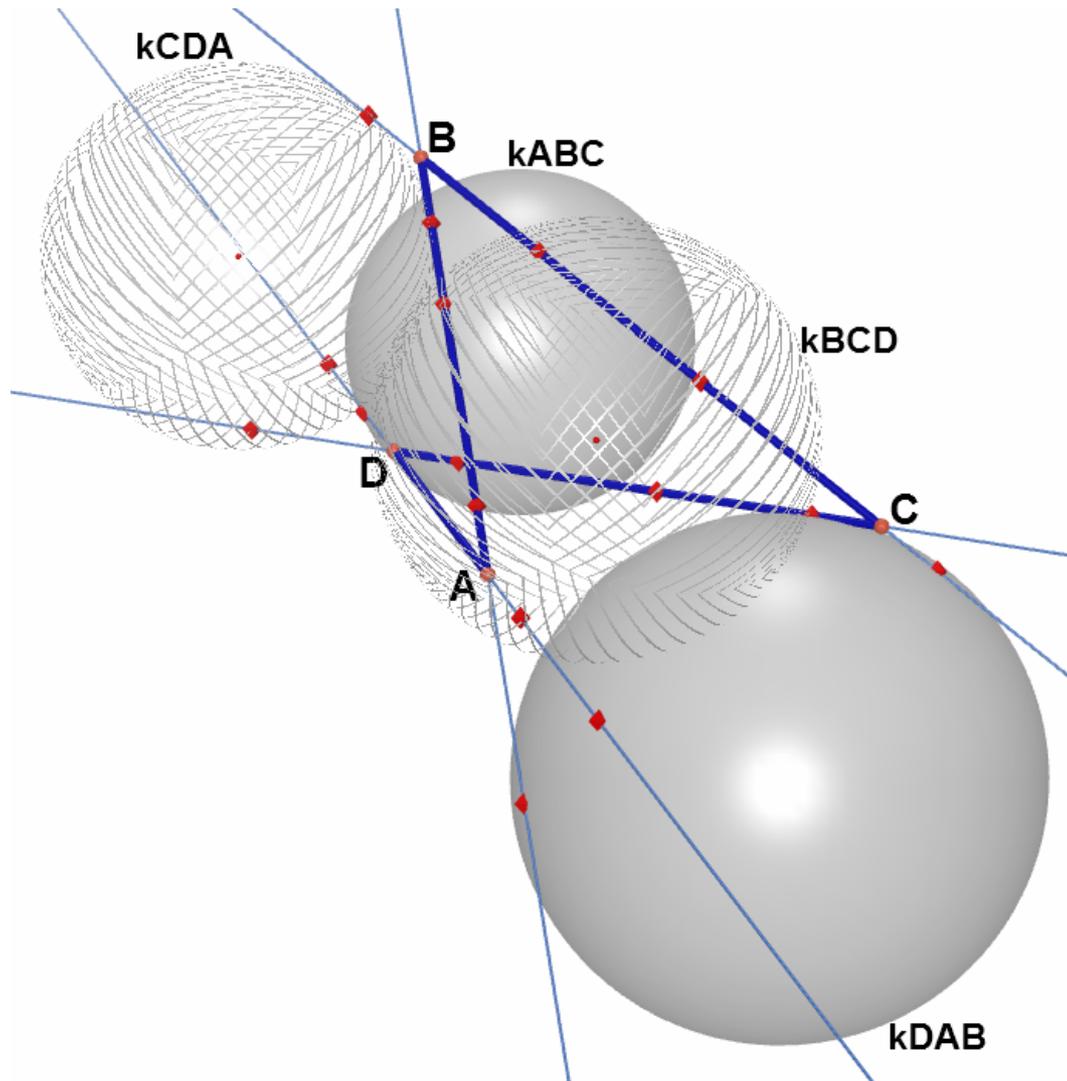
(14) Ein ebenes Viereck ABCD ist ein Ankreisviereck genau dann, wenn gilt:  
 $a + b = c + d$ .

(15) Ein räumliches Viereck ABCD ist ein Ankugelviereck genau dann, wenn gilt:  
 $a + b = c + d$ .

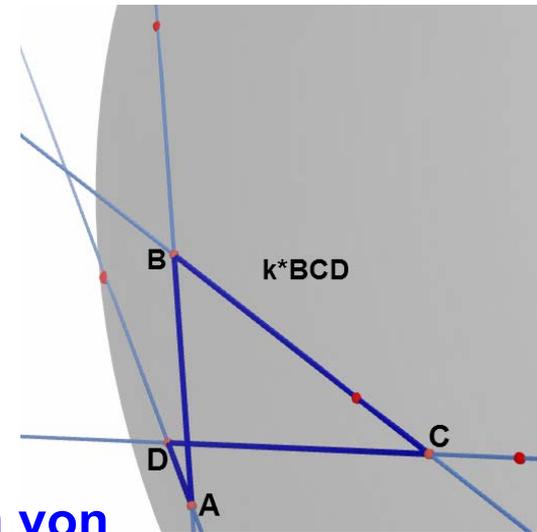
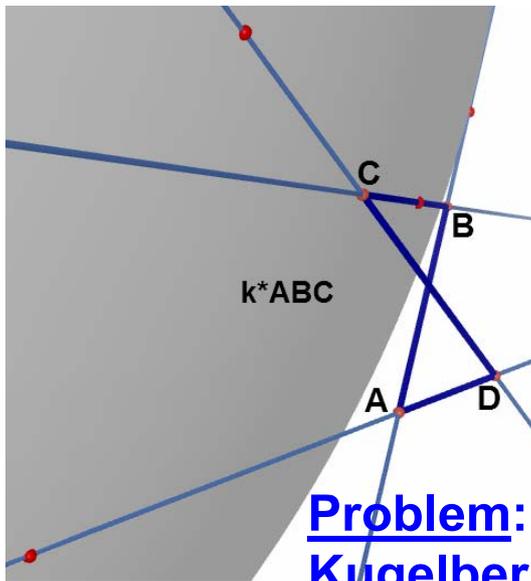


**Das räumliche Viereck**

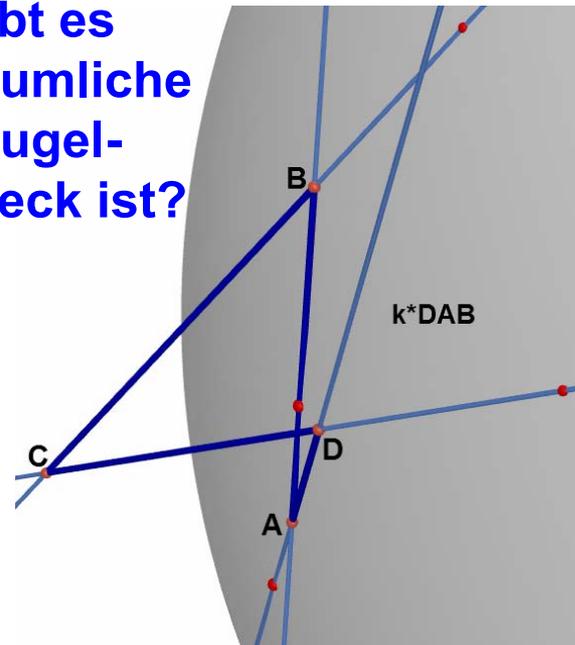
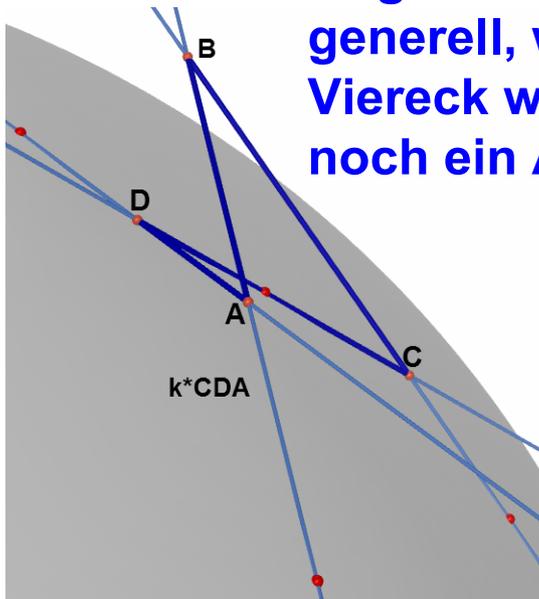
**6. Das 8-Tangentialkugelviereck**



Die 4 Tangentialkugeln der inneren Winkelhalbierenden eines beliebigen räumlichen Vierecks ABCD, welches weder ein Inkugel- noch ein Ankugelvieleck ist.

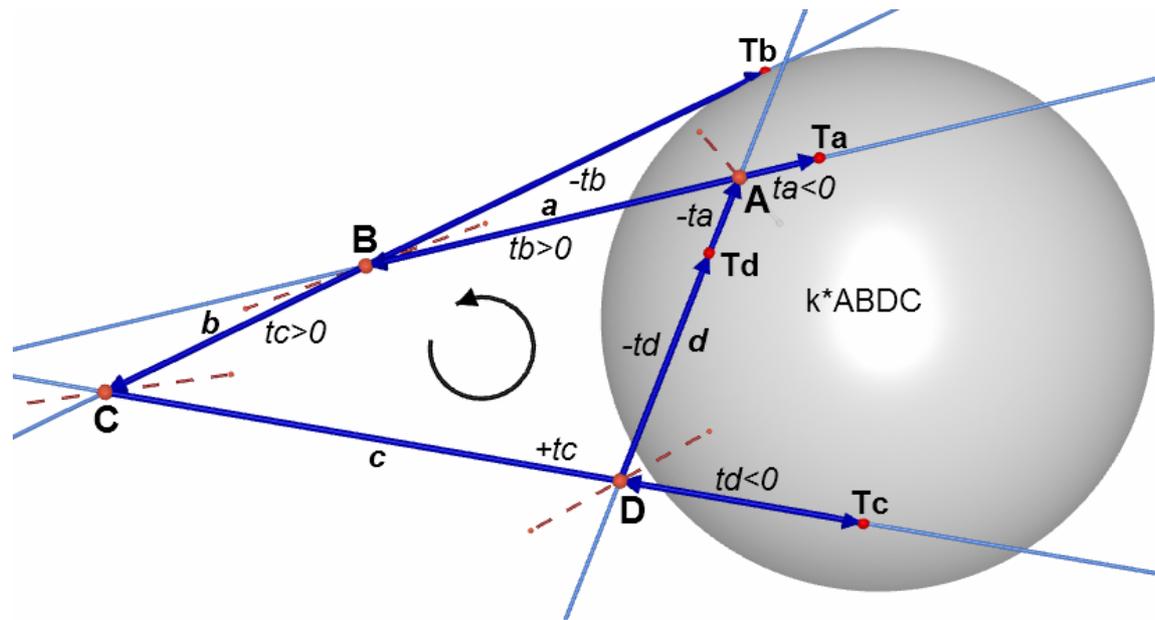


**Problem:** Welche Arten von Kugelberührungen gibt es generell, wenn das räumliche Viereck weder ein Inkugel- noch ein Ankugelviereck ist?



**Die 4 Tangentialkugeln der äußeren Winkelhalbierenden**

# Beziehung zwischen Viereckseiten und Tangentialabschnitten



Vorzeichen der Tangentialabschnitte:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$

$SOLVE([ta + tb = a, \sigma_2 \cdot tb + tc = b, \sigma_3 \cdot tc + td = c, \sigma_4 \cdot td + \sigma_1 \cdot ta = d], [ta, tb, tc, td])$

$$\left[ \begin{array}{l} ta = \frac{a \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - b \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 + c \cdot \sigma_4 - d}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \wedge tb = \frac{-a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - c \cdot \sigma_4 + d}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \wedge tc = \\ \frac{a \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - b \cdot \sigma_1 + \sigma_2 \cdot (c \cdot \sigma_4 - d)}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \wedge td = \frac{-a \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + b \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - c \cdot \sigma_1 + d \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}{\sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 - \sigma_1} \end{array} \right]$$

**Lösbarkeitsbedingung:  $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \neq \sigma_1$  (für  $\sigma_1 = +1$ :  $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = -1$  und für  $\sigma_1 = -1$ :  $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = +1$ )**

# Spezifizierte Lösungen:

1. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, +1, +1, -1]$$

$$\left[ ta = \frac{a - b + c + d}{2} \wedge tb = \frac{a + b - c - d}{2} \wedge tc = \frac{-a + b + c + d}{2} \wedge td = \frac{a - b + c - d}{2} \right]$$

2. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, +1, -1, +1]$$

$$\left[ ta = \frac{a - b - c + d}{2} \wedge tb = \frac{a + b + c - d}{2} \wedge tc = \frac{-a + b - c + d}{2} \wedge td = \frac{-a + b + c + d}{2} \right]$$

3. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, -1, +1, +1]$$

$$\left[ ta = \frac{a + b - c + d}{2} \wedge tb = \frac{a - b + c - d}{2} \wedge tc = \frac{a + b + c - d}{2} \wedge td = \frac{-a - b + c + d}{2} \right]$$

4. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [+1, -1, -1, -1]$$

$$\left[ ta = \frac{a + b + c + d}{2} \wedge tb = \frac{a - b - c - d}{2} \wedge tc = \frac{a + b - c - d}{2} \wedge td = \frac{a + b + c - d}{2} \right]$$

5. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, +1, +1, +1]$$

$$\left[ ta = \frac{a - b + c - d}{2} \wedge tb = \frac{a + b - c + d}{2} \wedge tc = \frac{-a + b + c - d}{2} \wedge td = \frac{a - b + c + d}{2} \right]$$

6. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, +1, -1, -1]$$

$$\left[ ta = \frac{a - b - c - d}{2} \wedge tb = \frac{a + b + c + d}{2} \wedge tc = -\frac{a - b + c + d}{2} \wedge td = \frac{-a + b + c - d}{2} \right]$$

7. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, -1, +1, -1]$$

$$\left[ ta = \frac{a + b - c - d}{2} \wedge tb = \frac{a - b + c + d}{2} \wedge tc = \frac{a + b + c + d}{2} \wedge td = \frac{-a - b + c - d}{2} \right]$$

8. Fall

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [-1, -1, -1, +1]$$

$$\left[ ta = \frac{a + b + c - d}{2} \wedge tb = \frac{a - b - c + d}{2} \wedge tc = \frac{a + b - c + d}{2} \wedge td = \frac{a + b + c + d}{2} \right]$$

Jedes räumliche Viereck ABCD, das weder ein Inkugel- noch ein Ankgelviereck ist, besitzt genau acht Tangentialkugeln.

Die Mittelpunkte der 8 Berührungskugeln eines Vierecks ABCD, das weder ein Inkugel- noch ein Ankgelviereck ist, als Schnittpunkte von innen- und außenwinkelhalbierenden Ebenen:

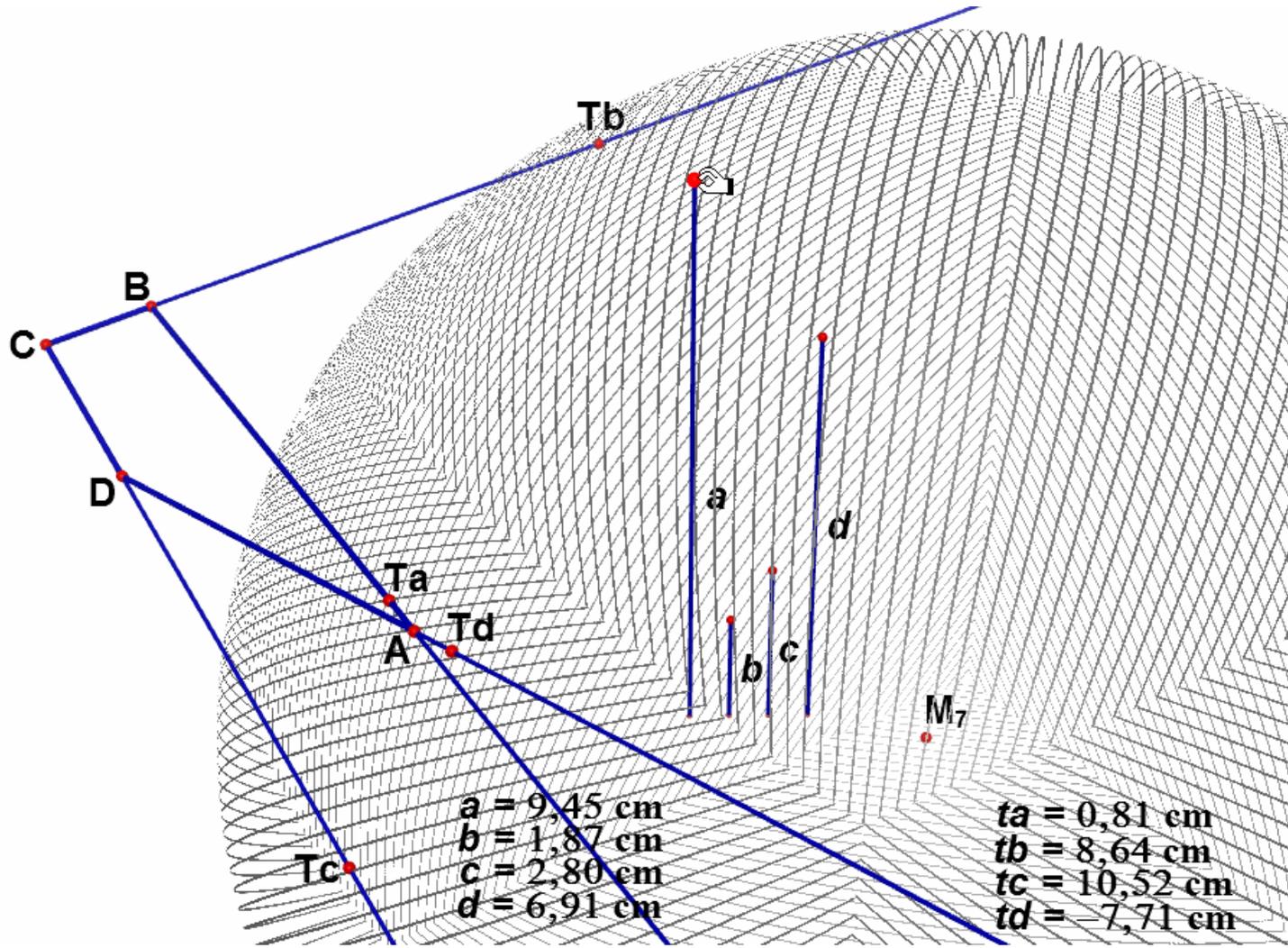
1. Fall:  $M_1$  Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, C und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel D.
2. Fall:  $M_2$  Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, D und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel C.
3. Fall:  $M_3$  Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, C, D und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel B.
4. Fall:  $M_4$  Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln B, C, D und der innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel A.
5. Fall:  $M_5$  Schnittpunkt der innenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln B, C, D und der außenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel A.
6. Fall:  $M_6$  Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, C, D und der innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel B.
7. Fall:  $M_7$  Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, D und der Innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel C.
8. Fall:  $M_8$  Schnittpunkt der außenwinkelhalbierenden Ebenen mit den Scheiteln A, B, C und der innenwinkelhalbierenden Ebene mit dem Scheitel D.

### Kennzeichnung der Tangentialkugeln

Die Fälle 1 - 3 und 5 kennzeichnen die Kugeln 1. Art, also die Berührungskugeln, deren Mittelpunkte Schnitt von jeweils 3 innenwinkelhalbierenden und einer außenwinkelhalbierenden Ebene ist.

Die Fälle 4 und 6 - 8 kennzeichnen die Kugeln 2. Art, also die Berührungskugeln, deren Mittelpunkte Schnitt von jeweils 3 außenwinkelhalbierenden und einer innenwinkelhalbierenden Ebene ist.

# Zusatz: Berechnung der Tangentialabschnitte aus den Viereckseiten





**Das räumliche Viereck**  
**7. RV-Klassifikation nach**  
**Berührungskugel-Eigenschaft**

Für  $\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - \sigma_1 = 0$  ergibt sich das Gleichungssystem

$$a = t_a + t_b \wedge b = \sigma_2 t_b + t_c \wedge c = \sigma_3 t_c + t_d \wedge d = \sigma_4 t_d + \sigma_1 t_a$$

1)	$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$	$= [+1, +1, +1, +1]:$	$a + c = d + b$
2)	-	$= [+1, +1, -1, -1]:$	$b = a + c + d$
3)	-	$= [+1, -1, +1, -1]:$	$a + b = c + d$
4)	-	$= [+1, -1, +1, -1]:$	$d = a + b + c$
5)	-	$= [-1, +1, +1, -1]:$	$b = a + c + d$
6)	-	$= [-1, +1, -1, +1]:$	$a + d = b + c$
7)	-	$= [-1, -1, +1, +1]:$	$c = a + b + d$
8)	-	$= [-1, -1, -1, -1]:$	$a + b + c + d = 0$

1. Fall: Inkugelviereck

3. und 6. Fall: Ankugelviereck

Restliche Fälle ohne Ergebnis

Entweder hat ein Viereck im Raum genau acht Tangentialkugeln oder das Viereck ist ein Inkugelviereck oder ein Ankugelviereck oder sowohl ein Inkugelviereck als auch ein Ankugelviereck.



## **8. Schlussbemerkungen**

**Die vorstehende Sachanalyse zeigt im Vergleich mit der Lehre des ebenen Vierecks überraschende Ergebnisse u. a. über die Kugelberührungen räumlicher Vierecke.**

**Anwendungsorientierte, aber anspruchsvollere Erweiterungen wären die Behandlung räumlicher Viereckgelenke und die nicht mehr elementargeometrische Behandlung der zwischen den Viereckseiten aufzuspinnenden Minimalflächen.**

**Als eine Anwendung raumgeometrischen Konstruierens mit DRGSen bietet das formenkundliche Thema „Räumliches Viereck“ ein reichhaltiges und herausforderndes Arbeitsfeld für Studierende des Lehramtes und für leistungsfähige Schüler-/ Schülerinnen der oberen Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II.**

**Das Thema eignet sich auch für die Projektarbeit, für Schüler-Arbeitsgemeinschaften und für individuelle Schülerarbeiten – und auch für sogenannte raumgeometrische „Forscher“.**

**Schüler/-innen als „mathematische Forscher“  
– ein neue Form des mathematikdidaktischen  
Egozentrismus?**



**Danke für Ihre Aufmerksamkeit!**



# Epilog

***„Ist die Weite des bekannten geometrischen Wissens mit der Oberfläche des Ozeans vergleichbar, so seine Tiefen mit dem noch unerforschten raumgeometrischen Wissen.“***

**H. Schumann, Oktober 2016**

