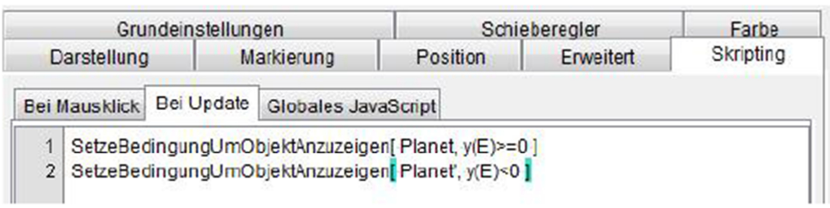
<u>**Konstruktionsgang für Kepler 2:**</u>

1. <u>Die Bahnellipse c</u>: Durch Festlegung der Brennpunkte *Sonne* und *F* und eines Punktes *C* wird die Bahnellipse *c* (in blau dargestellt) festgelegt. Der Punkt *C* wird verborgen, weil er zur Animation nichts beiträgt. Dann wird der Mittelpunkt *M* der Ellipse als Mittelpunkt der Strecke zwischen den Brennpunkten konstruiert. Dieser wird später gebraucht als Scheitel des Winkels γ. Die Hauptscheitelpunkte *Aphel* und *Perihel* werden eingezeichnet. Der Punkt *Perihel* wird gebraucht, da die Winkel β und γ von diesem Punkt aus abgetragen werden. Der Punkt *Aphel* wird eingezeichnet, damit verdeutlicht wird, wann die halbe Ellipse durchlaufen ist. Auf der Bahnellipse werden sich dann zwei Planeten bewegen: einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, ein anderer nach dem zweiten Keplerschen Gesetz.
2. <u>Die Kreisbahn d</u>: Der Kreis *d* hat den Mittelpunkt *M* und geht durch den Punkt *Perihel*. Ist die numerische Exzentrizität des Planeten ε = 0, dann bewegt sich der Planet auf diesem Kreis.
3. <u>Der Schieberegler α</u>: Ein Schieberegler α wird als Winkel von 0° bis 360° definiert. Die Animation wird auf „Zunehmend“ eingestellt, damit sich der Planet später immer in der gleichen Richtung um die Sonne bewegt. Dieser Schieberegler wird gebraucht, um die Planeten animieren zu können. Da an der Geschwindigkeit beim Schieberegler nichts geändert wird, hat er konstante Winkelgeschwindigkeit.
4. <u>Der Planet *A* mit konstanter Winkelgeschwindigkeit</u>: Der Winkel β ist ein Winkel zwischen Perihel und Sonne mit der festen Größe α gegen den Uhrzeigersinn, man erhält den Punkt *Perihel‘*. Er hat immer denselben Abstand zur Sonne, wie der Punkt *Perihel*. Würde man den Schieberegler nun animieren, würde sich der Punkt *Perihel‘* also auf einer Kreisbahn bewegen. Damit der Punkt nun auf der Bahnellipse liegt, muss die Gerade *e* zwischen *Sonne* und *Perihel‘* mit der Bahnellipse geschnitten werden. Man erhält somit den Punkt *A* (in grün dargestellt). Wird die Animation des Schiebereglers gestartet, so bewegt sich der Punkt *A* mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf der Bahnellipse. Der Punkt *A* hat dieselbe Umlaufzeit, wie der Planet, der dem zweiten Keplerschen Gesetz folgt. Der Planet *A* wird einerseits eingezeichnet, um den Unterschied zwischen konstanter Winkelgeschwindigkeit eines Planeten und Kepler-Geschwindigkeit zu veranschaulichen, andererseits ist er ein Hilfsobjekt, um den Planeten mit Kepler-Geschwindigkeit konstruieren zu können. Nach diesem Konstruktionsschritt werden der Punkt *Perihel‘* und die Gerade *e* verborgen, damit der Planet *A* besser sichtbar ist. Der Fahrstrahl *f* zwischen *Sonne* und *A* wird eingezeichnet, damit der Winkel β deutlicher hervor tritt.
5. <u>Die numerische Exzentrizität *en*</u>: Mit dem Befehl $\mathrm{NumerischeExzentrizität[c]}$ kann man sich in Geogebra die numerische Exzentrizität ε ausgeben lassen. In der Datei Kepler 2.ggb wurde die numerische Exzentrizität *en* genannt. Diese wird gebraucht, um den Planeten konstruieren zu können, der sich auf der Kreisbahn bewegt.
6. <u>Der Winkel γ</u>: Der Winkel γ ist der Winkel zwischen *Perihel*, *M* und *E*. Die Kepler- Gleichung legt die Relation
$$\gamma - en \cdot \sin(\gamma) - \beta = 0$$
fest. Es wird also eine Funktion
$$g(x) = x - en \cdot \sin(x) - \beta$$

definiert, wobei γ Nullstelle dieser Funktion ist. Die Funktion muss von der Variablen *x* abhängen, weil Geogebra die Funktion sonst nicht erkennt. Diese Funktion hat genau eine Nullstelle, denn *g(x)* nimmt positive und negative Werte an und ist streng monoton, weil die Ableitung nach *x* immer positiv ist. Also ist γ eindeutig.

7. <u>Der Planet *E*, der sich auf der Kreisbahn bewegt</u>: Der Punkt *B* wird als Nullstelle der Funktion *g(x)* eingezeichnet, dessen *x*-Koordinate nun der gewünschte Wert für γ ist. Diese Koordinate isoliert man mit dem Befehl $\mathrm{x(B)}$ in der Eingabezeile und man erhält damit die Zahl *h*. Nun kann der Winkel γ eingezeichnet werden, als Winkel mit fester Größe *h* zwischen *Perihel* und *M* gegen den Uhrzeigersinn und erhält somit den Punkt *E* auf der Kreisbahn. Nach diesem Schritt werden die Funktion *g(x)* und der Punkt *B* verborgen, da sie die Sichtbarkeit beeinträchtigen.
8. <u>Der Planet, der sich nach dem zweiten Keplerschen Gesetz bewegt</u>: Die Schnittpunkte einer parallelen Geraden zur Nebenachse durch den Punkt *E* mit der Bahnellipse ergeben die Punkte *Planet* und *Planet‘* (in rot dargestellt). Beim Start der Animation bewegen sich diese Punkte auf der Bahnellipse mit Geschwindigkeit laut dem zweiten Keplerschen Gesetz und mit gleicher Umlaufzeit wie der Punkt *A*. Die Punkte *Planet* und *Planet‘* bleiben jedoch auf der gleichen Seite der Ellipse bezüglich der *x*-Achse. Nun muss noch jeweils einer der Punkte verborgen werden, je nachdem, wo sich der Punkt *E* befindet.
9. <u>Verbergen des nicht gebrauchten Punktes</u>: Um nur einen Planeten sichtbar zu machen, der sich auf der gesamten Bahnellipse bewegt, greift man nun auf das Skripting in Geogebra zurück: Bei den *Eigenschaften* des Schiebereglers stellt man das Untermenü auf *Skripting* und weiters aus *Bei Update*. Mit dem Befehl: $\mathrm{SetzeBedingungUmObjektAnzuzeigen\ [Objekt, Bedingung]}$ kann man nun wählen, wann ein Objekt angezeigt wird.



So wird immer der Planet angezeigt, der näher an dem Punkt *E* ist und somit beschreiben die Punkte *Planet* und *Planet‘* zusammen die volle Bahnellipse. Da das zweite Keplersche Gesetz die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche behandelt, wird der Fahrstrahl *k* bzw. *l* zwischen *Sonne* und *Planet* bzw. *Planet‘* und der Winkel δ bzw. δ‘ zwischen *Sonne*, *Perihel* und *Planet* bzw. *Planet‘* eingezeichnet. Auch diese werden mittels Skripting zur richtigen Zeit angezeigt.

Die Animation kann gestartet werden, indem man den Schieberegler α auf *Animation ein* stellt. Es kann nun betrachtet werden, wie sich das zweite Keplersche Gesetz auf die Geschwindigkeit des Planeten auswirkt. Weiters erkennt man, dass die beide Planeten (nach dem zweiten Keplerschen Gesetz und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) immer in Aphel und Perihel auf gleicher Position sind.
Durch Verschieben der Brennpunkte und des Punktes *C* kann die Form der Bahnellipse variiert werden.

Didaktische Überlegungen:

Mit dem zweiten Keplerschen Gesetz, können die SchülerInnen ein Vorgehen beim Beweisen von Aussagen üben, aber auch Kenntnisse über Differentialrechnung vertiefen. Das Vorstellungsvermögen der SchülerInnen wird gefördert, sie lernen mathematische Formeln zu analysieren und interpretieren. Durch Zeigen der Animationen wird die Vorstellungskraft der SchülerInnen unterstützt.

Wissen die SchülerInnen, dass die Größe des Drehimpuls konstant ist und wie die reduzierte Masse definiert ist (m_1 und m_2 sind die Massen der beteiligten Körper)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

und gibt man die Gleichung

$$dA = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} dt|$$

bekannt, so kann das zweite Keplersche Gesetz bewiesen werden. Dazu müssen die SchülerInnen den Differentialquotient kennen (im Lehrplan der 7. Klasse). Das experimentell-heuristische Arbeiten wird geschult, wenn die SchülerInnen sich überlegen, was das zweite Keplersche Gesetz für die Geschwindigkeit eines Planeten auf der Bahnellipse bedeutet (je weiter die Ellipse von der Sonne entfernt ist, desto langsamer bewegt sich der Planet). Die Vermutungen, die die SchülerInnen aufstellen, können mit der Animation Kepler 2.ggb überprüft werden.

Im Lehrplan der 6. Klasse steht, die SchülerInnen sollen Näherungsverfahren kennenlernen, um Gleichungen zu lösen, in der 7. Klasse sollen die SchülerInnen Anwendungen der Differentialrechnung kennenlernen. Lernen die SchülerInnen das newtonsche Näherungsverfahren kennen, können sie die Nullstelle der Funktion

$$g(x) = x - en \cdot \sin(x) - \beta$$

für festgelegte Werte für β näherungsweise berechnen. Durch Untersuchung der Monotonie (Lehrplan der 6. Klasse, reelle Funktionen, Lehrplan der 7. Klasse, Differentialrechnung) kann festgestellt werden, dass der erhaltene Wert die einzige Nullstelle ist. Haben die SchülerInnen die Nullstelle berechnet, können sie die Gerade aufstellen, auf der der Punkt *E* liegen muss. Dazu müssen sie einerseits die Gleichung einer Gerade aufstellen können (Lehrplan der 4. Klasse, Arbeiten mit Variablen), andererseits den Zusammenhang zwischen dem Tangens eines Winkels und der Steigung kennen (Lehrplan der 5. Klasse, Trigonometrie). Diese Gerade wird nun mit dem Kreis *d* geschnitten, und man erhält den Punkt *E* (Lehrplan der 7. Klasse, nichtlineare, analytische Geometrie). Nun muss eine senkrechte Gerade durch den Punkt *E* aufgestellt werden und mit der Bahnellipse *c* geschnitten werden, um den Punkt *Planet* zu erhalten (Lehrplan der 7. Klasse, nichtlineare, analytische

Geometrie). In der ganzen Aufgabe ist es erforderlich, bewusst mit den Näherungswerten umzugehen (Lehrplan der 5. Klasse, Zahlen und Rechengesetze).

Beim Keplerschen Gesetz für die Erde kann nun zusätzlich der Winkelunterschied η ausgerechnet werden, wenn der Winkel δ ermittelt wurde. Hier kann besprochen werden, wie gravierend der Unterschied wäre, wenn die Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit die Bahnellipse durchlaufen würde (also wie der Punkt *A*, vgl. Animation Kepler2Erde.ggb). Hier wird auf den erkenntnistheoretischen Aspekt der Mathematik eingegangen.

Aus meiner **Diplomarbeit: Dynamische Solargeometrie**