

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

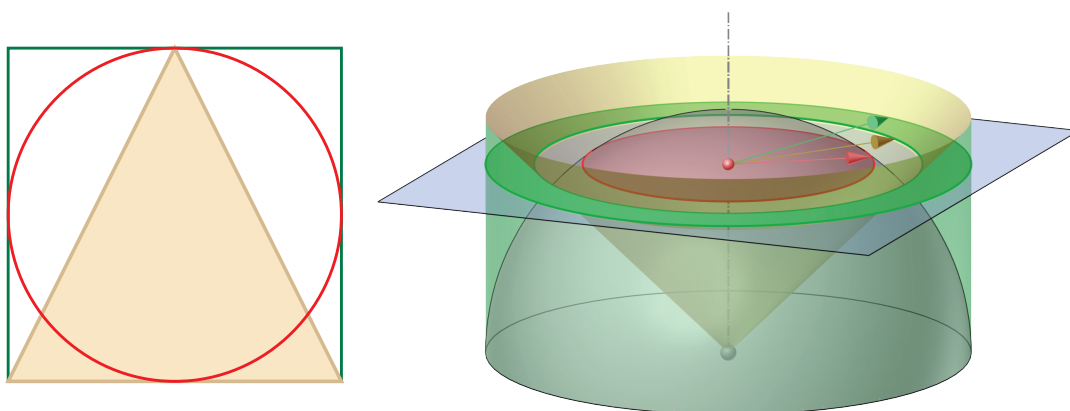
Liebe Kolleginnen und Kollegen,

Integralrechnung ist in der Mathematik von großer Bedeutung. Die Anfänge finden sich bei Archimedes, ohne dass dieser die bekannten Symbole verwendete. Für Schüler ist es sicher von Interesse, nicht-triviale Ergebnisse durch einfache Grenzwertbildungen zu erhalten:

## KUGELVOLUMEN, KUGELOBERFLÄCHE UND SCHWERPUNKTSBERECHNUNGEN NACH ARCHIMEDES

In den folgenden Schritten (a)–(f) überlegen wir uns, wie man das Volumen der Kugel elementargeometrisch ableiten und daraus zB. die Oberfläche oder den Schwerpunkt einer Halbkugel bestimmen kann.

**(a)** Archimedes' berühmter Satz lautet: *Das Volumen einer Kugel ist gleich dem Volumen des umschriebenen Drehzylinders, vermindert um das Volumen eines Drehkegels mit gleichem Basiskreis und gleicher Höhe.*



Figur 1

Das zugehörige „Logo“ (Figur 1 links) ist in abgewandelter Form auf seinem Grabstein eingemeißelt (Archimedes hatte bei der Formulierung nur den Zylinder verwendet).

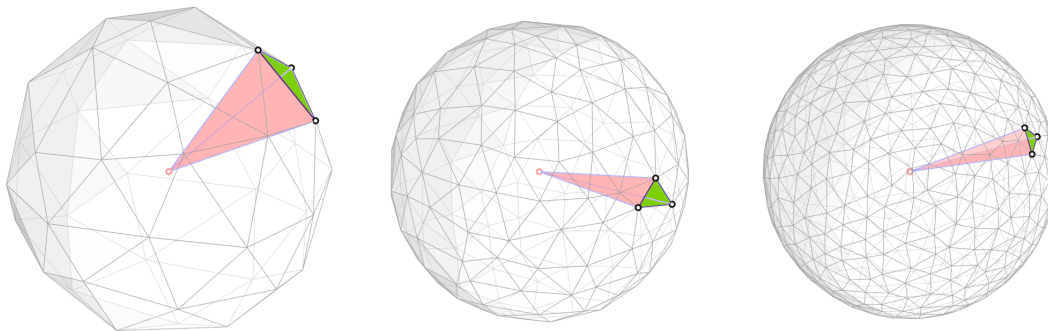
**(b)** Zum Beweis betrachten wir nur die halbe Kugel und dementsprechend auch den halb so hohen umschriebenen Zylinder (Figur 1 rechts). Der Kegel soll auf dem Kopf stehen und ebenfalls halbe Höhe besitzen.

Zu zeigen ist:  $V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}$ .

Schneiden wir mit Archimedes die drei Körper (Kugelradius  $r$ ) mit einer Ebene parallel zum Basiskreis in der Höhe  $z$ , wodurch wir drei Schichtenkreise erhalten. Der Radius des Schichtenkreises auf der Kugel ist  $r_1 = \sqrt{r^2 - z^2}$ , der des Schichtenkreises des Zylinders stets  $r_2 = r$  und der Radius des Schichtenkreises auf dem Kegel ist wegen der  $45^\circ$ -Neigung des Kegels  $r_3 = z$ . Der Schichtenkreis der Halbkugel hat somit die Fläche  $A_z = \pi(r^2 - z^2)$ . Dieselbe Fläche hat in jeder Höhe  $z$  jener Kreisring, der von Zylinder und Kegel begrenzt wird. Haben zwei Körper in jeder Höhe den gleichen Querschnitt, dann sind ihre Volumina identisch (dieses Prinzip wurde viel später von Cavalieri ausgebaut).

Im konkreten Fall haben wir:  $V_{\text{Halbkugel}} = \pi r^2 \cdot r - \pi r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{2\pi}{3} r^3$ . Das Volumen der ganzen Kugel ist natürlich doppelt so groß.

(c) Berechnung der Kugeloberfläche aus dem Kugelvolumen:



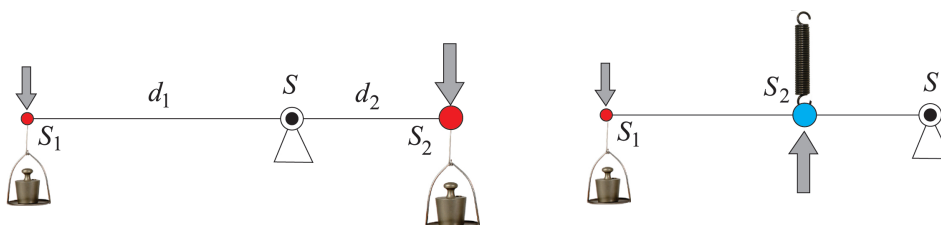
Figur 2

Wir wählen auf der Kugel beliebig viele Punkte und verbinden sie zu einem Dreiecksnetz (Figur 2). Jedes Dreieck bildet zusammen mit der Kugelmittle ein allgemeines Tetraeder, für das die Volumensformel  $V_{\text{Tetraeder}} = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} / 3$  gilt. Näherungsweise ist das Kugelvolumen gleich der Summe der Volumina aller Tetraeder. Verfeinern wir das Dreiecksnetz auf der Kugel immer mehr, dann konvergiert die Höhe aller Tetraeder gegen den Kugelradius und die Summe der Basisflächen gegen die Kugeloberfläche  $A$ . Es gilt somit

$$V_{\text{Kugel}} = \sum V_{\text{Tetraeder}} \implies \frac{4\pi}{3} r^3 = A \cdot \frac{r}{3} \implies A = 4\pi r^2.$$

Demnach ist z.B. die Mantelfläche einer Halbkugel doppelt so groß wie die Fläche ihres Basiskreises bzw. ebenso groß wie die Mantelfläche des umschriebenen Drehzylinders.

(d) Das Hebelgesetz von Archimedes zur Schwerpunktsbestimmung:



Figur 3

Wir betrachten eine Waage mit einem masselosen Hebel (Figur 3 links). Sind  $m_1$  und  $m_2$  zwei Massen, die im Abstand  $d_1$  und  $d_2$  vom Auflagepunkt  $S$  Drehmomente ausüben, dann befindet sich die Waage genau dann im Gleichgewicht, wenn  $m_1 d_1 = m_2 d_2$  gilt.  $S$  kann als Schwerpunkt der

beiden Punkte  $S_1$  und  $S_2$  mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  interpretiert werden. Besitzen  $S_1$  und  $S_2$  die Koordinaten  $s_1$  und  $s_2$  bezüglich eines beliebigen Koordinatenursprungs auf dem Hebel, dann hat der gemeinsame Schwerpunkt die Koordinate

$$s = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 s_1 + m_2 s_2).$$

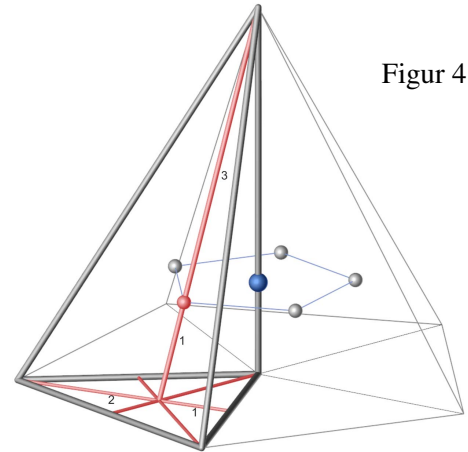
Massen können dabei auch negativ in die Formel eingehen (Figur 3 rechts), je nachdem, ob Druck- oder Zugkräfte resultieren.

(e) *Hilfsüberlegung*: Schwerpunkt eines Drehkegels.

Wir betrachten ein beliebiges Tetraeder. Mittels Vektorrechnung lässt sich zeigen: Der Schwerpunkt teilt die Verbindungsstrecken der Schwerpunkte der Seitenflächen mit der gegenüberliegenden Spitze im Verhältnis 1 : 3.

In einem nächsten Schritt ergibt sich daraus, dass der Schwerpunkt einer regelmäßigen Pyramide die Höhe der Pyramide ebenfalls 1 : 3 teilt, weil die Pyramide durch Rotation von tetraedischen Keilen zusammengesetzt werden kann (Figur 4). Durch Verfeinerung erhält man:

*Der Schwerpunkt eines Drehkegels teilt die Höhe im Verhältnis 1 : 3.*



Figur 4

(f) Schwerpunktsbestimmung der Halbkugel:

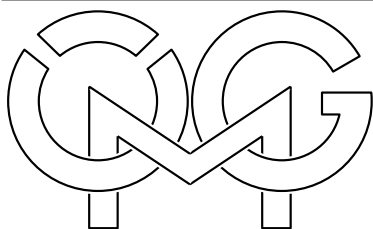
Wir wollen uns nun überlegen, dass der „Ersatzkörper“ aus Figur 1 rechts (also der kegelförmig ausgefräste Zylinder) denselben Schwerpunkt besitzt wie die volumsgleiche Halbkugel. Wir schneiden beide Körper in beliebig dünne Schichten parallel zum Basiskreis. Jede Schicht hat bei beiden Körpern nach den vorangegangenen Überlegungen denselben Querschnitt und damit dasselbe Volumen bzw. dieselbe Masse, die wir uns in derselben Höhe auf der lotrechten Rotationsachse vereinigt denken können. Wir können uns statt der Schichten also gleich schwere Massepunkte in der gleichen Höhe vorstellen, die in Summe den gleichen gemeinsamen Schwerpunkt ergeben. Diesen Schwerpunkt berechnen wir am „Ersatzkörper“, der durch Ausfräsen eines Drehkegels (Masse also negativ!) aus dem Drehzylinder entsteht. Der Drehzylinder habe die Masse  $m_1$ . Dann hat der Drehkegel die negative Masse  $m_2 = -m_1/3$ . Der Schwerpunkt des Zylinders liegt in der Höhe  $r/2$ , jener des Kegels in der Höhe  $3r/4$  (bei Drehkegeln teilt der Schwerpunkt die Höhe im Verhältnis 1:3). Mit obiger Formel erhalten wir nun die Höhe des Gesamtschwerpunkts

$$s = \frac{1}{m_1 - \frac{m_1}{3}} \left( m_1 \cdot \frac{r}{2} - \frac{m_1}{3} \cdot \frac{3r}{4} \right) = \frac{3r}{8}.$$

#### Literatur:

- [1] G. GLAESER, K. POLTHIER: *Bilder der Mathematik*, 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2010.
- [2] <http://www.krgho.de/ag/html/heben1.htm>
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Kugel>
- [4] <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/beispiel/beispiel1147/>

Die Redaktion wünscht allen Kolleginnen und Kollegen ein erfolgreiches Neues Jahr 2012!



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

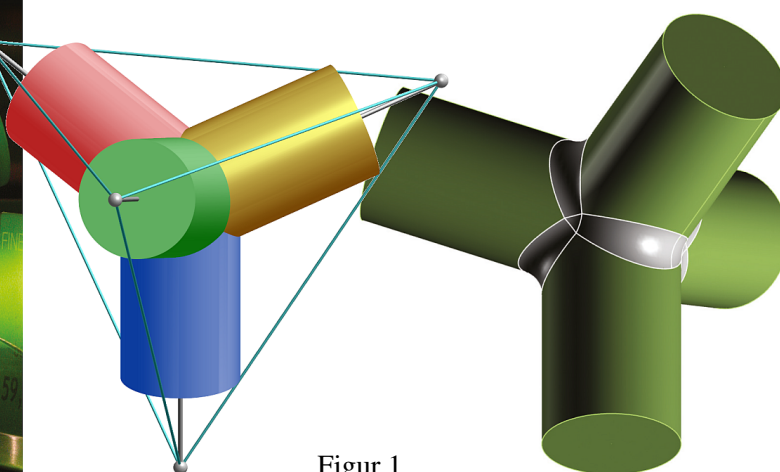
die Vektorrechnung ist ein elegantes Werkzeug in der Mathematik, und es gibt zahlreiche schöne Anwendungsbeispiele dafür. Zwei durchaus praxisbezogene Beispiele sollen hier vorgestellt werden. Sie sind auch für SchülerInnen der 6. Klasse durchaus verständlich, erfordern nur wenig Rechenaufwand und wirken wegen des Praxis-Bezugs motivierend.

## ZWEI ANWENDUNGSBEZOGENE (FÄCHERÜBERGREIFENDE) RÄUMLICHE AUFGABEN, ELEGANT GELÖST MITTELS VEKTORRECHNUNG

**Aufgabenstellung:** Wie kann man geschickt die Winkel der Höhen im Tetraeder bestimmen bzw. den „sphärischen Pythagoras“ ableiten?

### Beispiel 1: Welche Winkel bilden die Höhen eines regelmäßigen Tetraeders?

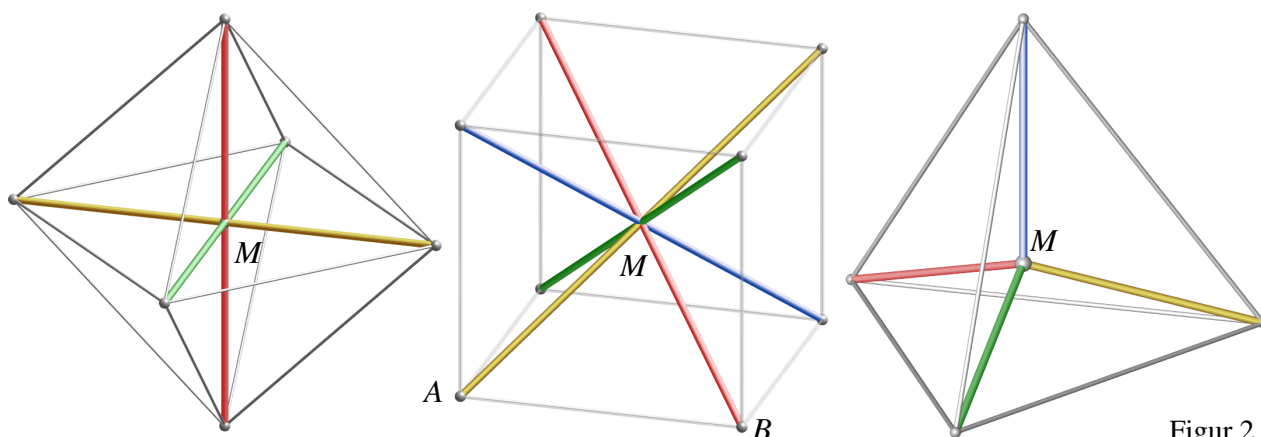
(a) Motivation: In der Natur findet man nur schwer exakte mathematische Formen, meist eher Näherungen. Unter den wenigen exakten Beispiele sind verschiedene Kristallgitter, etwa jenes des Diamanten bzw. Germaniums (perfekt tetraedrisch) oder des Kochsalzes (oktaedrisch). Aber auch im Design finden sich schöne Anwendungen zu diesem Thema (siehe Designerlampe Fig. 1).



Figur 1

(b) Die drei Raumdiagonalen eines Oktaeders bilden trivialerweise ein orthogonales Dreiein (Fig. 2 links). Beim Würfel (Fig. 2 Mitte) haben wir vier Raumdiagonalen.





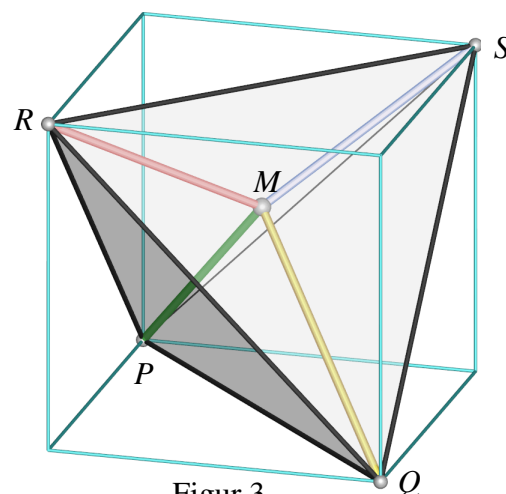
Figur 2

Zentrieren wir den Würfel um seinen Mittelpunkt  $M(0/0/0)$  und versehen wir seine Eckpunkte mit den Koordinaten  $A(1/-1/-1)$  (Ortsvektor  $\vec{a}$ ),  $B(1/1/-1)$  (Ortsvektor  $\vec{b}$ ), usw. Dann bilden z.B. die Richtungsvektoren  $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$  und  $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$  der Raumdiagonalen einen Winkel  $\varphi$  mit

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{3}$$

Alle anderen Winkel sind aus Symmetriegründen gleich bzw. ergänzen einander auf  $180^\circ$  ( $\cos \varphi = -1/3$ ). Beim Tetraeder (Fig. 2 rechts) ist die Sache zunächst nicht so einfach, weil die Koordinaten der Eckpunkte „in Hauptlage“ nur viel aufwändiger hinschreiben sind (und man mit Formeln – zumindest für die Höhe der Pyramide – arbeiten muss).

(c) Eine viel einfachere Darstellung der Koordinaten der Tetraeder-Punkte  $PQRS$  erhält man, wenn wie in Fig. 3 man den Tetraeder aus einem Würfel „schnitzt“. Die Eckpunkte des Würfels haben wir schon mit Koordinaten versehen. Beim Berechnen der Winkel der Höhen fällt daher keine zusätzliche Arbeit an und wir erhalten  $\cos \varphi = -1/3$ , also  $\varphi \approx 109,5^\circ$ .

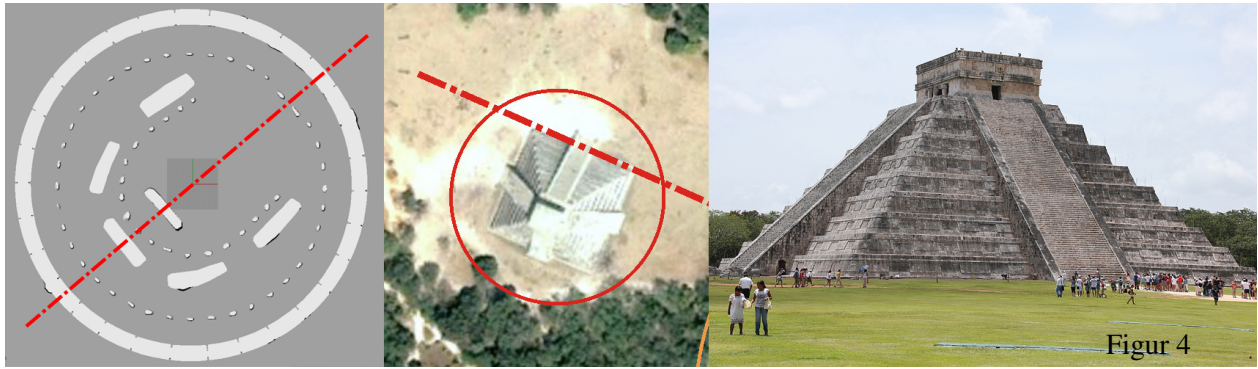


Figur 3

## Beispiel 2: Wo geht die Sonne zur Sonnenwende auf bzw. unter?

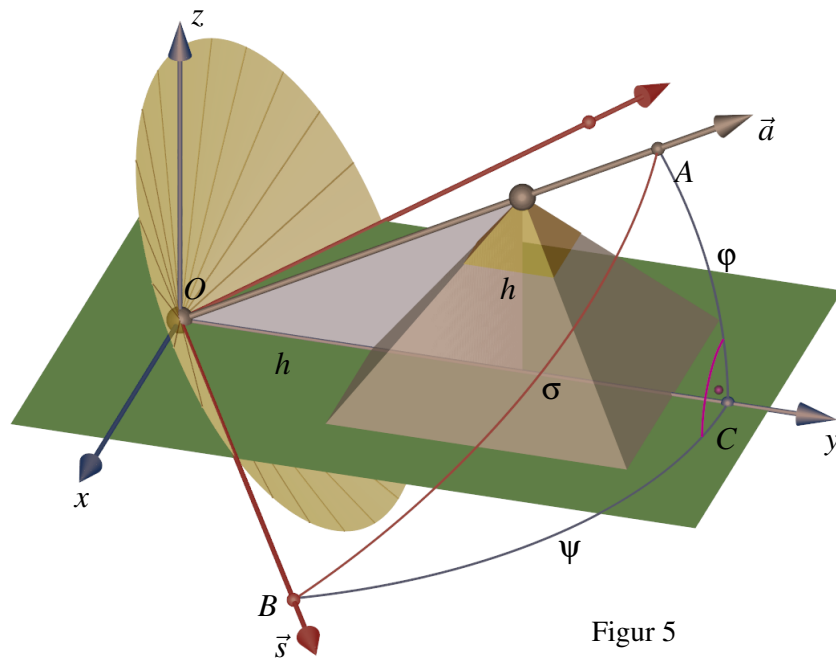
(a) Motivation: Steinzeitliche Monumentalbauten wie Stonehenge (Fig. 4 links) oder Chichén Itzá (Fig. 4 Mitte und rechts) sind über viele hunderte von Metern und auf's Zehntelgrad genau in die Richtung zum Sonnenaufgang bzw. Sonnenuntergang am 21. Juni gerichtet.

Damals bestimmte man die entsprechenden Richtung empirisch als minimale Abweichung der aufgehenden bzw. untergehenden Sonne von der Nordrichtung. Die Richtungen wurde so genau gemessen, dass man erkennt, dass vor 4500 Jahren (Stonehenge) die Neigung  $\delta$  der Erdachse zur Normalen der Ebene der Umlaufbahn der Erde um die Sonne um mehr als ein halbes Grad von der jetzigen Neigung von  $\delta = 23,44^\circ$  abgewichen ist.



**(b) Hilfssatz 1:** Man findet den Polarstern – und damit die Richtung der Erdachse – indem man nach Norden schaut und einen Höhenwinkel  $\varphi$  aufsucht, welcher der geografischen Breite entspricht. Bei der Chephren-Pyramide musste man z.B. von einem Punkt  $O$ , der genau im Abstand der Pyramidenhöhe  $h$  südlich der Pyramidenkante liegt, auf die Pyramidenspitze blicken, um den damaligen Polarstern Thuban zu sehen (Fig. 5).

**(c) Hilfssatz 2:** Im Laufe eines Tage rotiert die Erde um ihre Achse. Relativ zur Erde gesehen dreht sich damit die Sonne um die Erdachse. Insbesondere zu den Sonnenwenden bleibt dabei der Winkel, den die Sonnenstrahlen mit der Erdachse bilden, im Laufe des Tages nahezu konstant, so dass die Sonnenstrahlen einen Drehkegel überstreichen. Zur Sommersonnenwende ist dieser Winkel  $\sigma = 90^\circ - \delta$ , derzeit also  $\approx 66,6^\circ$  (vor 4500 Jahren  $\approx 66,0^\circ$ ).



**(d)** Wir definieren ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung  $O$  und horizontaler  $(x,y)$ -Ebene, wobei die  $y$ -Achse in Nordrichtung schauen soll (Fig. 5), sodass die Erdachse in der  $yz$ -Ebene unter dem Höhenwinkel  $\varphi$  liegt und durch den bereits normierten Richtungsvektor  $\vec{a} = (0, \cos \varphi, \sin \varphi)$  beschrieben wird (dabei ist  $\varphi$  die geografische Breite). Sei  $\psi$  der Winkel zwischen der Richtung zur untergehenden Sonne und der Nordrichtung. Der zugehörige ebenfalls bereits normierte Richtungsvektor ist dann  $\vec{s} = (\sin \psi, \cos \psi, 0)$ . Der Winkel zwischen beiden Richtungen sei  $\sigma$ ; dann gilt  $\cos \sigma = \vec{a} \cdot \vec{s}$ , was zur einfachen Bedingung

$$(1) \quad \cos \sigma = \cos \varphi \cos \psi$$

führt. Konkret erhält man für Stonehenge (ca. 4500 Jahre alt,  $\varphi = 51,2^\circ$ ,  $\sigma = 66,0^\circ$ ) bzw. Chichén Itzá (ca. 1000 Jahre alt,  $\varphi = 20,7^\circ$ ,  $\sigma = 65,4^\circ$ ) die Werte  $\psi \approx 49,5^\circ$  bzw.  $\psi \approx 63,6^\circ$ . Das Ergebnis kann man in Google-Earth-Bildern verifizieren (vgl. Fig. 4 Mitte).

(e) Denken wir uns die Einheitskugel um  $O$ , dann entsprechen den Winkeln  $\psi$ ,  $\varphi$  und  $\sigma$  die Längen der Großkreisbögen in einem rechtwinkligen spärischen Dreieck  $ABC$ , und Gleichung (1) entspricht der Formel für den pythagoräischen Lehrsatz auf der Kugel („**spärischer Pythagoras**“).

Georg Glaeser

### Mögliche Literatur:

- [1] G. GLAESER: *Geometry and its Applications in Arts, Nature and Technology*, Springer Wien New York, Dez. 2012.
- [2] <http://www1.uni-ak.ac.at/geom/dld/monumental.pdf>
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Tetraeder>
- [4] <http://www.soedernet.de/math/1samstage/07/Kugel.pdf>



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

## MAGIE DER SPIEGELUNGEN

Wenn wir uns im Spiegel betrachten, wo ist dann links und rechts? Eine Schrift sehen wir jedenfalls spiegelverkehrt. Was, wenn wir in eine Kombination aus zwei Spiegeln blicken? Ist das Bild immer „kaleidoskopartig“ und damit wenig aussagekräftig? Ausgehend von Spiegelungen an zwei parallelen bzw. einander rechtwinklig scheidenden Ebenen, soll hier die faszinierende und technisch vielfach anwendbare Spiegelung im Quader untersucht werden. Sie findet sich in Radar-Reflektoren, in den Pentaprismen der Spiegelreflexkameras und den hocheffizienten Augen von Flusskrebse.

### Aufgabenstellung: Spiegelungen in einem Quader

Um das Problem anschaulich in den Griff zu bekommen, betrachten wir verschiedene Teilaufgaben.

#### (a) Einfache Spiegelung an einer Spiegelebene

Ein virtuelles gespiegeltes Objekt verhält sich optisch wie das Original, und wir sehen gespiegelte „virtuelle Gegenwelten“ durch das „Spiegelfenster“. Bezogen auf die Spiegelebene wird nicht Links und Rechts vertauscht, sondern Vorne und Hinten. Original und gespiegeltes Objekt sind gegensinnig kongruent, können also nicht durch Drehungen oder Schiebungen zur Deckung gebracht werden.

#### (b) Mehrfach-Spiegelung an zwei parallelen Spiegeln



Betrachten wir das Verwirrspiel mit zwei parallelen Spiegeln in Figur 1: Der Fotograf konnte offensichtlich durch unterschiedliche Entfernungseinstellung jede beliebige der zur Auswahl stehenden Originale oder Spiegelungen scharfstellen: Rein optisch kann nicht zwischen Original und virtuellen Objekten unterschieden werden, sodass nicht einmal sichergestellt ist, dass die abgebildete Person



tatsächlich als solche zu sehen ist – dies hängt von der verwendeten Brennweite (i.W. also von der Öffnung des Sehkegels) ab.

### (c) Mehrfach-Spiegelung an zwei zueinander rechtwinkligen Spiegeln

Jede der beiden Spiegelebenen  $\xi$  (Gleichung z.B.  $x = 0$ ) und  $\eta$  (Gleichung z.B.  $y = 0$ ) erzeugt zunächst ein virtuelles – gewöhnlich gespiegeltes – Gegenstück  $\Omega_x$  (Vorzeichenänderung bei den  $x$ -Werten) bzw.  $\Omega_y$  ( $y$ -Werte umgepolt) (Fig. 2). Die beiden Objekte sind gegensinnig kongruent und – vom Standpunkt der Wahrnehmung – dem Original  $\Omega$  ebenbürtig.

Konsequenterweise hat also  $\Omega_x$  ein virtuelles Gegenstück  $\Omega_{xy}$  durch Spiegelung an  $\eta$ , und ebenso  $\Omega_y$  ein virtuelles Gegenstück  $\Omega_{yx}$  durch Spiegelung an  $\xi$ . Wegen der speziellen Lage der Spiegelebenen ( $\xi \perp \eta$ ) sind die beiden neuen

Objekte allerdings ident:  $\Omega^* = \Omega_{xy} = \Omega_{yx}$ . Sie können überdies nur durch das jeweilige „Spiegelfenster“ – teilweise – gesehen werden. Der mit  $\Omega_{yx}$  beschriftete Teil entsteht dabei durch Spiegelung des im rechten Spiegelfenster sichtbaren virtuellen Objektes  $\Omega_y$  am linken Spiegelfenster.



Figur 2

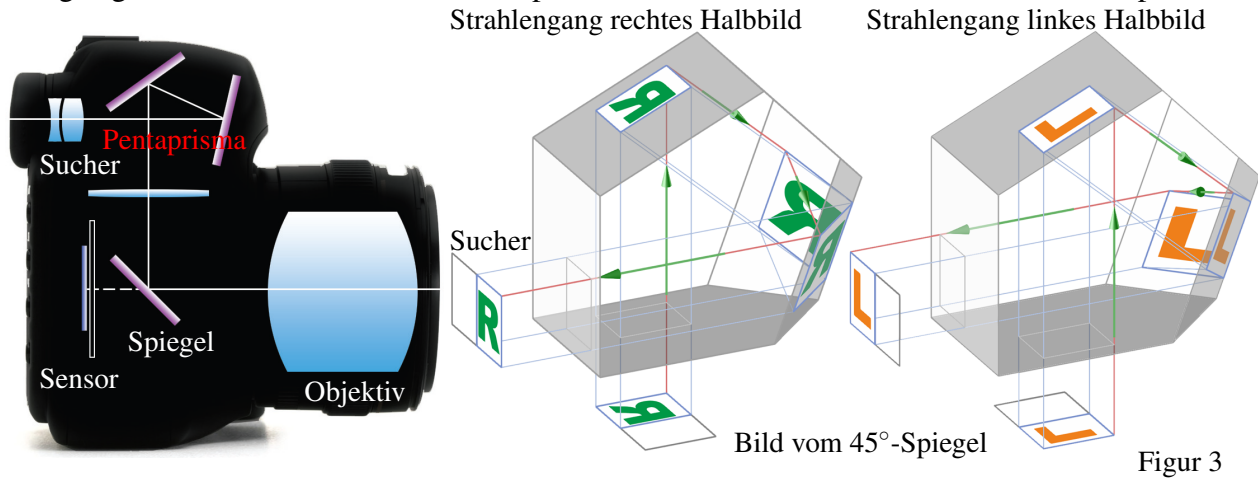
Die beiden Spiegelfenster berühren einander längs der Schnittkante  $s = \xi \cup \eta$  (bei unserer Wahl die  $z$ -Achse), verschmelzen also zu einem einzigen Fenster, das aus zwei aufeinander senkrecht stehenden Rechtecken besteht. Durch dieses kann unser Objekt  $\Omega^*$  betrachtet werden. Es entstand durch zweimalige Spiegelung und ist daher wieder *gleichsinnig* kongruent. Die beiden gleichsinnig kongruenten Objekte  $\Omega$  und  $\Omega^*$  können somit durch eine Drehung um  $180^\circ$  um die Schnittachse  $s$  der Spiegelebenen, oder aber durch eine axiale Spiegelung an  $s$  ineinander übergeführt werden. Dabei werden erstmalig tatsächlich Links und Rechts vertauscht, und Schriftzüge erscheinen nicht spiegelverkehrt, sondern sind wie gewöhnlich lesbar.

Beim Foto (Fig. 2) wurde ein Weitwinkelobjektiv verwendet, um die „Hilfsobjekte“  $\Omega_x$  und  $\Omega_y$  zur Gänze sichtbar zu machen. In der Praxis (auch beim menschlichen Sehen) ist der Sehwinkel kleiner, und man sieht dann nur noch  $\Omega^*$  im Bild – einem gewöhnlichen Spiegelbild zwar vergleichbar, aber mit *vertauschtem Links und Rechts*.

**Anwendung beim Sucher einer Spiegelreflexkamera:** Jede solche Kamera hat eine genial-einfache Erfindung eingebaut: Durch das Objektiv gelangen die Lichtstrahlen auf den Sensor. Das Bild wird dabei um  $180^\circ$  gedreht, sodass es hinter dem Objektiv auf dem Kopf zu stehen scheint. Man will genau dieses Bild schon vorher durch den Sucher sehen, allerdings natürlich aufrecht stehend. Zwischen Objektiv und Sensor ist ein unter  $45^\circ$  gekippter Spiegel eingeschoben, der erst beim eigentlichen Fotografieren hochgeklappt wird. Ein dazu parallel liegender Spiegel würde das Bild wieder in den Sucher lenken, allerdings immer noch gedreht. Diese Drehung korrigiert stattdessen ein in der Kamera liegendes fünfseitiges (innen verspiegeltes) Prisma. Der Klapp-Spiegel lenkt die einfallenden Lichtstrahlen nach oben in dieses Prisma. Dort wird zunächst zweifach gespiegelt. Nach insgesamt drei Spiegelungen erscheint das Bild spiegelverkehrt im Sucher. Um es „im letzten



Augenblick“ umzudrehen, schaltet man eine „Dachkante“ ein (zwei einander rechtwinklig scheidende Ebenen, die, wie Fig. 3 zeigt zwei zusätzliche Spiegelungen bewerkstelligen). Man spricht hier gelegentlich auch von einem „Wendeprisma“, aber auch von einem „Dachkant-Pentaprisma“.

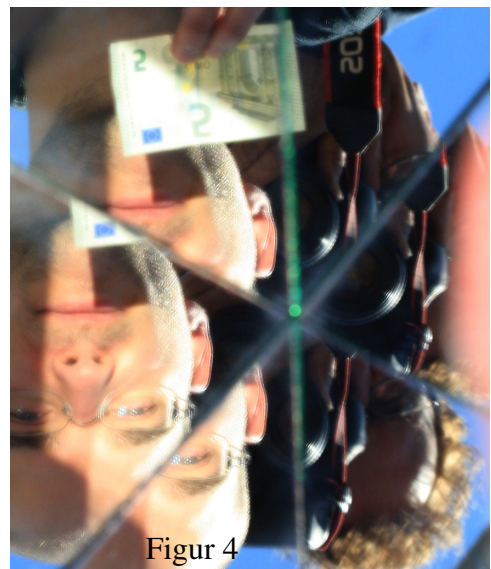


Figur 3

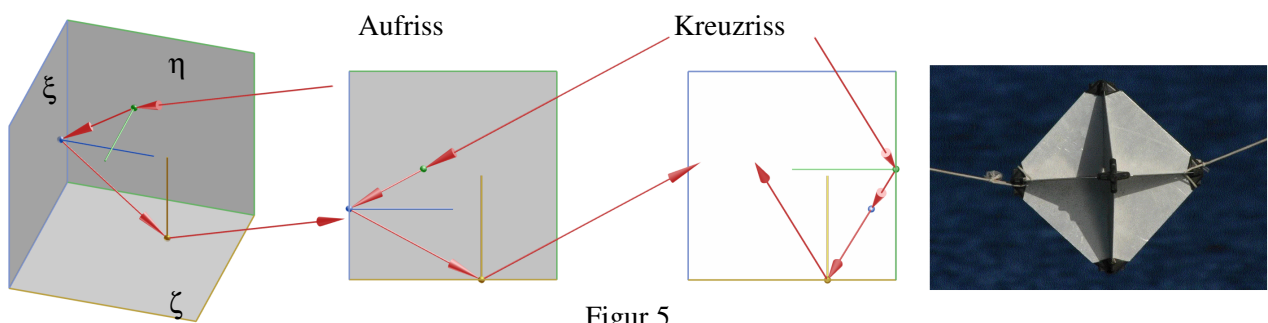
#### (d) Spiegelung im Quadereck

Schalten wir jetzt eine dritte Spiegelebene  $\zeta$  rechtwinklig zu den schon vorhandenen Ebenen  $\xi$  und  $\eta$  ein (Gleichung z.B.  $z = 0$ ). Wird an ihr gespiegelt, werden die  $z$ -Werte umgepolt. Die Punkte  $(x, y, z)$  eines Objekts  $\Omega$ , das an allen drei Ebenen genau einmal gespiegelt wird, haben dann die Koordinaten  $(-x, -y, -z)$ .  $\Omega_{xyz}$  entspricht somit einer Punktspiegelung am Schnittpunkt aller Ebenen. Es erscheint am Foto spiegelverkehrt und am Kopf stehend.

Fig. 4 zeigt, wie in so ein Spiegeleck (mit einem Teleobjektiv) hineinfotografiert wurde. Bei exakter Rechtwinkligkeit aller Ebenen hätten sich alle Teilbilder perfekt zu einem – am Kopf stehenden – Bild vereinigt. Durch die Ungenauigkeit der Winkel sieht man, wie sich die sechs Spiegelbilder  $\Omega_{xyz}$ ,  $\Omega_{yxz}$ ,  $\Omega_{zxy}$  usw. leicht unterscheiden. Am mit abgebildeten Fünf-Euro-Schein erkennt man, dass das Bild (wenn perfekt zusammengesetzt) Schriften spiegelverkehrt erscheinen lässt.



Figur 4



Figur 5

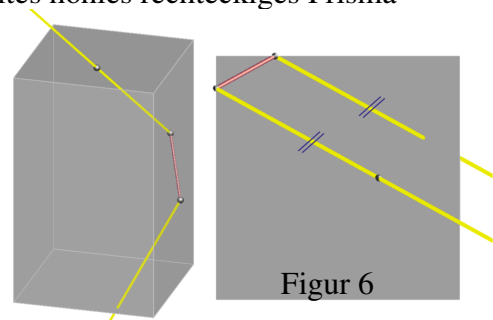
Fig. 5 zeigt den Strahlengang beim Eintreffen eines Lichtstrahls in eine Quaderecke. Weil in jedem Hauptriss das klassische „Billard-Problem“ zu erkennen ist, tritt der Lichtstrahl parallel zur Einfallsrichtung aus (es werden beim Richtungsvektor die einzelnen Koordinaten umgepolt).

Auch hier gibt es nützliche Anwendungen, etwa beim Sucher im Teleskop. Damit das Bild dort nicht spiegelverkehrt erscheint, wird „schnell noch“ am Schluss in bewährter Weise ein Dachkant eingebaut.

Eine weitere Anwendung ist der Radarreflektor (Fig. 5 rechts), der an vielen Segelschiffen baumelt. Egal, aus welcher Richtung das Schiff angepeilt wird – die Strahlen kommen zum Sender zurück. Auch die „Katzenaugen“ in den orangefarbenen Reflektoren der Fahrräder haben Quaderecken eingestanz: Aus welcher Richtung ein Autoscheinwerfer das Rad anstrahlt: Der Lenker des Autos sieht das Aufleuchten der Reflektoren.

(e) Der Durchgang eines Lichtstrahls durch ein verspiegeltes hohles rechteckiges Prisma

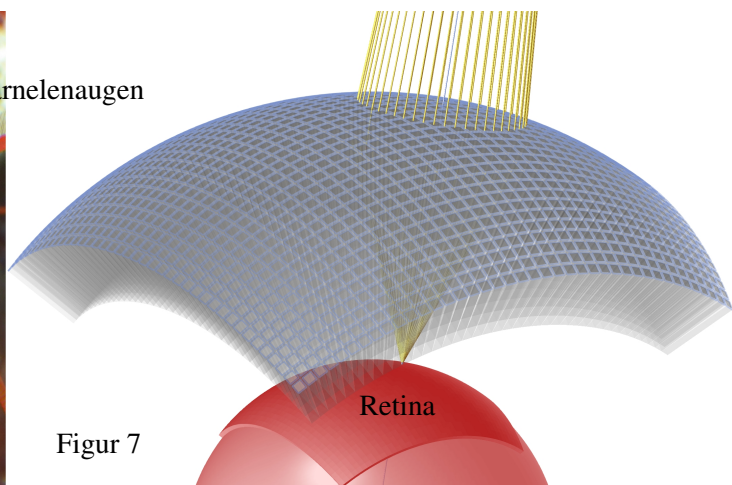
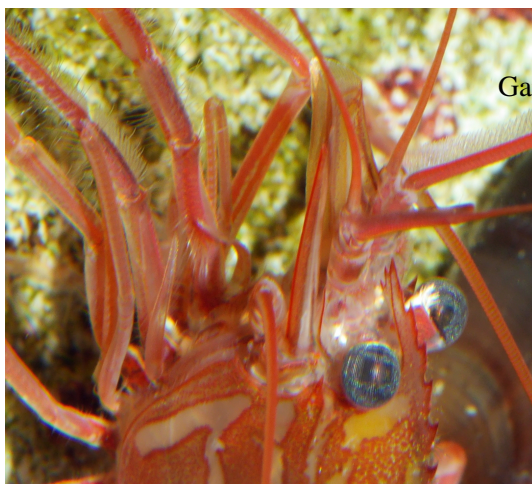
Fig. 6 zeigt, wie ein Lichtstrahl ein solches durchwandern kann. Die Anzahl und Aufeinanderfolge der Reflexionen entscheidet, in welcher Richtung er austritt. Der angegebene Fall ist besonders interessant: In der Draufsicht (ganz rechts) verlässt der Strahl das Prisma parallel zum eingehenden Strahl, allerdings hat die z-Komponente des Richtungsvektors nicht das Vorzeichen gewechselt.



Ist der Durchmesser des Prismas sehr klein, gilt mit guter Näherung: Der Lichtstrahl verhält sich so, als ob er an einer achsenparallelen Ebene (senkrecht zum Grundriss des einfallenden Strahls) gespiegelt würde. Dies machen sich Flusskrebse und Garnelen zunutze, die tausende mikroskopisch kleine quadratische Spiegelprismen an der sphärisch gekrümmten Oberfläche ihrer Augen haben. Dadurch werden parallele Lichtstrahlen mittels Reflexion so auf eine konzentrische kugelförmige Netzhaut gebündelt, dass dort ein aufrechtes, lichtstarkes Bild der Umgebung entsteht (Fig. 7).

Georg Glaeser

- [1] G. GLAESER: *Wie aus der Zahl ein Zebra wird*, Spektrum Springer Heidelberg, 2010.
- [2] G. GLAESER, H. PAULUS: *Die Evolution des Auges – ein Fotoshooting*, Spektrum Springer Heidelberg, Juli 2013.



Figur 7



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

## Proportionen – ein Werkzeug zum qualitativen Verständnis vieler mathematischer Fragen

Zwei Größen seien in Beziehung zueinander. Oft stellt sich die Frage: Was passiert mit der zweiten Größe, wenn man die erste verdoppelt, verdreifacht oder allgemeiner ver- $k$ -facht. In einfachen Spezialfällen spricht man von direkter oder indirekter Proportionalität, direkt oder indirekt quadratischer Proportionalität, usw.

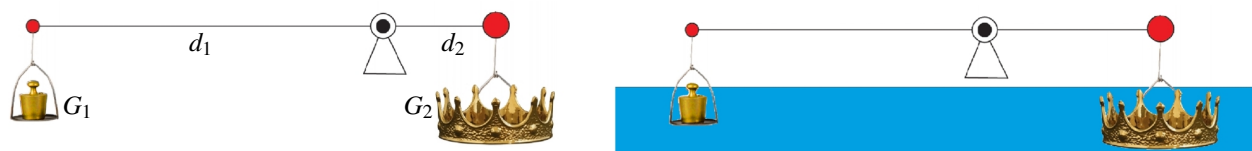


Fig. 1: Der Gold-Test des Archimedes:  $G_1 : G_2 = d_2 : d_1$

Ein typisches Beispiel für indirekte Proportionalität ist die Balkenwaage. Fig. 1 illustriert, wie Archimedes durch Anwendung zweier seiner Erfindungen (Hebelgesetz und Auftrieb) in Sekunden-schnelle feststellen konnte, ob die Dichte der Krone geringer als die Dichte von reinem Gold war (das Testgewicht muss aus reinem Gold sein): Wenn der Lagerpunkt nach dem Eintauchen in Wasser in Richtung Testgewicht zu verschieben ist, beinhaltet die Krone leichtere Materialien.

Die folgenden beiden Beispiel-Gruppen sollen zeigen, wie relativ einfach man auch vermeintlich komplizierte Berechnungen argumentieren und damit den Mathematikunterricht fächerübergreifend und spannend gestalten kann. Der Lerneffekt ist dabei vielleicht sogar größer als beim Herumrechnen mit Formeln. Indem man gelegentlich durch großzügiges Runden zu „schönen Zahlen“ übergeht, kann man auch das oft vernachlässigte Kopfrechnen trainieren (z.B.  $\sqrt[3]{25} \approx \sqrt[3]{27} = 3$ ).

### (a) Ein Paradoxon mit großen Auswirkungen

Leicht einzusehen, wenn auch nicht trivial, gelten folgende beiden Sätze:

(1) *Skaliert man einen beliebigen Körper mit dem Faktor  $k$ , dann nimmt seine Oberfläche – aber auch jeder beliebige Querschnitt – mit dem Faktor  $k^2$  zu.* Zum Beweis nähert man Oberfläche oder Querschnitte des Körpers mit beliebiger Genauigkeit durch winzige Dreiecke an (Triangulierung). Für jedes einzelne Dreieck gilt der Satz, daher auch für die Summe aller Flächeninhalte.

(2) *Skaliert man einen beliebigen Körper mit dem Faktor  $k$ , dann nimmt sein Volumen mit dem Faktor  $k^3$  zu.* Zum Beweis nähert man den Körper mit beliebiger Genauigkeit durch winzige Würfel an (Voxelierung). Für jeden einzelnen Würfel gilt der Satz, daher auch für die Summe aller Volumina.

Rechenbeispiel: Als die alten Ägypter beim Bau ihrer großen Pyramiden die halbe Bauhöhe erreichten, war bereits  $1 - (1/2)^3 = 7/8$  des Materials „verbaut“. Die heute nicht mehr vorhandene glatte Oberfläche aus Kalkstein machte in der unteren Hälfte  $1 - (1/2)^2 = 3/4$  aus.



Aus (1) und (2) folgt dann bereits ein Satz, den man als *Oberflächen-Volumina-Paradoxon* bezeichnen könnte:

(3) *Skaliert man einen beliebigen Körper mit dem Faktor  $k$ , verändert sich das Verhältnis von Oberfläche bzw. Querschnitt zum Volumen mit dem Faktor  $1/k$ .* Das Verhältnis ist also von der absoluten Größe abhängig, was für einen geometrisch-mathematisch denkenden Menschen zunächst gewöhnungsbedürftig ist.

Das Paradoxon (3) hat in der Natur weitreichende Konsequenzen. Hier nur wenige Beispiele (dutzende andere sind z.B. in [1] zu finden, biologische „Anwendungen“ sind auch in [2] gut erklärt):

*Klassische Beispiele mit „wirklich ähnlichen“ Objekten:*

- Kleinere Eier sind schneller „kernweich zu kochen“ als große, weil sie im Verhältnis eine größere Oberfläche haben. In der Natur: Ein Straußenei hat etwa die 25-fache Masse eines Hühnereis. Der Ähnlichkeitsfaktor ist daher  $k = \sqrt[3]{25} \approx 3$ , und ein Hühnerei hat im Verhältnis zum Volumen die dreifache Oberfläche.

Im Weltall: Kleine Planeten kühlen schneller ab als große. Unser Mond hat, weil er nur  $1/4$  des Erddurchmessers hat, im Verhältnis zum Volumen die vierfache Oberfläche wie die Erde und ist deshalb (obwohl sogar etwas jünger) schon ausgekühlt.

- Große Luftblasen steigen schneller auf als kleine. Vergrößert man nämlich eine Luftblase mit dem Faktor  $k$ , so nimmt das Volumen und damit der Auftrieb mit dem Faktor  $k^3$  zu, der für den Wasserwiderstand verantwortliche Querschnitt aber nur mit dem Faktor  $k^2$ .

- Ein Wassertröpfchen mit 1,3 mm Durchmesser hat, verglichen mit der Erdkugel (ca. 13000 km Durchmesser), eine  $10^{10}$ -Mal so große Oberfläche im Verhältnis zum Volumen. Dementsprechend wird es – im Gegensatz zur Erde – von der Oberflächenspannung zur Kugel geformt.

*Qualitative Aussagen mit nur „teilweise ähnlichen“ Objekten (die Schlussfolgerungen gelten also nur für starke Größenunterschiede  $k \gg 1$ ):*

Fig. 2: Dumbo vs. Rosenkäfer



Fig. 3: Robbe vs. weißer Hai



- Große Tiere haben im Verhältnis eine kleinere Oberfläche und leiden in heißen Gegenden oft an Überhitzung: Die „Eigenwärme“ kann nur schwer abgegeben werden und summiert sich bei zusätzlicher Hitzeeinwirkung so sehr, dass bald eine kritische Körpertemperatur erreicht wird, bei der das Eiweiß im Gehirn gefährdet ist. In kalter Umgebung hingegen frieren große Tiere weniger.

Im Gegensatz dazu haben kleine warmblütige Tiere fast immer Probleme mit der Kälte, und eben deshalb gibt es eine Untergrenze der Körpergröße von Säugetieren und Vögeln (Spitzmaus, Kolibri).

Konkrete Rechenaufgabe: Vergrößert man einen Delfin mit dem Faktor 10, so erhält man recht genau einen großen Wal. Letzterer hat im Verhältnis zu seiner Blutmenge nur noch 1/10 der Oberfläche, kann daher problemlos in den kalten und daher sauerstoffreichen arktischen und antarktischen Gewässern seinen enormen Krill-Bedarf stillen. Zum Gebären der kleinen und dadurch kälteempfindlichen Jungtiere schwimmen die Wale tausende Kilometer in wärmere Gewässer, ohne dort auch nur irgendetwas fressen zu können.

- Der weiße Hai (Fig. 3 unten) kann – obwohl „prinzipiell kaltblütig“ – seine Körpertemperatur wegen des günstigen Verhältnisses Oberfläche zu Volumen und der ständig entstehenden Bewegungsenergie ohne großen Aufwand um bis zu zehn Grad über der Wassertemperatur halten und ist daher agil genug, um auch im kalten Wasser Robben zu jagen. Letztere brauchen enorme Futtermengen, um ihre Körpertemperatur aufrecht zu erhalten.
- Wegen ihrer Ausmaße haben große Wale bzw. Haie einen verhältnismäßig viel geringeren Wasserwiderstand (Querschnitt) bzw. Reibungswiderstand (Kontaktfläche zum Wasser) als kleine.
- Afrikanische Elefanten (Fig. 2 links) haben – im Gegensatz zu praktisch allen kleineren Säugetieren – kein Fell und zusätzlich große Ohren, um die Kühlung des Körpers gewährleisten zu können. Mammuts hatten kleine Ohren und ein Fell und konnten daher sogar in der Eiszeit gut überleben.
- Elefanten haben dicke Beine, weil die Muskelkraft von der Querschnittsfläche (und nicht von der absoluten Größe) des Muskels abhängt, und bei simpler Vergrößerung das Verhältnis Querschnitt zu Volumen (= Gewicht) immer ungünstiger wird. Der Rosenkäfer in Fig. 2 rechts ist „so pyknisch wie Dumbo“, aber um den Faktor  $k = 200$  kleiner. Daher genügt ihm ein proportional wesentlich kleinerer Muskelquerschnitt, um im Verhältnis sogar stärker als der Elefant zu sein.
- Fast alle insektengroßen Tiere können – im Gegensatz zu größeren Tieren – fliegen. Die Oberfläche der Flügel ist im Verhältnis zum Gewicht so groß, dass sich die Tiere fast wie in einem Ölbad an der Luft abstoßen können (siehe z.B. Fig. 2 rechts). Winzige Spinnentiere können sogar ohne Flügel von Winden über hunderte Kilometer transportiert werden.

### **(b) Satelliten-Umlaufzeiten**

Ein Satellit bleibt stabil auf einer nahezu kreisförmigen Bahn, wenn sein Gewicht und die zugehörige Zentripetalkraft gleich groß sind:  $a \cdot m = m \cdot v^2 / r \implies v = \sqrt{a \cdot r}$  mit  $a$  als Erdbeschleunigung im Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt (weil beide Größen in gleicher Weise von seiner Masse abhängen, spielt diese keine Rolle).

Wir vergleichen nun zwei stabile Satellitenbahnen, deren Abstände vom Erdmittelpunkt sich wie  $1 : k$  verhalten. Die Erdbeschleunigungen verhalten sich dann wie  $1 : k^2$  und die Geschwindigkeiten wie  $\sqrt{a \cdot r} : \sqrt{(a/k^2) \cdot (k \cdot r)} = \sqrt{k} : 1$  (d.h., die Bahngeschwindigkeit eines Satelliten nimmt mit zunehmendem Abstand vergleichsweise langsam ab). Weil der zweite Satellit zudem den  $k$ -fachen Umfang zurücklegen muss, verhalten sich die Umlaufzeiten wie  $1 : k^{3/2}$ , was sich mit dem dritten Keplerschen Gesetz („Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Bahnhalbachsen“) deckt.

Wir kennen nun von einem Satelliten Daten: Der Mond hat eine siderische Umlaufzeit von 27,32 Tagen, und sein durchschnittlicher Abstand vom Erdmittelpunkt beträgt 384 000 km. Daraus kann man auf alle anderen Satellitenbahnen schließen:



- *Geostationäre Satelliten* müssen die Erde über dem Äquator in 23 h 56 min (so lange dauert ein siderischer Tag) umkreisen. Derzeit drängeln sich etwa 300 solche Satelliten (Wettersatelliten, TV-Satelliten) auf einer kreisförmigen Bahn. Die Umlaufzeiten, bezogen auf die Mondbahn, verhalten sich gerundet wie  $1 : 27$ , und die Radien daher (mit der „schönen Zahl“ 27 im Kopf gerechnet) wie  $1 : k = 1 : (\sqrt[3]{27})^2 = 1 : 9$ . Der Abstand eines geostationären Satelliten vom Erdmittelpunkt ist daher etwa 42500 km, und die elektrischen Signale brauchen hin und retour immerhin schon mehr als 0,2 Sekunden. Nebenbei: Der Satellit bewegt sich  $\sqrt{k} \approx \sqrt{9} = 3$  Mal so schnell wie der Mond.
- *GPS-Satelliten* haben genau einen halben siderischen Tag Umlaufzeit. Im Verhältnis zum geostationären Satelliten gilt für die Umlaufzeiten  $1 : 2$ , für die Radien daher  $1 : \sqrt[3]{2}^2$ . Letztere fliegen somit im Abstand 28670 km vom Erdmittelpunkt oder in einer Flughöhe von gut 20000 km und fliegen  $\sqrt[3]{2}$  Mal so schnell wie die geostationären Satelliten.

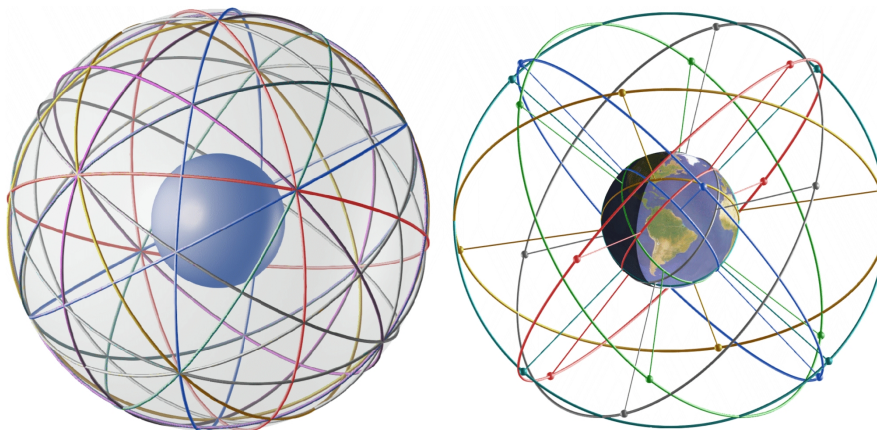


Fig. 4: Verteilung von GPS-Satelliten (links: theoretisch, rechts: praktisch)

Anmerkung zum Problem der Verteilung der (mindestens 24) GPS-Satelliten: Fig.4 links zeigt, wie man theoretisch 30 solcher Satelliten optimal verteilen könnte. Wegen der genau festgelegten Höhe ist es gar nicht so einfach, potentielle Kollisionen zu vermeiden. Mittlerweile fliegen 24 Satelliten in 6 Ebenen, die zum Äquator unter  $55^\circ$  geneigt sind und jeweils durch Rotation um  $60^\circ$  um die Erdachse ineinander übergehen. Die je vier Satelliten jeder Ebene sind exakt gleichverteilt (Fig.4 rechts). Damit sind die nicht-polaren Zonen, in denen mehr als 99% der Menschen leben, etwas bevorzugt.

- Die meisten Satelliten fliegen in *Erdnähe* (Abstand 6700 km vom Erdmittelpunkt). Wir vergleichen wieder mit dem Mond und seinen 656 Stunden Umlaufzeit. Aufgerundet auf eine „schöne Zahl“ ergäbe sich  $k \approx 64$ , und damit eine Umlaufzeit von  $\approx 656/\sqrt[3]{64} \approx 1,3$  h. Tatsächlich sind es einige Minuten mehr.
- Vergleichbare Regeln gelten im ganzen *Planetensystem*. Schon die Mayas wussten: Acht Venusjahren entsprechen ziemlich genau fünf Erdenjahre. Daraus folgt:  $k^{3/2} \approx 5/8 \implies k \approx 0,72$ , sodass die Venus etwa  $3/4$  so weit von der Sonne entfernt ist wie die Erde.

Georg Glaeser

Mögliche Literatur:

- [1] G. Glaeser: *Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik*, 4. Auflage. Springer Spektrum, Heidelberg 2014
- [2] C. Lavers: *Warum haben Elefanten so große Ohren? Dem genialen Bauplan der Tiere auf der Spur*. Bastei Lübbe, 2003



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

## EIN BISSCHEN ZAHLENMAGIE

Zahlen haben stets eine Faszination auf die Menschen ausgeübt. Bei vielen Sachverhalten sagen wir: „Das kann kein Zufall sein.“ In den Werken J.S.BACHs spielt die Zahl 14 eine wichtige Rolle. Damals war weit verbreitet, den Buchstaben des Alphabets Zahlen zuzuordnen ( $A \rightarrow 1, B \rightarrow 2, \dots$ ). Dabei zählten  $I = J$  und  $U = V$  nur einfach. Die Quersumme von BACH ergibt nach dieser Regel 14. Viele seiner Werke signierte Bach mit 29 (JSB)<sup>1</sup>.

### Das magische Quadrat der Ordnung drei

Magische Quadrate haben die Menschen über Jahrtausende beschäftigt. Man versteht darunter quadratische Tabellen ( $n$  Zeilen,  $n$  Spalten), in denen i. Allg. die ersten  $n^2$  natürlichen Zahlen so angeordnet sind, dass die Summe in jeder Zeile, jeder Spalte und zusätzlich in den beiden Diagonalen gleich groß ist. Diese Summe  $s$  ist dann bekannt:

$$s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k, \text{ also etwa für } n = 3: s = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^9 k = \frac{1+2+\dots+9}{3} = \frac{45}{3} = 15.$$

Es gibt im Wesentlichen, also bis auf Spiegelungen und Drehungen, nur ein magisches Quadrat der Ordnung drei. Das „Hexen-Einmaleins“ von GOETHE (Zeichnung von Markus Roskar) aus seinem berühmten „Faust“ kann man mit einiger Fantasie als Anleitung zum Erstellen dieses Quadrats interpretieren – selbst wenn sich GOETHE dazu in Schweigen gehüllt hat und auch andere Interpretationen „in Umlauf sind“:

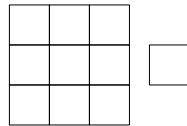


*Du musst versteh'n, aus Eins mach Zehn.  
Die Zwei lass geh'n.  
Die Drei mach gleich,  
So bist Du reich.  
Verlier die Vier.  
Aus Fünf und Sechs,  
So spricht Die Hex',  
Mach Sieben und Acht,  
So ist's vollbracht.  
Die Neun ist eins  
Und Zehn ist keins.  
Das ist das Hexeneinmaleins.  
Faust quittierte diesen Vers übrigens mit  
„Mich dünkt, die Alte spricht im Fieber.“*

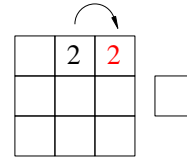
<sup>1</sup><http://www.welt.de/kultur/buehne-konzert/article127271976/Johann-Sebastian-Bach-Fetischist-der-Vierzehn.html>

Hier die Interpretation des Verfassers, zu finden in GEORG GLAESER: *Der mathematische Werkzeugkasten*, 4. Aufl. Springer Spektrum, Heidelberg 2014:<sup>2</sup>

1. „Du musst versteh’n, aus Eins mach Zehn.“ wird nicht auf die Zahlen bezogen, sondern auf die Anzahl der Quadrate! Aus einem kleinen Quadrat mach 10, indem du 9 weitere (in Matrixform) dazu zeichnest (siehe Figur 1).



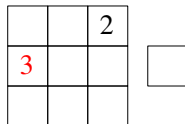
Figur 1. Aus 1 mach 10



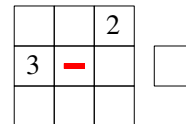
Figur 2. Die 2 lass geh’n

2. „Die Zwei lass geh’n.“ wird wörtlich genommen: die 2 wandert (geht) von der 2. auf die 3. Position (siehe Figur 2).

3. „Die Drei mach gleich, so bist du reich.“: Die 3 wird angeschrieben (mittlerweile an Position 4, siehe Figur 3). Damit ist schon viel gewonnen, wie wir gleich sehen werden.



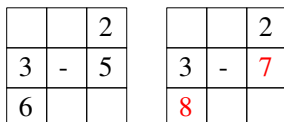
Figur 3. Die 3 mach gleich



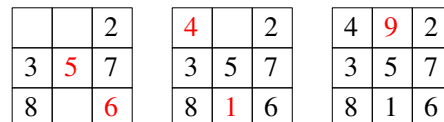
Figur 4. Verlier die vier

4. „Verlier die Vier“: Also schreib’ die 4 nicht an und geh’ zum nächsten Feld (siehe Figur 4).

5. „Aus Fünf und Sechs, So spricht die Hex, Mach Sieben und Acht“: Jetzt kämen 5 und 6 an die Reihe. Stattdessen schreiben wir aber 7 und 8 an (siehe Figur 5).

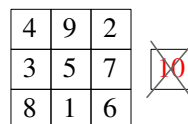


Figur 5. 5, 6 → 7, 8



Figur 6. Vollbracht!

6. „So ist’s vollbracht.“ Das ist der Schlüsselsatz: Es ist tatsächlich vollbracht. Wir können nun der Reihe nach die Summen auf 15 ergänzen (siehe Figur 6)!



Figur 7. 9 ist 1 und 10 ist kein’s

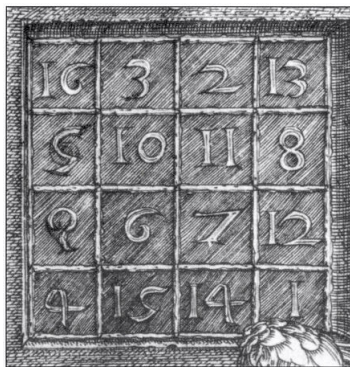
<sup>2</sup>Bei einem ähnlich gelagerten Lösungsversuch <http://www-stud.rbi.informatik.uni-frankfurt.de/~haase/hexenlsg.html> kommen inkonsistenterweise nicht die Zahlen 1 und 9 vor, stattdessen aber 0 und 10. Zudem ist die Summe über die Nebendiagonale 21 und nicht 15.

7. „Die Neun ist eins Und Zehn ist keins. Das ist das Hexeneinmaleins“. Wir nehmen es wörtlich: Neun Quadrate werden zu einem vereinigt, und das zehnte streichen wir weg (siehe Figur 7). Fertig! Viel Spaß beim Wiederholen des Vorgangs ohne die genaue Anleitung – nur unter Verwendung des Texts!

### Magische Quadrate höherer Ordnung

Neben dem magischen Quadrat der Ordnung drei gibt es viele bekannte Beispiele für magische Quadrate höherer Ordnung. Ein klassisches magisches Quadrat der Ordnung 4 (magische Summe 34) wurde von A.DÜRER im Jahre 1514 in einen seiner berühmten Stiche eingezeichnet (siehe Figur 8, [http://de.wikipedia.org/wiki/Melencolia\\_I](http://de.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I)).

Die letzte Zeile ist leicht zu merken: 4, 1514, 1. Die 4 und die 1 entsprechen den Initialen von DÜRER ALBRECHT.



Figur 8. Dürer-Quadrat

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4



Figur 9. Parshva Jaina Tempel in Khajuraho (Indien)

Bemerkenswert ist auch ein magisches Quadrat aus dem 10.-12. Jhdt. in Indien (siehe Figur 9, [http://de.wikipedia.org/wiki/Vollkommen\\_perfektes\\_magisches\\_Quadrat](http://de.wikipedia.org/wiki/Vollkommen_perfektes_magisches_Quadrat), Foto Rainer Typke).

### LITERATUR

[http://www.hp-gramatke.de/magic\\_sq/german/page9000.htm](http://www.hp-gramatke.de/magic_sq/german/page9000.htm) enthält eine Bibliographie von Büchern, die mit magischen Quadraten zu tun haben.

Weitere Interpretationen bzw. Informationen über magische Quadrate:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Hexeneinmaleins>

[http://vs-material.wegerer.at/mathe/pdf\\_m/mal/Hexeneinmaleins.pdf](http://vs-material.wegerer.at/mathe/pdf_m/mal/Hexeneinmaleins.pdf)

<http://www.mathematische-basteleien.de/magquadrat.htm>

Georg Glaeser

Allen Leserinnen und Lesern der Mathe-Briefe wünschen wir ein frohes Weihnachtsfest und ein glückliches und erfolgreiches Neues Jahr 2015!

Die Redaktion





Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

## VERZERRUNGEN, WOHN BEIDE AUGEN BLICKEN: RAUMKOLLINEATIONEN IN FOTOGRAFIE UND STEREOSKOPIE

### Optische Täuschung beim einäugigen Sehen

Wenn wir einäugig auf einen vermeintlichen (im Bild gelben) Quader (Punkte  $P, \dots$ ) blicken, könnte unser Quader unter Umständen ein (im Bild rotes) Polyeder sein, das in gewisser Weise mit dem Quader verwandt ist (Fig. 1): So sollten auch die Eckpunkte  $P^*, \dots$  des „Ersatzquaders“ ebene Polygone bilden, weil wir nicht-ebene Oberflächen wegen der unterschiedlichen Schattierungseffekte

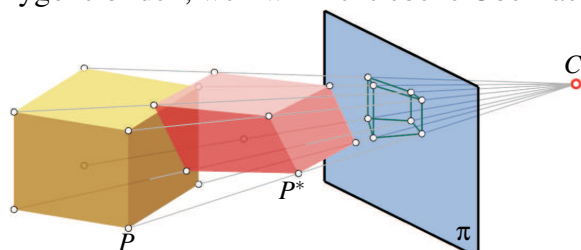


Fig. 1. Polyeder mit identischen Bildern

relativ leicht ausmachen können. Unter den unendlich vielen Möglichkeiten eignen sich besonders gut „perspektiv kollinear“ verzerrte Polyeder. Bei solchen gilt: Entsprechende Punkte (also z.B. die Eckpunkte) liegen auf „Sehstrahlen“ durch das Sehzentrum  $C$ , und Ebenen (also z.B. die Trägerebenen der Seitenflächen) entsprechen Ebenen („Ebenentreue“).

Aus der zweiten Eigenschaft folgt automatisch die „Geradentreue“ und damit „Linearität“, weil ja Geraden als Schnitt zweier Ebenen aufgefasst werden können. Die Verwandtschaft  $P \longleftrightarrow P^*$  ist umkehrbar eindeutig. Solche Raumkollineationen findet man viel öfter, als man glauben möchte: In der Fotografie, der Stereoskopie, der Bühnenbildgestaltung, oder – wie in Fig. 2 – in der Kunst.



Fig. 2. Zwei nur scheinbar ähnliche Szenen: Links gleich große und gleich weit entfernte Statuen, rechts kollinear verzerrte Statuen, deren Abstand nach hinten stark abnimmt.



## Die Gaußsche Kollineation: Kameraobjektive erzeugen räumliche Bilder

Jedes hochwertige Kameraobjektiv erzeugt nach den Gesetzen der geometrischen Optik mithilfe eines komplizierten Linsensystems einen perspektiv kollinearen (virtuellen) *Raum* hinter dem Linsenzentrum (die Transformation heißt Gaußsche Kollineation)<sup>1</sup>.

Zur Konstruktion entsprechender Punkte  $P$  und  $P^*$  verwendet man folgende beiden Regeln: Die sog. Hauptstrahlen  $h$  durch das Linsenzentrum  $C$  bleiben ungebrochen ( $h = h^*$ ), während Lichtstrahlen  $s$  parallel zur optischen Achse an der „Hauptebe“  $\gamma$  zu Strahlen  $s^*$  durch den Brennpunkt  $F^*$  (Abstand vom Linsenzentrum = Brennweite  $f$ ) gebrochen werden. Der Bildpunkt  $P^* = h^* \cap s^*$  entsteht i. Allg. nicht in einer vorgegebenen Bildebene  $\pi$ . Es liegt also zunächst ein echt „dreidimensionales Bild“ vor, und nicht – wie üblicherweise vereinfachend gesagt wird – ein ebenes. Aus der Fliege in Fig. 3 rechts wird also eine virtuelle, kollinear verzerrte Fliege. Diese erzeugt – aus dem Linsenzentrum  $C$  projiziert – genau dasselbe fotografische Bild auf dem Sensor (bzw. der Filmebene)  $\pi$  (und auch im Prismensucher bzw. am Minibildschirm auf der Kamerarückseite) wie das Original!

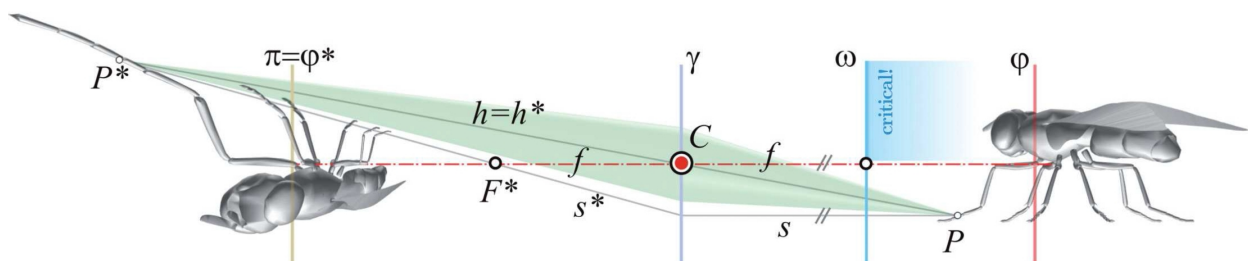


Fig. 3. Rechts das Original, links das virtuelle, kollinear verzerrte 3D-Bild, das zum Foto in in der Sensorebene (Filmebene)  $\pi$  führt

Damit werden nur Punkte, die in der sogenannten – der Sensorebene  $\pi$  entsprechenden – „Schärfenebene“  $\varphi = \pi^*$  (und damit wegen der Umkehrbarkeit auch  $\varphi^* = \pi$ ) liegen, als *Punkte* in  $\pi$  abgebildet, während sich die anderen Punkte als „Unschärfekreise“ (Schnitte schiefer Kreiskegel durch die Blendenöffnung) abbilden. Punkte, die in der kritischen Ebene  $\omega$  im Abstand  $f$  vor der Hauptebe  $\gamma$  liegen, haben Bildpunkte im Unendlichen. Punkte, die noch näher an  $\gamma$  liegen, haben nur theoretisch Bildpunkte  $P^*$ , welche auf derselben Seite der Hauptebe  $\gamma$  wie  $P$  liegen.

Wir beweisen nun, dass es sich tatsächlich um eine geradentreue Transformation des Raums handelt: Denken wir uns eine beliebige Gerade  $g$  im Raum festgelegt als Schnitt zweier spezieller Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ :  $\varepsilon_1$  enthält  $g$  und ist parallel zur optischen Achse,  $\varepsilon_2$  ist die Verbindungsebene von  $g$  und dem Linsenzentrum  $C$ . Nach den Regeln der geometrischen Optik wird  $\varepsilon_1$  an der Hauptebe  $\gamma \ni C$  in eine Ebene  $\varepsilon_1^*$  durch den Brennpunkt  $F^*$  (im Abstand der Brennweite  $f$  von  $C$ ) gebrochen, während  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^*$  ungebrochen bleibt. Damit ist  $g^* = \varepsilon_1^* \cap \varepsilon_2^*$  tatsächlich eine Gerade.

## Zweiäugiges Sehen

Betrachtet man unseren Quader von vorn mit *beiden* Augen  $L$  und  $R$  (Fig. 4), scheint es deutlich schwieriger, von einem kollinear verzerrten Polyeder getäuscht zu werden. Wir werden bald sehen, dass die Vorstellungskraft des Gehirns eine Täuschung dennoch ermöglicht, sodass „man sieht, was man sehen will“. Durch die unterschiedlichen Tiefen (Abstände von der „Verschwindungsebene“ durch die beiden Augpunkte senkrecht zur Haupt-Blickrichtung) ergeben sich mehr oder weniger

<sup>1</sup><http://www1.uni-ak.ac.at/geom/files/3d-images-in-photography.pdf>

differierende Sehwinkel für die einzelnen Punkte, die auf zwei Fotos mit parallelen optischen Achsen als „Parallaxe“ bezeichnet werden: Der Unterschied zwischen rechtem und linkem Bild  $P_L$  und  $P_R$  ist umso größer, je geringere Tiefe die Punkte haben.  $P_L$  und  $P_R$  liegen auf einer Parallelen zur Verbindungsachse der beiden Augen (Fig. 4).

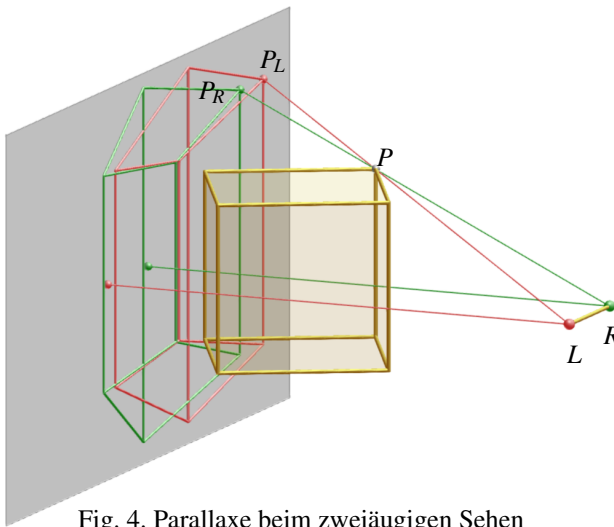


Fig. 4. Parallaxe beim zweiäugigen Sehen

Der Parallaxenabstand des Daumens auf der ausgestreckten Hand erzeugt z.B. bei abwechselndem Schließen des linken bzw. rechten Auges den bekannten „Daumensprung“ vor dem nahezu konstant erscheinenden weit entfernten Hintergrund. Weil die Armlänge bis zu einem gewissen Grad zum Augenabstand proportional ist, kann dieses Maß zum Abschätzen von Entfernungen von Objekten bzw. der Größe von Objekten bei bekannter Entfernung herangezogen werden (Faustregel: Die Entfernung eines Objekts ist etwa zehnmal so groß wie Zonenbreite, die man beim Objekt mit einem Daumensprung erfasst).

Am Sternenhimmel gibt es gar keine Parallaxe mehr, sodass wir optisch die Entfernung von Sternen nicht unmittelbar feststellen können. Indem wir den Durchmesser der Erdbahn (300 Millionen km) ausnützen, können wir allerdings im Halbjahresabstand zumindest von relativ nahen Sternen Bilder mit messbarer Parallaxe machen.

### Stereoskopisches Sehen



Fig. 5. Durch „Kreuzblick“ (Schielen) und notfalls zusätzliche Variation des Abstands schaffen (Zoomen) es die meisten Personen, ein dreidimensionales Objekt zu erkennen.

Darunter verstehen wir das gleichzeitige Betrachten zweier speziell angeordneter leicht unterschiedlicher ebener Perspektiven (also z.B. Fotos), sodass durch Schnitt der Sehstrahlen ein räumlicher Eindruck entsteht. Projiziert man z.B. die beiden Bilder unseres Quaders in Fig. 4 so auf eine Leinwand, dass die Schnittpunkte der beiden Kameraachsen mit der Leinwand den beim Menschen üblichen Augenabstand von 60-65mm haben, und postiert sich mit beiden Augen an die Stelle der

virtuell bei der Vergrößerung aus dem Mittelpunkt des stereoskopischen Bildes entstehenden Linsezentren, dann liegt exakt dieselbe Raumsituation wie beim Fotografieren vor, und unser Gehirn kann die Bilder wieder zum ursprünglichen räumlichen Objekt vereinen. Hilfreich ist es dabei, wenn durch Tricks erreicht wird, dass das linke Auge nur das von der linken Kamera erzeugte Bild und das rechte nur das rechte Bild sehen kann (früher wurde das mit sog. Rot-Grün-Brillen erreicht, heute verwendet man Polarisations- oder Shutterbrillen)<sup>2</sup>.

### Das Gehirn justiert kollinear verzerrte Bilder nach

Das richtige Erstellen und Anordnen der Bilder erscheint sensibel: Nur wenn beides „kalibriert“ und auf den entsprechenden Betrachter maßgeschneidert ist, kann man die *exakte* Wiederherstellung der Raumsituation erwarten. In fast allen Fällen wird unser Quader nicht exakt als Quader erscheinen, auch wenn die meisten Betrachter ihn als solchen identifizieren würden.

Fig. 5 soll ein Testbild für den Leser sein. Je nach Größe des Bildstreifens kann man durch sog. „Kreuzblick“ das räumliche Objekt in der Mitte „herauswachsen“ sehen. Die Blüte wurde aus geringer Distanz zweimal mit paralleler optischer Achse und weniger als 1 cm Abstand der optischen Achsen fotografiert (dieser Abstand wird beim „Ausdrucken“ bzw. projizieren an die Wand vergrößert!). Schafft eine Testperson durch weiteres Vergrößern oder Verkleinern des Bildstreifens – z.B. am Computerbildschirm bzw. mittels Projektor – einen besseren räumlichen Eindruck zu erreichen, wurde der Achsabstand dem eigenen Augenabstand angepasst. Bei leichtem Bewegen des Kopfes (und Augenachse parallel zum Bildschirm bzw. Ausdruck) verändert das dreidimensionale Bild seine Proportionen ein wenig, ohne dass der räumliche Eindruck verschwindet.

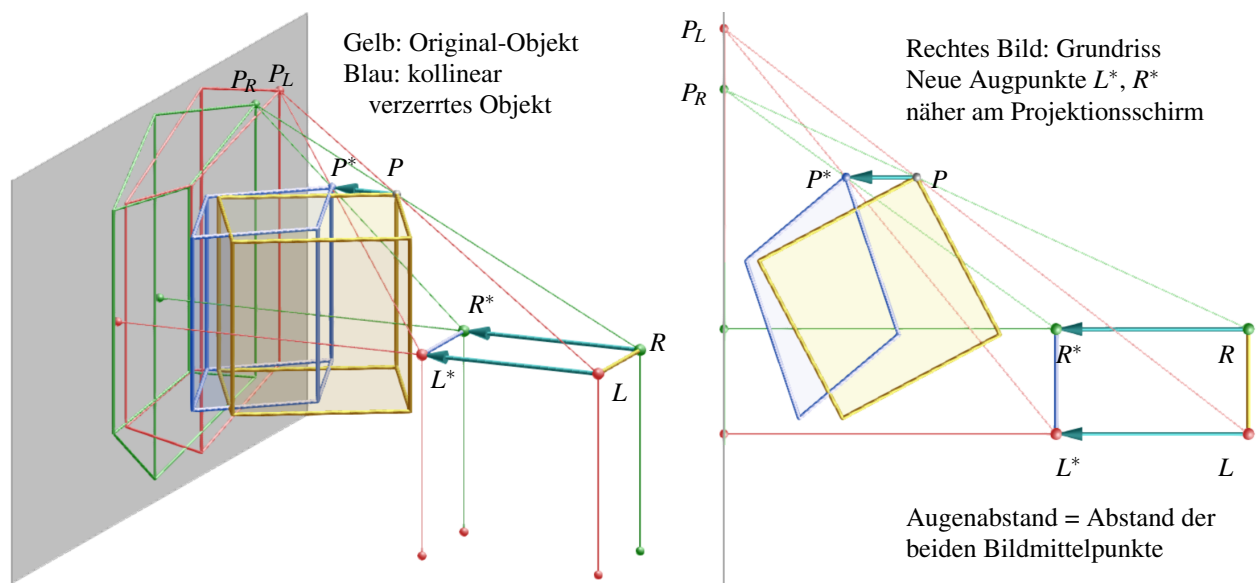


Fig. 6 Wenn wir – bei richtigem Augenabstand – den Abstand ändern, wird das Objekt nur gedehnt oder gestaucht.

Wir wollen nun zeigen, dass wir i.Allg. Raumkollineationen des ursprünglichen Objekts sehen. Beginnen wir mit dem einfachsten Fall: Wir projizieren – wie in Fig. 4 – so, dass die Durchstoßpunkte der Kameraachsen (das sind im Bild die Mittelpunkte bzw. Diagonalenschnittpunkte der Originalfotos) den menschlichen Augenabstand haben ( $\pm 65$  mm bei Männern,  $\pm 62$  mm bei Frauen). Bei dieser Skalierung ergibt sich eine genau festgelegte Position der beiden Augen, die den

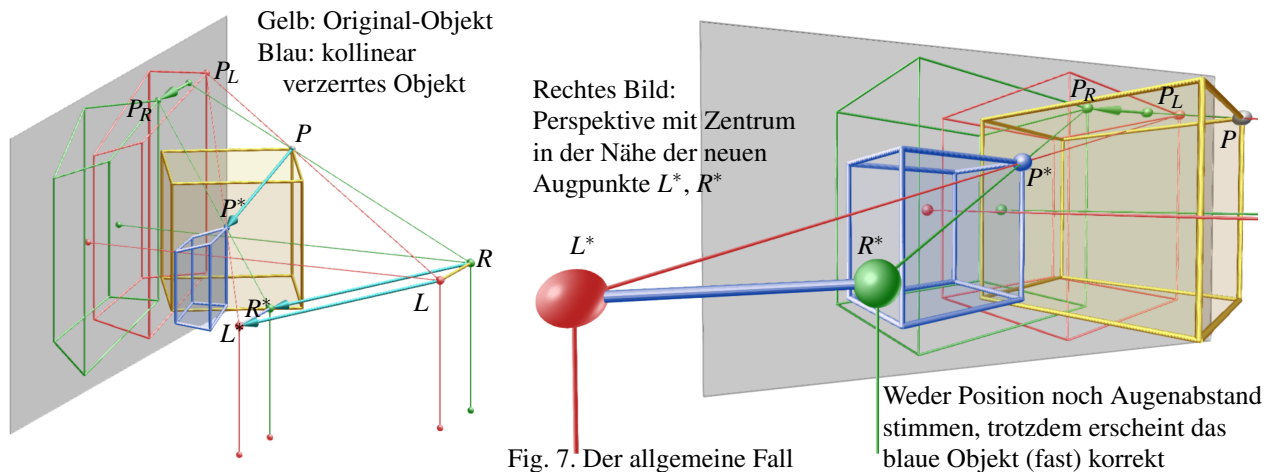
<sup>2</sup>Siehe dazu z.B. <http://www.maric-media.com/so-funktioniert-stereoskopie/> bzw. [http://de.wikipedia.org/wiki/Stereoskopisches\\_Sehen](http://de.wikipedia.org/wiki/Stereoskopisches_Sehen)

Linsenzentren der beiden Kameras entsprechen. Was passiert nun, wenn wir unsere Augen längs der Kameraachsen bewegen?

Fig. 6 zeigt (Strahlensatz!), dass sich das räumliche Ergebnis relativ „harmlos“ ändert: Das ursprüngliche Objekt wird nur gedehnt oder gestaucht (orthogonal affin verzerrt). Diese spezielle Kollineation ist parallelen- und teilverhältnistreu. Letzteres ändert sich auch nicht, wenn man sich (bei paralleler Augenachse) im Raum herumbewegt. Die Verzerrung wird abgeschwächt durch die Tatsache, dass man sich z.B. bei der Stauchung näher am vermeintlichen Raumobjekt befindet und die extremere Perspektive auch eine stärkere Tiefenwirkung suggeriert.

### Eine robuste Sache...

Stimmt der Augenabstand nicht mit dem Abstand der Mittelpunkte (Diagonalschnittpunkte) der beiden Original-Bilder überein, ist das rekonstruierte Raumobjekt immer noch *nur linear verzerrt* (perspektiv kollinear zum Original). Das ist sogar noch dann der Fall, wenn man linkes und rechtes Bild gegeneinander verschiebt. Fig. 7 rechts demonstriert, dass sich auch in diesem allgemeinen Fall subjektiv nicht allzu viel ändert, weil man ja das neue Objekt wieder aus einer anderen Perspektive sieht.



Wir wollen gleich für den allgemeinen Fall beweisen (Fig. 7), dass die Abbildung *Original*  $\longleftrightarrow$  *virtuelles Objekt* in jedem Fall linear, also geradentreu ist: Sei  $g$  eine Gerade im realen Raum. Ihr entsprechen zwei Bildgeraden  $g_L$  oder  $g_R$  im Schnitt der Bildebene mit den Sehebenen durch  $L$  und  $R$ . Nun wird aus zwei neuen Punkten  $L^*$  und  $R^*$  projiziert, was auf den Schnitt  $g^*$  zweier neuer Sehebenen führt. Es muss jedoch die Achse  $L^*R^*$  parallel zur Achse  $LR$  sein (was automatisch bedeutet, dass beide verschobenen Bilder wieder „in der gleichen Höhe sind“), denn sonst schneiden einander die neuen Sehstrahlen nicht mehr und der Raumeindruck „bricht zusammen“.

Das Rekonstruieren aus zwei Perspektiven funktioniert also recht unkritisch. Das gilt sogar für „nicht-klassische Perspektiven“, also z.B. „Fischaugenperspektiven“, die bei den beliebten „Actioncameras“ auftreten: Man sieht dann *räumliche* Fischaugenperspektiven! Bei nicht-technischen Objekten ohne ausgeprägte rechte Winkel (Fig. 5) fällt das kaum auf.

### ... und ein relativierender Nachsatz

Trotz der obigen Ergebnisse werden stereoskopische Fotos und Filme nicht von allen gleichermaßen beeindruckend empfunden. Während manche Personen Raumbilder auf Anhieb aus allen möglichen Positionen sehen, brauchen andere dazu für sie maßgeschneiderte Bedingungen und klagen nach geraumer Zeit mitunter über Schwindel oder Kopfschmerzen.

Georg Glaeser