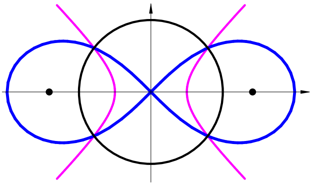
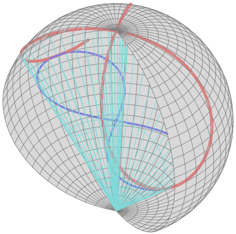




Eine Verallgemeinerung der Viviani-Kurve

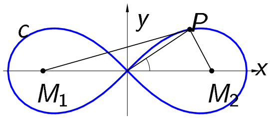
Martin Peternell

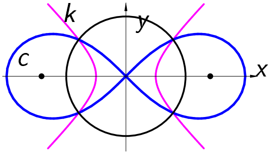
Technische Universität Wien,
Institut für diskrete Mathematik und Geometrie

Lehrerfortbildung Strobl 2011

Die Achterschleife

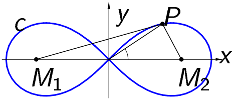
- Die Lemniskate ist das Zeichen der Vollendung, das Symbol der Unendlichkeit.
- Sie ist die symbolische Darstellung der Gegensätze, die, von Irrungen befreit, ein Ganzes geben.
- Sie ist ein Symbol des ewigen Kreislaufs, des auf und ab, durch dessen Rhythmus Schwingung erzeugt wird.
- Sie ist ein Symbol des Gleichgewichts in Leben.

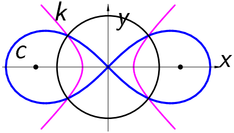




Die Achterschleife in der Pädagogik

- Sie erhöht die taktil-kinestätische Wahrnehmung und die Feinmotorik.
- Erhöht die Koordinationsleistung und die Konzentration.
- Durch die Bewegung längs der Achterschleife werden beide Gehirnhälften aktiviert.
- ...

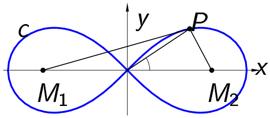




Bernoulli'sche Lemniskate

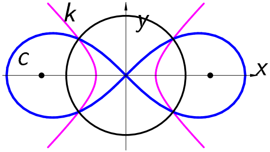
- Definition: $\overline{M_1P} \cdot \overline{M_2P} = a^2$.

  $M_1 = (-a, 0), M_2 = (a, 0), P = (x, y)$.



- $c : (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$.
- Inversion am Einheitskreis

$$\sigma : (x', y') = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y),$$
$$\sigma^{-1} : (x, y) = \frac{1}{x'^2 + y'^2}(x', y').$$

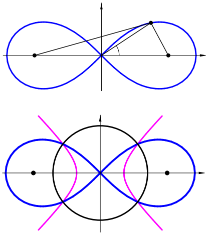


- Das Bild $\sigma(k)$ der Hyperbel $k : 2a^2(x^2 - y^2) = 1$ ist eine Bernoulli'sche Lemniskate c.

Bernoulli'sche Lemniskate 2

- Parameterdarstellung der Hyperbel:

$$\mathbf{k}(t) = \left(\frac{1}{a\sqrt{2}\cos t}, \frac{\sin t}{a\sqrt{2}\cos t}\right).$$



- Parameterdarstellung der Lemniskate mittels Inversion:

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{a\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{a\sqrt{2}\cos t \sin t}{1+\sin^2 t}\right).$$

- Polardarstellung: $r(\phi)^2 = 2a^2 \cos 2\phi$.
- Flächeninhalt (Leibnitz'sch Sektorformel):

$$A = 2a^2 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r(\phi)^2 \, d\phi.$$

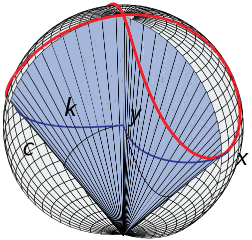
Stereographische Projektion auf die Einheitskugel

- Einheitskugel $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
- Projizieren Punkte $(u, v, 0)$ aus $Z = (0, 0, -1)$ auf S^2,

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

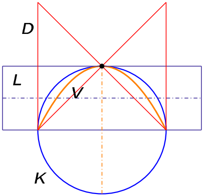
- Die Bildkurve der Lemniskate $(a = 1/\sqrt{2})$ ist die Viviani Kurve

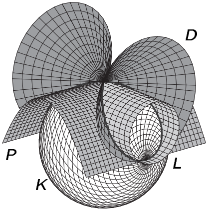
$$\mathbf{v}(t) = (\cos t, \cos t \sin t, \sin^2 t).$$



Vivani Kurve

- Die Vivani Kurve V ist der Schnitt einer Kugel K mit einem Drehzylinder L, der K berührt, und halben Kugelradius hat.
- V liegt auf einem parabolischen Zylinder P.
- V liegt auf einem Drehkegel D mit Öffnungswinkel $\pi/2$.





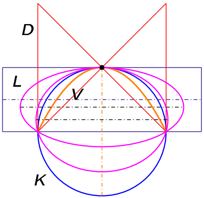
Vivani Kurve 2

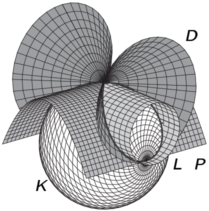
- V ist Träger eines Büschels von Quadriken $Q(t) = K + tL$.
- Alle Quadriken $Q(t)$ (außer P) durch V sind Drehflächen mit parallelen Achsen.

$$\begin{aligned} K: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0, \\ L: \quad y^2 + z^2 - z &= 0. \end{aligned}$$

$$P = K - L, \text{ und } D = -K + 2L$$

$$\begin{aligned} P: x^2 + z - 1 &= 0, \\ D: -x^2 + y^2 + (z-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$





Drehquadriken durch V

Der parabolischer Zylinder P und der Drehzylinder L spannen dasselbe Büschel $Q(t)$ auf.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$K = P + L$, $Q(t) = P + tL$

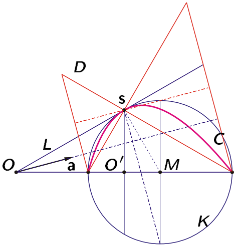
$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{1-t}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ \frac{1-t}{2} & 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

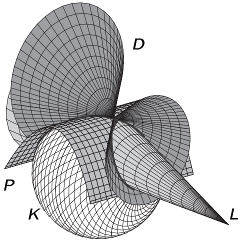
Drehquadriken $Q(t)$ erkennt man an ihrer *Fernkurve*,

$$x^2 + t(y^2 + z^2) = 0.$$

Verallgemeinerte Viviani Kurve

- Kugel K und Drehkegel L, der K berührt.
- $C = K \cap L$ ist Träger eines Büschels von Quadriken $Q(t) = K + tL$.
- $Q(t)$ enthält einen parabolischen Zylinder P.
- $Q(t)$ enthält einen Drehkegel D mit Öffnungswinkel $\pi/2$.
- Alle Quadriken $Q(t)$ (außer P) sind Drehflächen mit Achsen parallel zu $\mathbf{a}$.

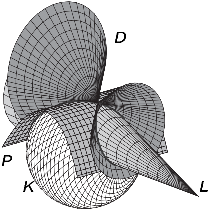




Verallgemeinerte Viviani Kurve 2

Parameterdarstellung von C ($\gamma^2 = m^2 - r^2$):

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} (m + r\sin t)^2 + \gamma^2 \\ \sqrt{2}\sqrt{m(m+\gamma)}\cos t(\gamma - m - r\sin t) \\ r(m+\gamma)\cos^2 t \end{pmatrix}$$

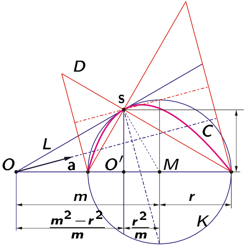


mit $\operatorname{dist}(O, C) = \|\mathbf{c}(t)\| = m + r\sin t$.

- O und O' sind inverse Punkte bzgl. K.
- Doppelpunkt $\mathbf{s}$ von C liegt in der Polarebene von O bzgl. K.

Für die Distanzen von O und O' zu C gilt

$$\operatorname{dist}(O', C) = \frac{r}{m}\operatorname{dist}(O, C).$$



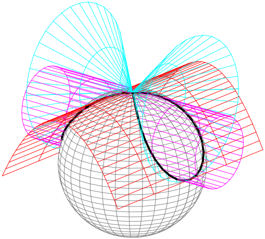
Zurück zur Viviani Kurve

Wählen O' als Ursprung,

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} r^2(1+\sin^2 t) + 2mr\sin t \\ \sqrt{2}\sqrt{m(m+\gamma)}\cos t(\gamma - m - r\sin t) \\ r(m+\gamma)\cos^2 t \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Viviani Kurve für $m \to \infty$

$$\mathbf{v}(t) = \left(r\sin t, -r\sin t\cos t, r\cos^2 t\right).$$



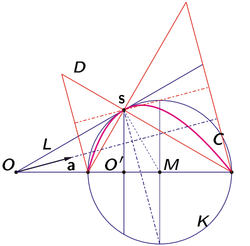
Kreis des Apollonius Pergaeus (262–190 b.c.)

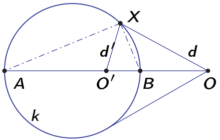
- Zwei beliebige Punkte O und O'.
- Die Menge der Punkte X mit

$$f = \frac{d'}{d} = \text{const.}$$

ist ein Kreis k, wobei $d = \text{dist}(O, X)$ und $d' = \text{dist}(O', X)$.

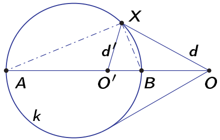
- O und O' sind inverse Punkte bzgl. k.

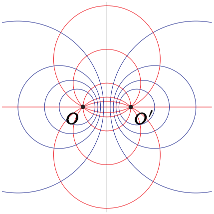




Kreis des Apollonius 2

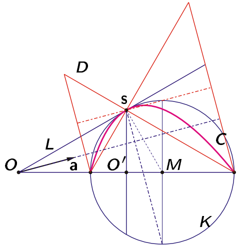
- Wir bestimmen Punkte A, B auf OO' mit $TV(O, O', A) = f$ und $TV(O, O', B) = -f$. Daraus folgt $H(A, B, O, O')$.
- XA und XB sind die Winkelsymmetralen von XO und XO', d.h. $XA \perp XB$.
- k ist Thales-Kreis über AB.
- Für veränderliches Verhältnis f erhält man ein Kreisbüschel.

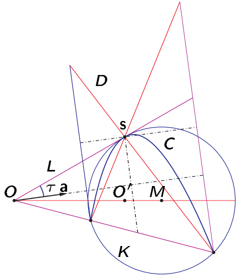




Verallgemeinerte Viviani Kurve

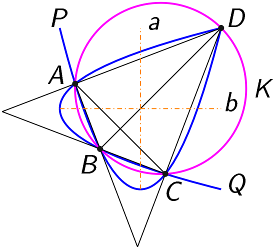
- Kugel K und Drehkegel L, der K berührt.
- $C = K \cap L$ ist Träger eines Büschels von Quadriken $Q(t) = K + tL$.
- $Q(t)$ enthält einen parabolischen Zylinder P.
- $Q(t)$ enthält einen Drehkegel D.
- Alle Quadriken $Q(t)$ (außer P) sind Drehflächen mit Achsen parallel zu $\mathbf{a}$.





Parabeln mit orthogonalen Achsen

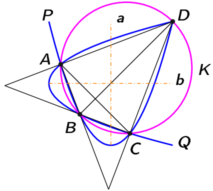
- Parabeln P und Q mit orthogonalen Achsen a und b.
- $P \cap Q = \{A, B, C, D\}$.
- Warum liegen die Punkte $A, \ldots, D$ auf einem Kreis K?



- Warum sind die Achsen aller Kegelschnitte durch $A, \ldots, D$ parallel zu a und b?

Parabeln mit orthogonalen Achsen 2

- $P : y = \frac{1}{2a}x^2 + b$, und
  $Q : x = \frac{1}{2c}y^2 + d$.
- Wie zeigt man, dass die vier Schnittpunkte auf einem Kreis liegen?

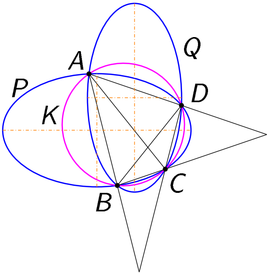


- Durch Kombination der beiden Gleichungen erhält man

$$
\begin{array}{lll}
2aP & : x^2 + 2ab - 2ay = 0, & \text{Parabel} \\
2cQ & : y^2 + 2cd - 2cx = 0, & \text{Parabel} \\
2aP + 2cQ & : x^2 + y^2 - 2ay - 2cx + 2ab + 2cd = 0, & \\
 & (x - c)^2 + (y - a)^2 = a^2 + c^2 - 2(ab + cd). & \text{Kreis}
\end{array}
$$

Kegelschnitte mit parallelen Achsen

- Kegelschnitte P und Q mit parallelen Achsen.
- $P \cap Q = \{A, B, C, D\}$.
- Warum liegen die Punkte $A, \ldots, D$ auf einem Kreis?



- Warum haben alle Kegelschnitte durch die Punkte A, B, C und D parallele Achsen?

Kegelschnitte mit parallelen Achsen

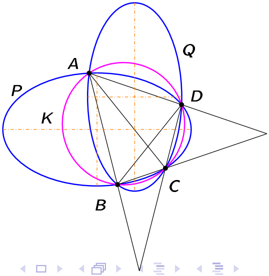
$$\begin{aligned} P &: a_1x^2 + b_1y^2 - 1 = 0, \\ Q &: a_2x^2 + b_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 + a_2 = 0. \end{aligned}$$

Wir bilden Linearkombinationen dieser Gleichungen.

$$\begin{aligned} -a_2P + a_1Q &: (\star)y^2 + (\star)x + (\star)y + (\star) = 0, \text{ Parabel, Achse } \parallel x, \\ -b_2P + b_1Q &: (\star)x^2 + (\star)x + (\star)y + (\star) = 0, \text{ Parabel, Achse } \parallel y, \end{aligned}$$

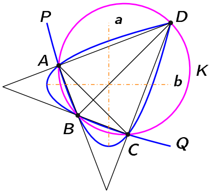
$$(a_2 - b_2)P + (b_1 - a_1)Q : (b_1a_2 - b_2a_1)(x^2 + y^2) + (\star)x + (\star)y + (\star) = 0.$$

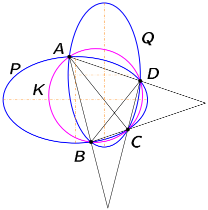
- $(a_2 - b_2)P + (b_1 - a_1)Q$ ist ein Kreis.



Geometrische Eigenschaften

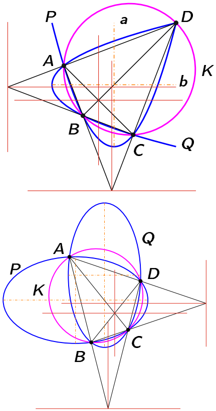
- Ein Kegelschnittsbüschel $Q(t) = K + tL$ mit Grundpunkten A, B, C, D enthält genau dann einen *Kreis*, wenn alle Kegelschnitte $Q(t)$ *parallele Achsen* haben.
- Bilden die vier Punkte A, B, C, D kein Rechteck oder Trapez, so gibt es genau zwei *Parabeln mit orthogonalen Achsen* durch $A, \ldots, D$.



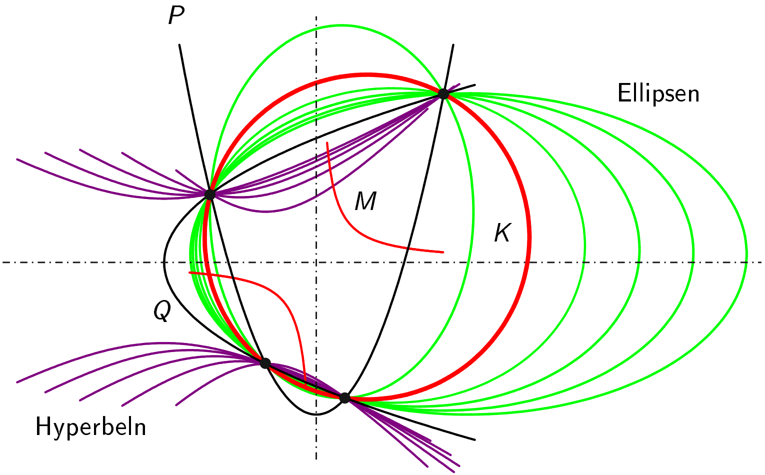


Geometrische Eigenschaften 2

- Die Symmetralen sämtlicher Paare von Geraden AB, CD, AC, BD, und AD, BC sind parallel zu den Achsen.
- Die Mittelpunkte der Büschelkegelschnitte liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten die Achsen der Parabeln sind.



Kegelschnittsbüschel mit Kreis



Darstellung von Kegelschnitten

- Die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms

$$K(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f$$

  heißt *Kurve* zweiter Ordnung k.

- Ist $K(x,y) = 0$ irreduzibel und enthält ausserdem reelle Punkte, so ist k ein Kegelschnitt. Sei $\mathbf{x} = (1, x, y)$.

- Ein Kegelschnitt kann durch

$$k : \mathbf{x}^T \cdot K \cdot \mathbf{x} = 0, \text{ mit } K = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{pmatrix},$$

  mit $\mathrm{Rang}(K) = 3$ beschrieben werden.

Achsen der Kegelschnitte

- Ein Kegelschnitt $k : \mathbf{x}^T \cdot K \cdot \mathbf{x} = 0$ hat Achsen parallel zu x und y, genau dann wenn $c = 0$ gilt,

$$k : ax^2 + by^2 + \ldots = 0.$$

- Ein Kegelschnitt $k : ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$ ist ein *Kreis*, genau dann wenn $a = b$ und $c = 0$ gilt,

$$k : a(x^2 + y^2) + \ldots = 0.$$

Kegelschnittsbüschel

Definition

Sind $P : \mathbf{x}^T \cdot P \cdot \mathbf{x} = 0$ und $\mathbf{x}^T \cdot Q \cdot \mathbf{x} = 0$ zwei Kegelschnitte, so heißt die Familie $X(t) = P + tQ$

$$X(t) : \mathbf{x}^T \cdot (P + tQ) \cdot \mathbf{x} = 0, t \in \mathbb{R},$$

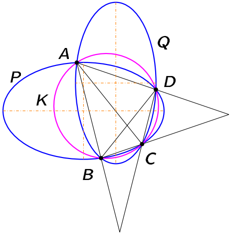
Kegelschnittsbüschel.

- Jeder Kegelschnitt $X(t)$ enthält die Schnittpunkte $P \cap Q$.
- Die Schnittpunkte $X(t) \cap g$ sind Punktepaare einer Involution.

Kegelschnittsbüschel mit Kreis

Kegelschnitte $P : \mathbf{x} \cdot P \cdot \mathbf{x} = 0$, und $Q : \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x} = 0$. Das Büschel $P + tQ$ enthält einen Kreis K, genau dann wenn es ein Koordinatensystem gibt, so dass gilt

$$P = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & a & 0 \\ \star & 0 & b \end{pmatrix}, \text{ und } Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \alpha & 0 \\ \star & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$



Die Bedingungsgleichung

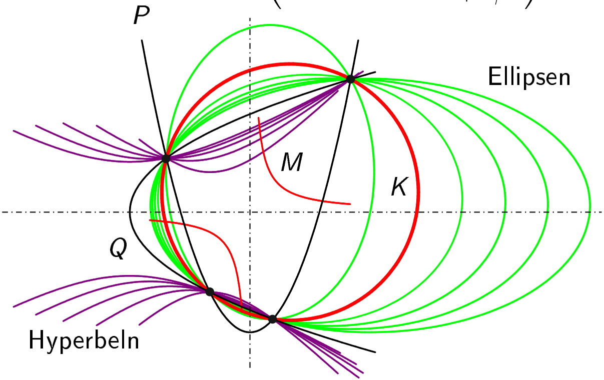
$$a + t\alpha = b + t\beta,$$

haben bei $\alpha \neq \beta$ eine eindeutige Lösung. Gilt $\alpha = \beta$ und $a = b$, so sind alle Kegelschnitte $P + tQ$ Kreise.

Kegelschnittsbüschel mit Kreis 2

Die Kegelschnitte $\mathbf{x} \cdot (P + tQ) \cdot \mathbf{x} = 0$ haben parallele Achsen, denn

$$X(t) = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & a + t\alpha & 0 \\ \star & 0 & b + t\beta \end{pmatrix}.$$



Von der Bernoulli'schen Lemniskate zur Ellipse

- Die quadratische birationale Transformation

$$\sigma : x' = \frac{x}{1+y^2}, y' = \frac{xy}{1+y^2}$$

  bildet die Ellipse $k : x^2 + 2a^2y^2 = 2a^2$ auf die Lemniskate $c : (x^2+y^2) + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$ ab.

- Die Umkehrabbildung

$$\sigma^{-1} : x = \frac{x'^2 + y'^2}{x'}, y = \frac{y'}{x'}$$

  bildet die Lemniskate c auf die Ellipse k ab.