Was Du ererbt von Deinen Vätern,
erwirb es, um es zu besitzen.
J. W. v. Goethe

Tetraedergeometrie in elementarer Behandlung

Prof. Dr. Heinz Schumann
PH Weingarten
Fak. II, Mathematik
schumann@ph-weingarten.de

31. Fortbildungstagung für Geometrie
7. bis 11. November 2010
Bundesinstitut für Erwachsenenbildung
St. Wolfgang

Inhalt

1. Einführung

Raumgeometrisches Wissen ist von Bedeutung für das Verstehen und Modellieren des „Raumes“ als ein wesentliches Medium des Menschen.

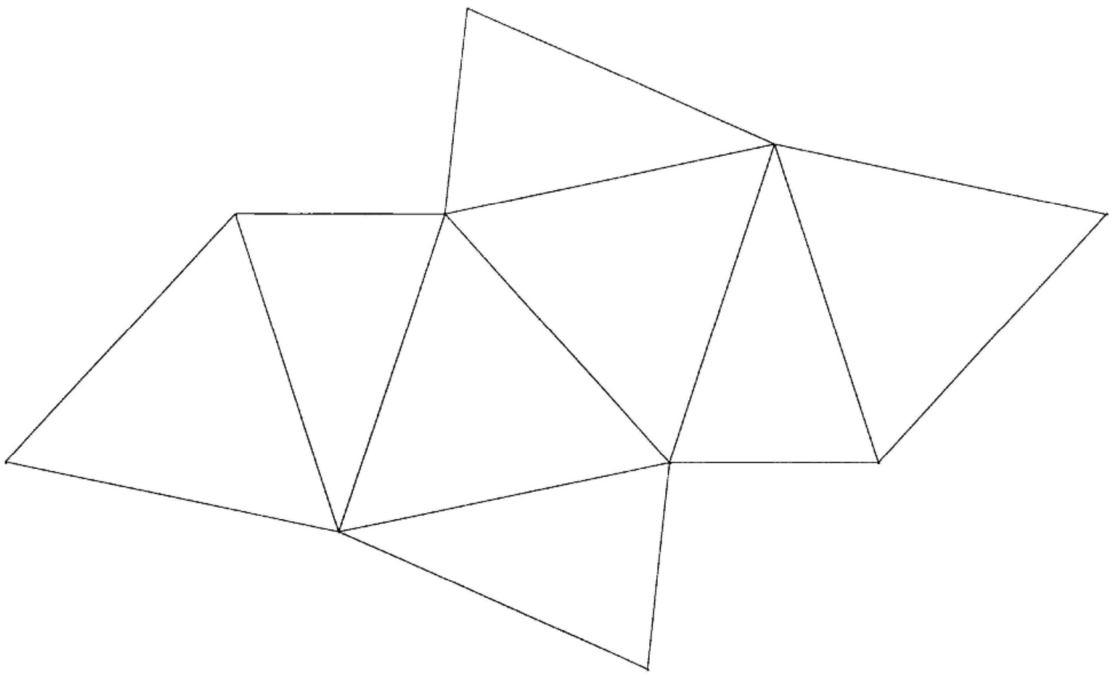
Gründe für den Mangel an Raumgeometrie im allgemeinbildenden Geometrie-Unterricht in D:

- Fehlende bzw. schwierige Darstellungsmöglichkeiten für Raumgeometrie mit traditionellen Medien.
- Traditionelle Einteilung der Geometrie nach den Euklids Elementen in ebene Geometrie (Buch I-VI) und räumliche Geometrie (Buch XI-XIII).
- Angehenden Lehrpersonen haben selbst fast keine raumgeometrische „Sozialisierung“ in der Schule erfahren.
- Inhalte der Geometrievorlesung für das Lehramt im Wesentlichen auf ebene Geometrie oder n-dimensionale Geometrie beschränkt, falls es überhaupt eine solche Veranstaltung gibt.
- Geometrisches Beweisen findet selten statt.

Über den Verlust raumgeometrischer Qualifikation (Beispiel 1)

Jedes ‚Netz' kann zu höchstens einem konvexen Polyeder aufgefaltet werden.

Falsch!



Über den Verlust raumgeometrischer Qualifikation (Beispiel 2)

Was ist ein Tetraeder?

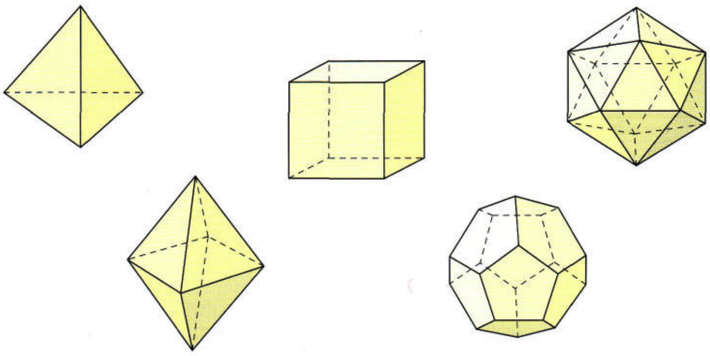
- Mathematik, Kl.9 (Bayern), S.168:
"Eine Pyramide, die von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, heißt Tetraeder."
- C.C. Buchner, delta 9, S.178:
"... gerade dreiseitige Pyramide mit lauter gleich langen Kanten ... "

- Cornelsen, Fokus Mathematik 9, S.65:
"Eine dreiseitige Pyramide mit gleichlangen Kanten heißt Tetraeder."

- neuer Lambacher Schweizer Kl.5 (Klett-Verlag), S.85:
"Eine Dreieckspyramide, bei der alle Kanten gleich lang sind, heißt Tetraeder."

Also: *Ein Tetraeder (Vierflächner) mit gleichlangen Kanten heißt Tetraeder !!!*

Über den Verlust raumgeometrischer Qualifikation (Beispiel 3)

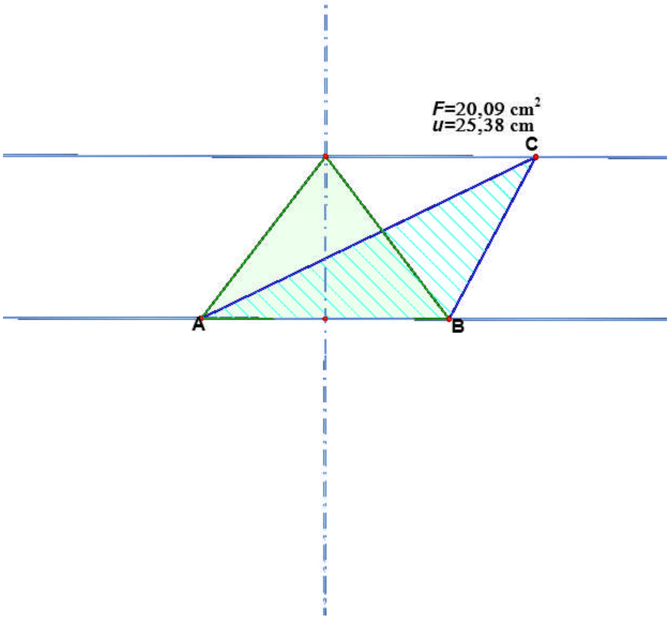


Warum es nur fünf platonische Körper gibt

Kannst du dich noch an die platonischen Körper erinnern? Das sind die Körper, die von gleichen regelmäßigen Vielecken begrenzt werden.
An jeder Ecke des Körpers stoßen die Ecken der Begrenzungsflächen zusammen. Damit sich ein Körper ergibt, müssen mindestens drei Vielecke zusammenstoßen. Außerdem muss die Summe der aneinander stoßenden Winkel kleiner als 360° sein, da man sonst kein räumliches Gebilde erhält. Deshalb gibt es auch keine platonischen Körper aus Sechsecken. Drei Sechseckwinkel ergeben nämlich schon 360°. Man kann also drei, vier oder fünf gleichseitige Dreiecke aneinander stoßen lassen (Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder), oder drei Quadrate (Würfel) oder drei regelmäßige Fünfecke (Dodekaeder). Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

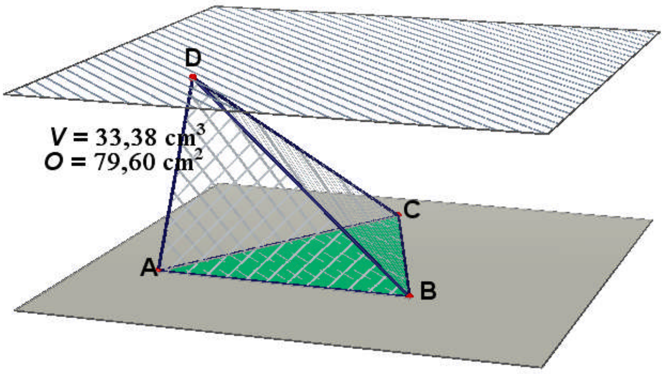
Felix Klein (1849 - 1925)
„Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ 2. Band, Geometrie, 1. Aufl. 1909

„Es ist nämlich von altersher auf der Schule wie auf der Universität üblich, erst die Geometrie der Ebene und dann ganz abgesondert davon die des Raumes zu behandeln; dabei kommt die Raumgeometrie aber leider oft zu kurz, und das edle Organ der Raumanschauung, das wir von Hause aus besitzen, verkümmert. Demgegenüber wollen die „Fusionisten” von vornherein **Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander behandeln**, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken.“
Aus: ‚Einleitung‘

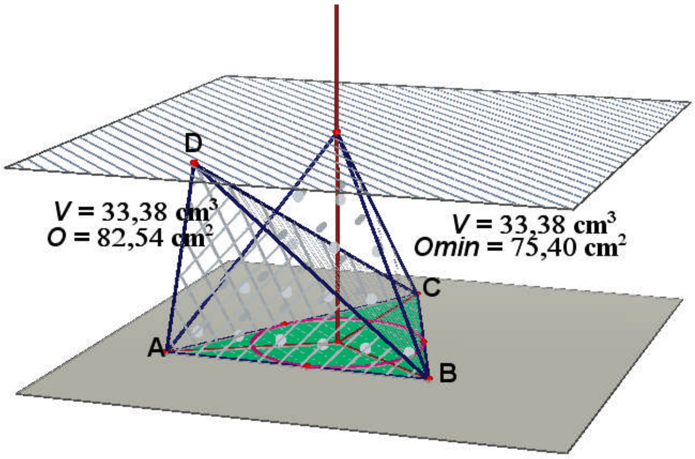


Es gilt: ***Unter allen Dreiecken gleicher Basis und Höhe hat das gleichschenklige kleinsten Umfang.***

Analogisierung 1. Art

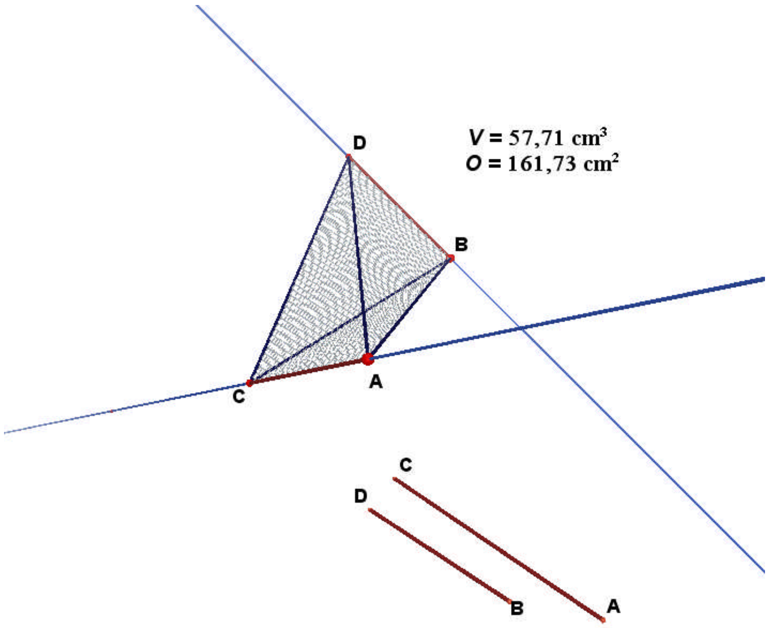


Welches unter den Tetraedern gleicher Basis und gleicher Höhe hat kleinste Oberfläche?



Unter den Tetraedern gleicher Basis und gleicher Höhe hat das Tetraeder kleinste Oberfläche, dessen Fußpunkt der Höhe durch die Spitze der Mittelpunkt des Basis-Inkreises ist.

Analogisierung 2. Art



Welches unter den (volumengleichen) Tetraedern mit vorgegebenen Gegenkanten-Längen auf windschiefen Geraden hat keinste Oberfläche? (Elementarer Beweis?)

Satz (Steiner): ***Zwei Tetraeder, welche zwei Gegenkanten vorgegebener Längen besitzen, die jeweils auf zwei gegebenen windschiefen Geraden liegen, haben gleiches Volumen.*** (Illustration in **Abbildung 1** mit den Tetraedern ABCD und A'B'C'D', für die |AC| = |A'C'| und |BD| = |B'D'|.)

Beweis: Die Dreiecke ACD und AC'D' sind flächengleich, da sie in derselben Ebene liegen und gleiche Grundseite und Höhe besitzen (**Abb. 2**). Somit sind die Tetraeder ABCD und ABC'D' volumengleich. Entsprechend sind die Dreiecke C'AB und C'A'B' flächengleich (**Abb. 3**) und somit sind auch die Tetraeder C'D'AB und C'D'A'B' volumengleich. Folglich sind die Tetraeder ABCD und A'B'C'D' volumengleich.

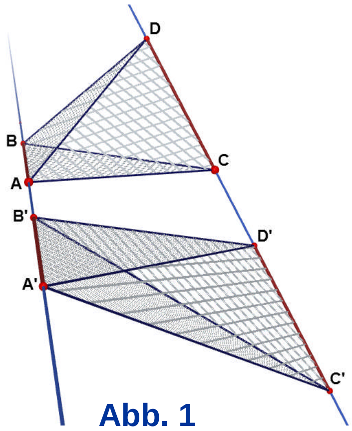


Abb. 1

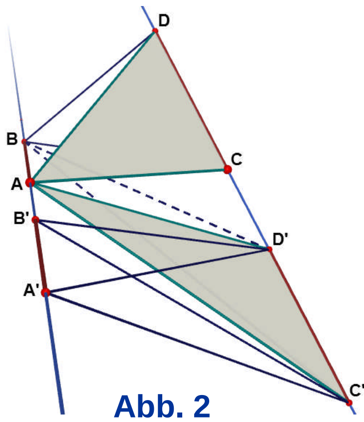


Abb. 2

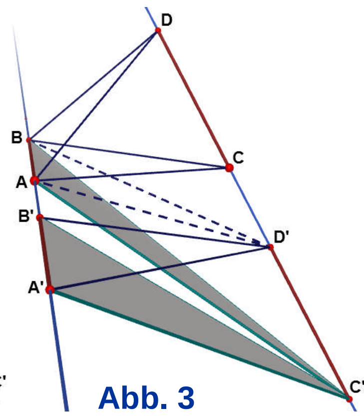
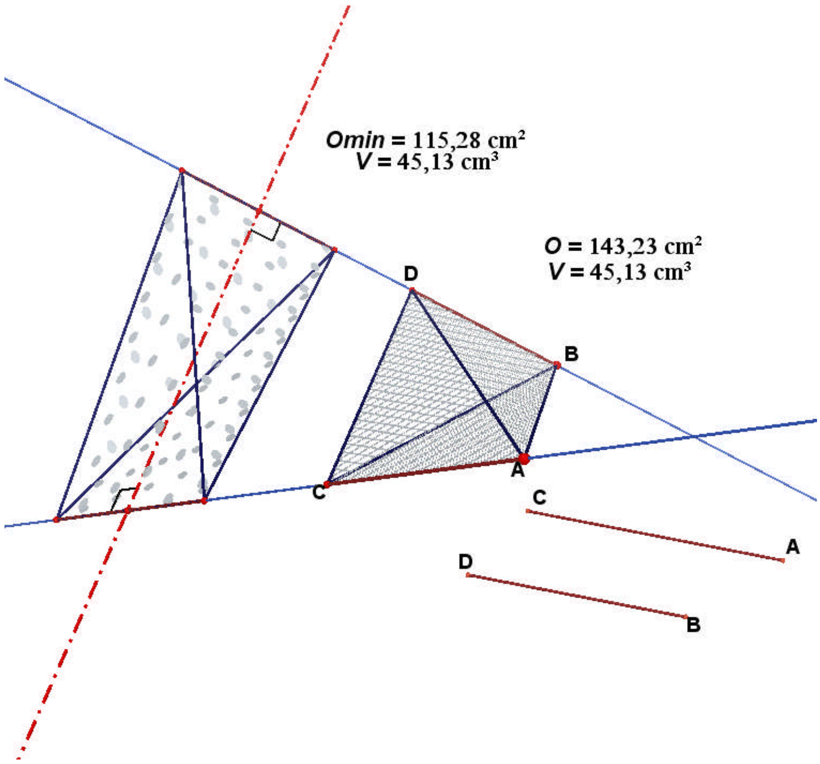


Abb. 3



Unter den volumengleichen Tetraedern mit vorgegebenen Gegenkanten-Längen auf windschiefen Geraden hat das zum Gemeinlot dieser Geraden symmetrische minimale Oberfläche.
(Elementarer Beweis?)

Ebene und Raum gemeinsam behandeln
durch räumliches *Analogisieren* von

- **Begriffen**
- **Konstruktionen**
- **Berechnungen**
- **Sätzen**
- **Beweisen**

der Dreiecksgeometrie.

Von der Dreiecksgeometrie
zur Tetraedergeometrie!

Heinz Schumann

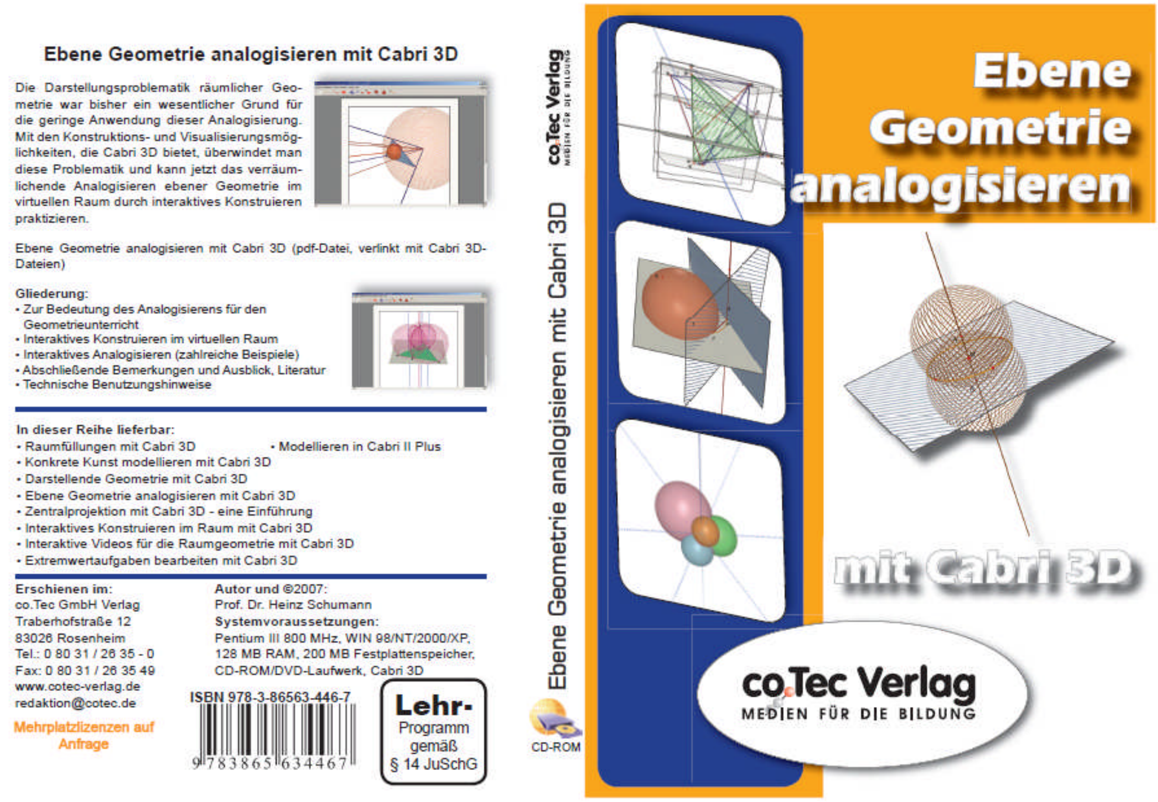
Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum

Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D

Inhalt

Anlage: CD mit pdf-Datei des Buches, Demo-Version und Handbuch von Cabri 3D

ISBN 978-3-88120-463-7, 2007, Bestellung bei: www.franzbecker.de , Preis: 32,80 €



Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D
Die Darstellungsproblematik räumlicher Geometrie war bisher ein wesentlicher Grund für die geringe Anwendung dieser Analogisierung. Mit den Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten, die Cabri 3D bietet, überwindet man diese Problematik und kann jetzt das verräumlichende Analogisieren ebener Geometrie im virtuellen Raum durch interaktives Konstruieren praktizieren.
Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D (pdf-Datei, verlinkt mit Cabri 3D-Dateien)
Gliederung:
• Zur Bedeutung des Analogisierens für den Geometrieunterricht
• Interaktives Konstruieren im virtuellen Raum
• Interaktives Analogisieren (zahlreiche Beispiele)
• Abschließende Bemerkungen und Ausblick, Literatur
• Technische Benutzungshinweise
In dieser Reihe lieferbar:
• Raumfüllungen mit Cabri 3D
• Modellieren in Cabri II Plus
• Konkrete Kunst modellieren mit Cabri 3D
• Darstellende Geometrie mit Cabri 3D
• Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D
• Zentralprojektion mit Cabri 3D - eine Einführung
• Interaktives Konstruieren im Raum mit Cabri 3D
• Interaktive Videos für die Raumgeometrie mit Cabri 3D
• Extremwertaufgaben bearbeiten mit Cabri 3D
Erschienen im:
co.Tec GmbH Verlag
Traberhofstraße 12
83026 Rosenheim
Tel.: 0 80 31 / 26 35 - 0
Fax: 0 80 31 / 26 35 49
www.cotec-verlag.de
redaktion@cotec.de
Mehrplatzlizenzen auf Anfrage
Autor und ©2007:
Prof. Dr. Heinz Schumann
Systemvoraussetzungen:
Pentium III 800 MHz, WIN 98/NT/2000/XP, 128 MB RAM, 200 MB Festplattenspeicher, CD-ROM/DVD-Laufwerk, Cabri 3D
ISBN 978-3-86563-446-7
9 783865 634467
Lehr-Programm gemäß § 14 JuSchG
co.Tec Verlag
Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D
CD-ROM
Ebene Geometrie analogisieren
mit Cabri 3D
co.Tec Verlag
MEDIEN FÜR DIE BILDUNG

Analogiebildung: Phasen

Man unterscheidet zwei Schritte bzw. zwei Phasen bei der Analogiebildung:

1. Das Bilden der Analogie durch Vergleichen von Objekten, Relationen und Eigenschaften und das Herausfinden von Entsprechungen und schließlich das Formulieren der durch Analogie gewonnenen Vermutung. („Phänomenlogische Phase“)

2. Der Nachweis der Gültigkeit der durch Analogiebetrachtung entdeckten Aussage. Dabei können eventuell wieder Analogiebildungen der Auffindung von Argumenten für die Richtigkeit der Analogie dienen. („Begründungsphase“)

Man spricht von einer „*geklärten*“ Analogie, wenn auch der zweite Schritt ausgeführt worden ist.

2. Tetraedergeometrie in elementarer Behandlung

- vom Dreieck zum Tetraeder

Geometriedidaktische Aufgabe

**Entwicklung der elementaren Tetraeder-geometrie, ausgehend von der Dreiecks-geometrie, die
‚wesentliche' Begriffe, Sätze und <u>Beweise</u>
der Tetraedergeometrie enthält.**

Adressaten
Studierende für das Lehramt,
Lehrer u. Lehrerinnen,
Schüler/Schülerinnen der oberen S I und der SII,
Dozenten

Was heißt hier elementar ?

- **Einzelthemen möglichst wahlweise behandelbar**

- **Lokal-deduktives Vorgehen, keine Axiomatik**

- **Einfache räumliche Aussagen können voraus-gesetzt werden. *Keine Beweise für evidente Aussagen!***

- **Vor allem synthetische Beweise, wenige vektorielle Beweise**

- **Beweise auf dem in der Elementargeometrie üblichen Strengeniveau**

- **Beweise benutzen räumlichen Beweisfiguren**

Elemente der Stereometrie

Von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller
in Hagen i. W.

Zweiter Teil

Die Berechnung einfach gestalteter Körper

Mit 156 Figuren
und zahlreichen Übungsbeispielen

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1900

PREMIER LIVRE

DU

TÉTRAÈDRE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE PREMIÈRE, DE MATHÉMATIQUES
DES CANDIDATS AUX GRANDES ÉCOLES ET A L'AGRÉGATION

PAR

P. COUDERC et A. BALLICCIONI

ANCIENS ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉS DE MATHÉMATIQUES
PROFESSEURS AU LYCÉE CHARLEMAGNE

PRÉFACE DE

M. H. VILLAT

MEMBRE DE L'INSTITUT

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1935


Г. П. БЕВЗ
ГЕОМЕТРІЯ
ТЕТРАЕДРА

1974


Я. П. ПОНАРИН
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
ТОМ 3
ТРЕУГОЛЬНИКИ
и ТЕТРАЭДРЫ

2009

Probleme beim raumgeometrischen Beweisen

Es bestehen Mängel

-bei der Raumvorstellung

-bei der Konstruktion räumlicher Beweisfiguren

-bei planimetrischem und stereometrischem Vorwissen

-im generellen Umgang mit Beweisen

- bei der Erfassung komplexer Zusammenhänge
  (auch erheblicher Formulierungsaufwand
  für die Beschreibung räumlicher Sachverhalte !)

- beim Geometrie-Lernen durch verstehendes Nachvollziehen
  von Beweisen.

Legitimation des raumgeometrischen Beweisens

<u>**Erkenntnistheoretische Begründungen**</u>
- Allgemeingültige Sicherung der durch Exploration gefundenen raumgeometrischen Erkenntnisse
(Antwort auf die Frage nach der Gültigkeit)
- Intersubjektive Erklärung für raumgeometrische Erkenntnisse
(Antwort auf die Frage nach dem *„Warum?“*)

<u>**Curriculare Begründungen**</u>
- Lernen mathematisch zu argumentieren
als **allgemeine mathematische Kompetenz**
Dazu gehört: Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es …?“, „Wie verändert sich…?“, „Ist das immer so …?“)
und Vermutungen begründet äußern,
mathematische Argumentationen entwickeln
(wie Erläuterungen, Begründungen, **Beweise),**
Lösungswege beschreiben und begründen.
- Ebene Geometrie anwenden,
- Heuristische Strategie des „Analogisierens“ üben,
- Raumvorstellung trainieren.

Idealtypische Beweisarten

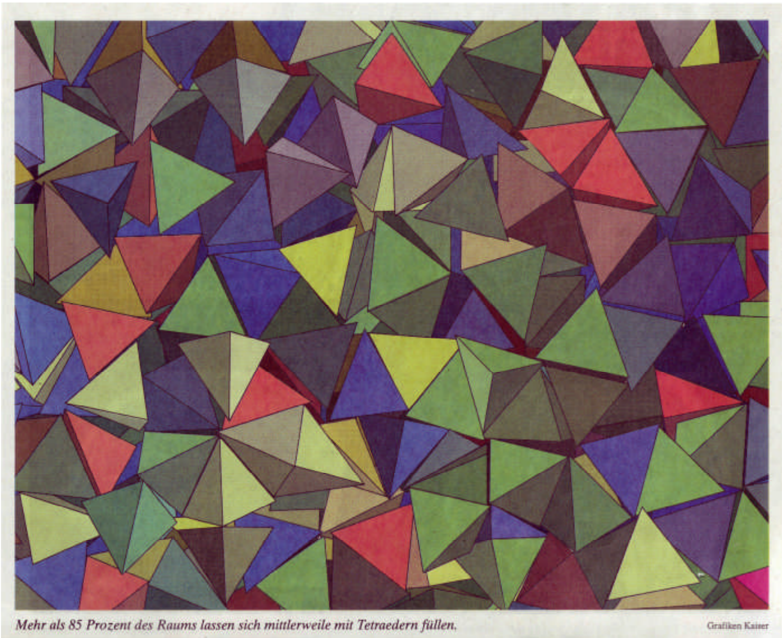
- Synthetisch-geometrische Beweise
- Analytisch-geometrische Beweise
  (koordinatengeometrische und vektorielle Beweise)
- Konstruktionsbeweise
- Berechnungsbeweise
  (inkl. Beweise von und mittels Ungleichungen)
- Abbildungsbeweise
- …

Je algebraischer, desto weniger anschaulicher ist ein geometrischer Beweis.

Der raumgeometrischen Beweisfigur kommt eine zentrale Stellung zu! Adäquate Beweisfiguren werden mittels Interaktiver Dynamischer Raumgeometrie-Systeme im virtuellen Raum konstruiert.

Tetraedergeometrie in elementarer Behandlung - vom Dreieck zum Tetraeder

3. Schlussbemerkungen



Kann man den Raum mit regelmäßigen Tetraedern lückenlos füllen?
Natürlich nicht! Aber wie maximal dicht?

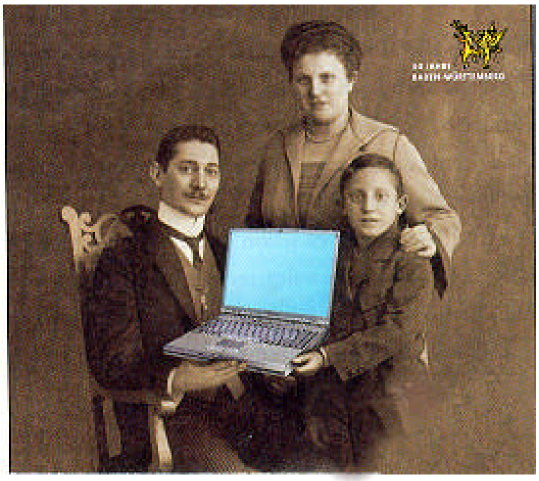
Das räumliche Analogisieren von Sätzen und Beweisen der Dreiecksgeometrie eröffnet für Schüler/-innen, Studenten/-innen und Lehrer/-innen ein weites Feld raumgeometrischen Arbeitens.

Prognose

Unter dem Eindruck beschränkter unterrichtlicher Zeitressourcen und der Schwerpunktsetzung auf Prüfungen durch Tests und der damit verbundenen Reduktion anspruchsvollerer Inhalte des Mathematik-unterrichts, ist eine Integration neuer Raumgeometrie-Themen, selbst durch intuitiv nutzbare dynamische Raumgeometrie-Systeme, nicht zu erwarten.

Allenfalls können raumgeometrische Themen wie die Tetraedergeometrie Verwendung finden in
- Schulcurricula
- Projekten
- individualisierten Leistungsüberprüfungen
- Facharbeiten, …

oder bei extra-curricularen Aktivitäten.



Danke für Ihre Aufmerksamkeit!