Ornamente zeichnen und hyprbolisieren

Martin von Gagern

TU München

in Zusammenarbeit mit

Prof. Jürgen Richter-Gebert

Mathe Vital

Visual Interactive Tools for Advanced Learning

www.mathe-vital.de

u.a. mit Applet zu Sierpinski-Dreieck per IFS

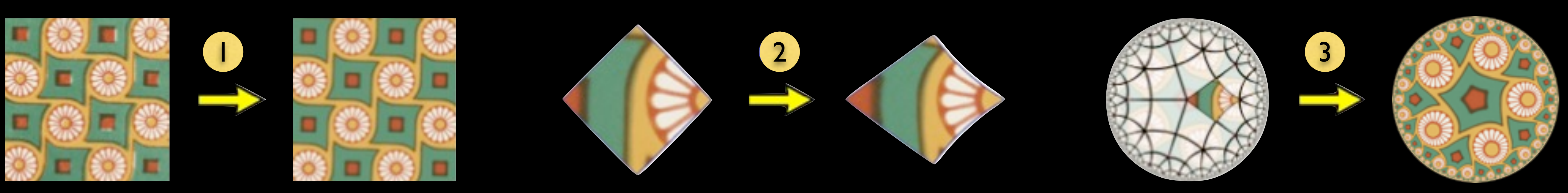
... ist nicht Thema dieses Vortrags

Überblick

Die Entwicklung des Projekts

- Euklidische Ornamente zeichnen
- Hyperbolische Ornamente zeichnen
- Muster automatisch erkennen
- Ornamente hyperbolisieren

morenaments.de



Euklidische Ornamente


7b

ix-quadrat

Mathematik entdecken

TU München

ix-traordinary math

mathema

IMAGINARY

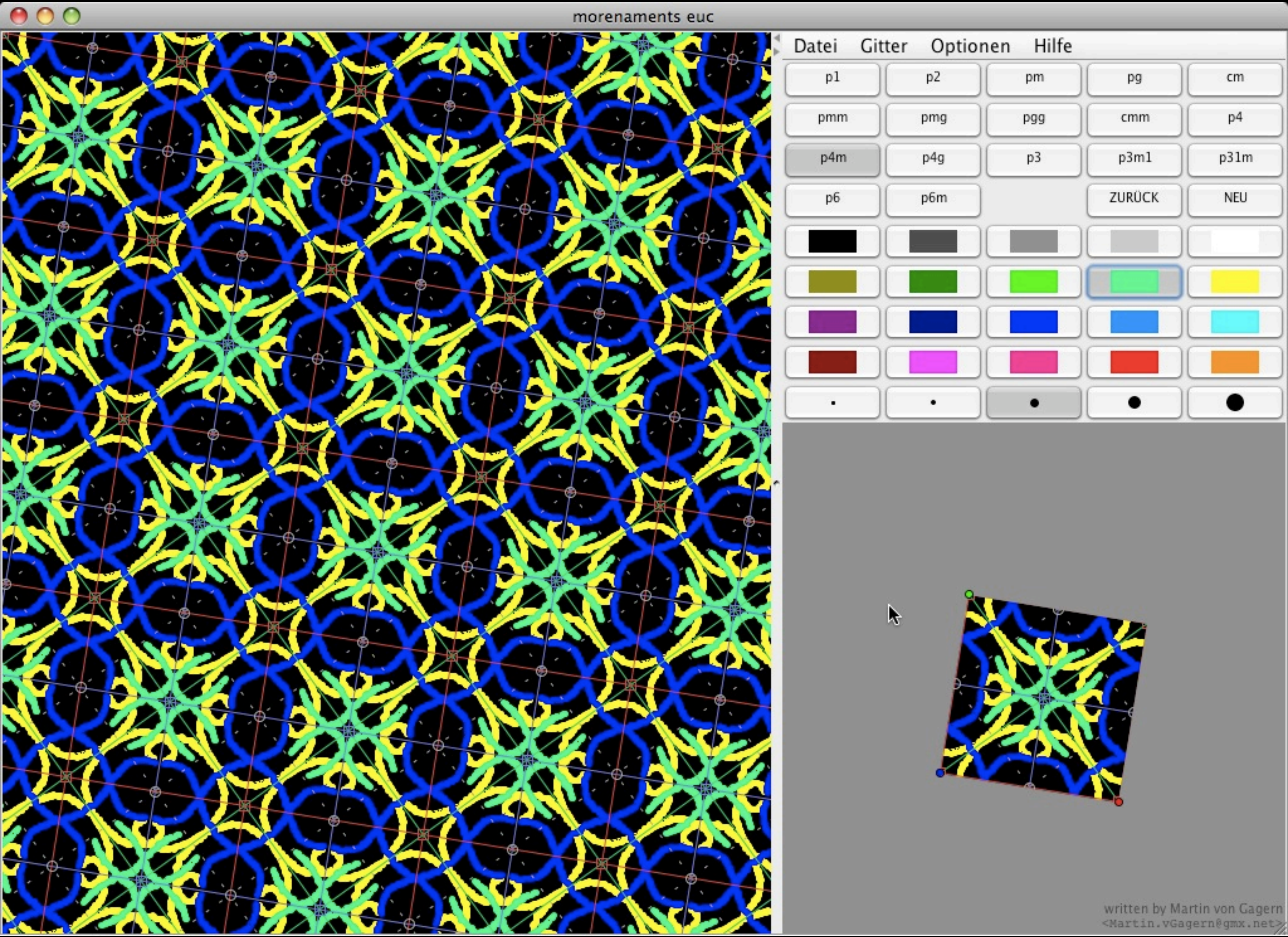
GEFÖRDERT VOM

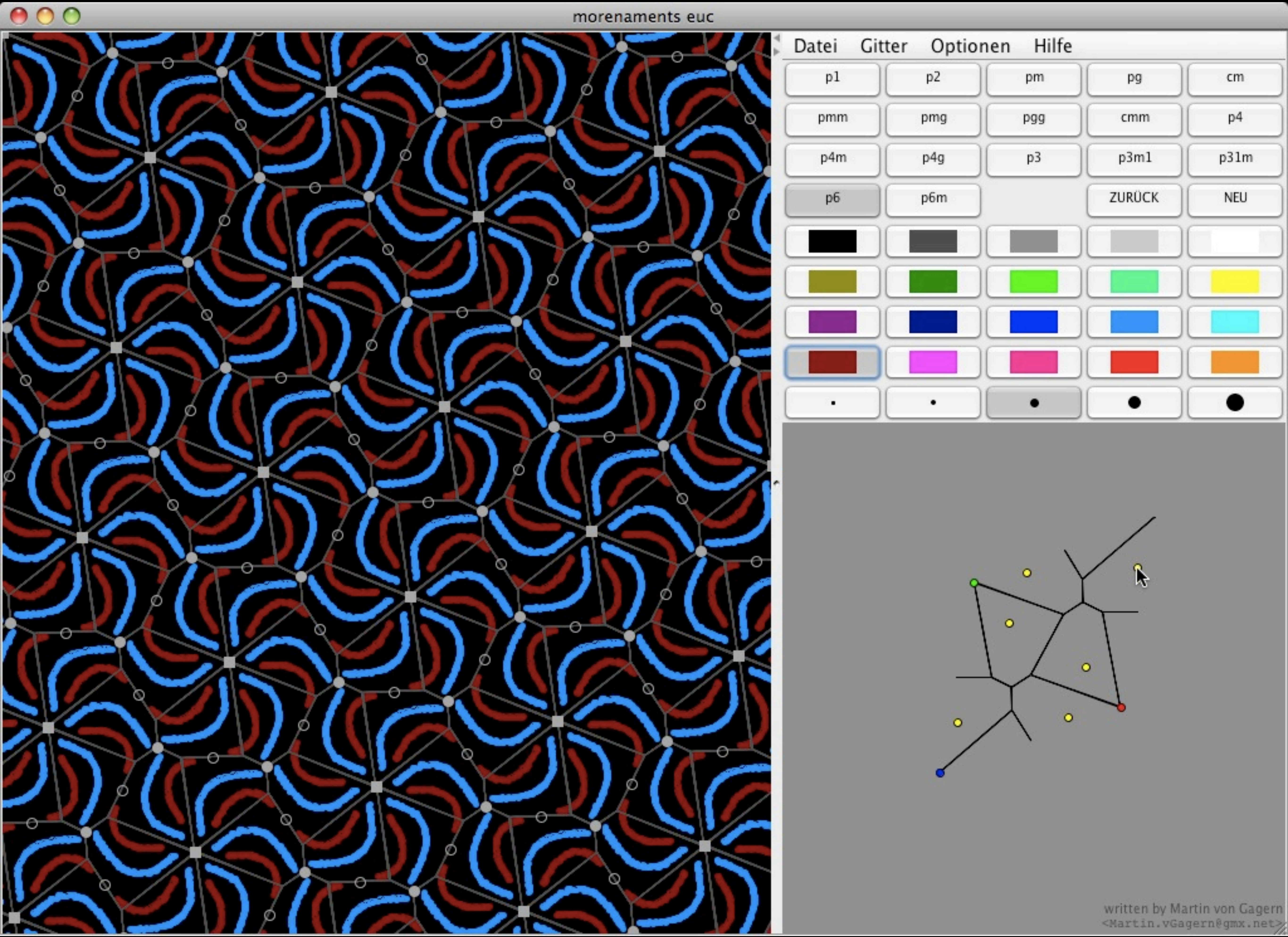
Bundesministerium für Bildung und Forschung

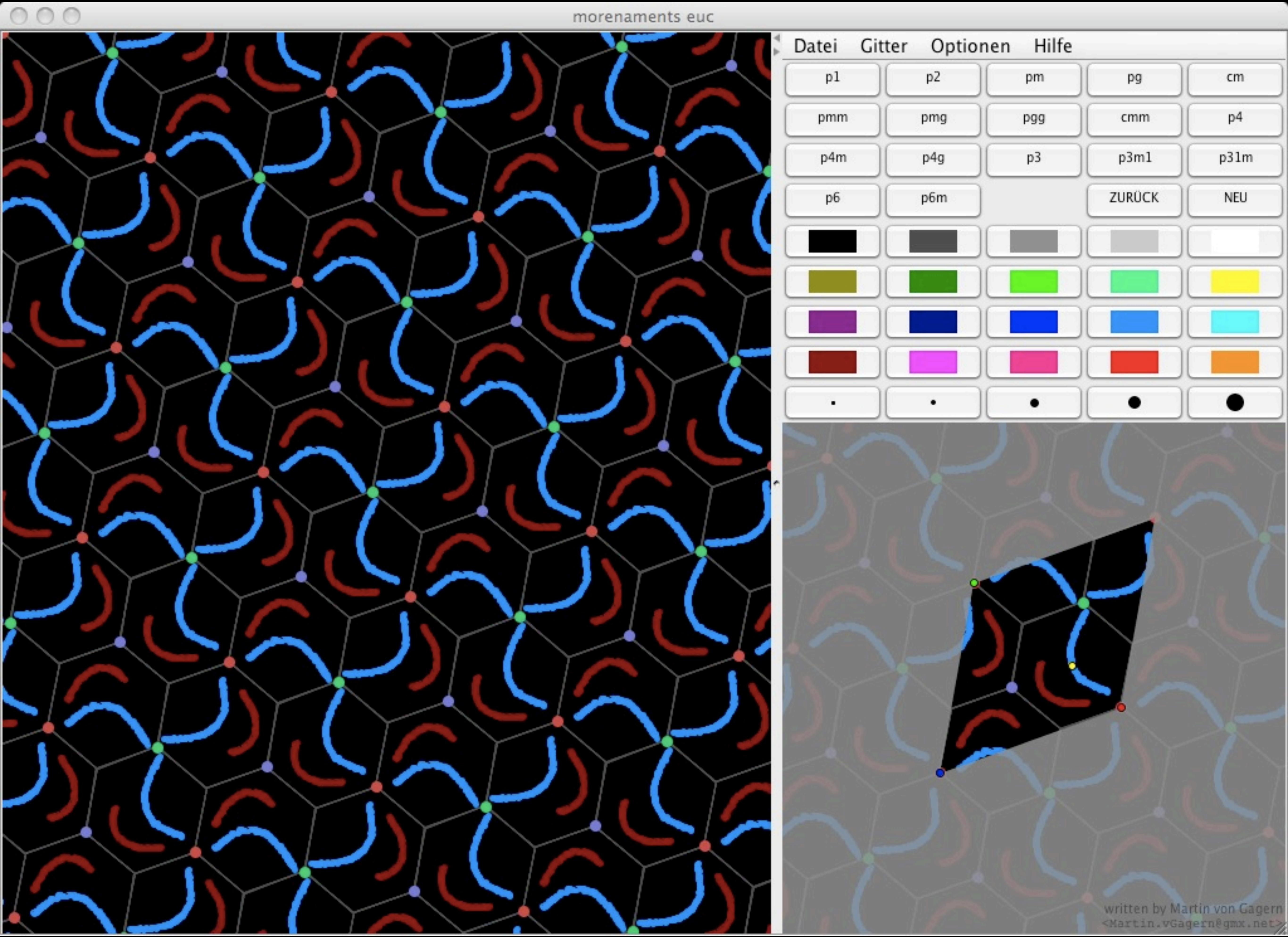
Wissenschaftsjahr 2008

Mathematik

Alles, was zählt


morenaments euc
Datei
Gitter
Optionen
Hilfe
p1
p2
pm
pg
cm
pmm
pmg
pgg
cmm
p4
p4m
p4g
p3
p3m1
p31m
p6
p6m
ZURÜCK
NEU
written by Martin von Gagern
<Martin.vGagern@gmx.net>


morenaments euc
Datei
Gitter
Optionen
Hilfe
p1
p2
pm
pg
cm
pmm
pmg
pgg
cmm
p4
p4m
p4g
p3
p3m1
p31m
p6
p6m
ZURÜCK
NEU
written by Martin von Gagern
<Martin.vGagern@gmx.net>

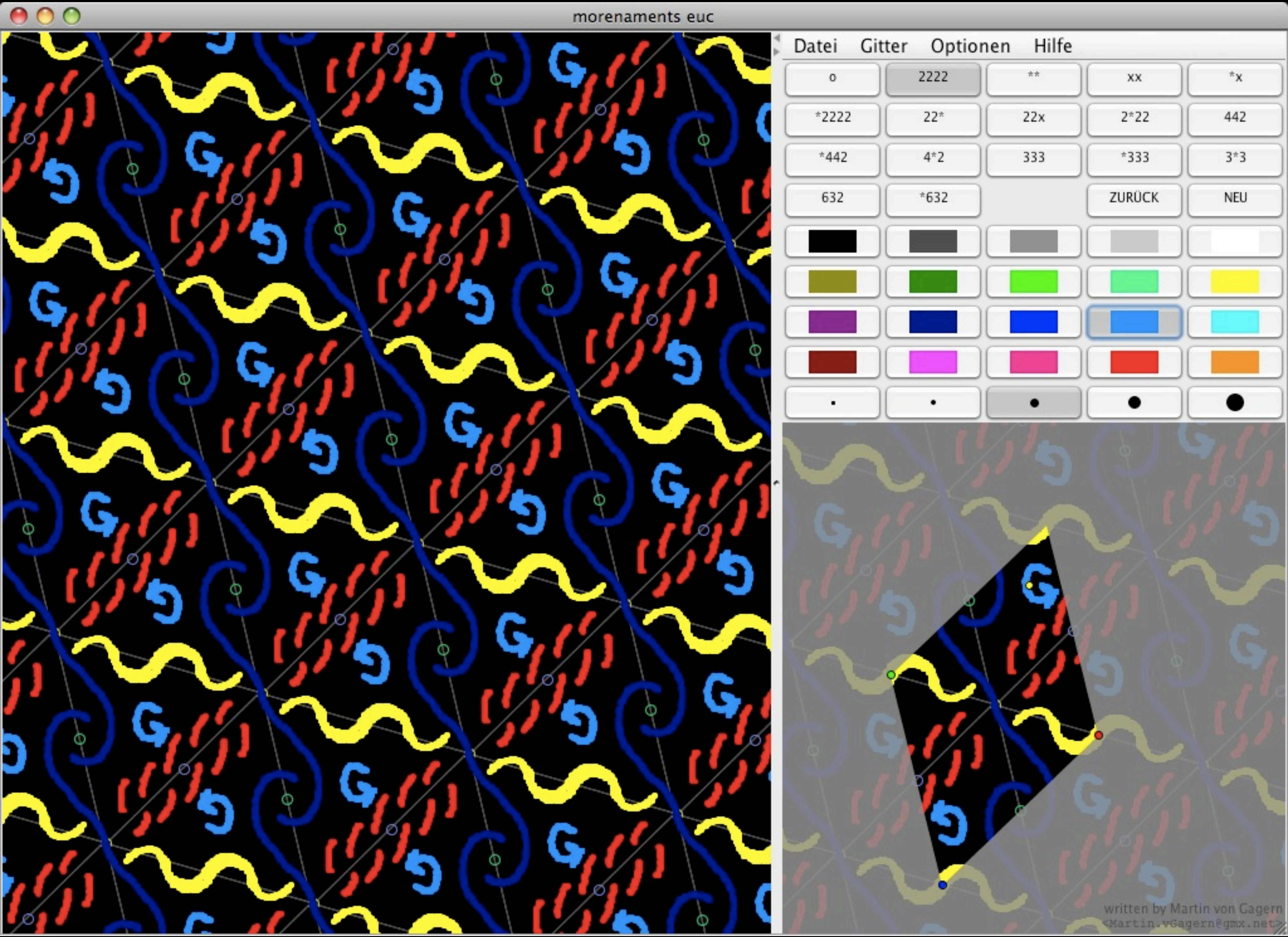

morenaments euc
Datei
Gitter
Optionen
Hilfe
p1
p2
pm
pg
cm
pmm
pmg
pgg
cmm
p4
p4m
p4g
p3
p3m1
p31m
p6
p6m
ZURÜCK
NEU
written by Martin von Gagern
<Martin.vGagern@gmx.net>

Mögliche Fragestellungen

1. Welche Kongruenzabbildungen gibt es?
2. Was ist eine mathematische Gruppe?
3. Welche Generatoren erzeugen die Symmetriegruppen?
4. Was ist eine Fundamentalzelle?
5. Was ist eine Spiegelgruppe?
6. Wieso gibt es 17 kristallographische Gruppen?

Orbifold-Symbole

- * Rand (Spiegelache(n))
- 3 Kegelpunkt (Drehzentrum abseits Spiegelachse)
- *3 Eckpunkt (Drehzentrum auf Spiegelachse)
- o Henkel (Translationen)
- × Kreuzkappe (Gleitspiegelung)

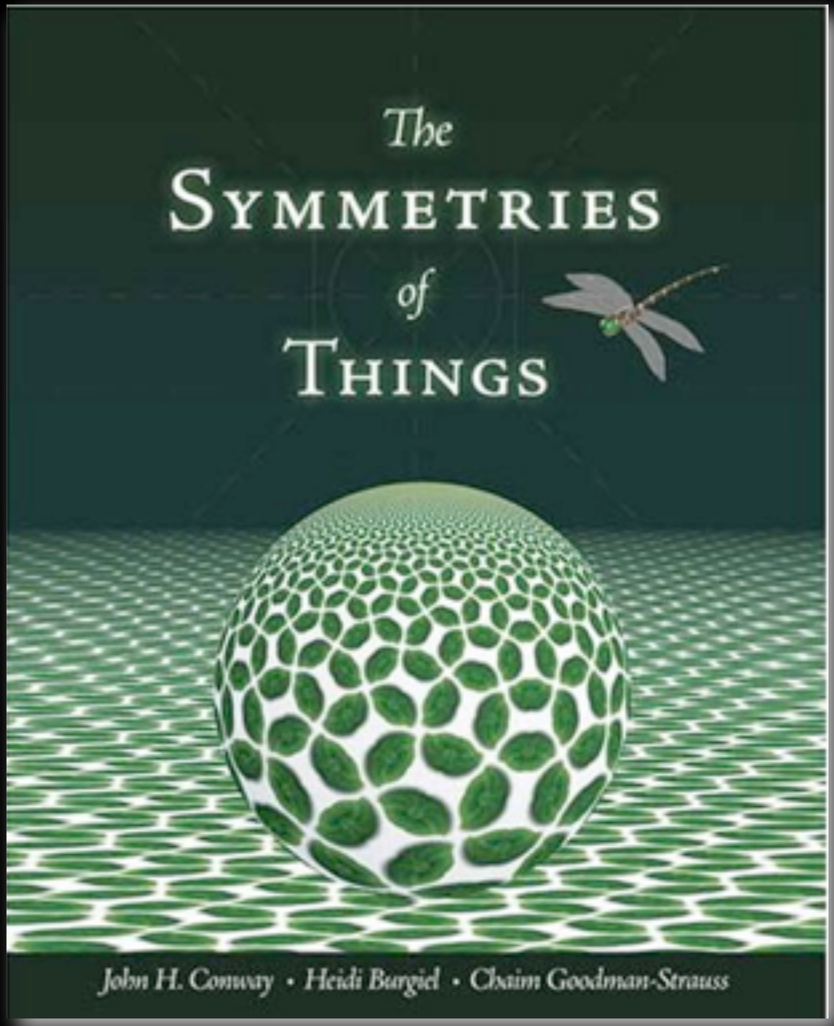

morenaments euc
Datei Gitter Optionen Hilfe
o
2222
**
xx
*x
*2222
22*
22x
2*22
442
*442
4*2
333
*333
3*3
632
*632
ZURÜCK
NEU
written by Martin von Gagern
<Martin.vGagern@gmx.net>

Wieso 17 Gruppen?

Kosten

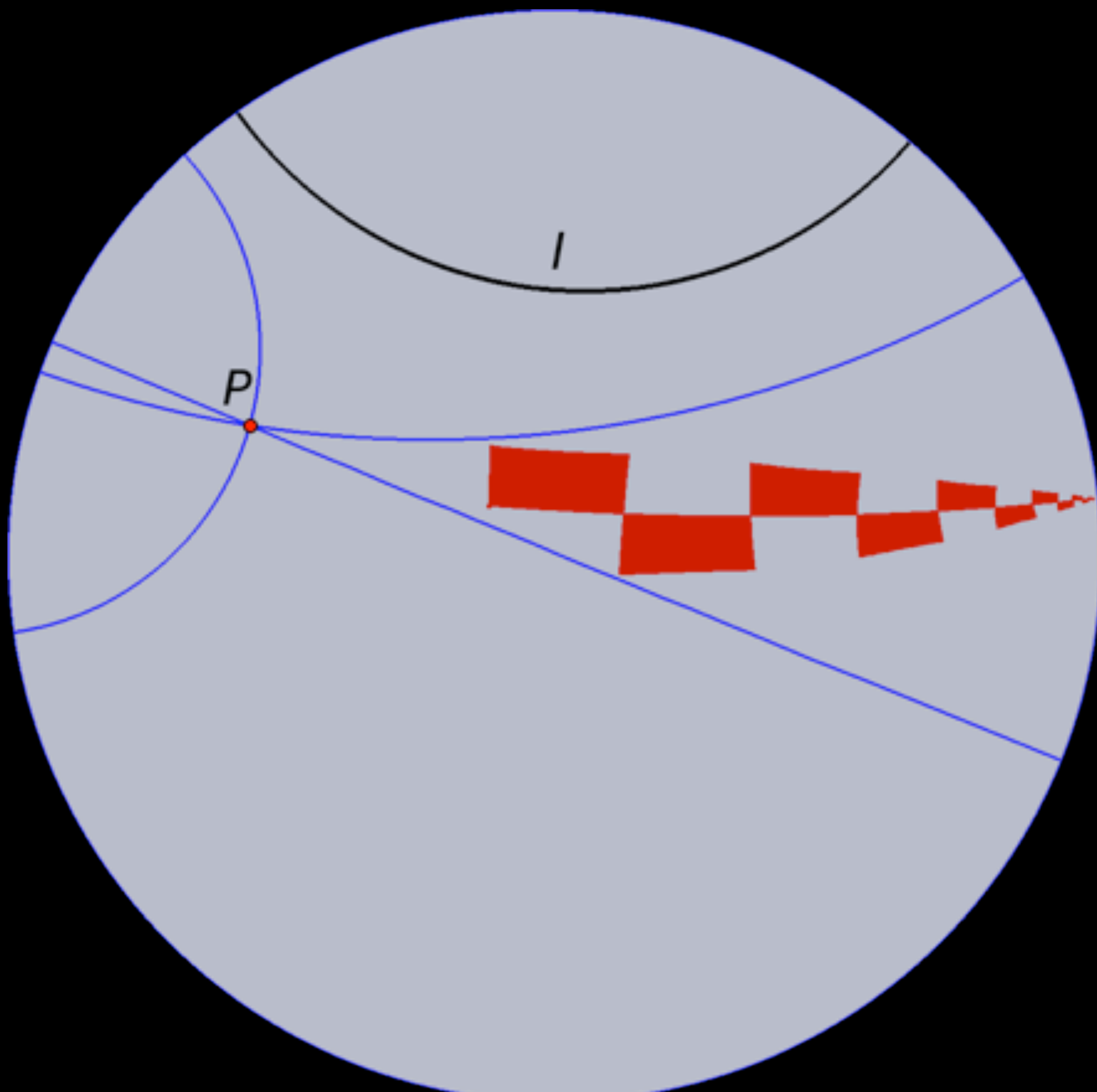
Summe: 2!

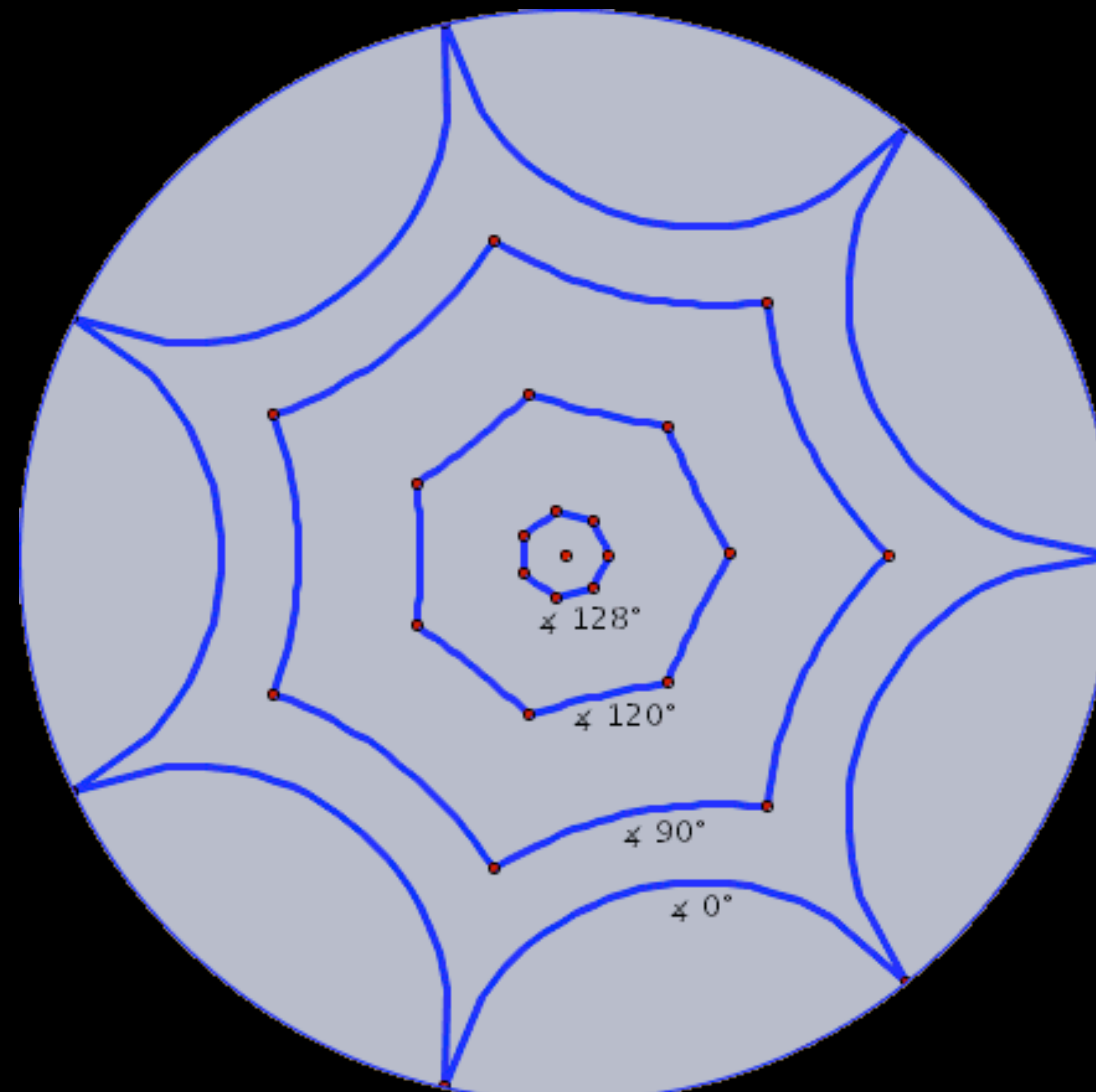
*	1	
3	(n-1)/n	z.B. 2/3
*3	(n-1)/2n	z.B. 2/6
○	2	
×	1	



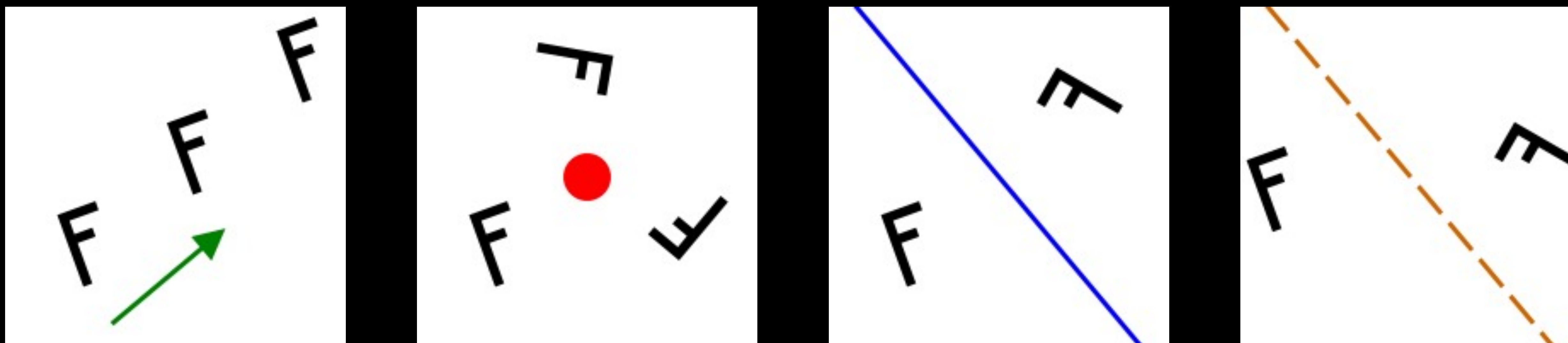
Conway, Burgiel, Goodman-Srauss

Hyperbolische Geometrie

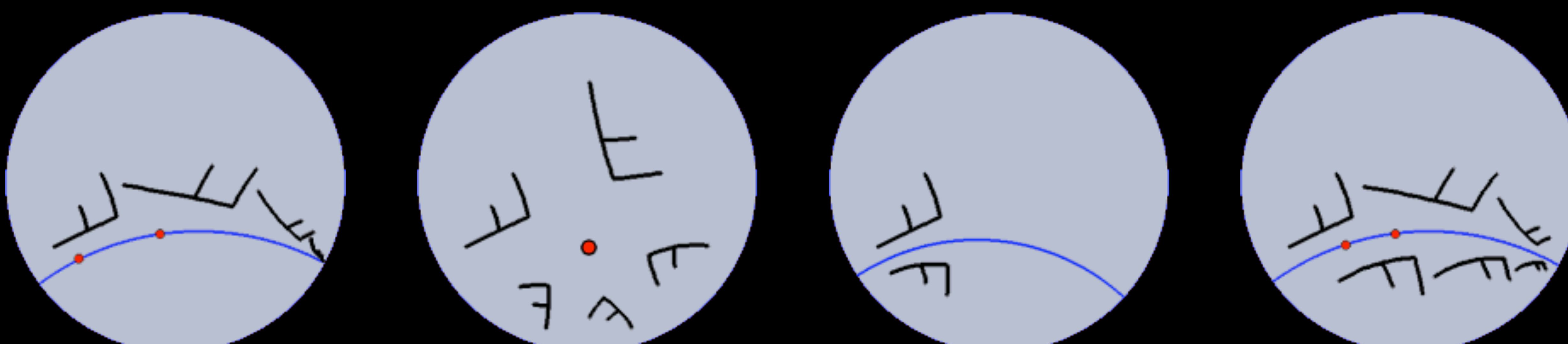


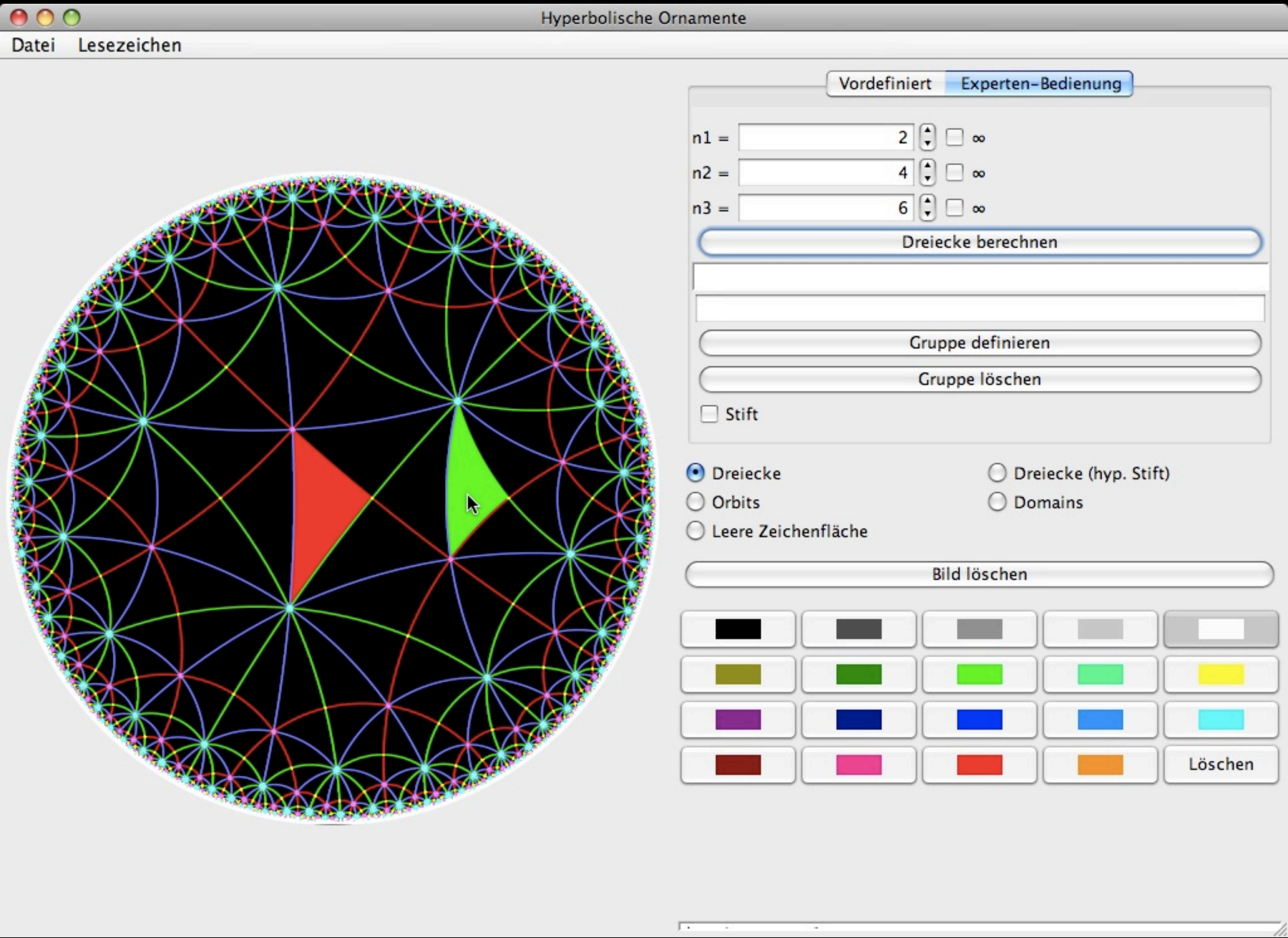


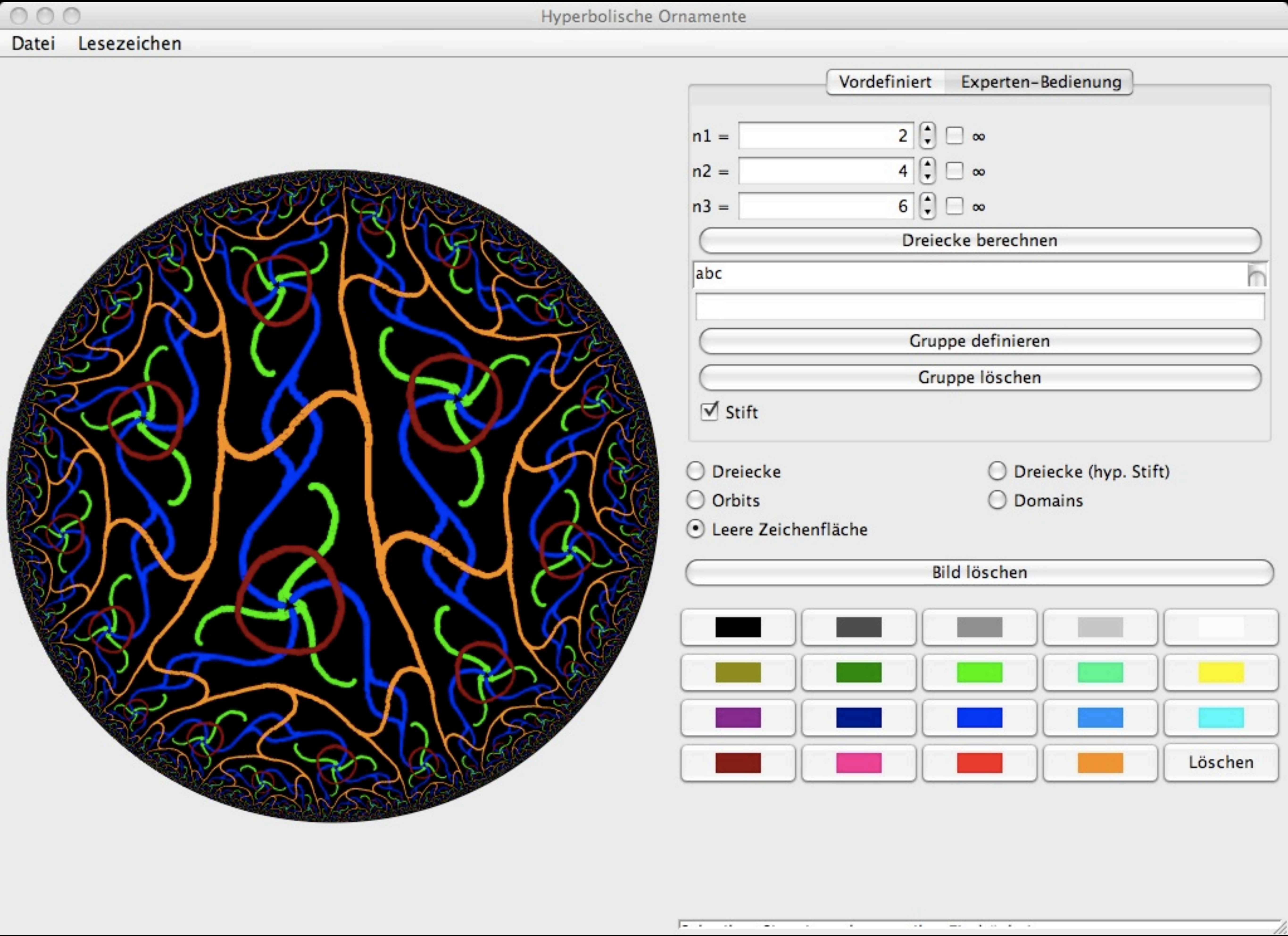
Hyperbolische Geometrie



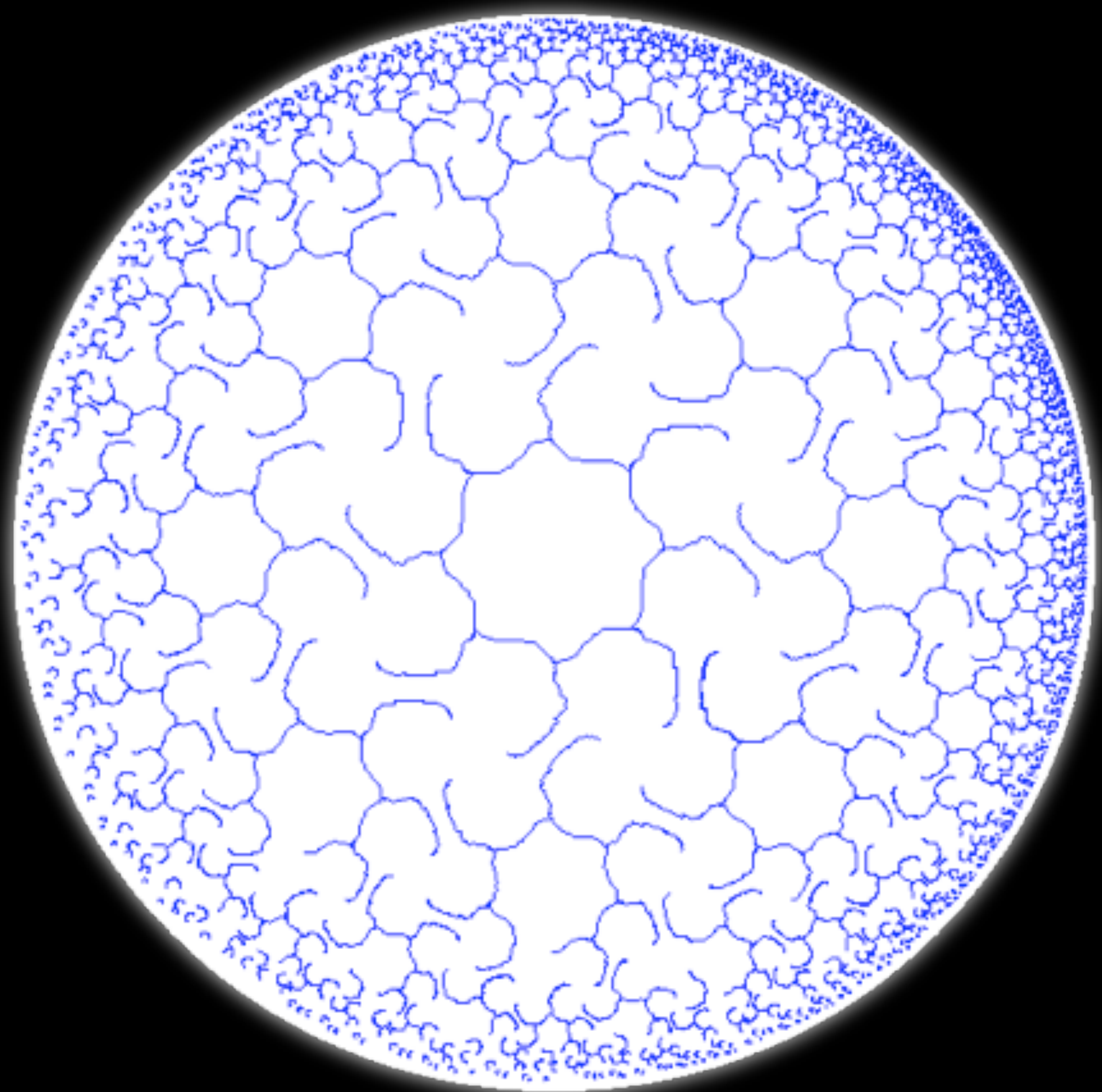
Verschiebung Drehung Spiegelung Gleitspiegelung




Hyperbolische Ornamente
Datei
Lesezeichen
Vordefiniert
Experten-Bedienung
n1 = 2 ∞
n2 = 4 ∞
n3 = 6 ∞
Dreiecke berechnen
Gruppe definieren
Gruppe löschen
Stift
Dreiecke
Dreiecke (hyp. Stift)
Orbits
Domains
Leere Zeichenfläche
Bild löschen
Löschen


Hyperbolische Ornamente
Datei
Lesezeichen
Vordefiniert
Experten-Bedienung
n1 = 2 ∞
n2 = 4 ∞
n3 = 6 ∞
Dreiecke berechnen
abc
Gruppe definieren
Gruppe löschen
Stift
Dreiecke
Dreiecke (hyp. Stift)
Orbits
Domains
Leere Zeichenfläche
Bild löschen
Löschen

Naiver Ansatz



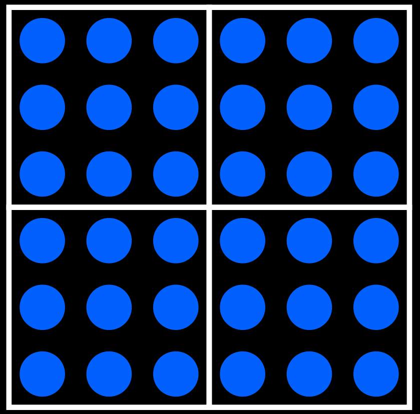
- Beginne in der Mitte
- Wende rekursiv Transformationen an
- Definiere eine Abbruchbedingung
  - Rekursionstiefe
  - Objektgröße

Problem:

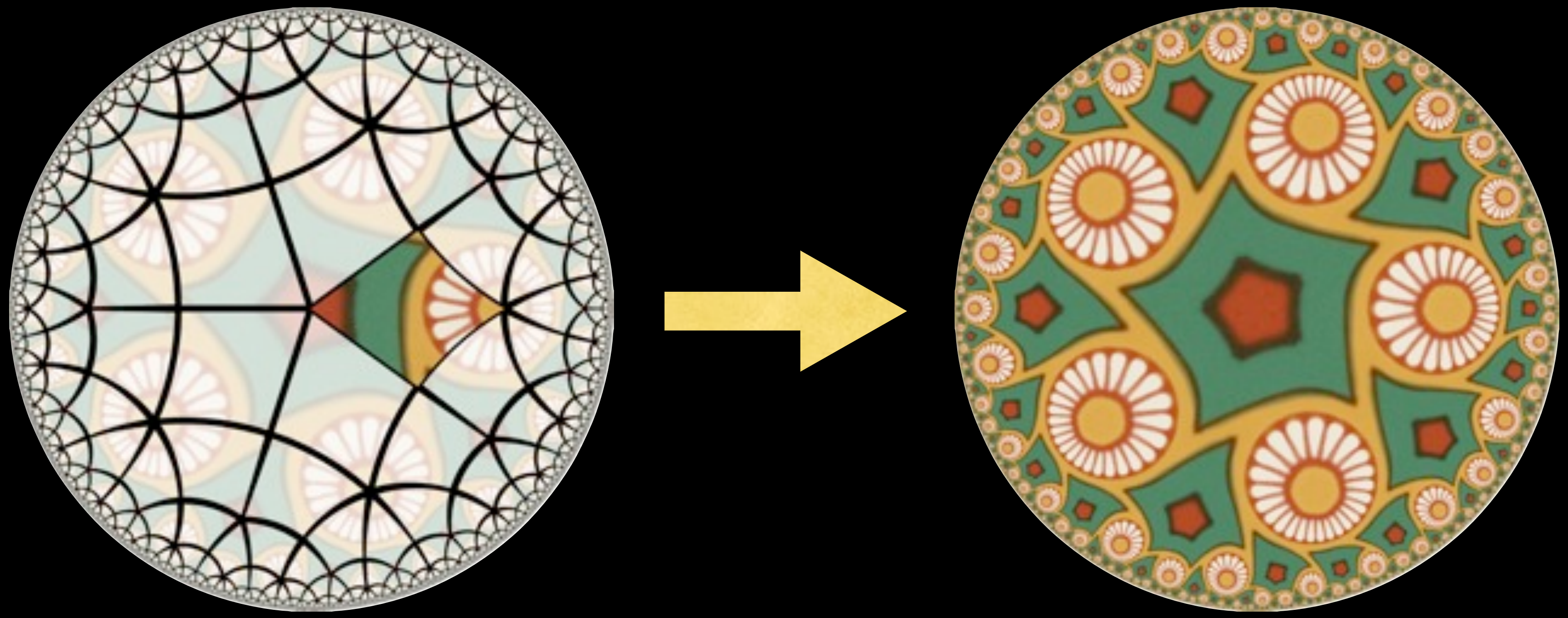
Die meiste Zeit wird verwendet zum Zeichnen winzig kleiner Dinge

Tricks

- Pixelorientierter Ansatz wie beim Raytracing
- Supersampling zur Kantenglättung

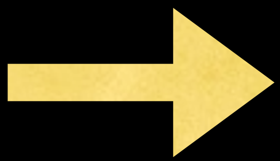


- Parallele Berechnung auf der Grafikkarte



Mustererkennung

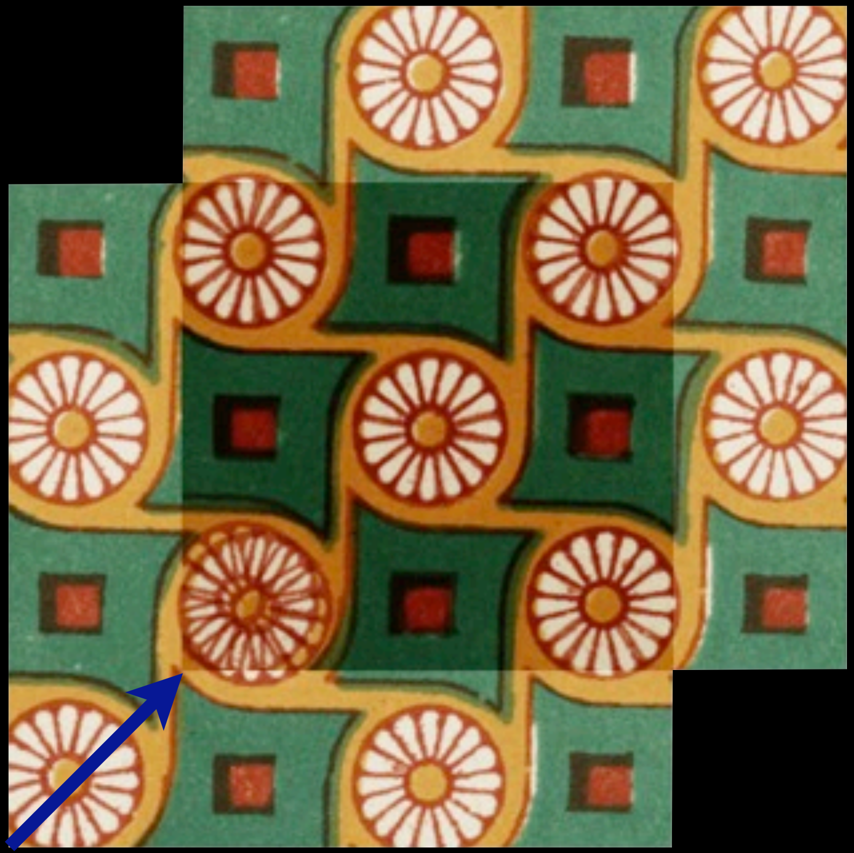
Mustererkennung



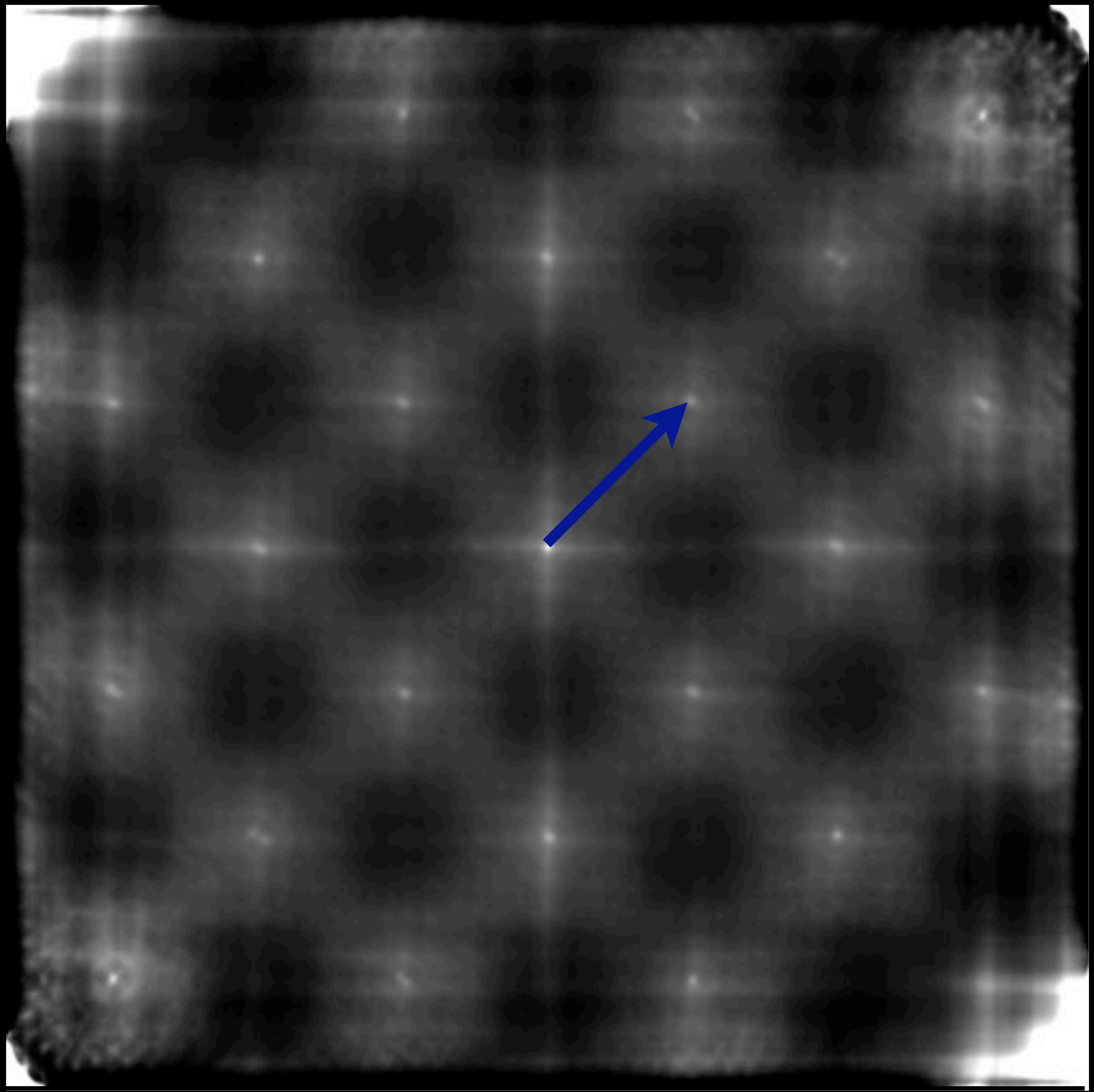
Exakt symmetrisches
Ornament

Mustererkennung

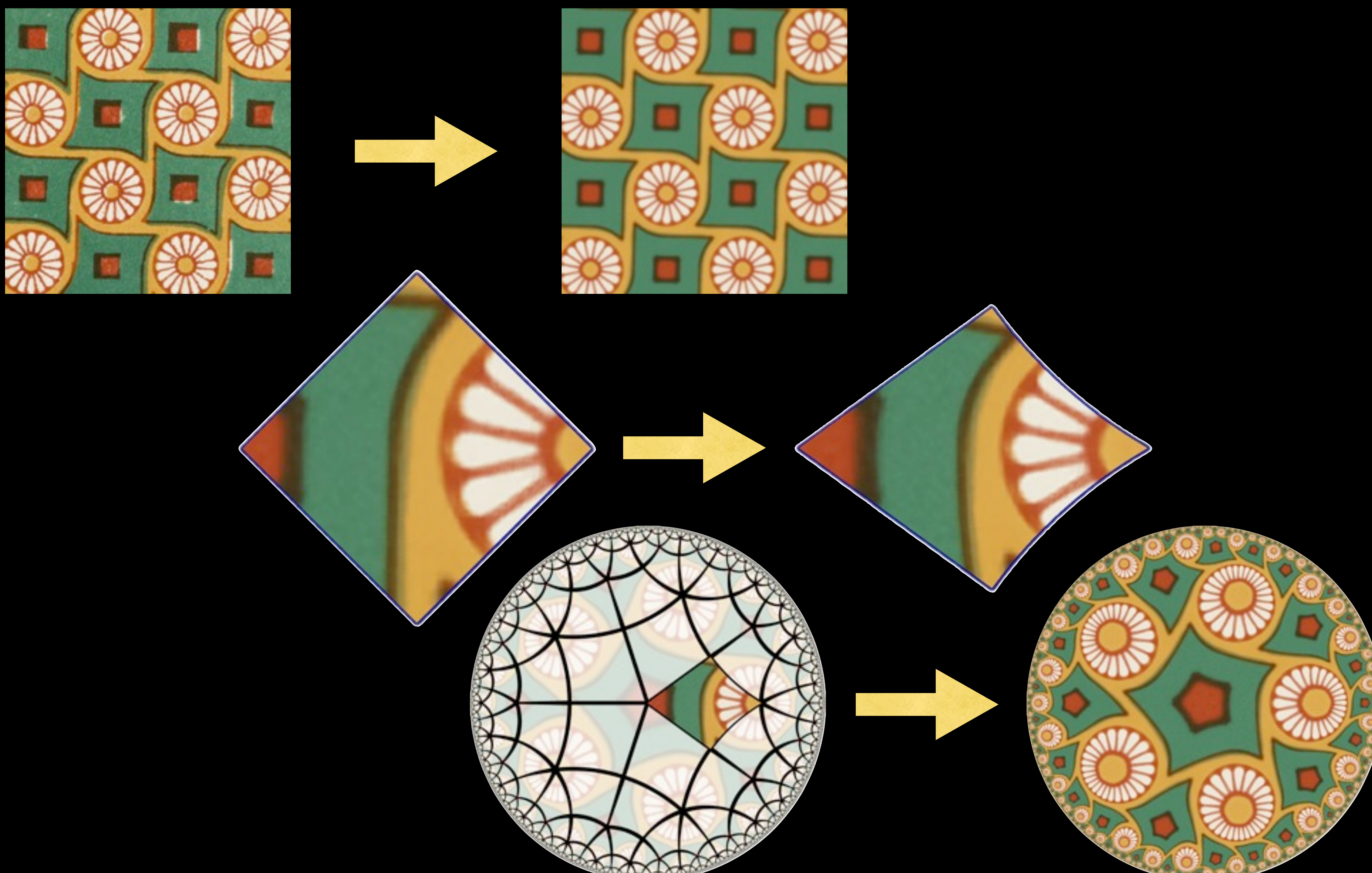
$$a(x,y) = \sum_j \sum_k b(j,k) \cdot b(j+x, k+y)$$



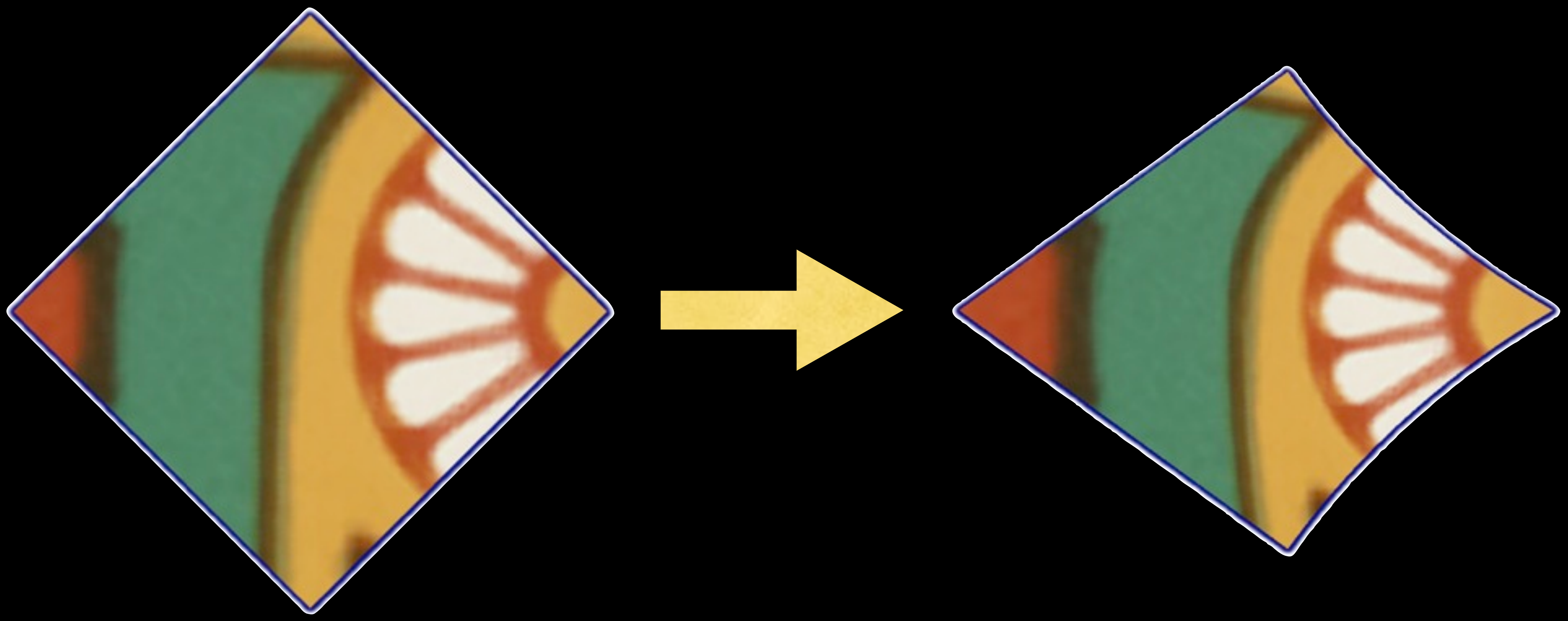
Autokorrelation



Der restliche Vortrag



Der restliche Vortrag



Zwei Probleme

Kombinatorik

Welche hyperbolischen Gruppen eignen sich als Entsprechungen euklidischen Gruppen?

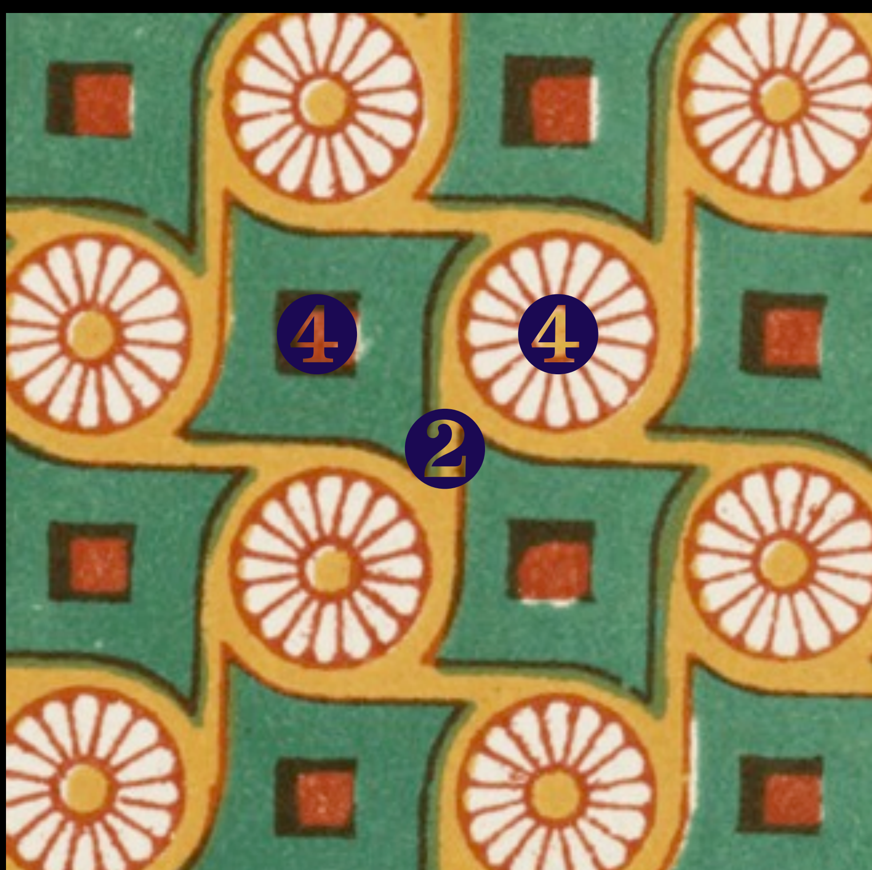
Es gibt nur 17 euklidische kristallographische Gruppen in der Ebene, aber unendlich viele strukturell unterschiedliche hyperbolische Gruppen

Deformation

Wie berechnet man eine vorgegebene Deformation einer Fundamentalzelle?

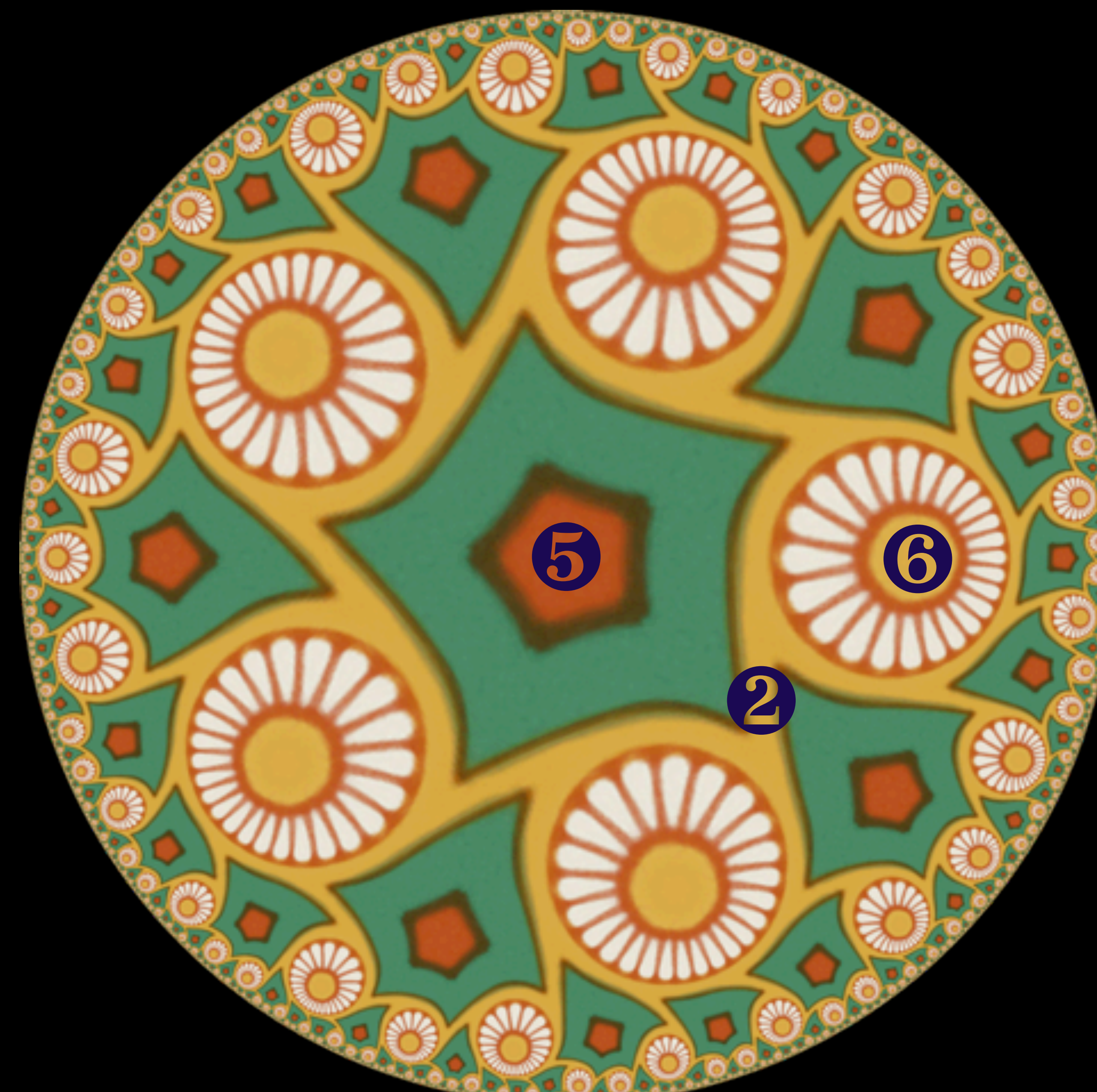
Was ist die **richtige** Deformation?

Kombinatorik



orbifold symbol: 442

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} = \pi$$

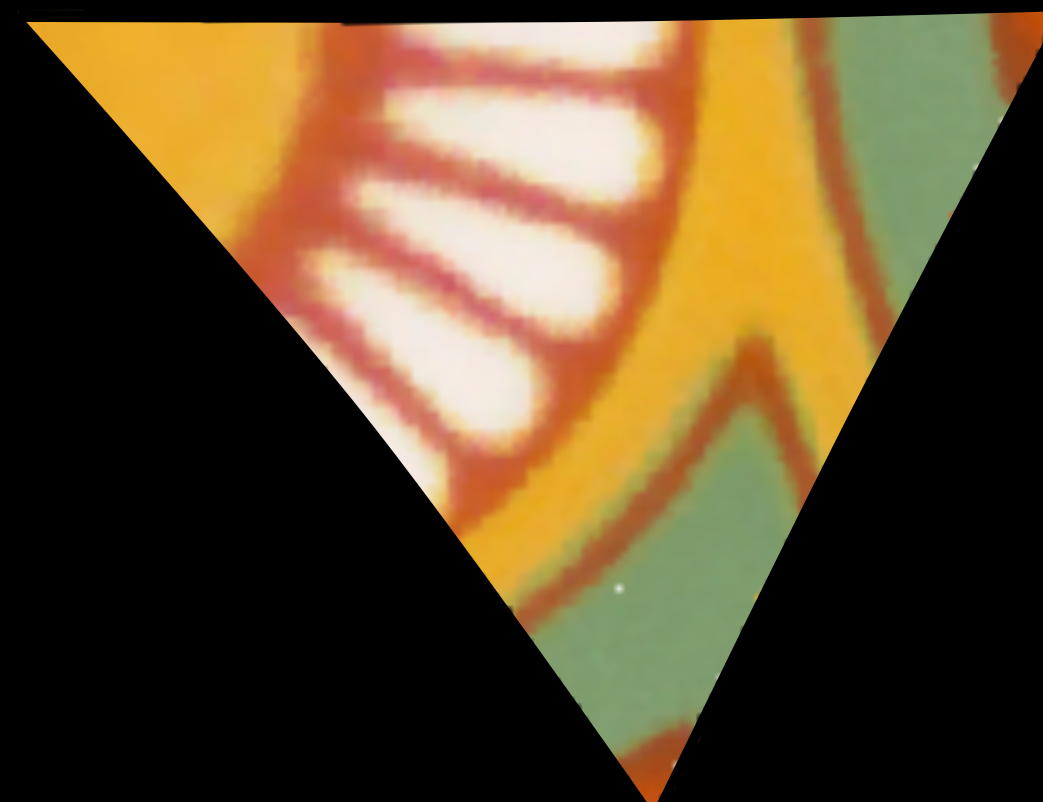


$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} < \pi$$

orbifold symbol: 562

Zelldeformation

Konforme
Abbildung

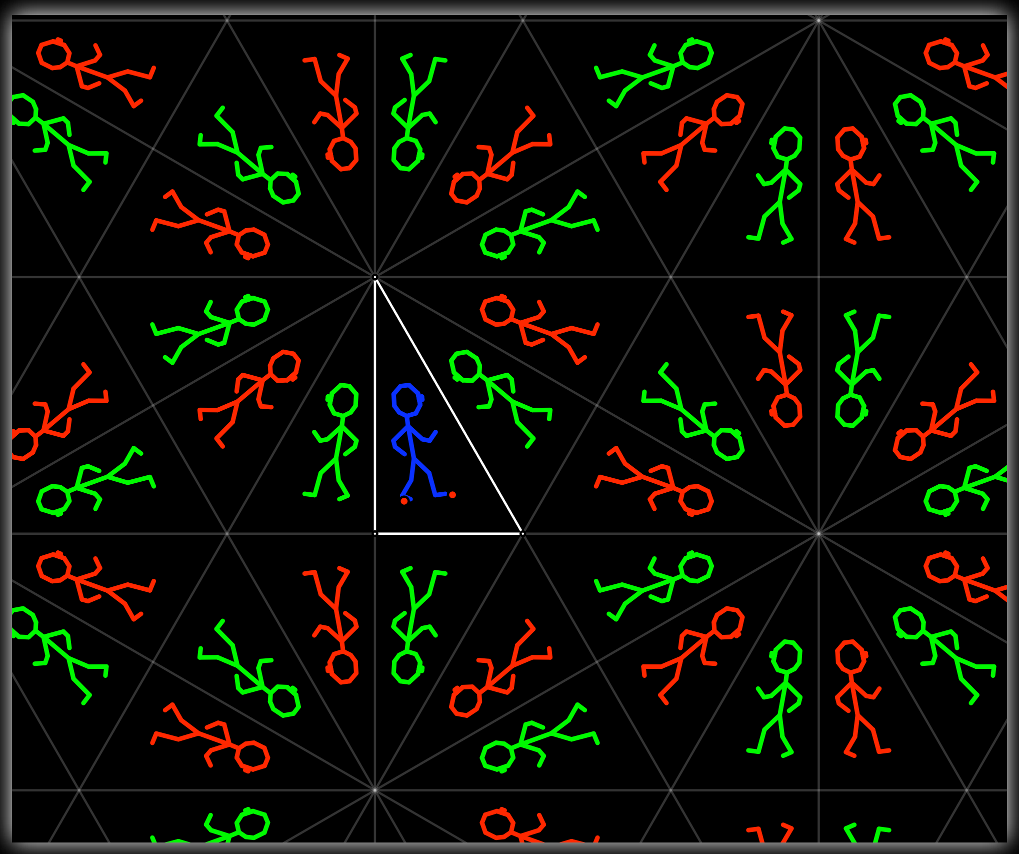


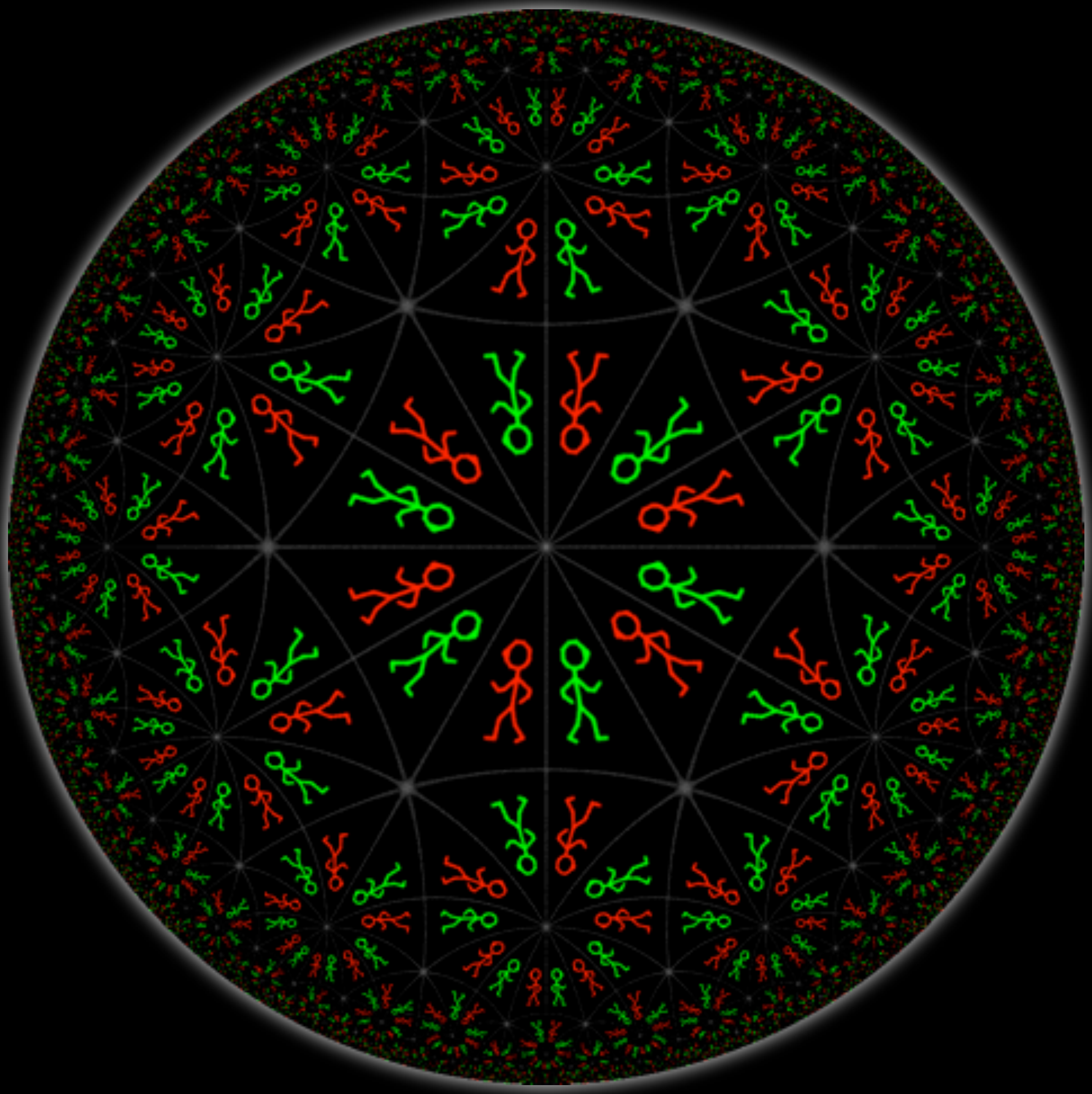
Ecken: Innenwinkel gezielt verändern

Kanten: Geraden und Kreisbögen

Innenfläche: Konforme (winkeltreue) Abbildung

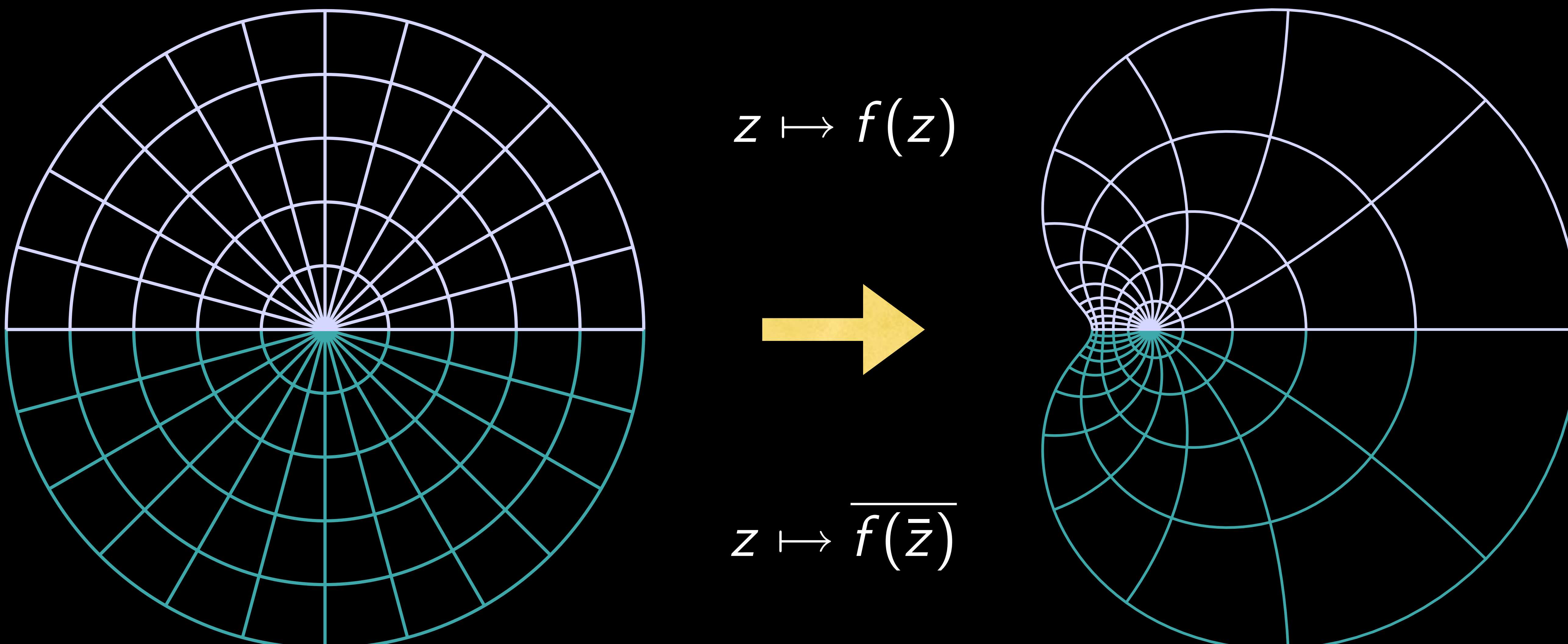
Spiegelgruppen





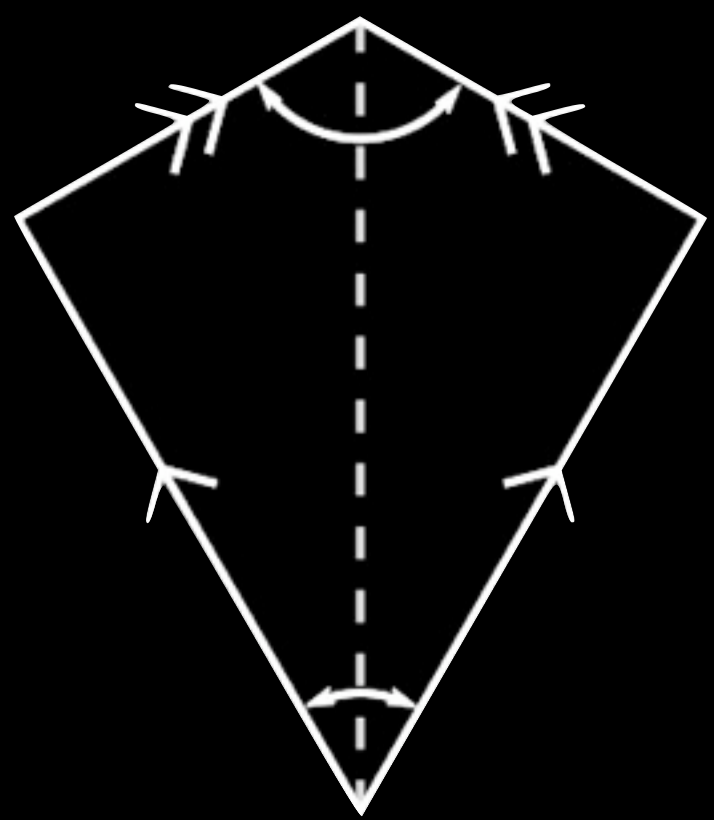
Reflexionsprinzip

Schwarz Reflection Principle

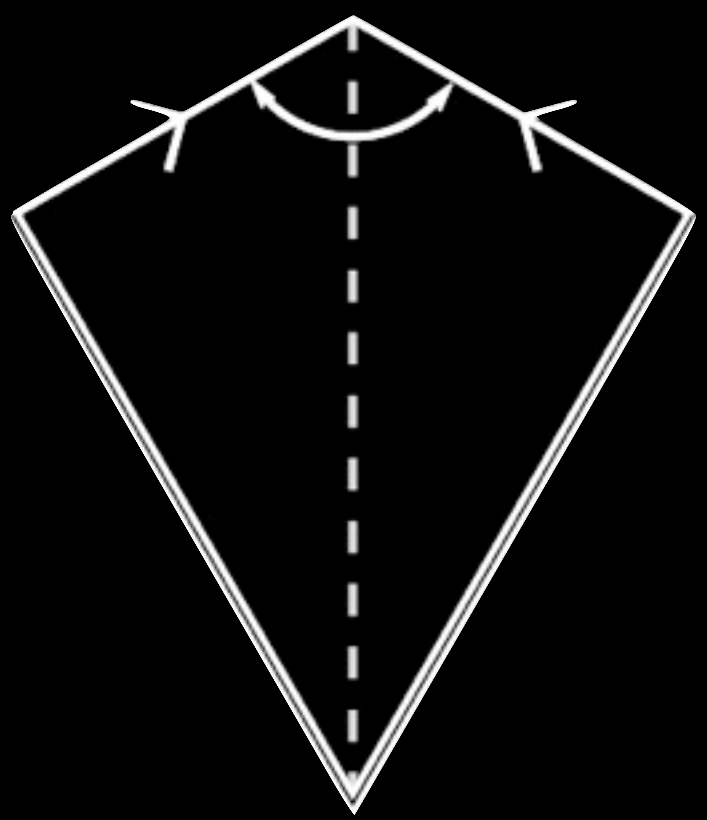


Hochsymmetrischer Fall

p4mm, p6mm, p3m1



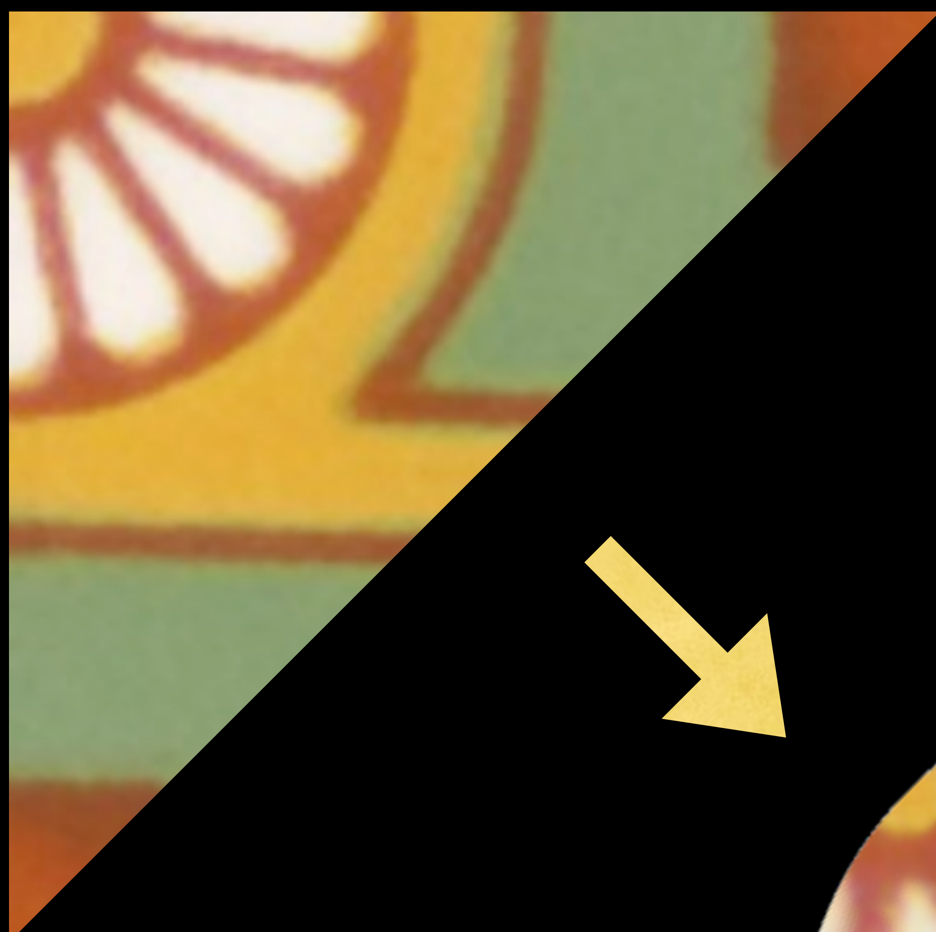
p3, p4, p6



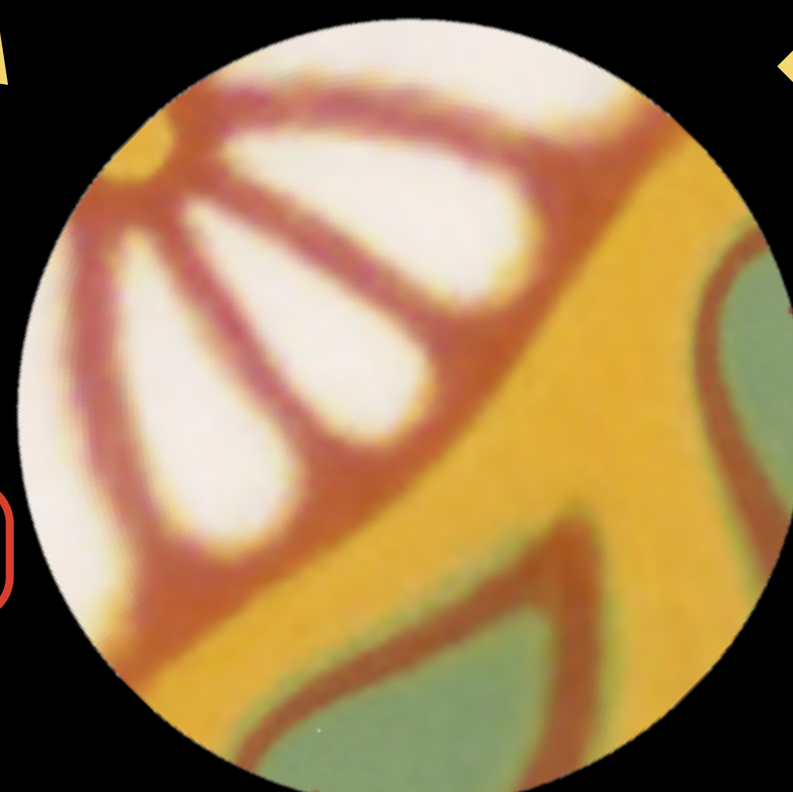
p4gm, p31m

Dieser Ansatz deckt die acht Fälle ab, in denen allein die Symmetriegruppe die Form der Fundamentalzelle festlegt.

Theoretischer Ansatz



Konforme Abbildung



Riemannscher Abbildungssatz

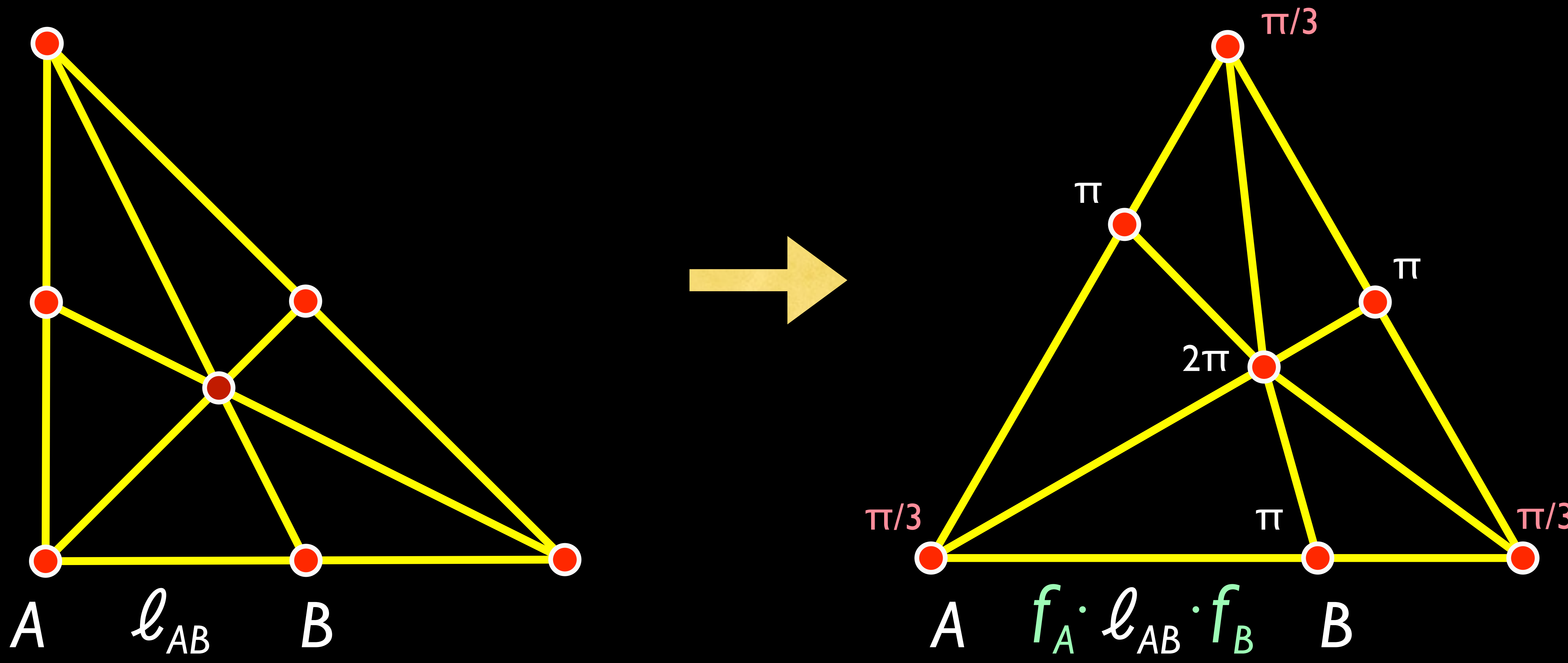
$\boxed{\text{Inverse S.-C.-Abbildung}}$

schwer!

Schwarz-Christoffel-Abbildung

$$z \mapsto \frac{(z^{1-c})_2F_1(a, b, c; z)}{{}_2F_1(a', b' c'; z)}$$

Diskret konforme Abbildung

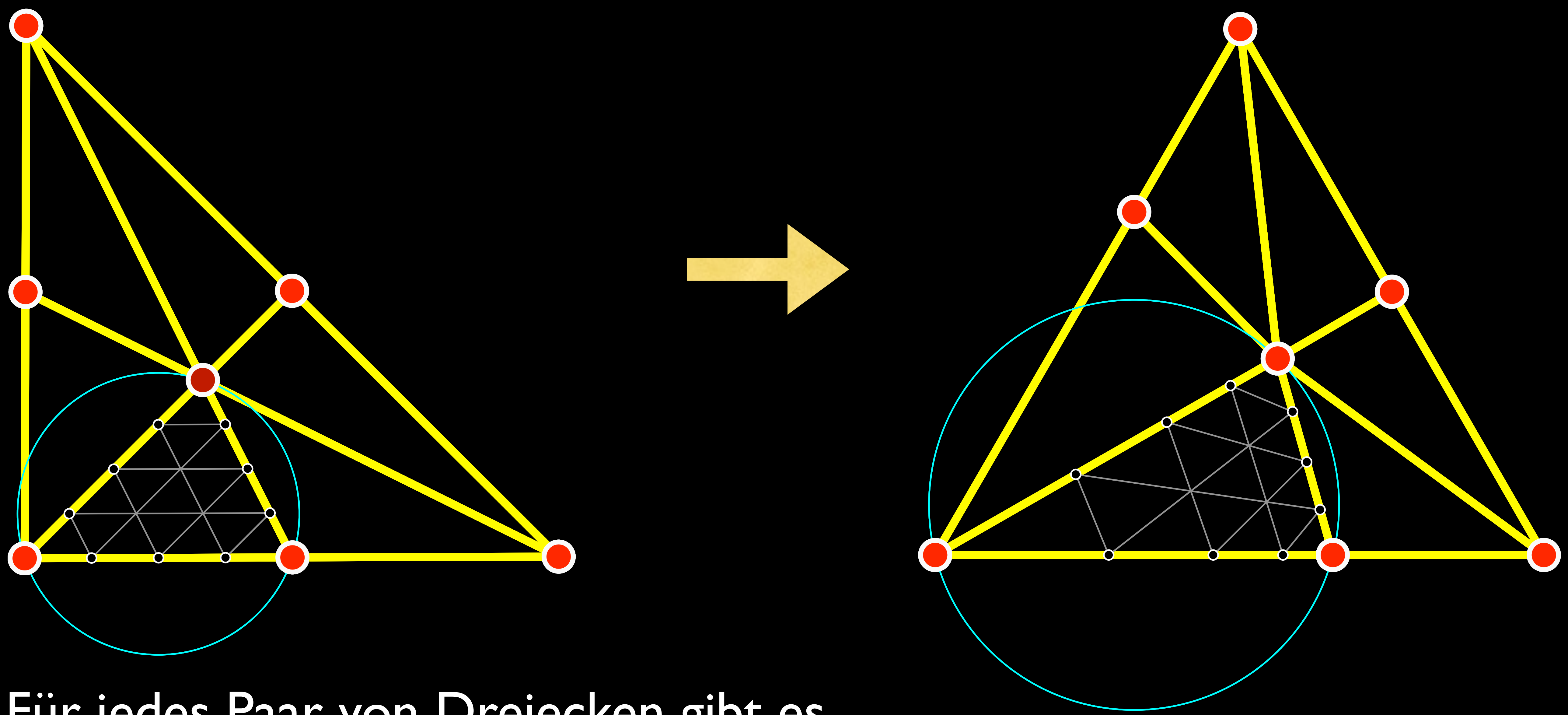


Eingabe: Winkelsummen für alle Knoten vorgegeben

Ausgabe: Skalierungsfaktoren f_A durch konvexe Optimierung berechnet

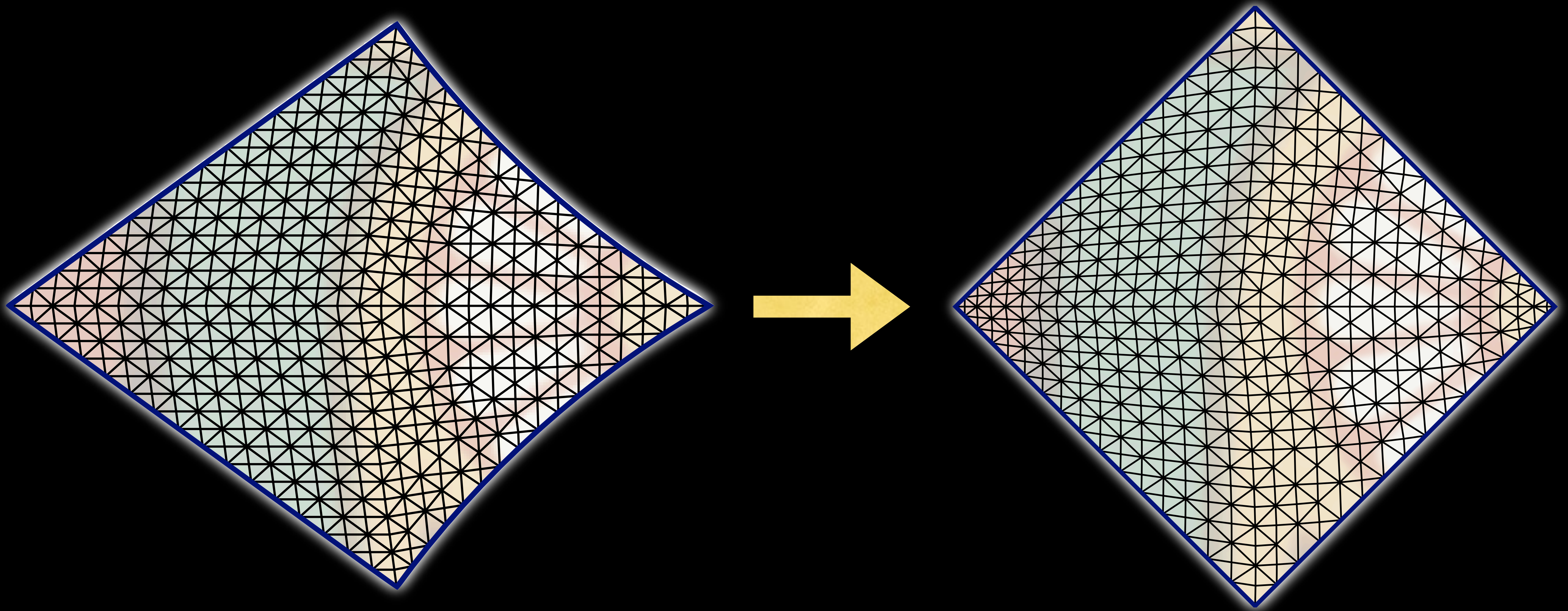
SPRINGBORN et al.: Conformal Equivalence of Triangle Meshes

Projektive Interpolation



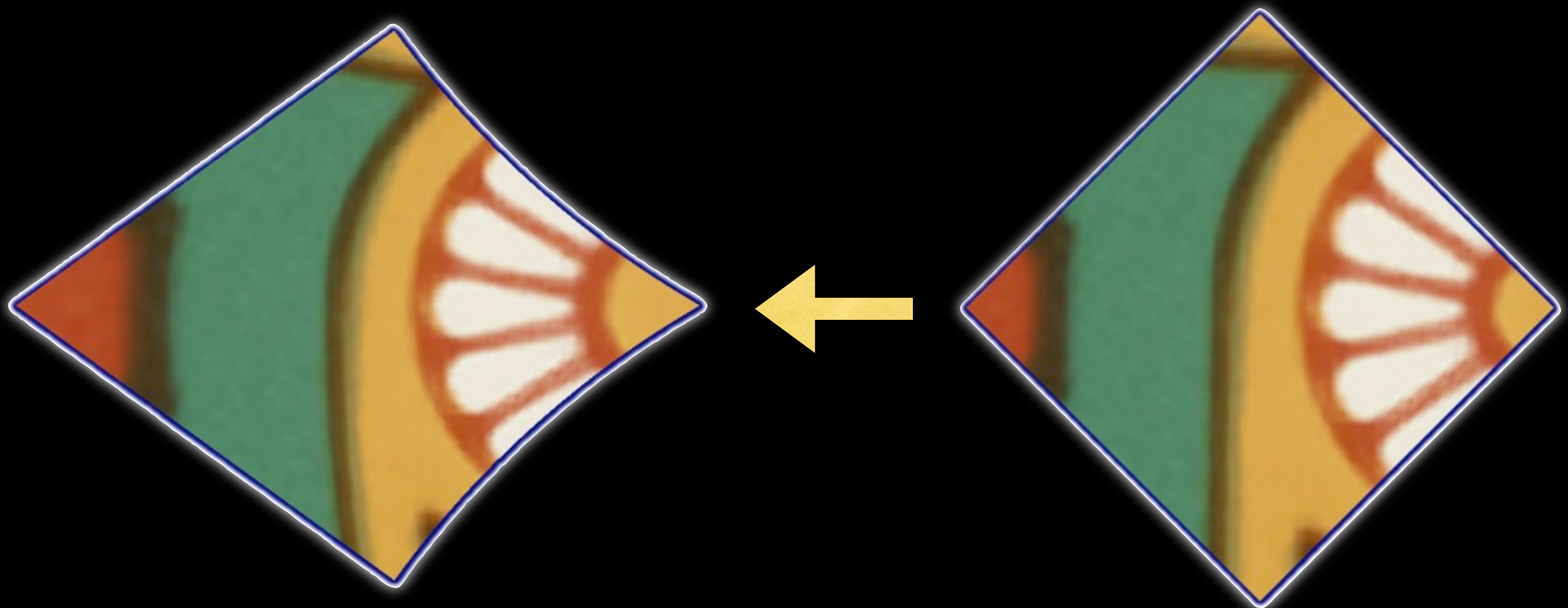
Für jedes Paar von Dreiecken gibt es eine eindeutige projektive Abbildung, die Dreiecke und Umkreise aufeinander abbildet

Zelldeformation



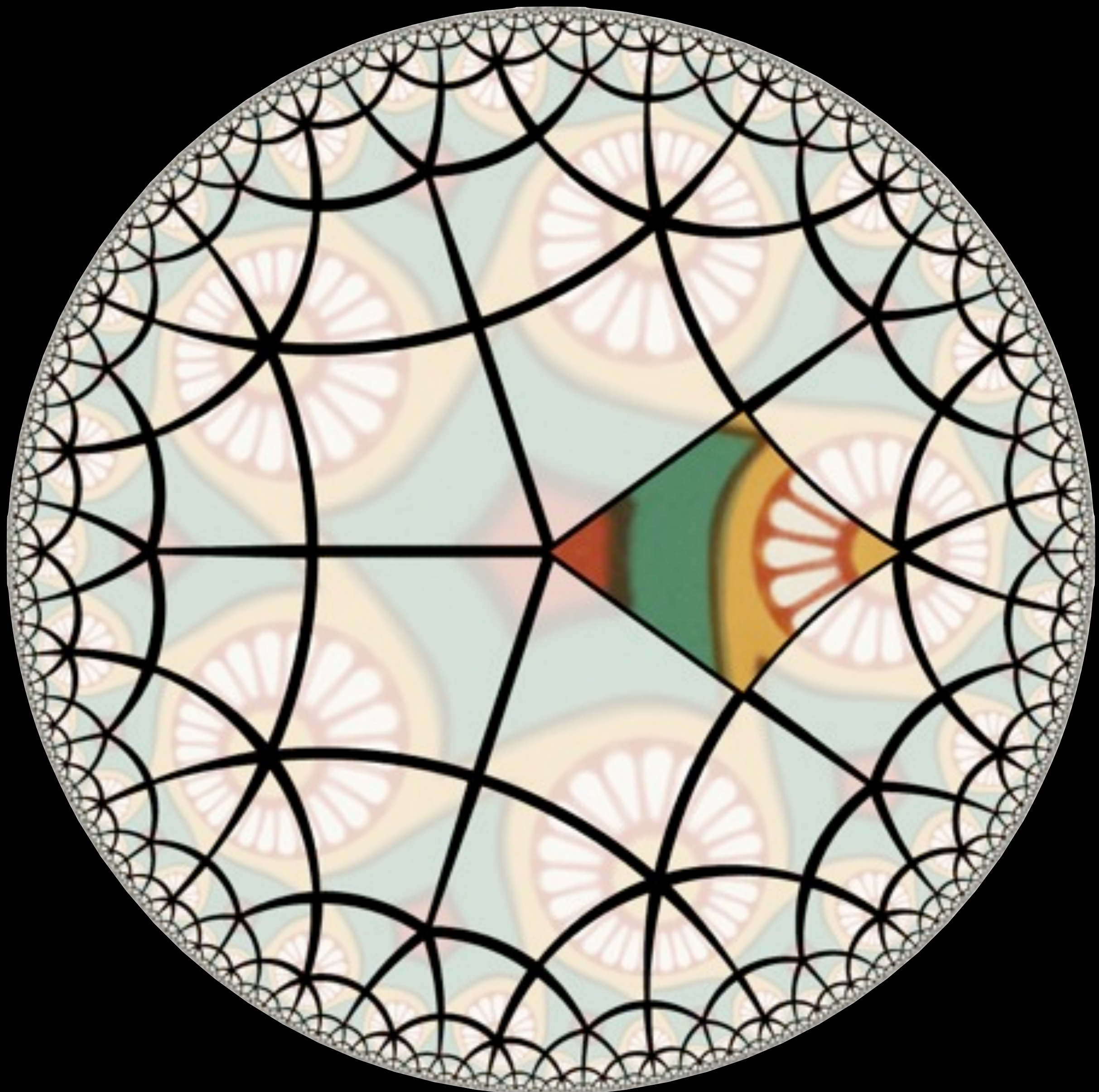
1. Hyperbolische Fundamentalzelle triangulieren
2. Gitter diskret konform abbilden
3. Das Innere der Dreiecke projektiv interpolieren

Zelldeformation



1. Hyperbolische Fundamentalzelle triangulieren
2. Gitter diskret konform abbilden
3. Das Innere der Dreiecke projektiv interpolieren
4. Pixelweise Farben kopieren

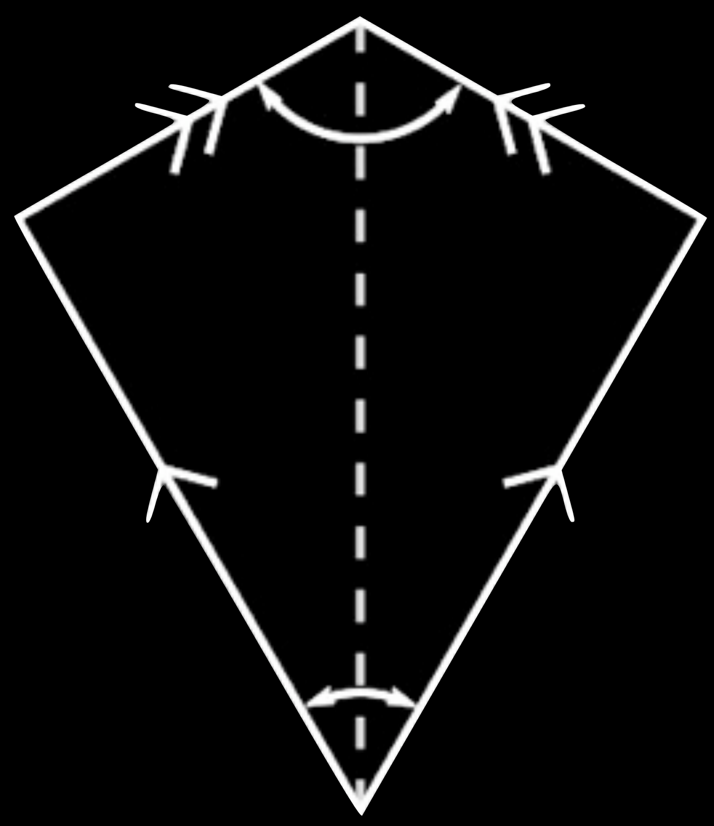
Kachelung der Ebene



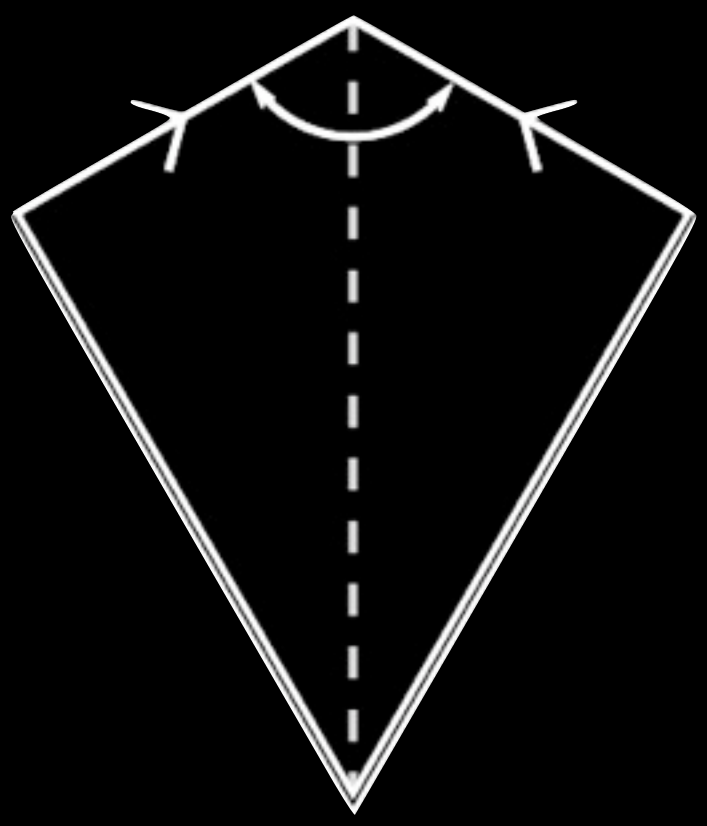
Durch „Raytracing“!

Hochsymmetrischer Fall

p4mm, p6mm, p3m1



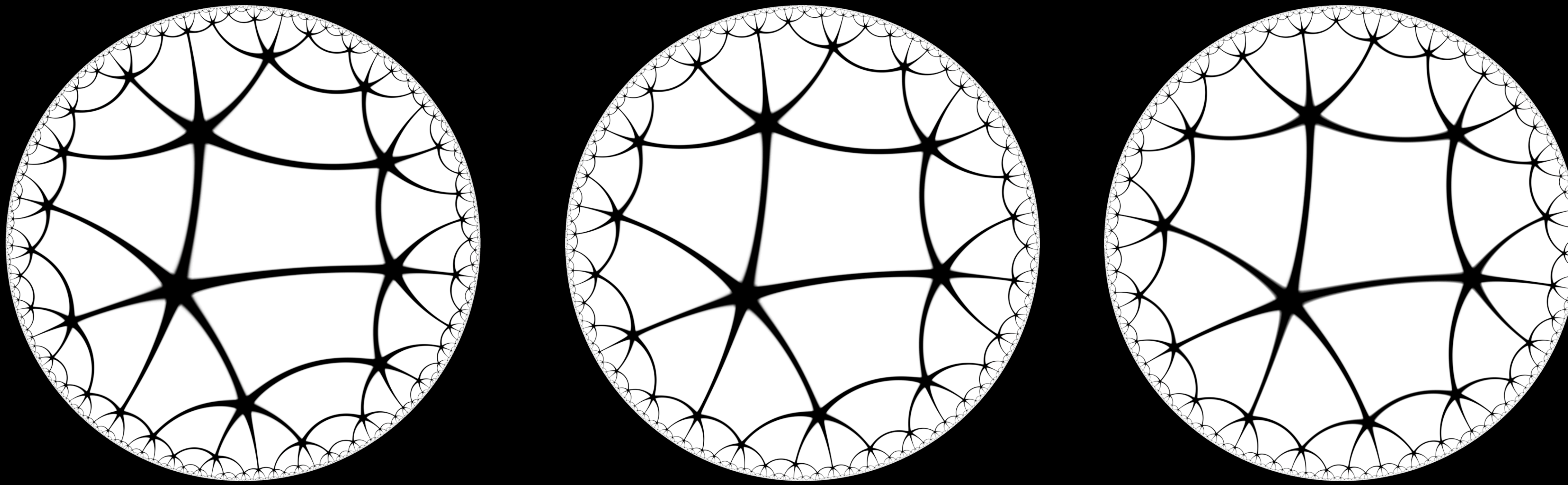
p3, p4, p6



p4gm, p31m

Mindestens ein ≥3-zähliges Drehzentrum

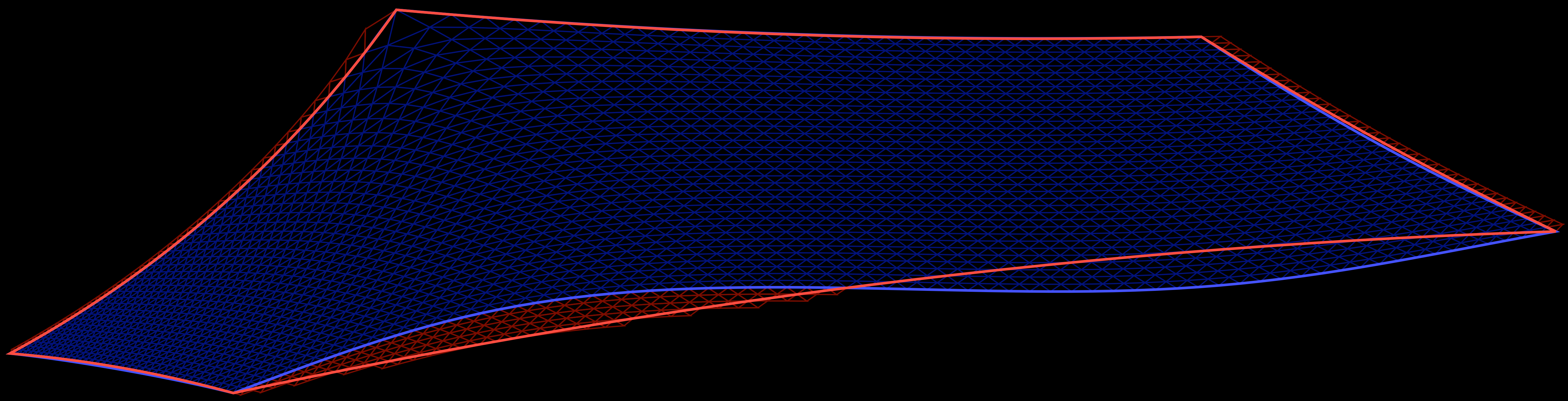
Niedersymmetrischer Fall



- Vergleichbare Freiheitsgrade treten für hyperbolische Gruppen auf.
- Nur eine Form erlaubt eine konforme Abbildung.
  - Macht kontinuierlichen Schwarz-Christoffel-Ansatz unbrauchbar
  - Triangulierung der hyperbolischen Zelle als Ausgangspunkt unbrauchbar

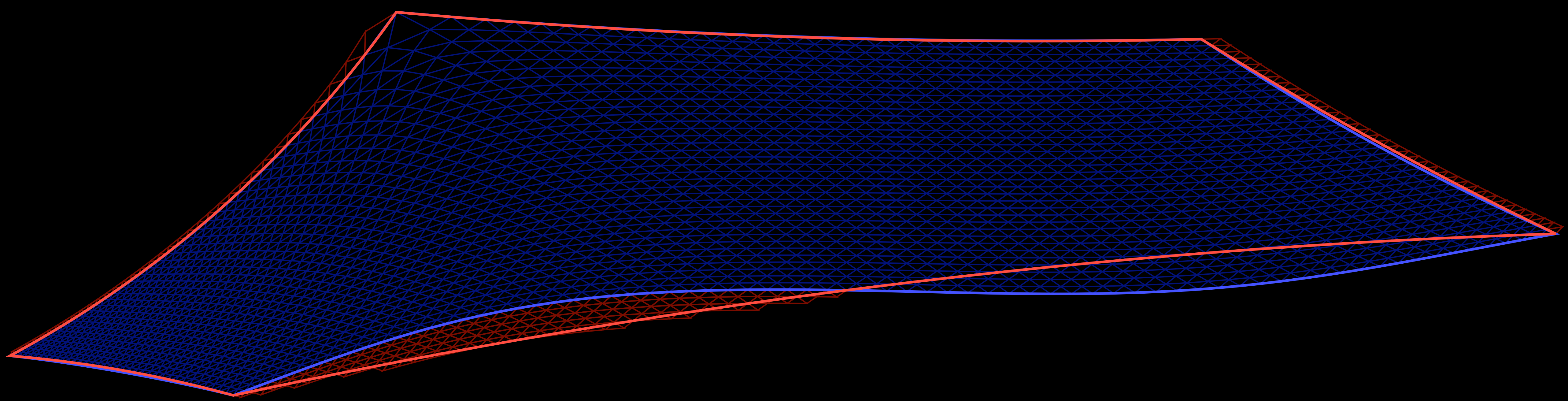
Niedersymmetrischer Fall

Bisher waren Fundamentalzellen immer geradlinig begrenzt
Jetzt gilt dies i.A. nur noch in einer von zwei Welten



Gute Nachricht: diskret konforme Abbildungen
sind nach wie vor anwendbar

Niedersymmetrischer Fall



1. Beginne mit Triangulierung der euklidischen Orbifold
2. Transformiere mit hyperbolischer Version der diskret konformen Abbildung
3. Rolle die Orbifold ab, bis sie eine geradlinig begrenzte Fundamentalzelle überdeckt

Deckt die Gruppen p2, pmm, pmg, pgg und cmm ab

Übrig: p1, pm, pg, cm

Einführung von 1-zähligen Drehzentren,
um deren Zähligkeit erhöhen zu können

Übrig: p1, pm, pg, cm

Einführung von 1-zähligen Drehzentren,
um deren Zähligkeit erhöhen zu können