Geben wir uns die Kugel

als Schauplatz für Elementargeometrie

Gunter Weiss

(TU Dresden)

28. Fortbildungstagung für Geometrie
Strobl (OÖ), 5.- 8.November 2007

Geometrie

siehe frühere Strobl-Fortbildungstagungen:

Hellmuth STACHEL: “Sphärische Kegelschnitte” (2001?)

Harald TRANACHER: “Sphärische Kegelschnitte - didaktisch aufbereitet” (2006)
(Diplomarbeit TU Wien, 2006, Betreuer: Rath/Asperl)

Dieser Vortrag ist dem Andenken an Prof. Dr. Wolfgang Rath gewidmet.

Geometrie - Geschichte

Geometrie hatte/hat mit „Messen“ zu zun.

mit “Feldmessen”? Eher NEIN!

Steuereinhebung erfolgte nach Ertrag, Grenzziehung nach Landmarken.

ABER: Astronomie und Tempelbau erfordern Planung, (graphische) Kommunikation, hohe Messgenauigkeit.

→ Geometrie: “Vermessung der Welt” (Welt-*bild*-suche und Religion als Ursachen für den Ursprung von Geometrie)

Karnak (Luxor), Ägypten

Dresden 2002

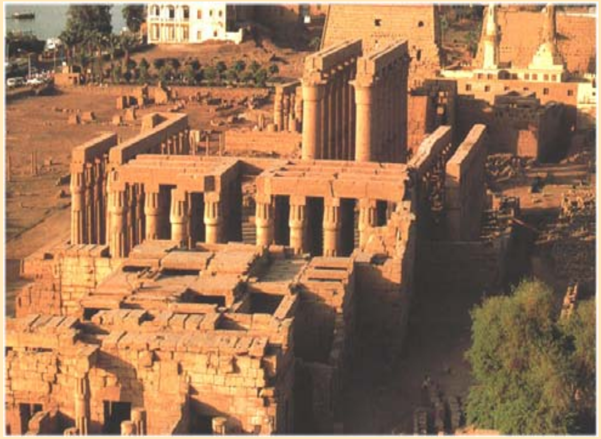
Geometrie - Geschichte

γεομετρια: Gaia (= Welt) + (inneres) Maß, (Verstehen);

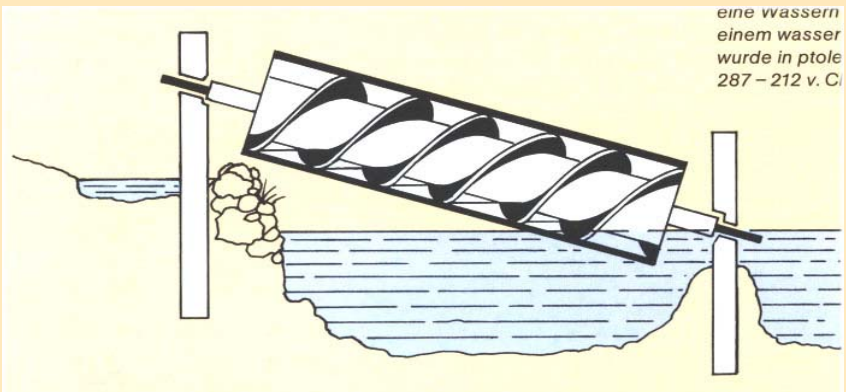
⟶ Philosophie/Religion

Raffael, Schule von Athen,

Tempelanlage, Luxor/Karnac, Ägypten



Nebeneffekt: Anwendungen in Architektur, (Kriegs-)Technik, Seefahrt/Handel, Kunst,…



„frühe Kinematik und Mechanik“

Geometrie

… beteiligt am gegenwärtigen Weltbild, den Weltmodellen.

Nebeneffekt:

Erkenntnis über die “reale” Welt, (Modell-Begriff, Visualisierung, Strukturierung)

Verbesserung der Planungs- und Kommunikationsmöglichkeiten.

(z.B.: Seefahrt: Globalisierung und Kulturaustausch)

“Messen”: viele Abstraktionen, viele neue Abstandsbegriffe!

Geometrie

… hatte/hat mit Messen zu tun.

Astromomie: präzise Winkelmessung, präzise Zeitmessung } ⟶ Messwerkzeuge!

↓

Architektur: präzise Längenmessung (und Winkelmessung) } ⟶ Messwerkzeuge!

↓

Steuersystem: präzise Gewichts- u. Hohlmaße ⟶ **Eichwesen**

…..

Seefahrt: benützt(e) Messtechniken und Abbildungsverfahren zur Orientierung auf der Kugel (“Kartenentwürfe”).

heute: Orientierung auf der Kugel (Geoid) mittels GPS ohne Umweg über ebene Karten.

dennoch: ebene und 3D-Visualisierung sind weiterhin nötige Hilfsmittel und von allgemeinbildender Bedeutung (“Kartenlesefähigkeit”). ⟶ **Schulung ???**

Beispiel 1: Erdradius-Bestimmung durch Erathosthenes (~225 v.Chr.)

Kalkül nicht existent ⟶ Proportionalität als mögliches Verfahren

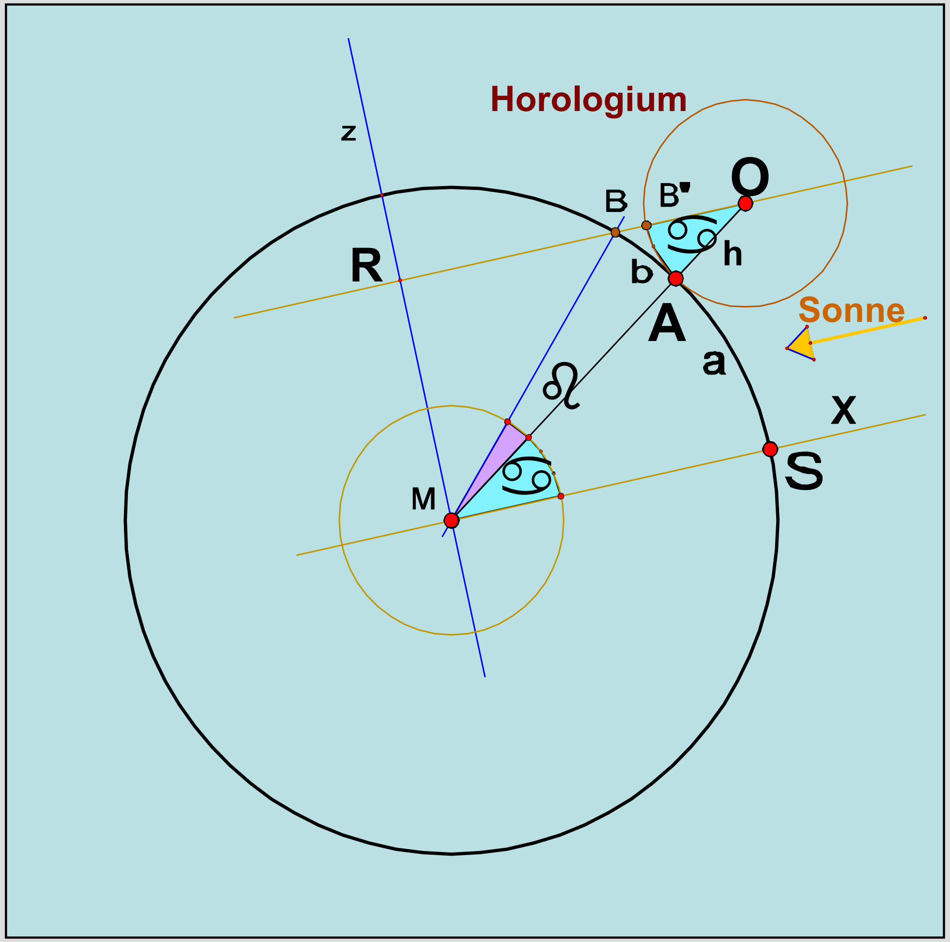
r… Kugelradius,

S…Syene (Assuan), *A*…Alexandria

h…Höhe Obelisk (Gnomon) [*A*,*O*]

a…Distanz [*S*,*A*]

b…Schlagschattenlänge von [*A*,*O*]
auf Globus, Tgtialebene, Horologium



Bedingungsgleichung für *r* :

$$\frac{r+h}{r} = \frac{\sin((a+b)/r)}{\sin(a/r)}$$

Beispiel 2: sphärisch “geradlinige” Grenzziehungen ???

“geradlinige” Grenzen erscheinen in Karten verschied. Typs geradlinig!

Sahara-Staaten

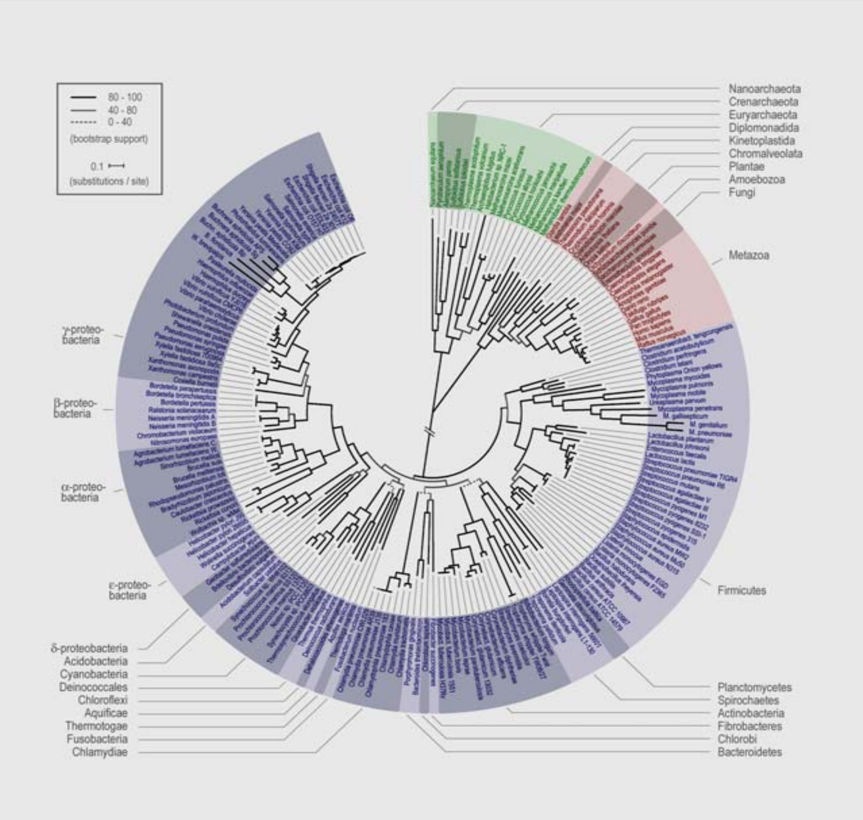
Kanada/USA

Grenzen folgen Meridianen, Breitenkreisen, aber auch anderen Großkreisen.
Verfahren zur Grenzfestlegung?

Beispiel 3: Abstand als Maß für Beziehung zwischen Objekten

klassische Abstandsmaße, Winkelmaße, Inhaltsmaße abstrahiert, "Verschiedenheitsmaße"

"Maße" erfordern *Schauplatz* (=Modell), *Messvorschrift* (=Äquivalenzklassenbildung), und *Eigenschaften* (z.B. Dreiecksungleichung, Invarianz bei Transformationen,…)



Phylogenese des Lebens:

genetischer Abst. [K1, K2]

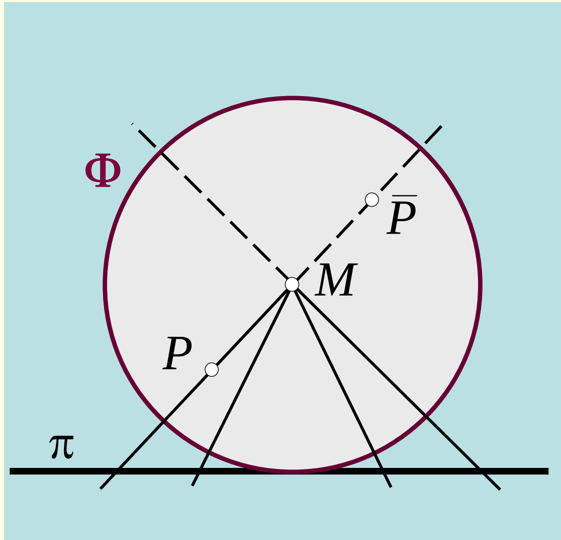
"Abstände" [Kaffee, Kuchen]: Preisdifferenz, Temperaturdifferenz, Servier-Zeitdifferenz, Differenz der Zeilenzahl in der Speise/Getränkekarte, Abstand konvexer Mengen, …

Elementargeometrie auf der Kugel

Kugel Φ als Punktmenge im euklidischen 3-Raum:

“Punkt” = Punkt (Gegenpunktepaar) von Φ

“Gerade” = Großkreis von Φ



Längen- und Winkelmaße in Φ

**i.w. euklidisch gemessen,
mit Begriffsmodifikationen.**

Parallelitätsstruktur

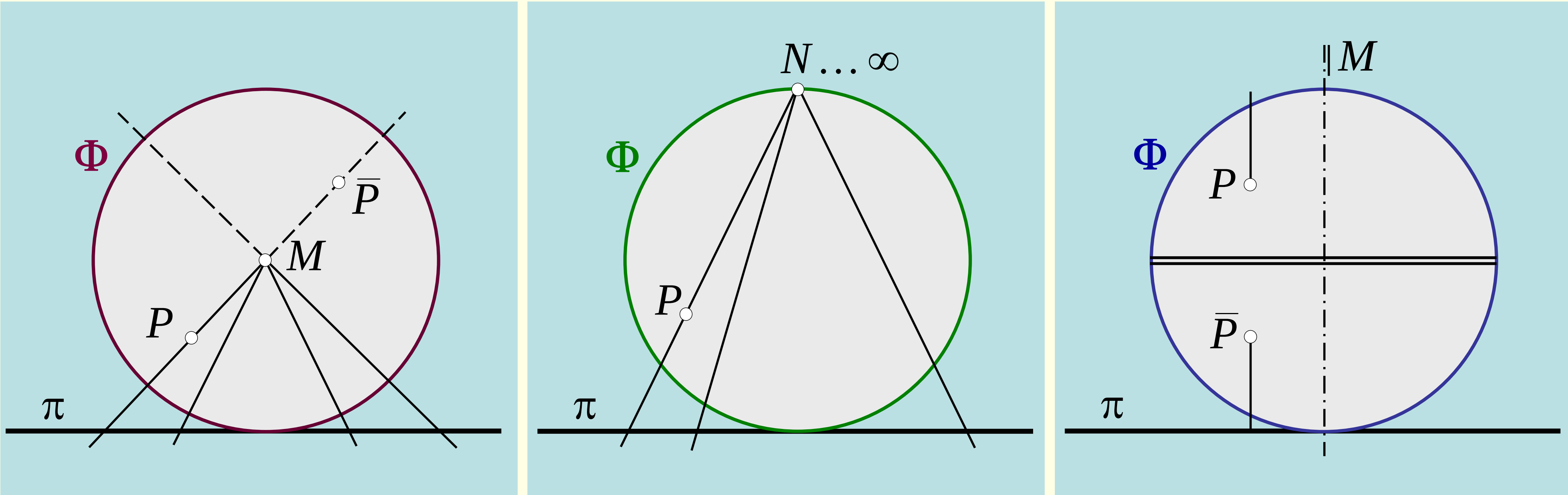
Teilverhältnis

Ähnlichkeitsstruktur (für Dreiecke)

??? → Nichteuklidische Geometrie ! (elliptisch)

Muster und Ornamente auf der Kugel

Die Kugel als zweidimensionaler Schauplatz ebener nichteuklidischer Geometrien



Elliptische Geometrie (Elementargeometrie)

MÖBIUS-Geometrie

hyperbolische Geometrie

Wie die "Anschauungsebene" Modell für verschiedene geometrische und mathematische Strukturen ist, so ist es auch die "Anschauungskugel"

Elementargeometrie auf der Kugel

- **Punkt/Geraden-Dualität**

$g \to (P, \bar{P})\ldots$ gemeins. Punktepaar aller zu $g \perp$ Geraden

$(P, \bar{P}) \to g\ldots$ Symmetrale (Mittelsenkrechte) von $(P, \bar{P})$

- **“parallele Gerade” q zum Linienelement (P, q) durch Q**

konstruiert als 'Normalennormale' $q \perp n_P \perp p$

$q \parallel p \not\Rightarrow p \parallel q$!

- **“Ähnlichkeit“**

zwei Dreiecke D, D' sind "ähnlich" $\Leftrightarrow a : b : c = a' : b' : c'$

$\Leftrightarrow \alpha : \beta : \gamma = \alpha' : \beta' : \gamma'$.

$D \to D'$ induziert durch nichtlineare Abb. $\Phi \to \Phi$!

Schwerpunkte eines sphärischen Dreiecks:

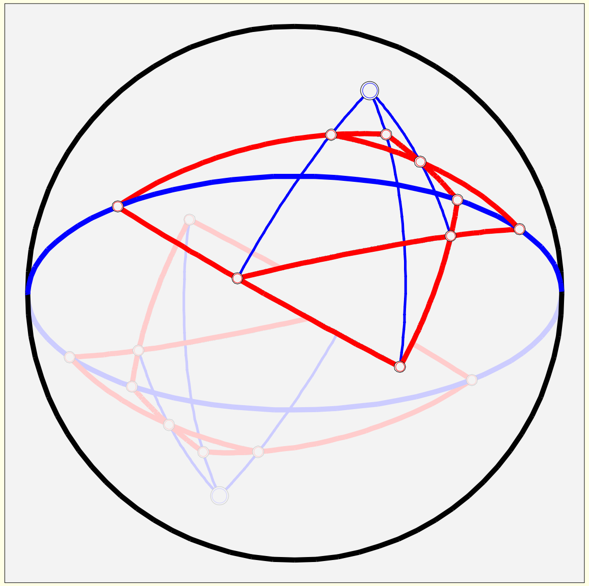
Eckenschwerpunkt G_v **analog zum euklidschen Fall („Hebelgesetz")**

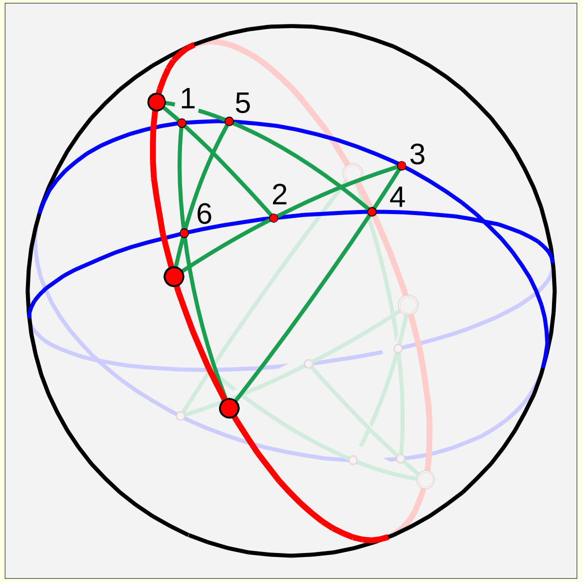
Kantenschwerpunkt G_e **= mit Kantenlängen gewichteter Eckenschwerpunkt**

Flächenschwerpunkt G_a **= ??? (i.A. verschieden vom Eckenschwerpunkt)**
(Zerlegung in 2 Dreiecke mit gleicher Fläche:
sie müssen gleiche Innenwinkelsumme haben)

Sätze von DESARGUES und PAPPUS so wie alle projektiv-geometrischen Aussagen gelten auch auf der Kugel!

(elliptische Geometrie ist Untergeometrie der Projektiven Geometrie)





HIER UND IM FOLGENDEN: CINDERELLA-FIGUREN!

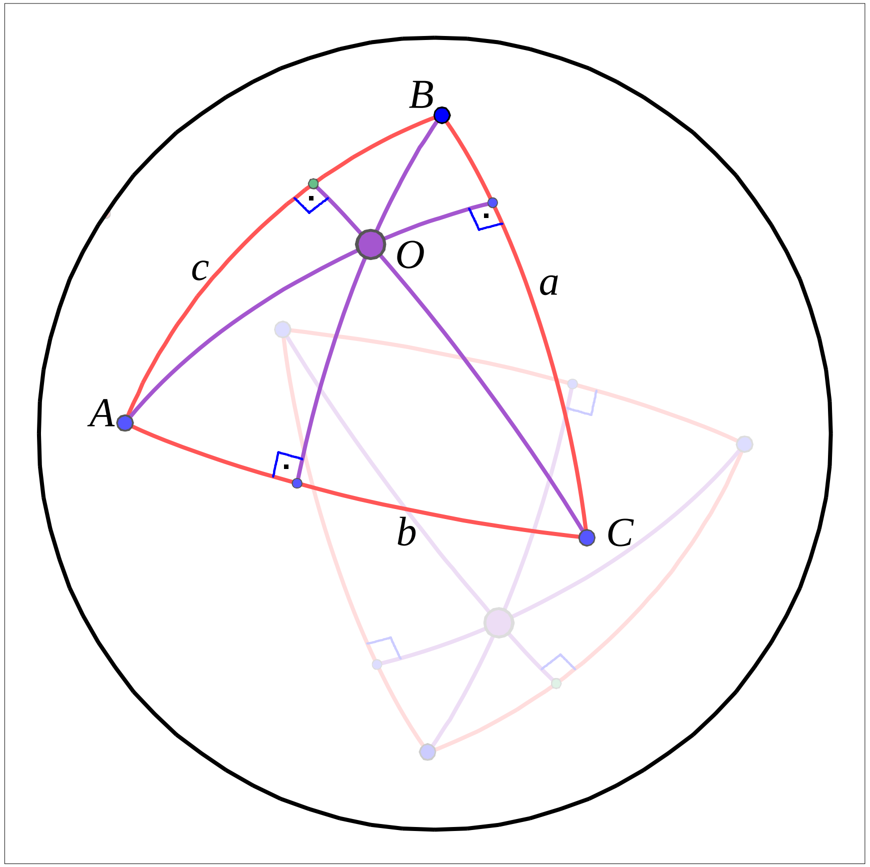
Euklidische Aussage 1:

Jedes sphärische Dreieck besitzt einen eindeutigen Höhenschnittpunkt *O*.

(Beweis mit projektiv-geometrischer Definition des Höhenschnittpunkts

oder

darstellend-geometrisch mittels gnomonischer Projektion auf die Kugel-tangentialebene in *O*)

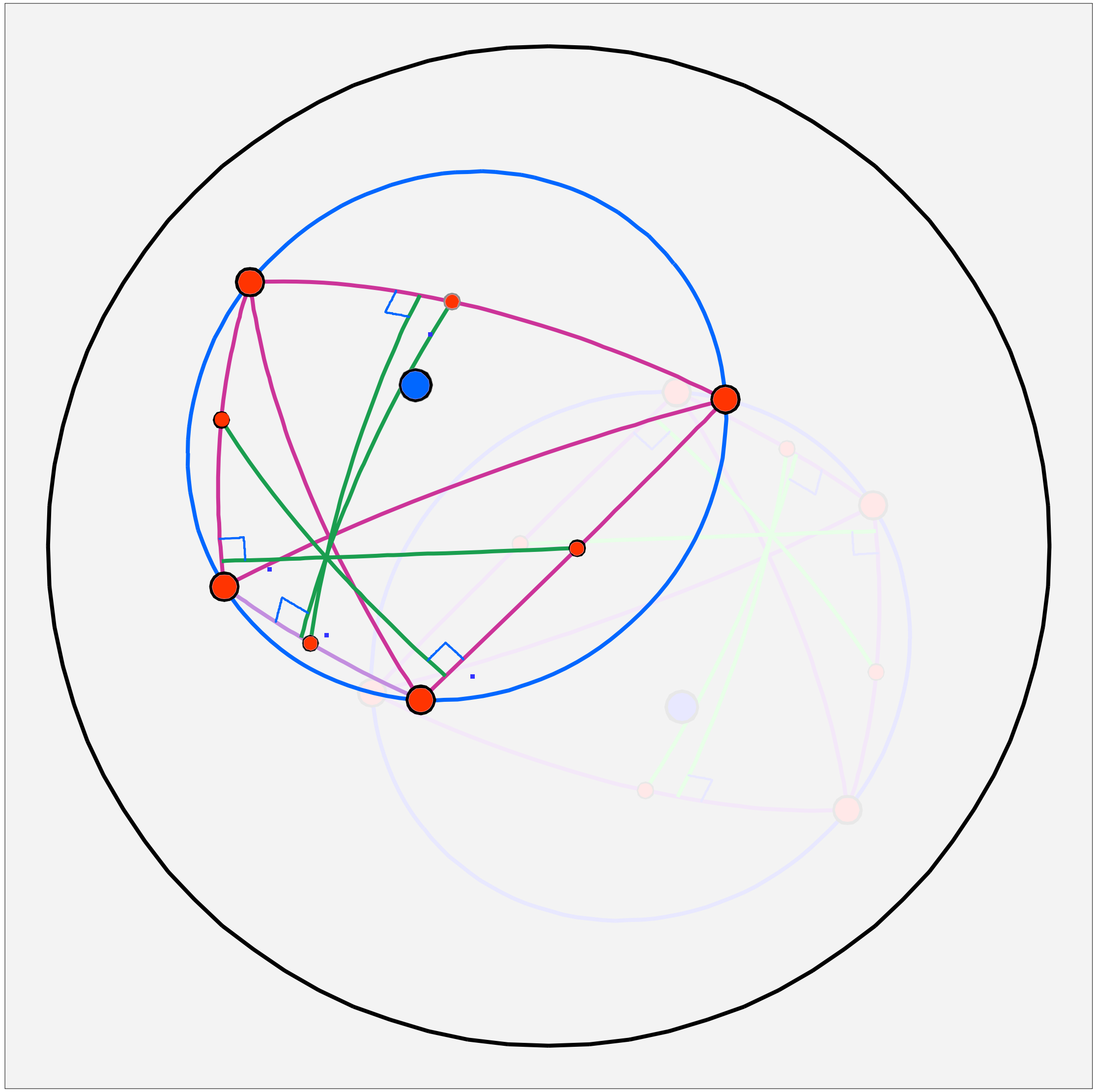


Euklidische Aussage 2:

Die 6 "Maltitudes" eines vollständigen Sehnenvierecks gehen durch einen Punkt!

(*Maltitude* = Gerade normal zu einer Seite durch die Mitte ihrer Gegenseite)

Warum gilt der Satz ???
(elementargeometrische Beweis-Argumente können nicht direkt auf die Kugel übertragen werden)



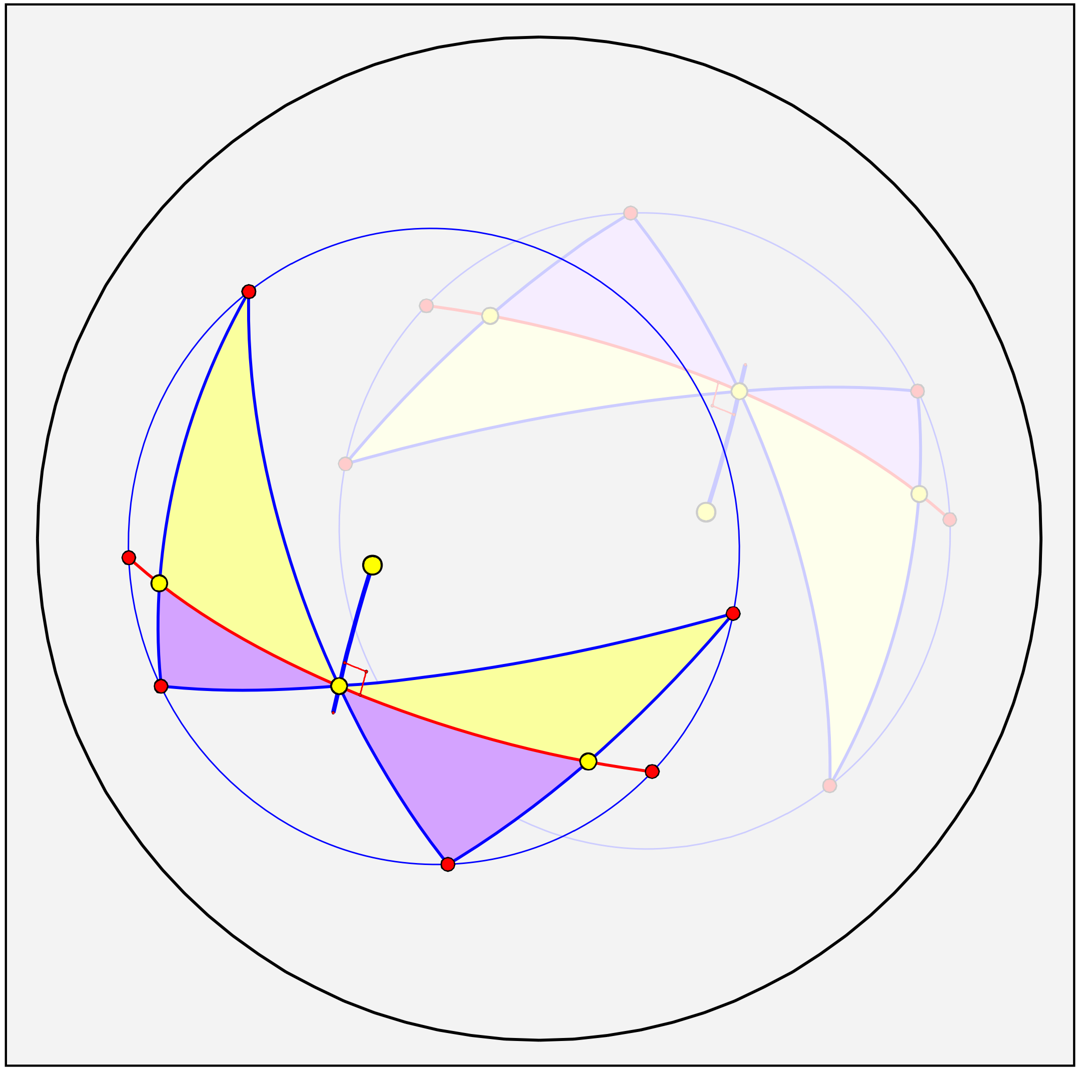
! Darstellende Geometrie als Übertragungshilfsmittel !

Euklidische Aussage 3:

Der "sphärische Schmetterlingssatz" !

Darstellende Geometrie als Beweishilfsmittel:

Projektion aus der Kugelmitte (= gnomonische Projektion) auf die Kreisebene liefert den (gültigen) ebenen euklidischen Schmetterlingssatz.

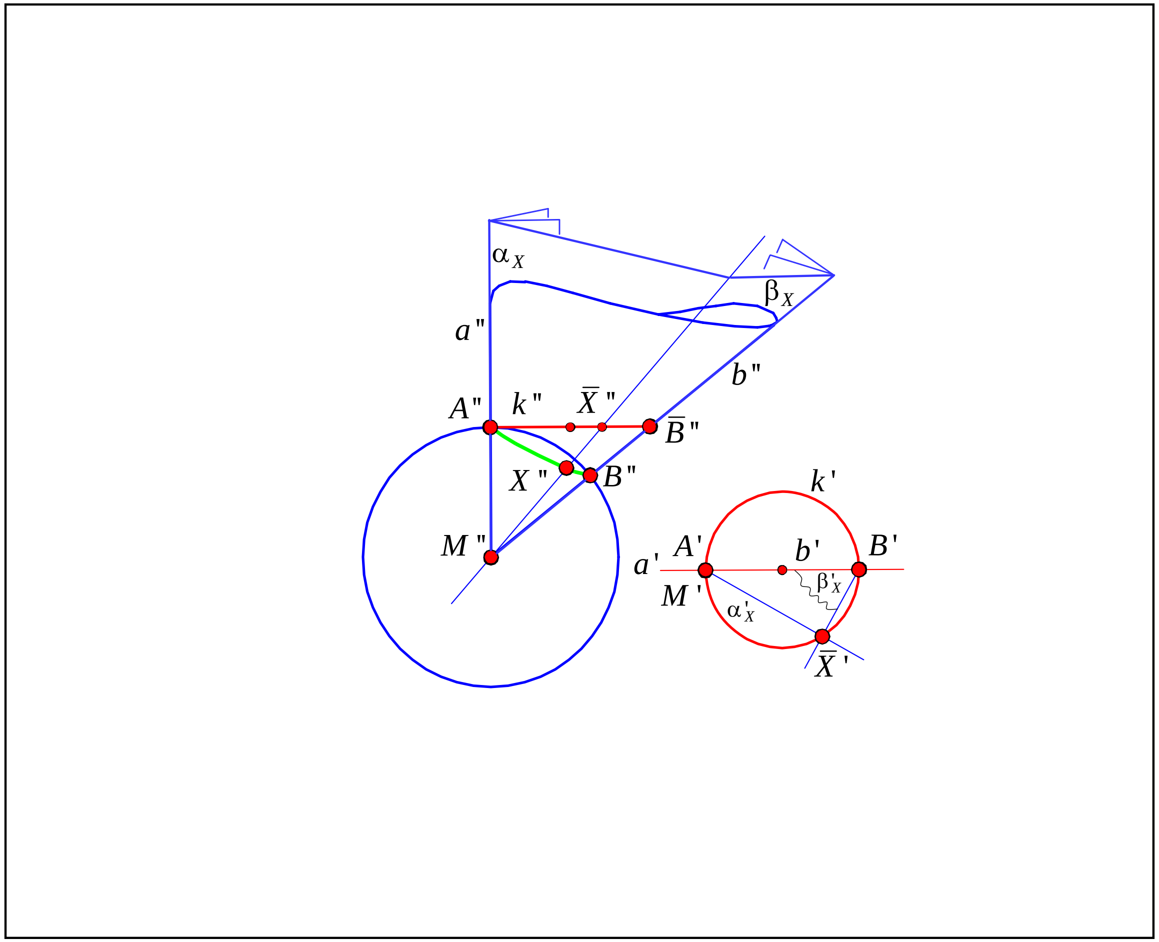


Euklidische Aussage 4:

Satz von THALES:

Zwei Büschel orthogonaler Ebenen mit Trägergeraden (Büschelachsen) *a*, *b* durch *M* von Φ erzeugen einen sogenannten *"orthogonalen Kegel"* Ψ. (Ebenen, die Ψ nach Kreisen schneiden, sind orthogonal zu *a* bzw. *b*)

Statt eines THALES-*Kreises k : Kurve 4. Ord. auf* Φ , ein „sphärischer Kegelschnitt“ !



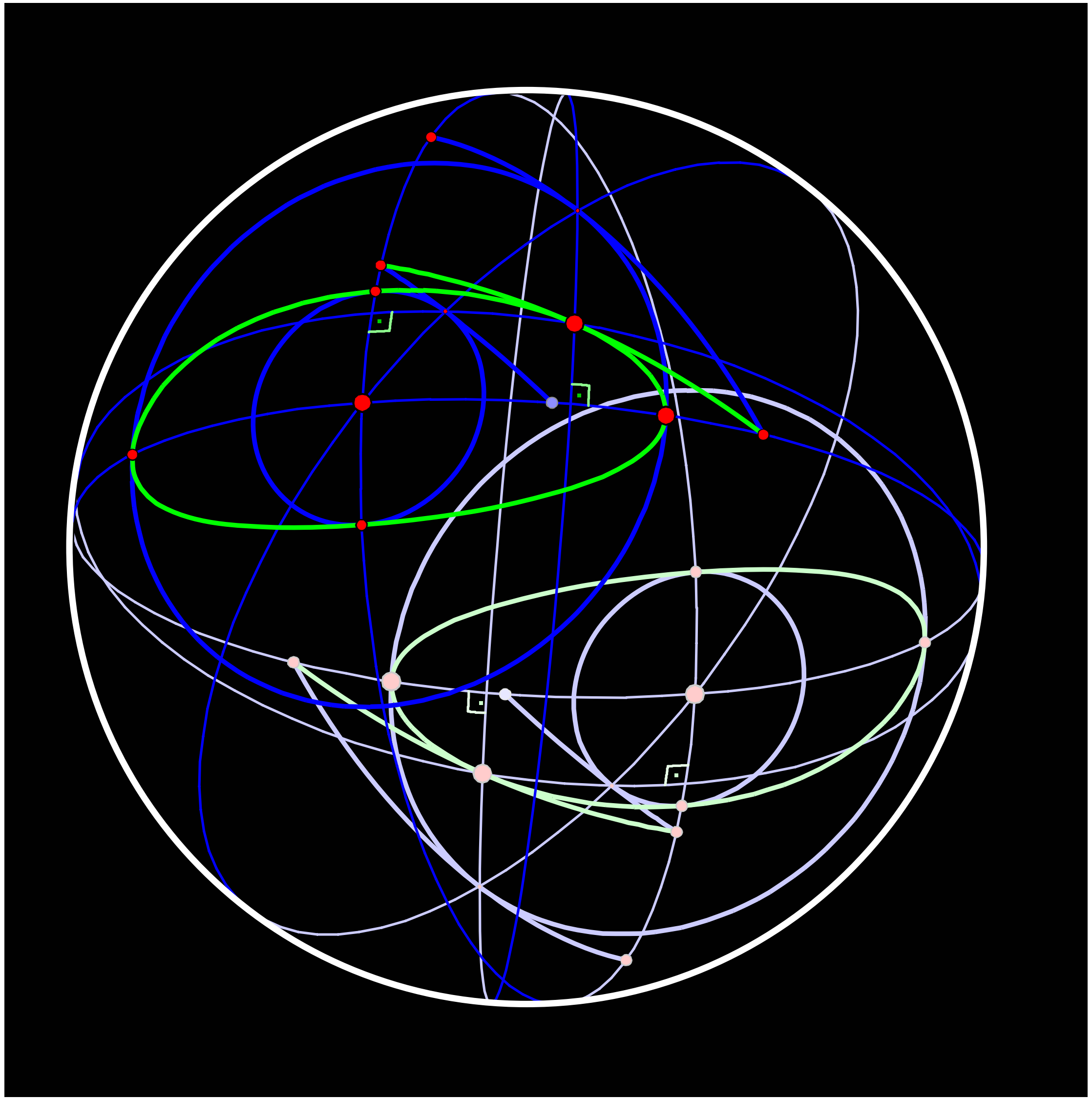
Euklidische Aussage 5:

Konstruktion einer sphärischen „Ellipse“ gemäß DE LA HIRE:

= Konstruktion durch Kombination zweier orthogonaler Affinitäten der Ellipse *c* zu deren Scheitelkreisen; (in einer Scheitelkreisebene);

Projektion aus *M* auf Φ;

***Ergebnis:* ”sphärischer Kegelschnitt” *c* !**



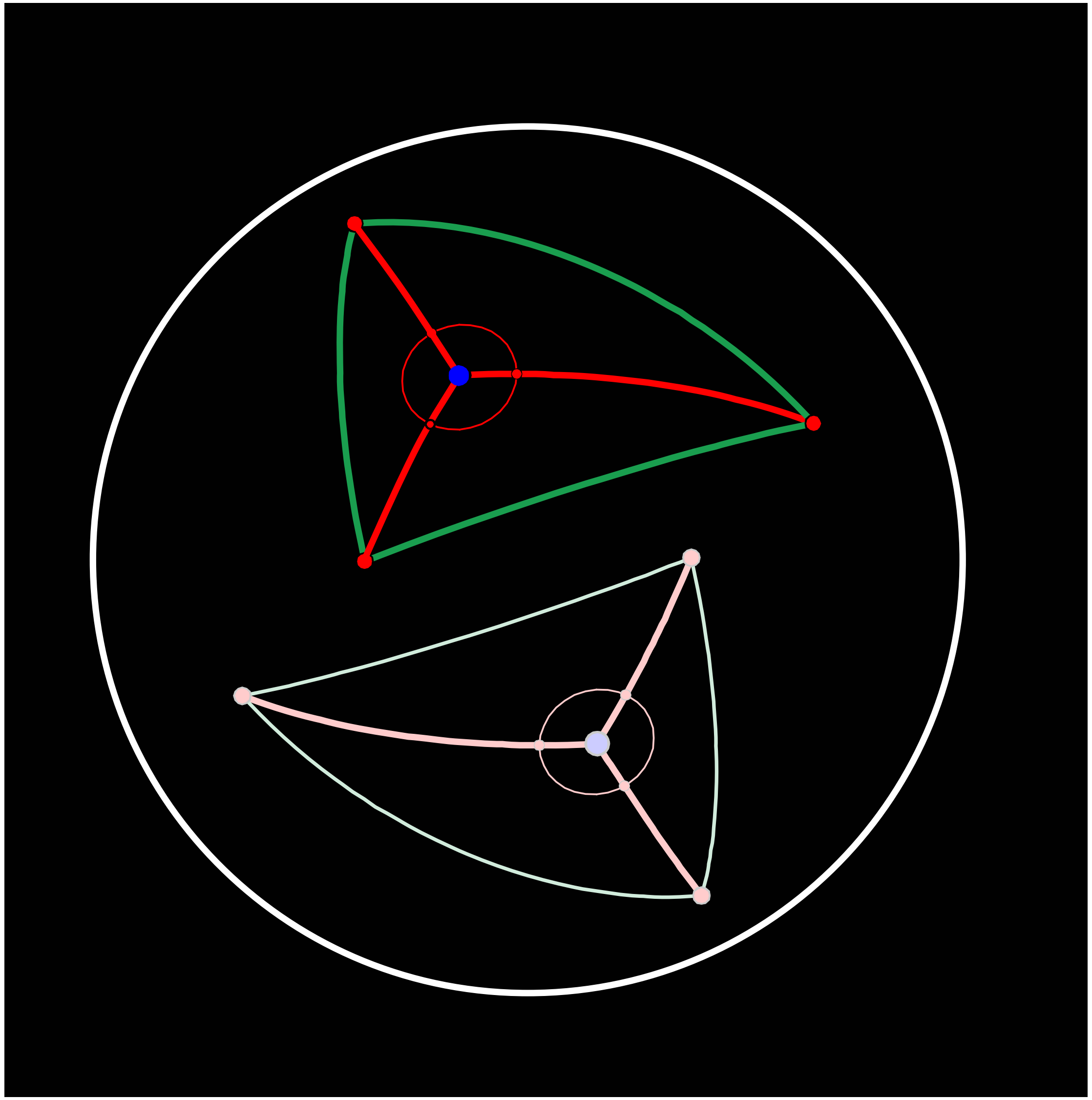
Euklidische Aussage 6:

Der FERMAT-TORICELLI-Punkt eines Dreiecks.

Auf Φ ist das ein eher kompliziertes Problem!

(sphärischer Peripherie-winkelsatz erforderlich Ortskurven sind KEINE Kreispaare!)

<<< benötigt für Datenreduktion mittels STEINER-minimal trees



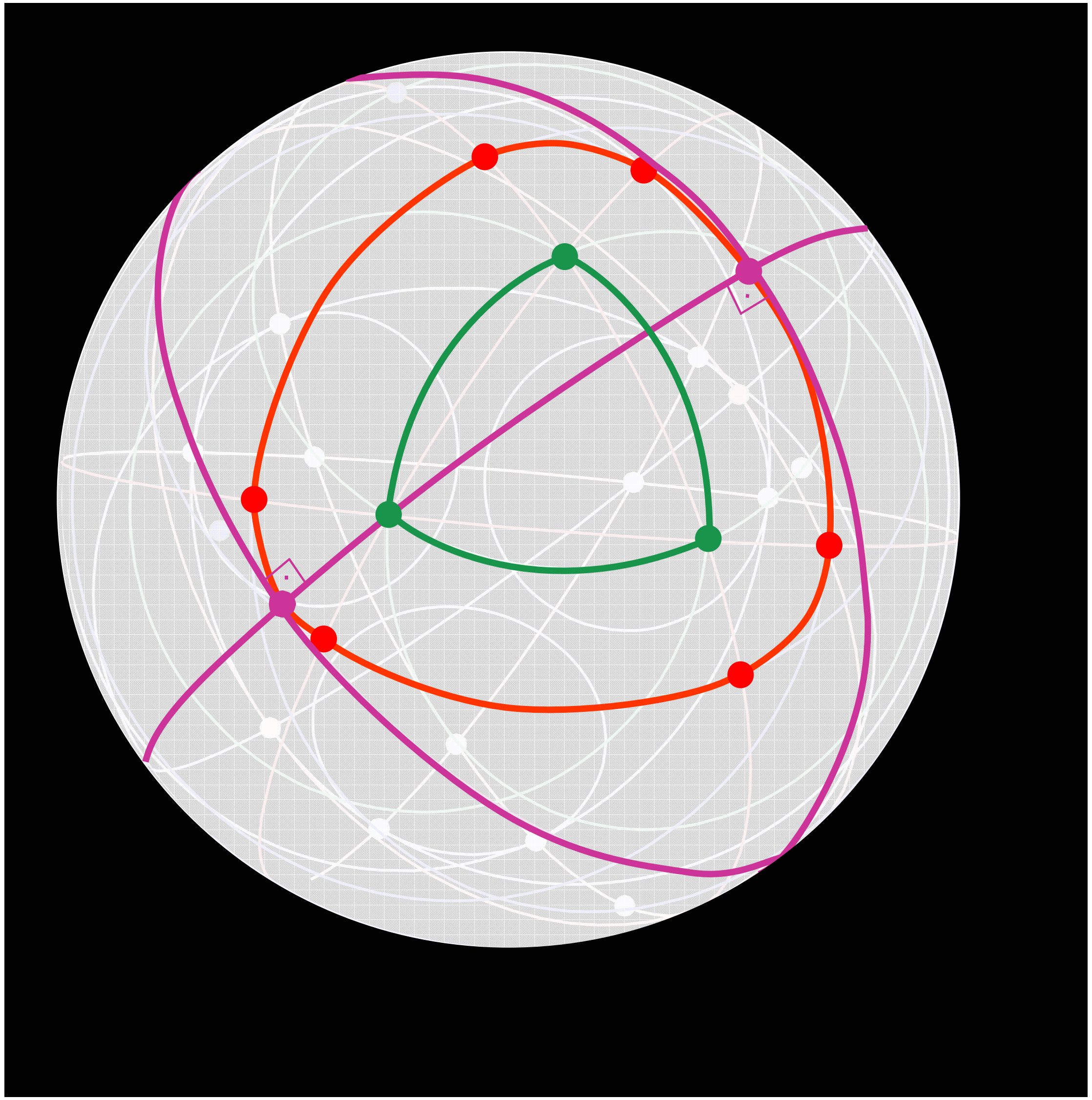
Beispiele elementargeom. Sachverhalte auf der Kugel

Euklidische Aussage 7:

Sphärische Kurven konstanter Breite:

!! Parallelität von Stützgeraden muss modifiziert werden!!

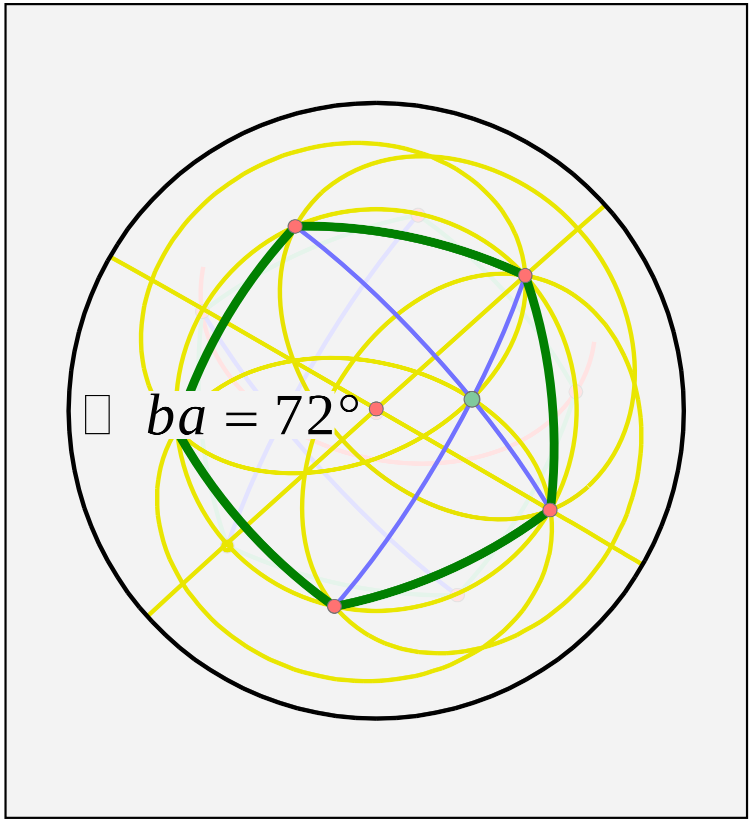
$c \in \Phi$ besitzt in jedem Punkt eine (sphärische) **Doppelnormale** von fester Länge.



Elementargeometrie auf der Kugel

Wie konstruiert man ein “sphärisches regelmäßiges *n*-Eck” auf Φ ?

Gleichseitiges Dreieck ….. klar!



GoldSchnitt2.cdy

**Quadrat über einer Seite [A,B], … ,
n-Eck über einer Seite [A,B] :**

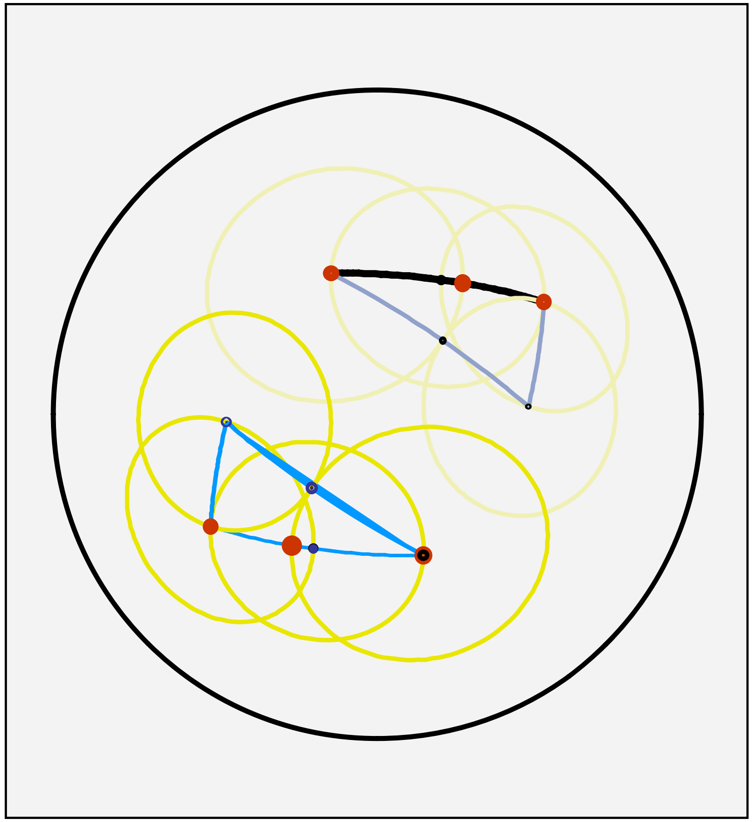
mit darstellend-geometrischen Methoden (Konstruktion einer regelmäßigen Pyramide bei gegebener Basis- und Seitenkante).

Sphärische Konstruktion ???

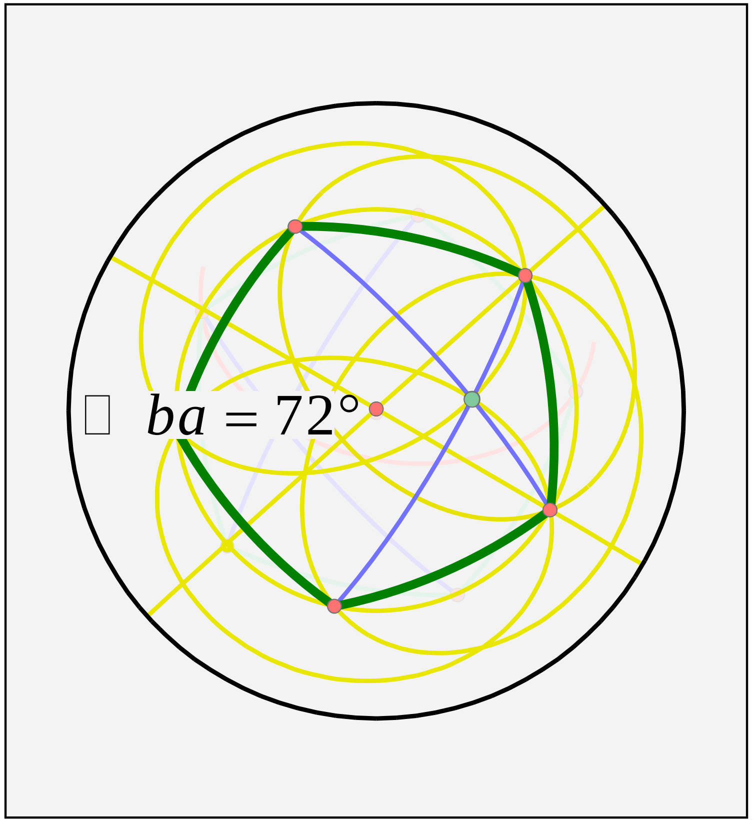
Rekonstruktion des Kugelradius ?

Elementargeometrie auf der Kugel Φ

Wie definiert und konstruiert man ein "Goldenes Teilverhältnis" auf Φ ?



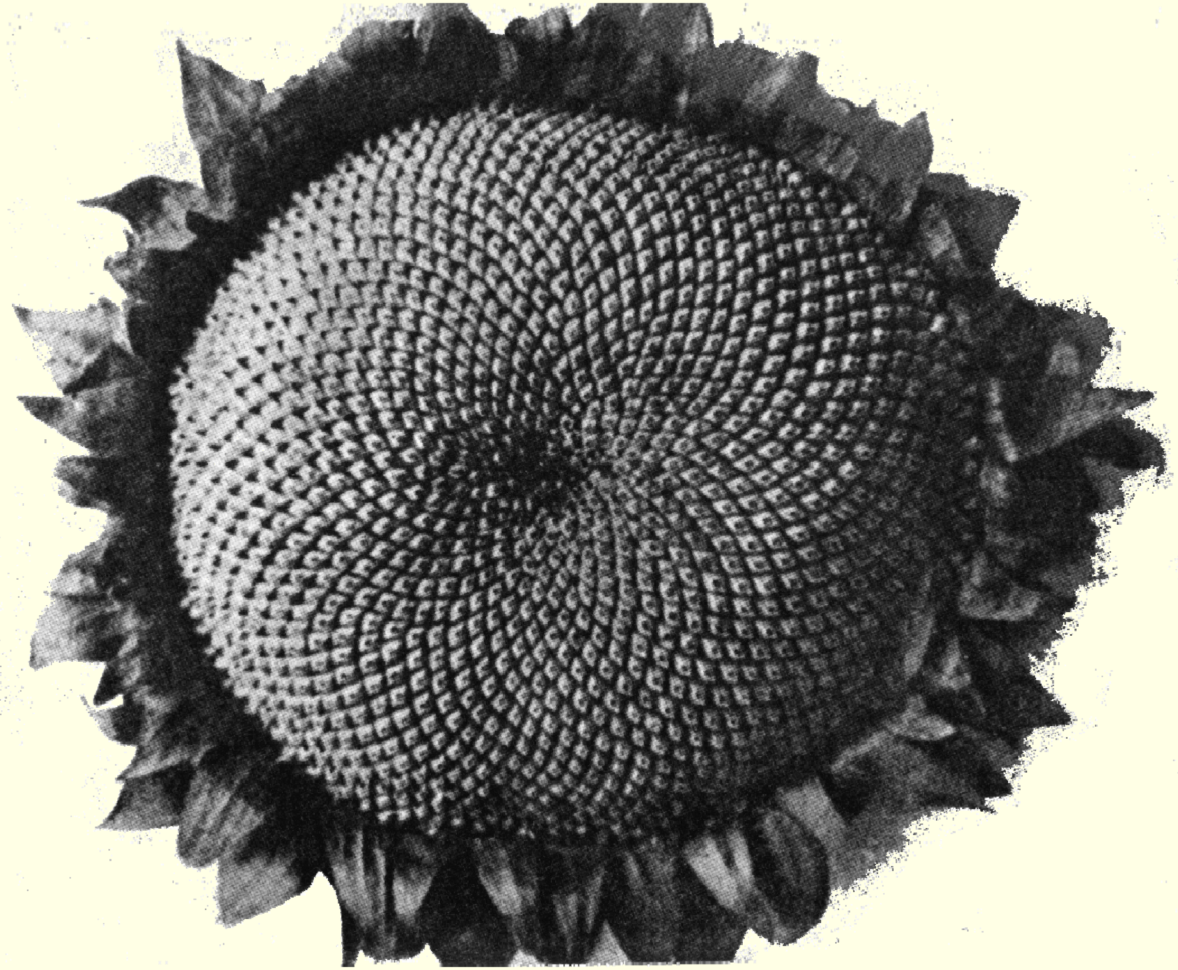
GoldSchnitt1.cdy



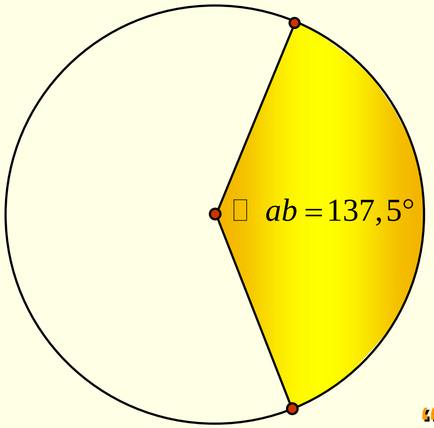
GoldSchnitt2.cdy

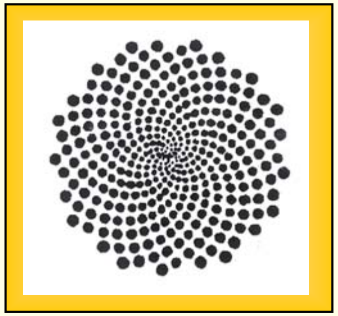
“Goldener Winkel” α mit Bogenlängenverhältnis $\alpha : 2\pi = 1-\phi$,

(gemessen längs Breitenkreisen der Kugel oder Drehfläche)

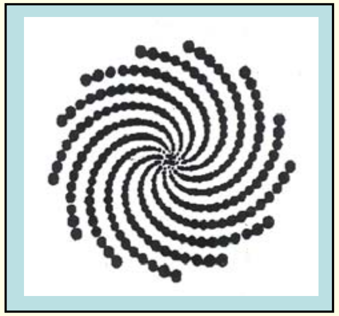


Spiralmuster zu verschiedenen “Divergenzwinkeln”

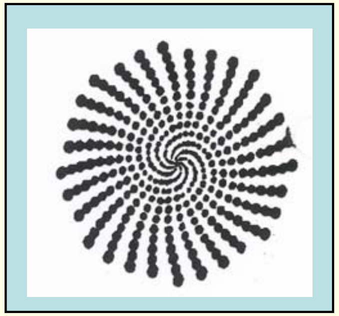




$\alpha = 137{,}520°$
“Goldener Winkel”



$\alpha = 136.5°$



$\alpha = 138°$

Muster und Ornamente auf der Kugel

"Rosetten"

"Friese"

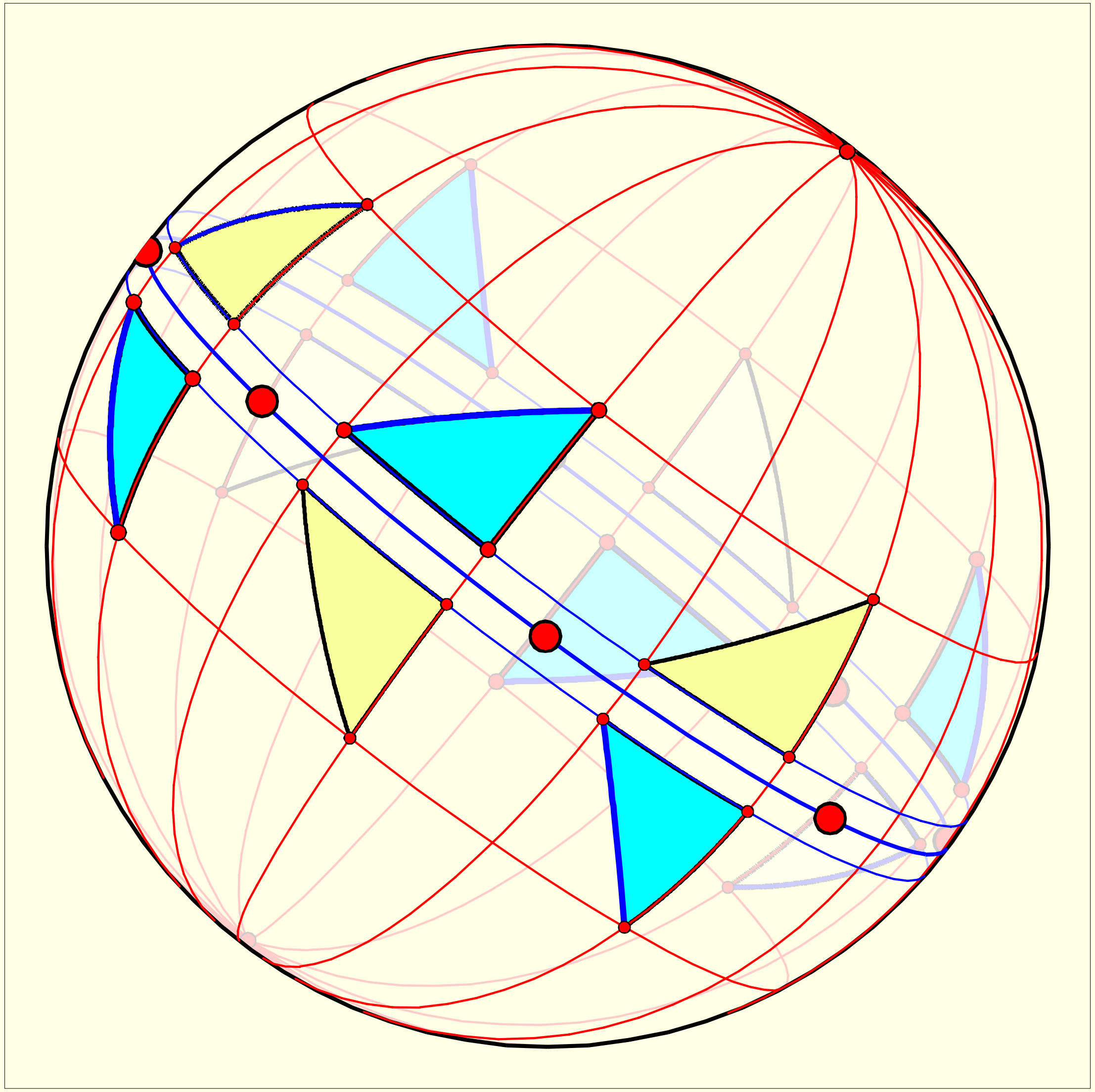
„Wandmuster“

… auf der Kugel ??

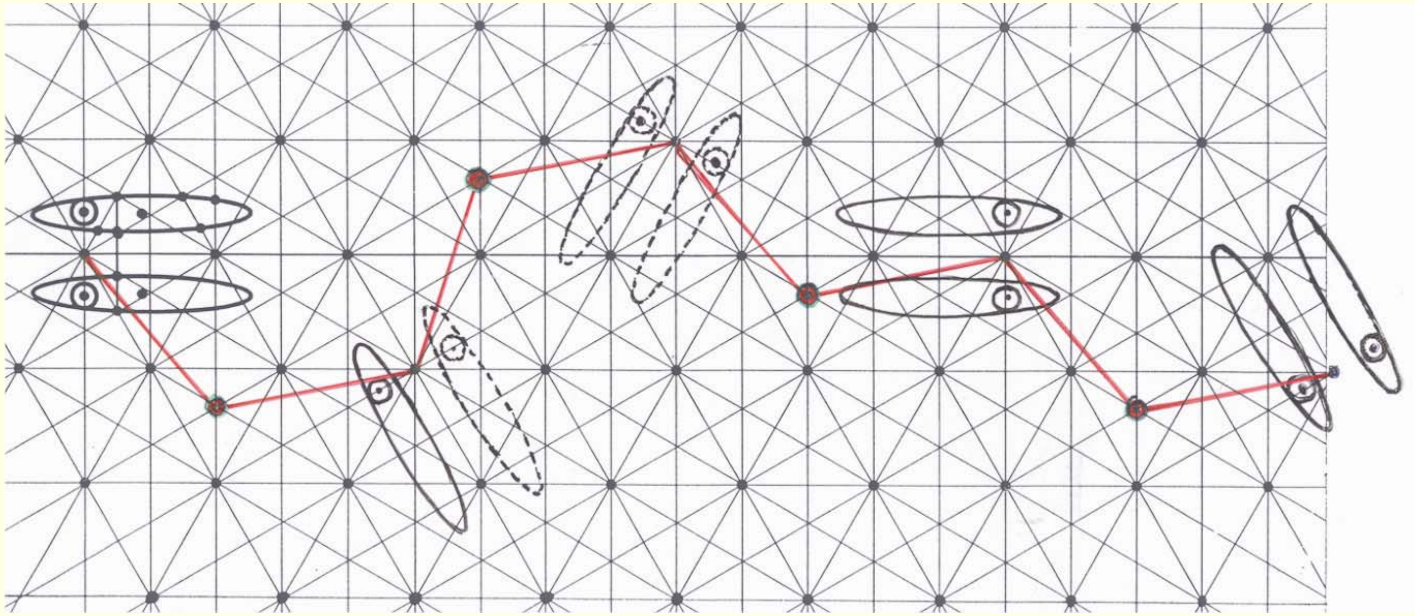
Muster und Ornamente auf der Kugel

“Fries” mit Gleitspiegelung

“clevere” Schrittlängen erzeugen die Ecken der Platonischen Körper!

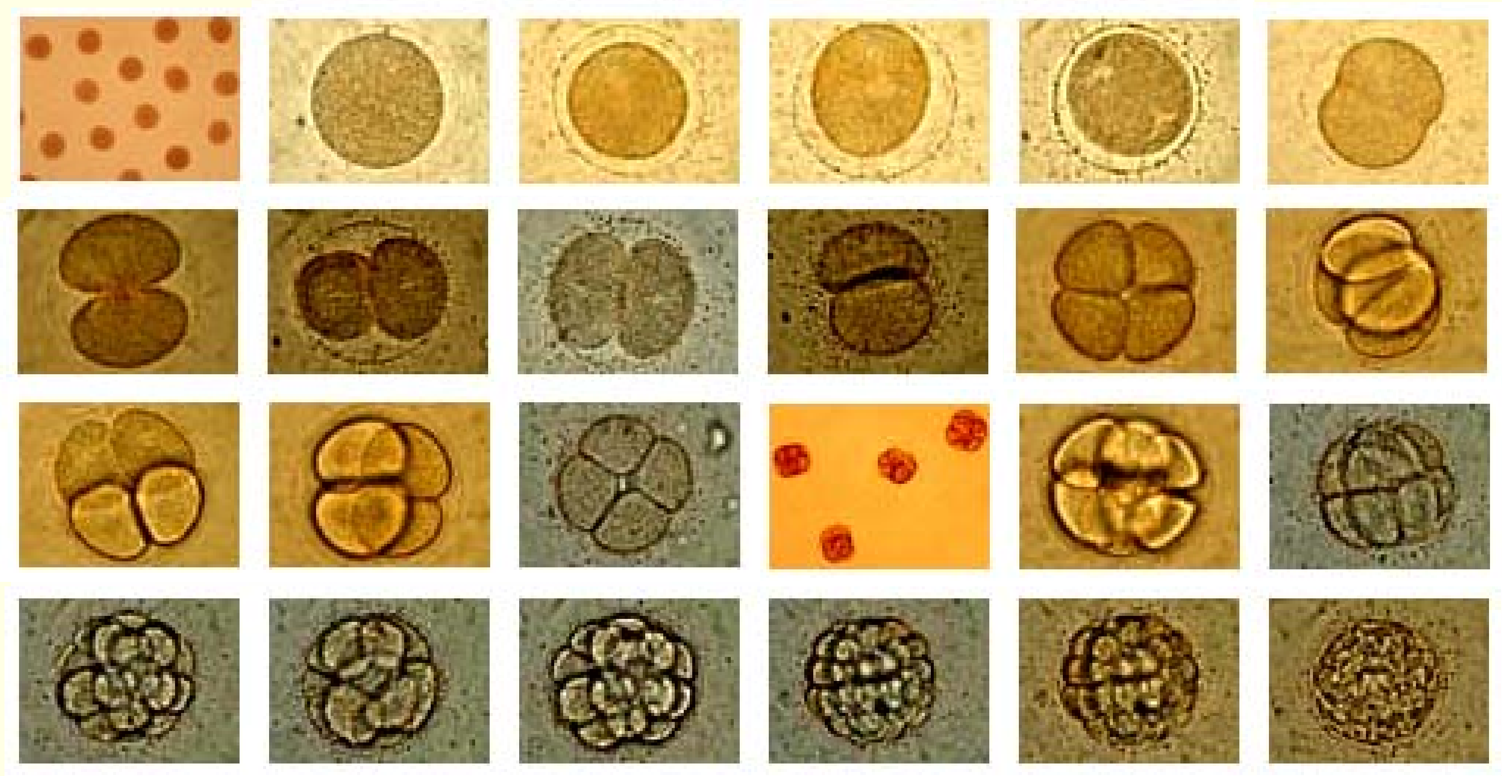


Muster und Ornamente auf der Kugel



“Walzerschritte in der Ebene”
… und auf der Kugel ?

Muster und Ornamente auf der Kugel



Zellteilung (Bifurcation)

siehe http://www.uco-bn.fr/Galerie-Biologie/Photos/Embryologie

Muster und Ornamente auf der Kugel

Gemäß Erkenntnissen aus Biologie / Medizin / Gentechnologie:

(siehe http://www1.medizin.uni-halle.de/iaz/deutsch/)

Totipotent :

+ *ferilized egg cells*

+ blastomeres from 2- to 8-cell stage

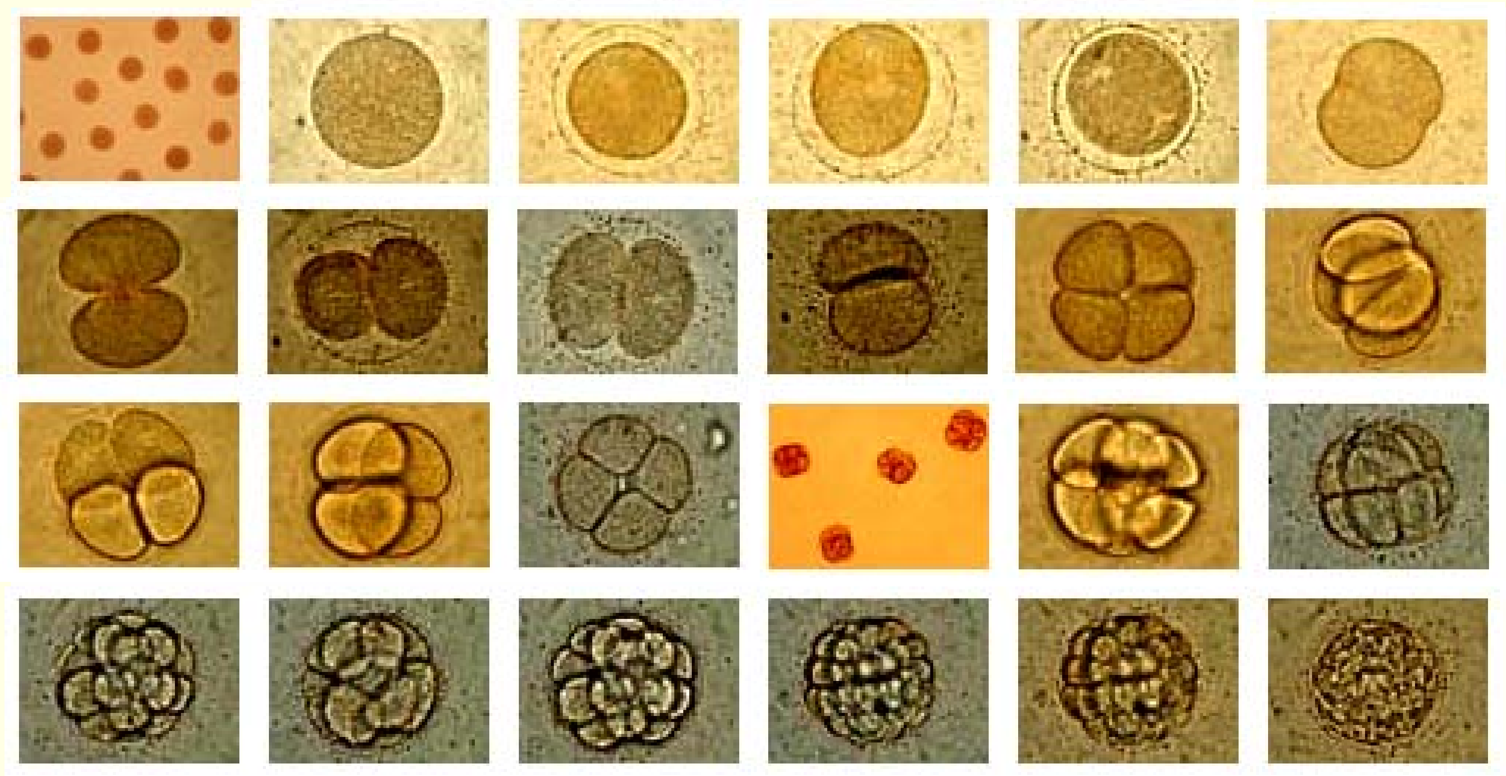
Pluripotent :

+ blastomeres after 8-cell stage
+ embryoblast
+ primordial tissue cells
+ mesenchymal cells

Unipotent :

+ mesenchymal cells after determination
+ organ tissue cells

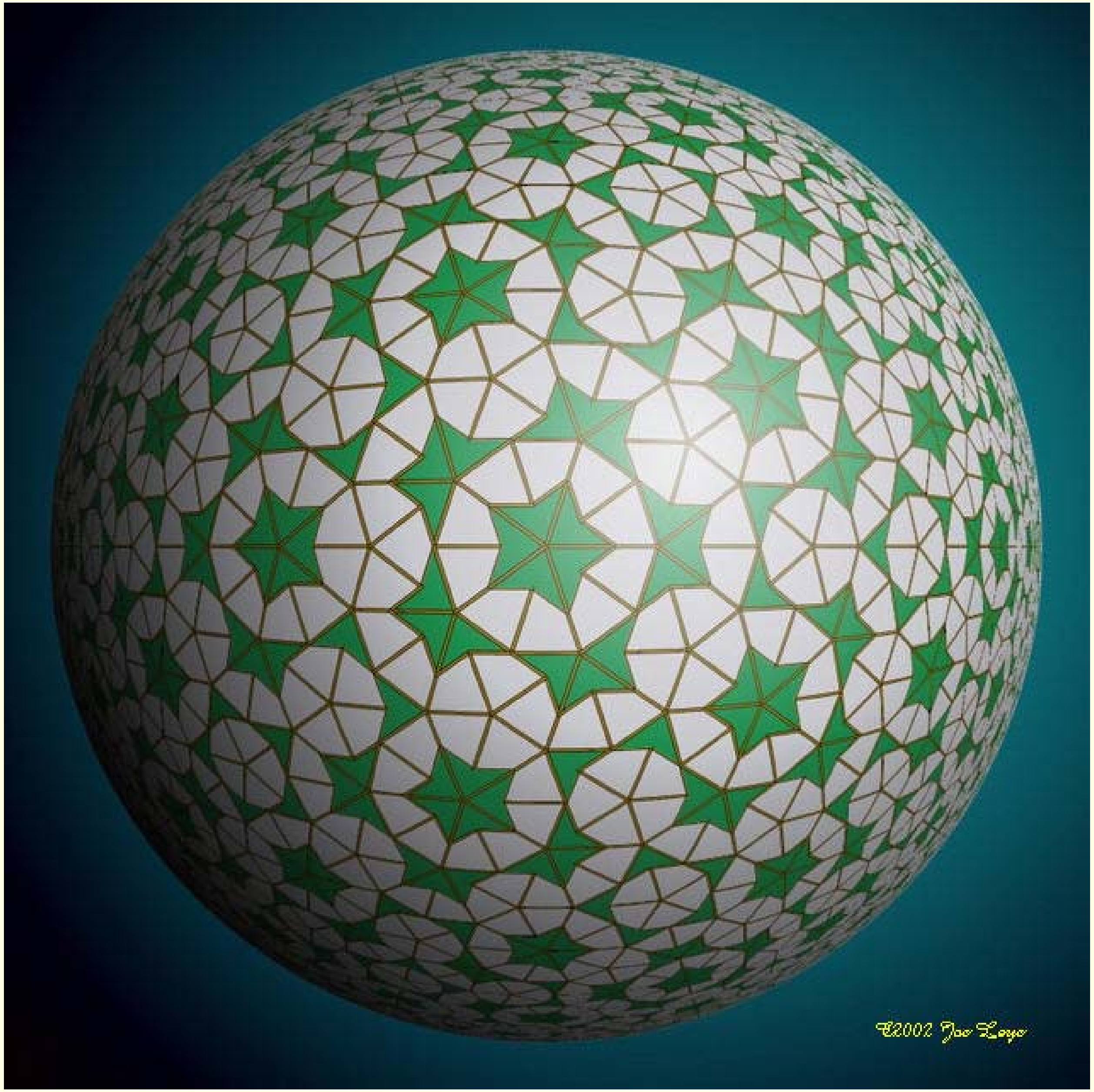
Muster und Ornamente auf der Kugel



Zellteilung (Bifurkation)

siehe http://www.uco-bn.fr/Galerie-Biologie/Photos/Embryologie

Muster und Ornamente auf der Kugel



"PENROSE tilings" auf der Kugel

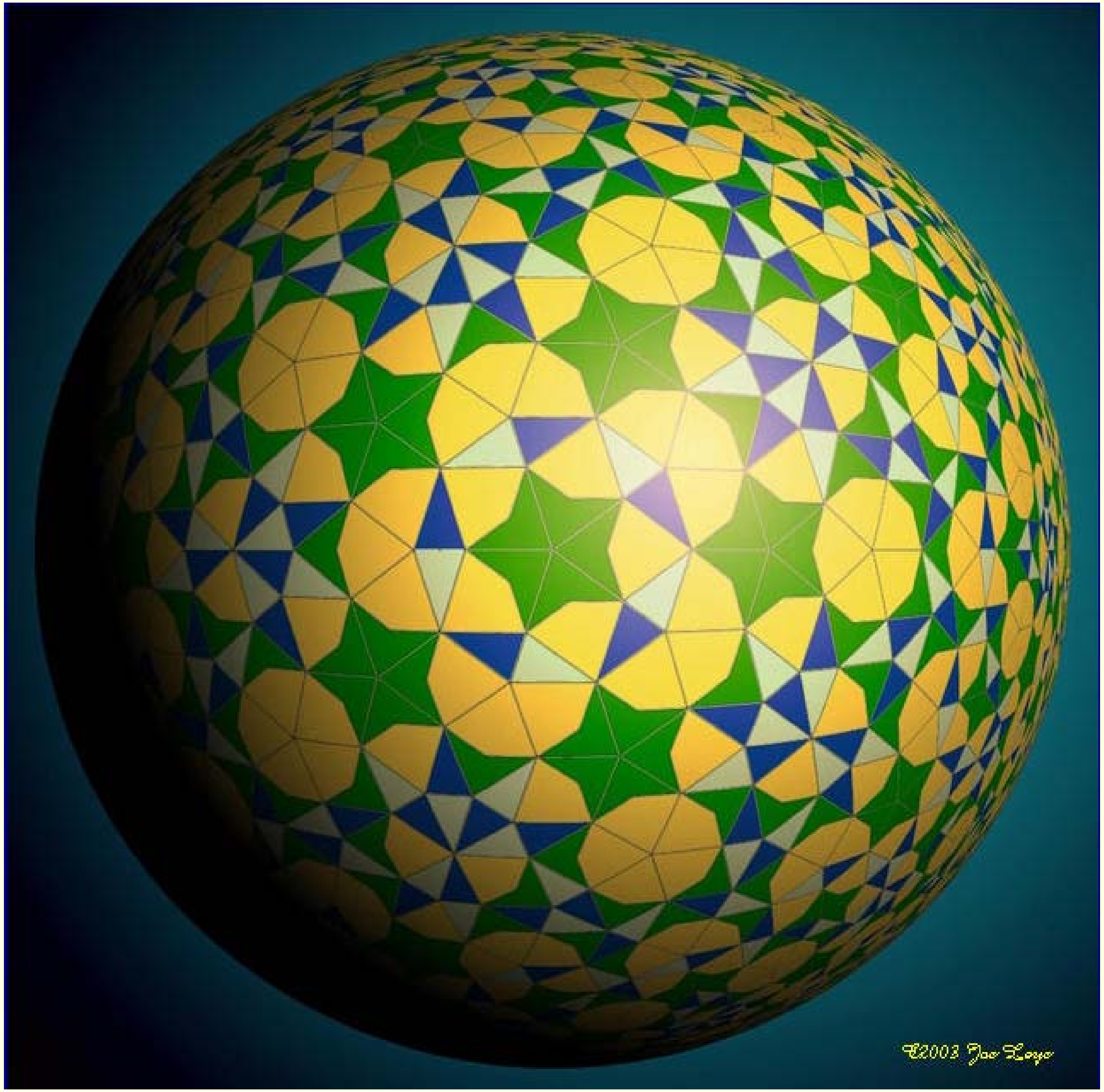
mit

"Darts und Kites"

➔ Icosaeder – Symmetrie-Gruppe

(www.josleys.com)

Muster und Ornamente auf der Kugel

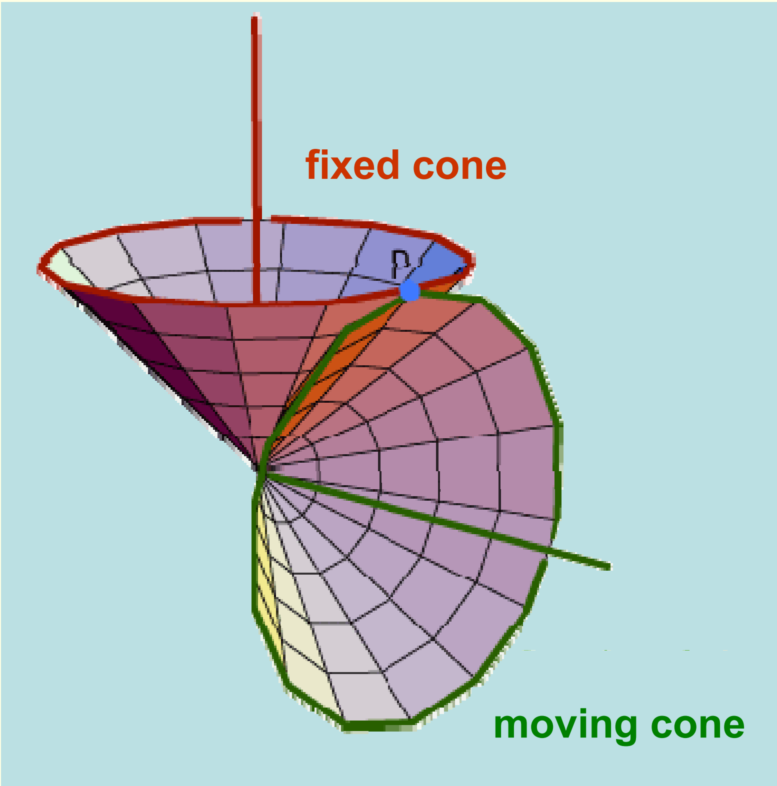


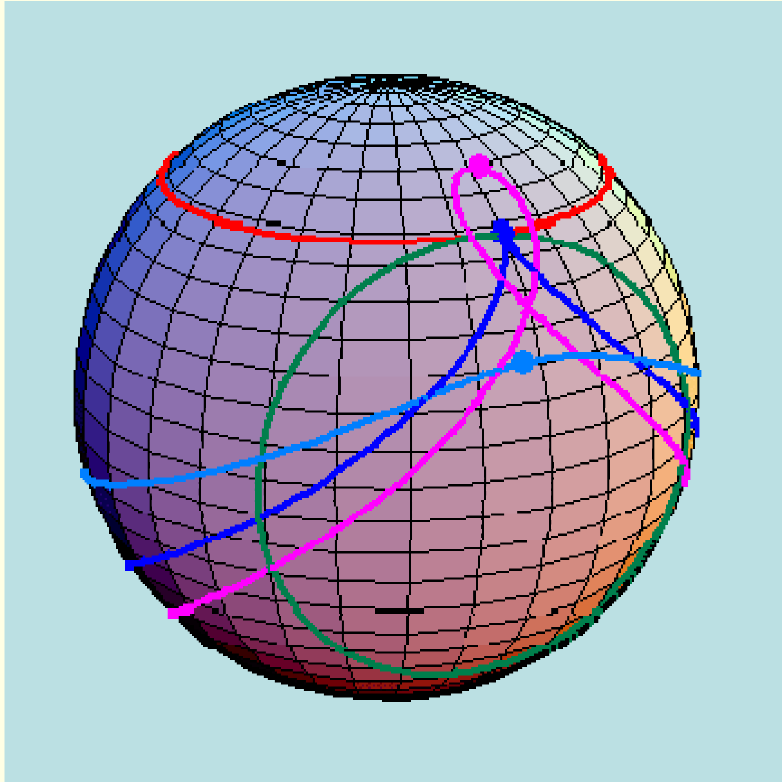
"Darts, Kites, und Dreiecke"

→ ebenfalls ikosaedrische Symmetrie

(www.josleys.com**)**

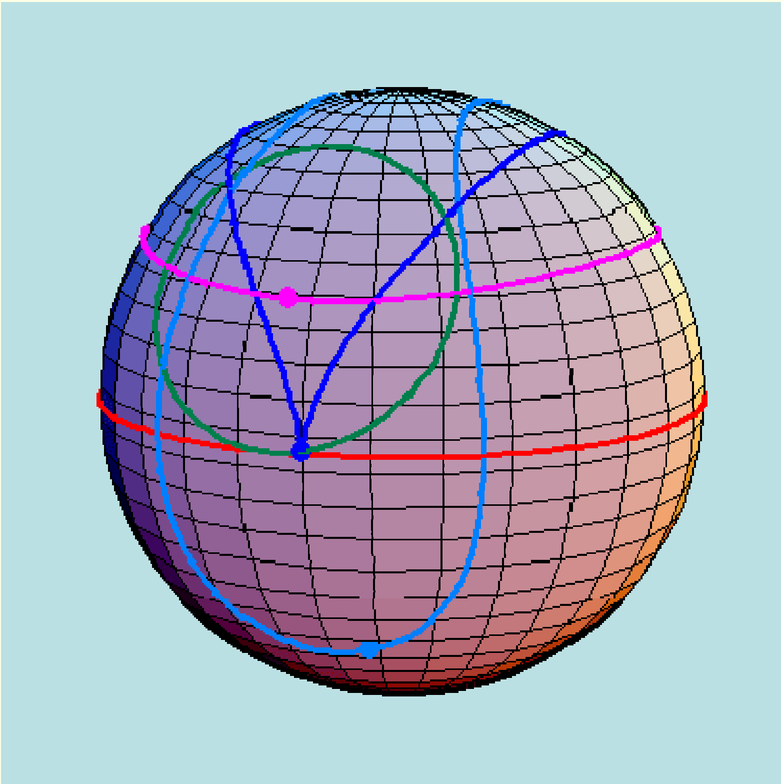
Kontinuierliche Ornamente und sphärische Kinematik





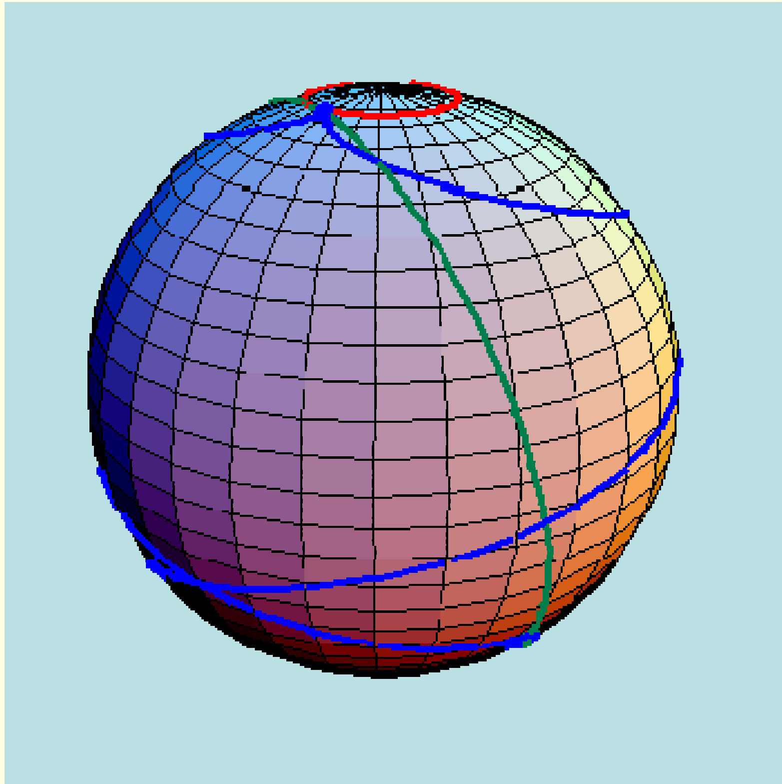
(rationale) sphärische Trochoiden (z.B. Zykloiden, sphärische Rhodoneen)
mit Rosetten-(Fries)-Symmetrie

Kontinuierliche Ornamente und sphärische Kinematik



Kleinkreis rollt auf einem Großkreis

(„Zykloide“, „Tennisballkurve“)



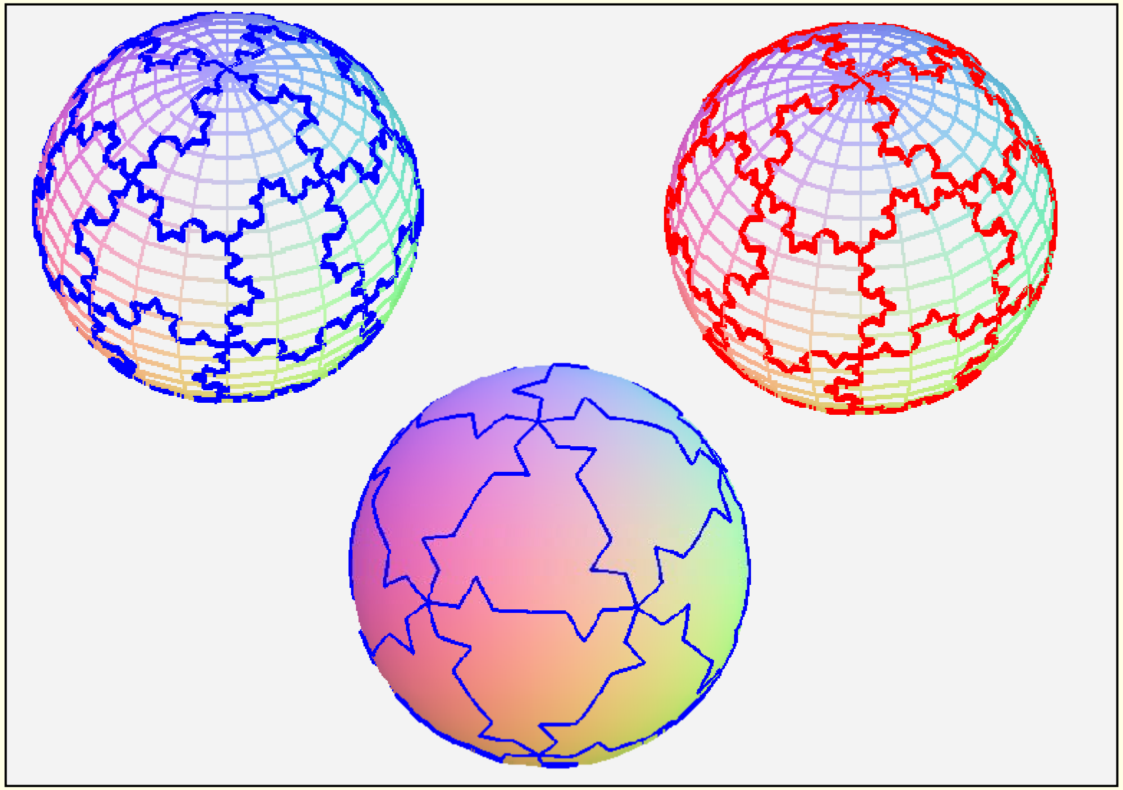
Großkreis rollt auf einem Kleinkreis

(Orbits sind Kurven konstanter Böschung!)

Muster und Ornamente auf der Kugel

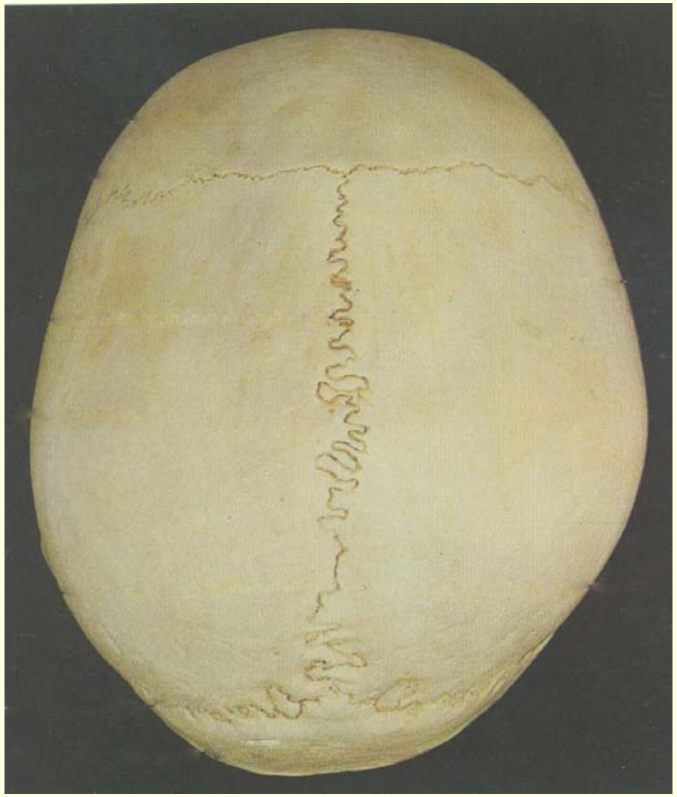
“Fraktale” auf der Kugel: !!! keine (Selbst)-Ähnlichkeit !!!

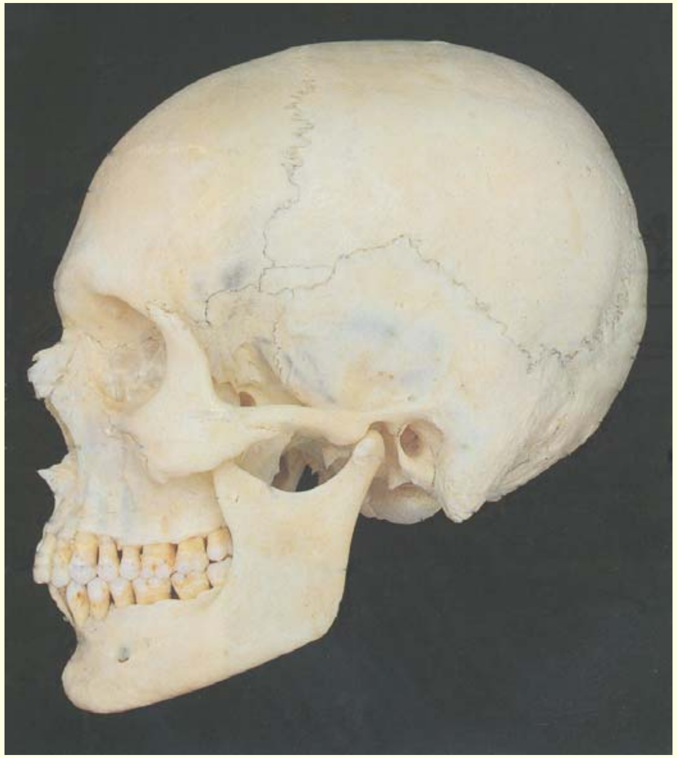
Pflasterung der Kugel mit von KOCH-Kurven berandeten Bereichen

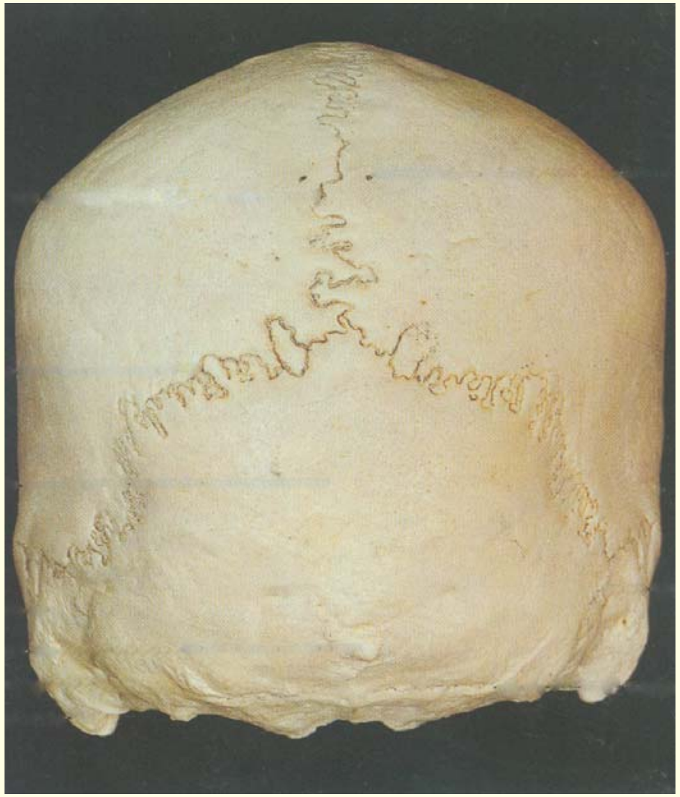


ausgehend von einem platonischen oder archimedischen Körper

Menschenschädel mit “fraktalen" Schädelnähten

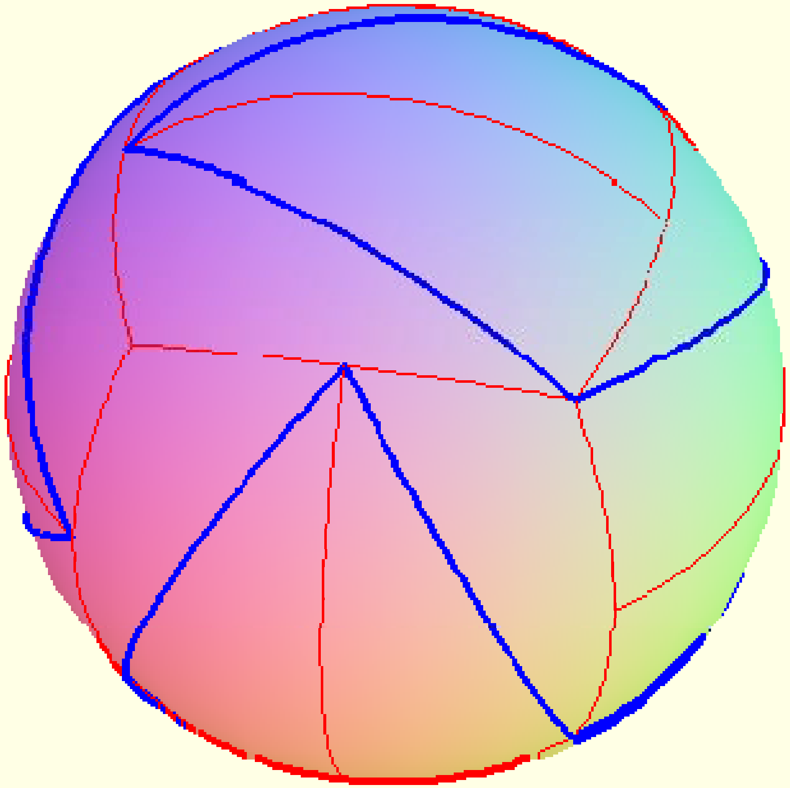


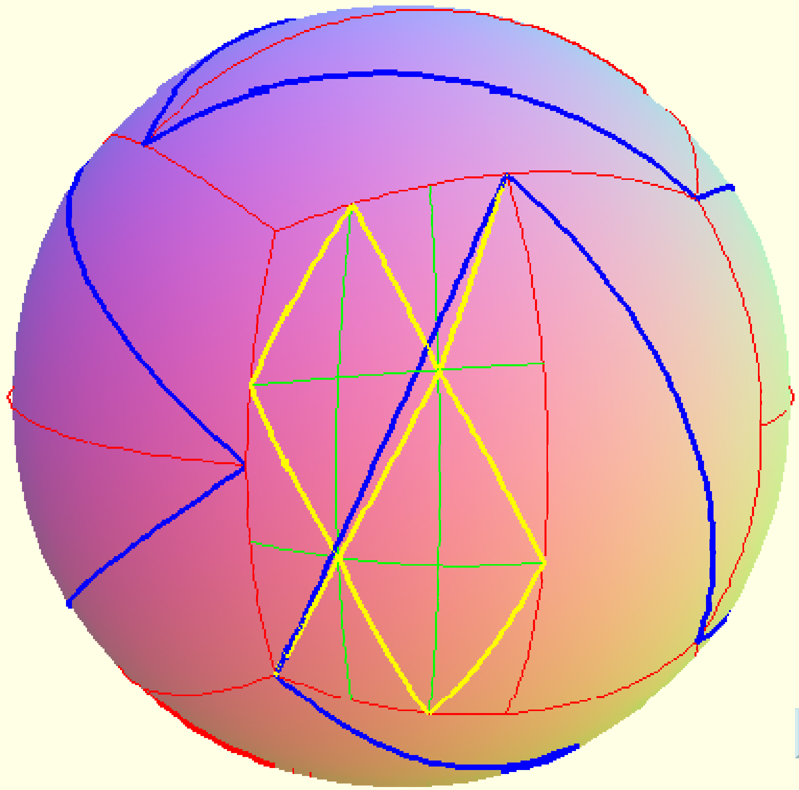




(Rohen u. Yokochi: Anatomie des Menschen. 1993)

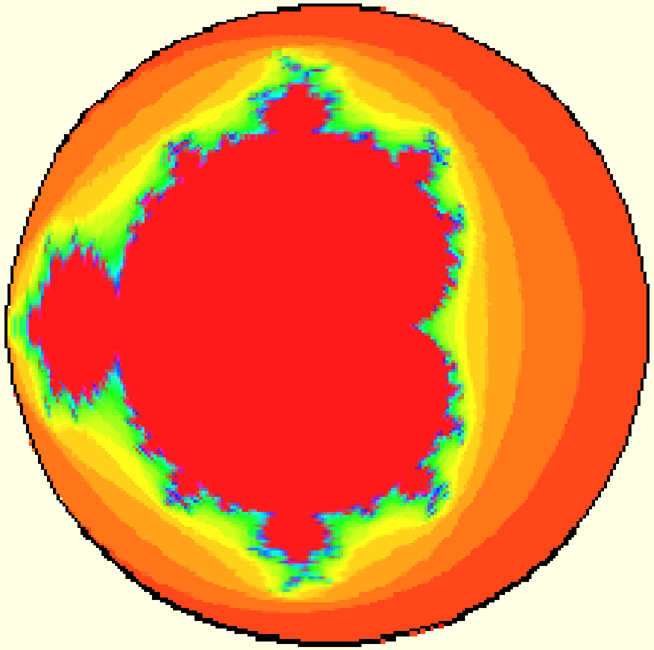
Fraktale auf der Kugel

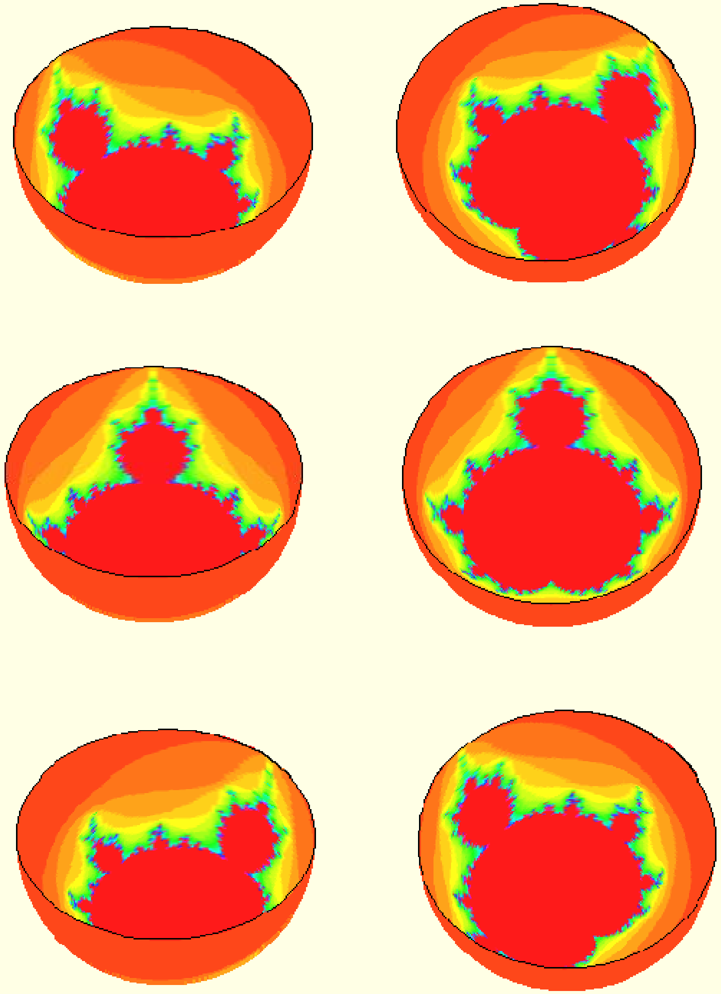




Zwei Phasen einer die Kugel lückenlos flächenfüllenden, geschlossenen PEANO Kurve. (Basisfigur ist ein Würfel)

Mandelbrot-Apfelmännchen auf der Kugel





***Riemann*-Kugel als natürliches (reelles) Modell für die projektiv abgeschlossene komplexe Gerade und die *Möbius*-abgeschlossene (reelle) *Gauß*sche Ebene.**

Auch eine Form,
sich die Kugel zu
geben….

Danke für die nette Gesellschaft beim kleinen Spaziergang durch Geometrie, dem Paradies der Mathematik