Götter in Heißluftballonen? Fotoausschnitt und Kameraposition

Franz Gruber
Version November 9, 2005

Ordinariat für Geometrie, Universität für angewandte Kunst Wien
Oskar Kokoschka-Platz 2, A-1010 Wien, Austria
email: Franz.Gruber@uni-.ak.ac.at

Abstract. Bildausschnitte ebenflächiger, maßbekannter Objekte lassen im Gegensatz zu ihren Originalfotos keinen eindeutigen Rückschluss auf die tatsächliche Kameraposition zu. Die möglichen Positionen lassen sich dennoch klar konkretisieren, was anhand der mystischen Wüstenlinienfotos von Nazca demonstriert wird.

Götter in Heißluftballonen?

Was haben die rätselhaften Wüstenlinien im peruanischen Hochland mit der Fragestellung nach der Kameraposition von Bildauschnitten zu tun?
Diese Linienbilder sind aufgrund ihrer Größe oft nur vom Flugzeug aus zu sehen. Die Grundrisse der Tiermotive sind oft auffällig unsymmetrisch, während sie interssanterweise auf manchen Flugzeugaufnahmen annähernd symmetrisch wirken.

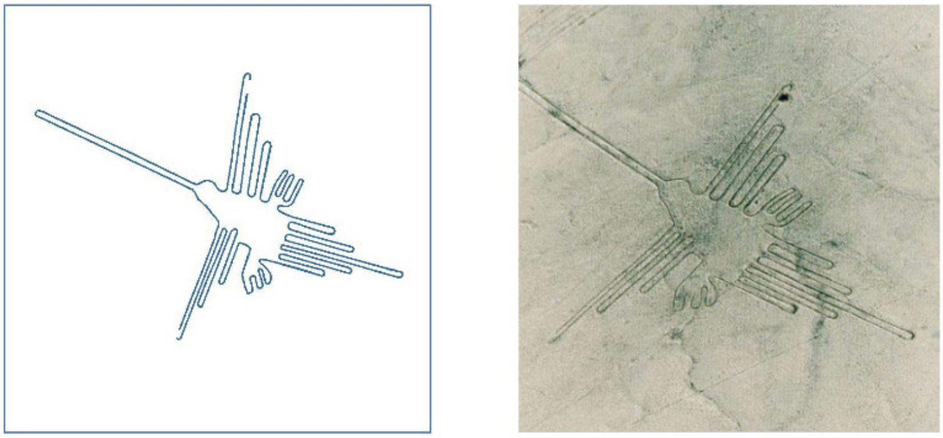


Abbildung 1: Grundriss und Foto

Dies legt die Spekulation nahe, dass die Figuren Zentralprojektionen von symmetrischen Zeichnungen sind. Aber wie haben die Nazcas vor etwa 2000 Jahren bis zu 300 m große Figuren auf den Boden projiziert? Und wozu, wenn man sie dann sowieso nicht sehen konnte? Manche behaupten, die Nazcas hätten bereits Heißluftballone gekannt, und die Figuren seien von großer Höhe aus angeleitet in den Wüstenboden gescharrt worden.
Etwas realistischer erscheint mir die Theorie (vgl. Glaeser [1]), dass die Linien aus einer Kombination von Projektion und Skalierung entstanden sind. Es könnte etwa ein Instruktor auf einem relativ kleinen Turm (z.B. 10 m hoch) mit der Zeichnung eines symmetrischen Tiermotivs Anweisungen gegeben haben, wie die Linien zu ziehen sind. Aus seiner Sicht erscheint die Figur symmetrisch, am Boden jedoch ist sie, wie das Bild eines Diaprojektors, perspektivisch verzerrt. Die immense Größe der Figur wird erst im Anschluß durch eine zentrale Streckung, z.B. mit Seilen erreicht. Dadurch ändert sich nur mehr der Maßstab, nicht aber die Proportionen.
Auf die zweite Frage, wozu diese Linien dienten, werden religiöse Antworten vermutet. Vielleicht sollten nur die Götter in der Lage sein, die Figuren zu sehen. Da der Sternenhimmel für die Nazca-Kultur bekanntlich große Bedeutung hatte, wäre es naheliegend, dass auch die jeweilige Blickrichtung auf das Motiv, also die relative Position des Turms zur projizierten Figur eine wichtige Rolle spielt. Sie könnte die Blickrichtung, quasi den Wohnort einer

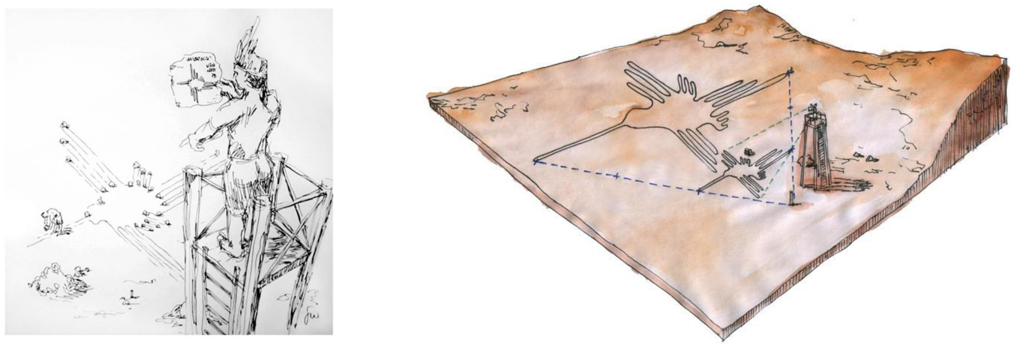


Abbildung 2: Projektion und Streckung

Gottheit am Sternenhimmel, widerspiegeln.
Motiviert von dieser netten Spekulation entstand sowohl der Titel als auch die eigentliche Fragestellung: Wo war das Projektionszentrum (das Auge des Instruktors am Turm, oder der Heißluftballon bzw. das Flugzeug), das symmetrische Aufnahmen lieferte? Und: Ist das Zentrum eindeutig rekonstruierbar?

Fotoausschnitt und Kameraposition

Ausgehend von bekannten Grundrissplänen (zur Verfügung gestellt von der *Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden*) und Flugzeugaufnahmen sollten die möglichen Kamerapositionen gefunden werden. Bekanntlich definieren vier beliebige Punkte A, B, C, D des Grundrisses und ihre korrespondierenden Fotopunkte A_1, B_1, C_1, D_1 eine eindeutige geradentreue Zuordnung (Kollineation) α zwischen Grundriss und Foto.

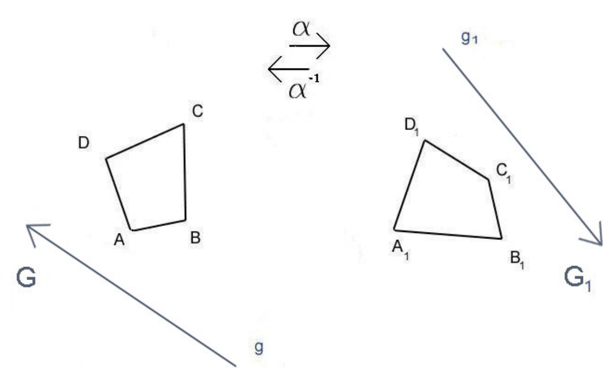


Abbildung 3: Grundriss und Foto

Die Bilder bzw. Urbilder der jeweiligen Ferngeraden sind i.Allg. endliche Geraden, hier mit g bzw. g_1 bezeichnet. Die Fernpunkte G u. G_1 dieser Geraden sind einander zugeordnet, da sie beide im Unendlichen liegen, aber auch unendlichen Punkten zugeordnet sind, also gilt:

$$\alpha(G) = G1$$

Jede zu g parallele Gerade h, ist einer zu g_1 parallelen Gerade h_1 zugeordnet, weil die Fernpunkte von g und g_1 zugeordnet sind. Aus dem selben Grund geht die Doppelverhältnistreue auf h und h_1 in eine Teilverhältnistreue über. Durch Skalierung einer der beiden Szenen kann man somit erreichen, das zugeordnete Punktreihen auf h bzw. h_1 kongruent werden.

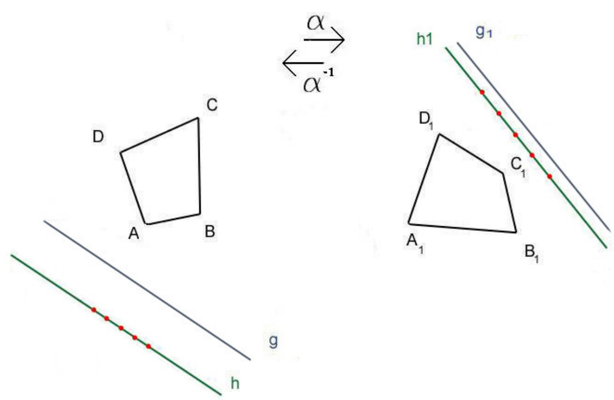


Abbildung 4: Teilverhältnistreue Punktreihen

Diese Geraden können nun als Fixpunktgerade, später als Kollineationsachse verwendet werden, indem man sie durch eine starre Bewegung zur Deckung bringt. Auf Grund des Satzes von Desargues ergibt sich zwangsläufig ein Zentrum wegen der vorliegenden Fixpunktachse.

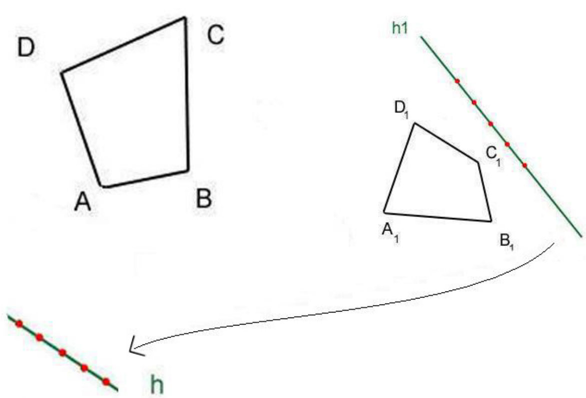


Abbildung 5: Kongruente Punktreihen → Fixpunktachse

Von der Ebene in den Raum

Was bis jetzt im 2 Dimensionen stattgefunden hat, geht nun in die 3.Dimension indem man eines der beiden Vierecke um die Fixpunktachse rotieren läßt. Das Zentrum existiert nach wie vor (Satz von Desargue) und bewegt sich aus Symmetriegründen in einer Ebene ε und beschreibt, wie wir gleich sehen werden, eine Kreisbahn, es gilt also:

Rotiert man einen ebenen Schnitt einer perspektiven Kollineation um die Kollineationsachse, so wandert das resultierende Zentrum auf einer ebenen Kreisbahn. Die Kreisbahn steht im rechten Winkel zur Kollineationsachse und liegt symmetrisch zur Grundebene.

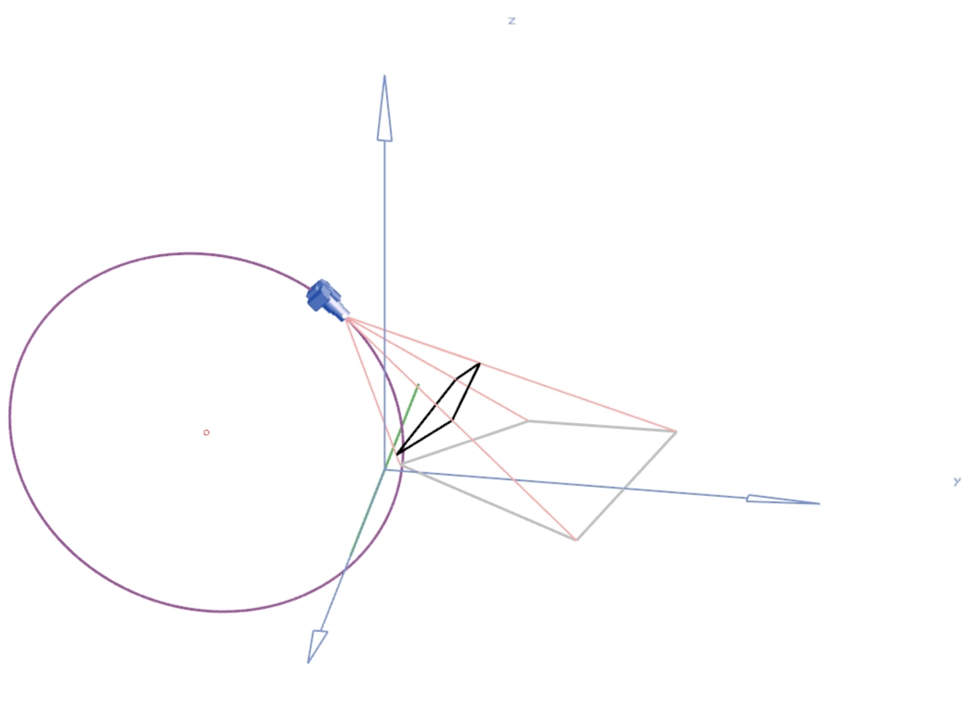
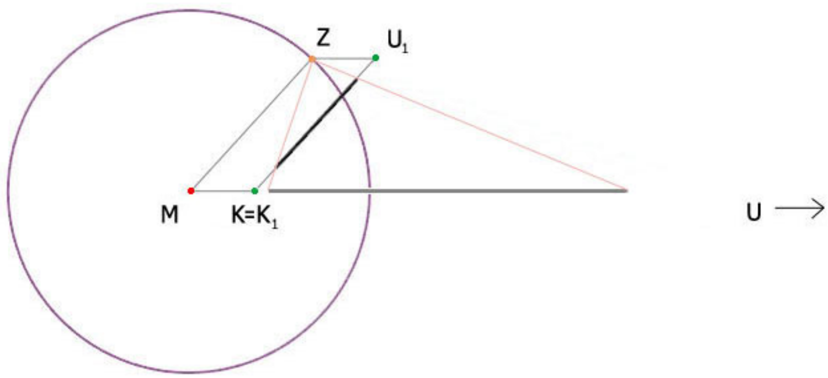
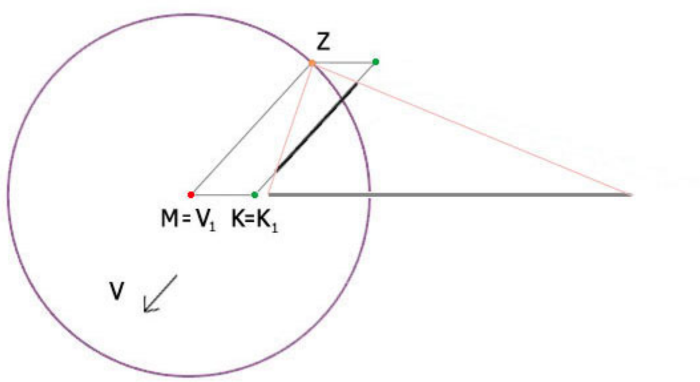


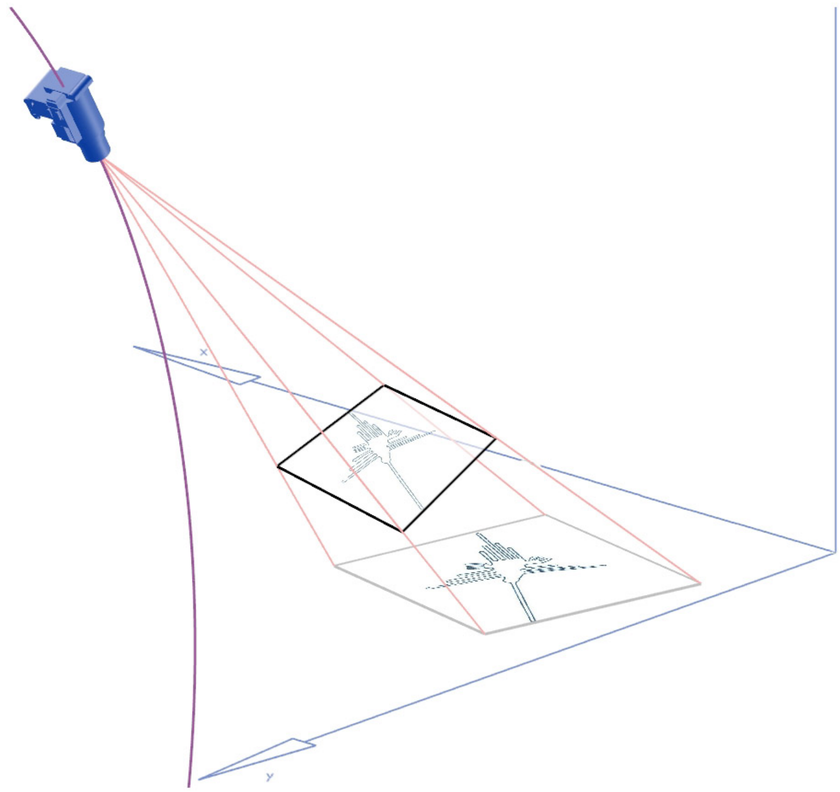
Abbildung 6: Zentrum wandert auf Kreisbahn

Warum ist die Bahn eine Kreisbahn?





Betrachten wir die beiden Punkte K und U der Schnittgeraden von Basisebene und ε, wobei K auf der Kollineationsachse und U der Fernpunkt sei. Ihre Zuordnungen auf der rotierenden Bildebene seien $K1$ $(= K)$ und U_1. Sei M so definiert, dass MK_1U_1Z ein Parallogramm bilden.
Es gilt einerseits $|MZ| = |K_1U_1| = const.$, da K_1 und U_1 feste Punkte auf der rotierenden Ebene sind (Bijektion zu K und U). Andererseits gilt $|MK_1| = |ZU1| = const.$, in analoger Weise, wenn man Bild.- und Basisebene vertauscht.
Das Parallelogramm MK_1U_1Z ist somit ein Gelenkparalleogramm, und Z wandert bei seiner Bewegung auf einem Kreis um den Mittelpunkt M.



Literatur

[1] G. Glaeser, *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik,* Spektrum, München, 2005.