Schraubtorsen als Zahnflanken

Hellmuth Stachel

Technische Universität Wien
Vienna University of Technology

25. Forbildungstagungseminar des ADG, 2.–5. November, Strobl 2004

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

2. Grundlegendes zur Verzahnungsgeometrie

3. J. Phillips' räumliche Evolventenverzahnung

4. Hauptsätze der Evolventenverzahnung

1. Einleitung

Zahnrädergetriebes haben die Aufgabe, Drehungen des Antriebsrades Σ_1 (Achse p_{10}, Winkelgeschwindigkeit ω_{10}) gleichförmig auf jene des Abtriebsrades Σ_2 (Achse p_{20}, Winkelgeschwindigkeit ω_{20}) zu übertragen, also mit dem

Übersetzungsverhältnis $i := \omega_{20}/\omega_{10} =$*konst.*

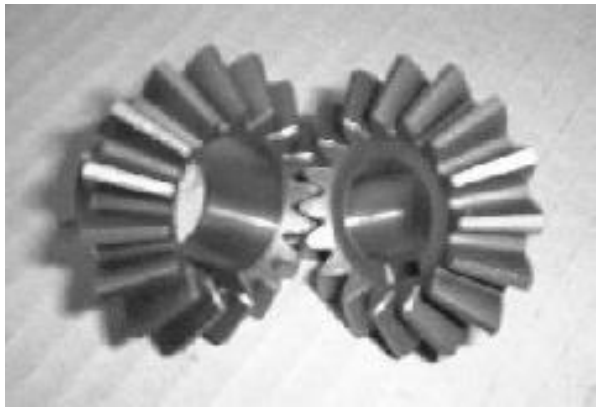
Verzahnung	*Achsen* p_{10}, p_{20}	*Zahnräder*
ebene Verzahnung	parallel	Stirnräder
sphärische Verzahnung	schneidend	Kegelräder
räumliche Verzahnung	windschief	Hyperboloidräder

Typen von Zahnrädern

Stirnräder

p_{10}, p_{20} parallel

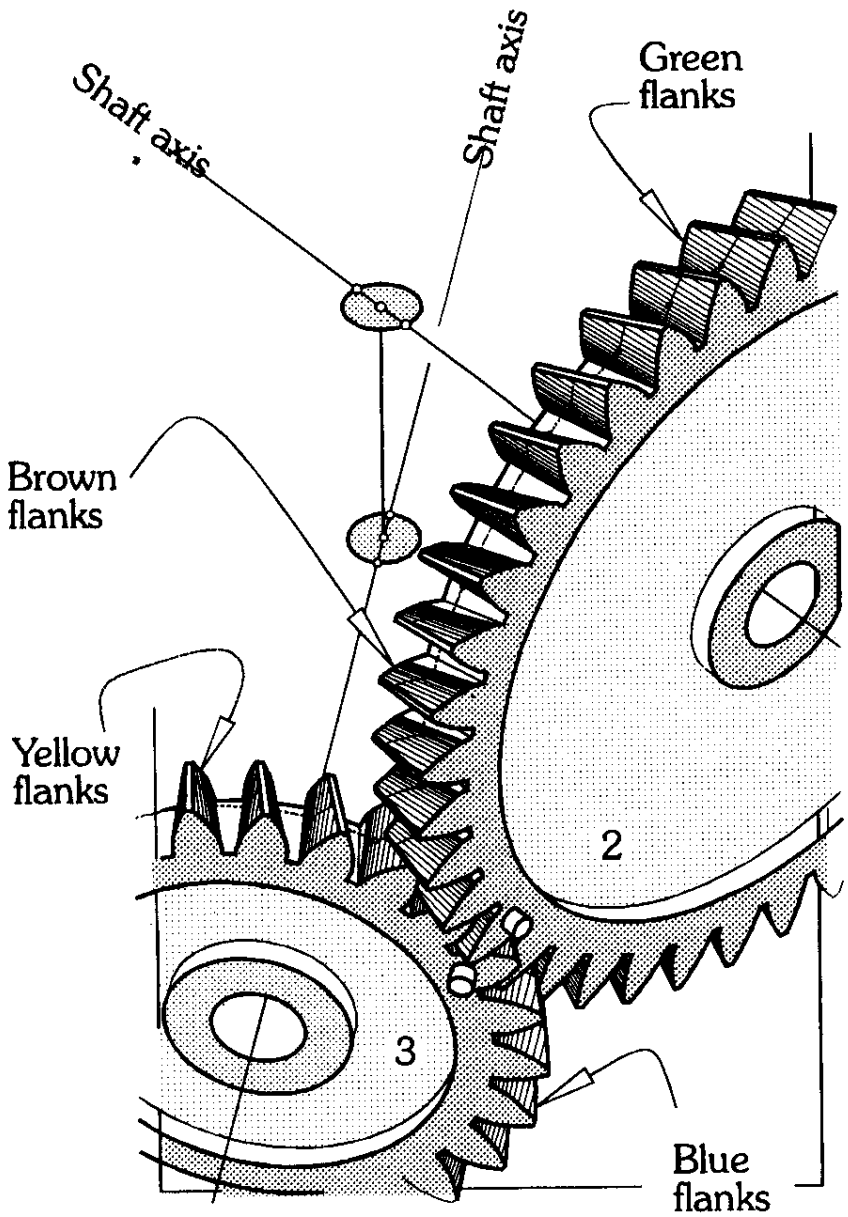
Kegelräder



p_{10}, p_{20} schneidend

Hyperboloidräder
(z.B. Schneckenräder)

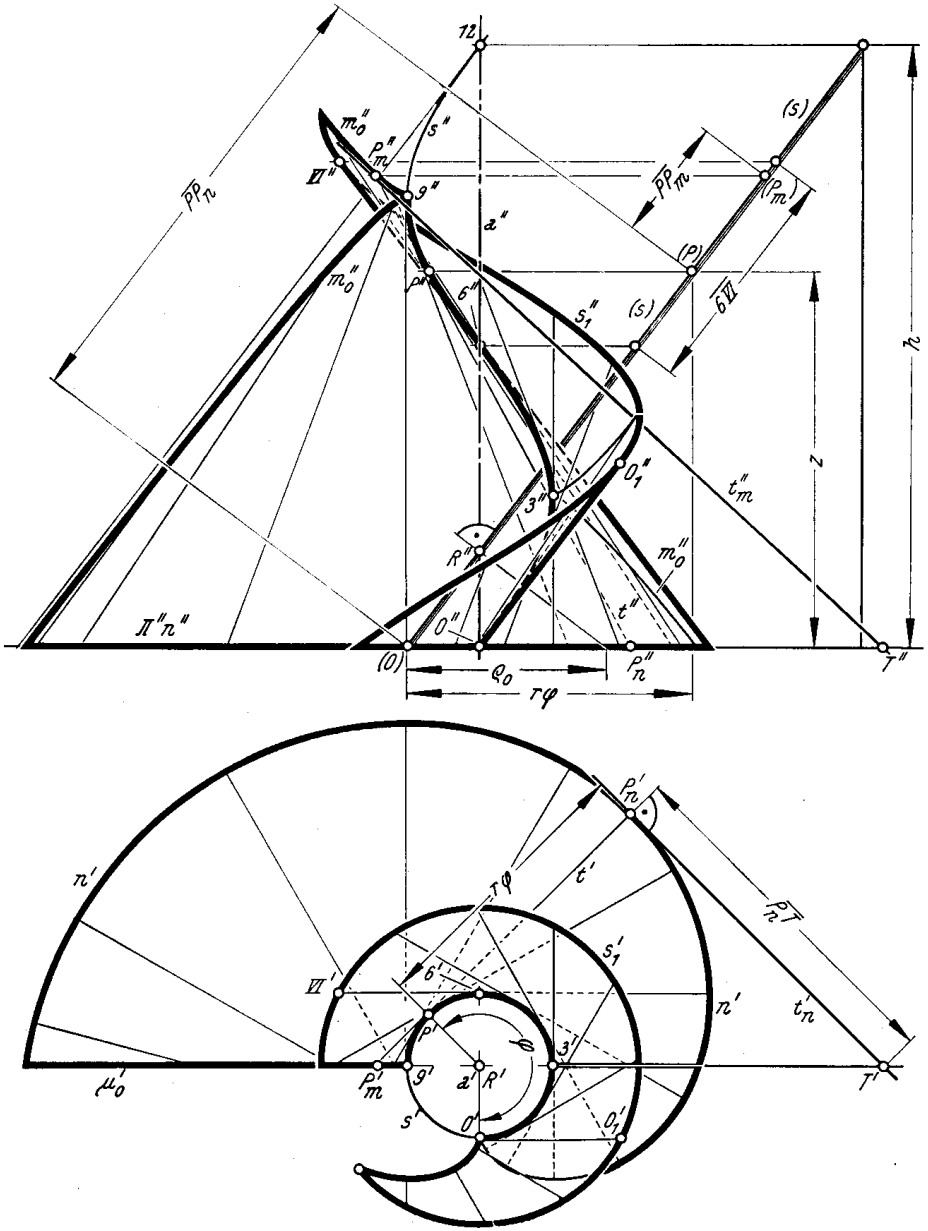
p_{10}, p_{20} windschief



Hauptsatz von J. Phillips:

Evolventen-Schrägzahnflanken sind auch als Zahnflanken mit Punktberührung bei windschiefen Achsen einsetzbar.

Das Übersetzungsverhältnis hängt ausschließlich von den Abmessungen der Schraubtorsen ab — und nicht von deren relativer Lage.



Zur Erinnerung: Eine *Schraubtorse* ist die Tangentenfläche einer Schraublinie und zugleich Schrägzahnflanke bei Evolventenzahnrädern

Aktuelles über Schraubtorsen

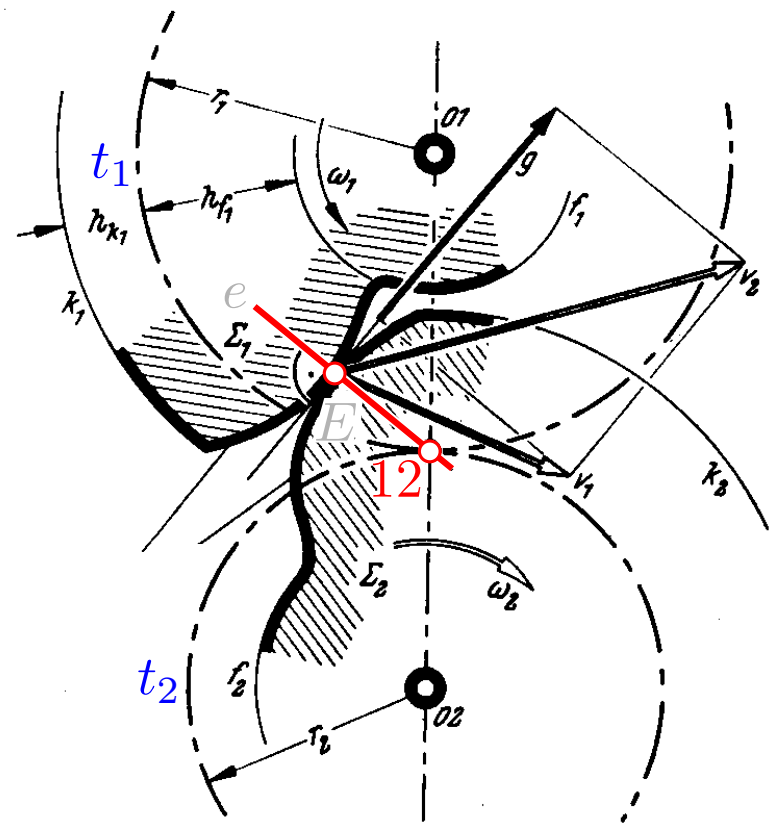
Das Herzstück des Passat 4MOTION: das Torsen-Mittendifferenzial

. . . aus einem aktuellen Prospekt von Volkswagen:

das **Torsen-Mittendifferenzial**

Grundlagen der ebenen Verzahnungen

Eine gleichförmige Bewegungsübertragung zwischen parallelen Achsen wird durch aufeinander rollende *Polkreise* t_1, t_2 ermöglicht. Deren Berührpunkt (= *Wälzpunkt*) ist gleichzeitig der *Relativpol* 12.

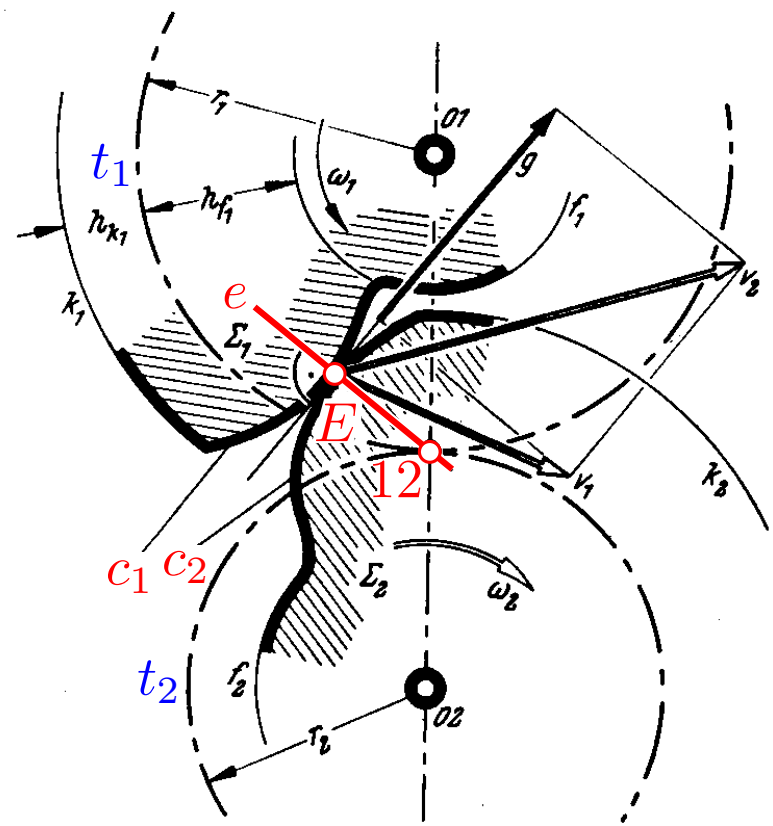


Ebenes Verzahnungsgesetz:

$c_1 \in \Sigma_1$ und $c_2 \in \Sigma_2$ sind genau dann Zahnprofile für eine gleichförmige Bewegungsübertragung, wenn die gemeinsame Normale e (= *Eingriffsnormale*) im Berührpunkt E (= *Eingriffspunkt*) stets durch den Relativpol 12 geht.

Grundlagen der ebenen Verzahnungen

Eine gleichförmige Bewegungsübertragung zwischen parallelen Achsen wird durch aufeinander rollende *Polkreise* t_1, t_2 ermöglicht. Deren Berührpunkt (= *Wälzpunkt*) ist gleichzeitig der *Relativpol* 12.



Ebenes Verzahnungsgesetz:

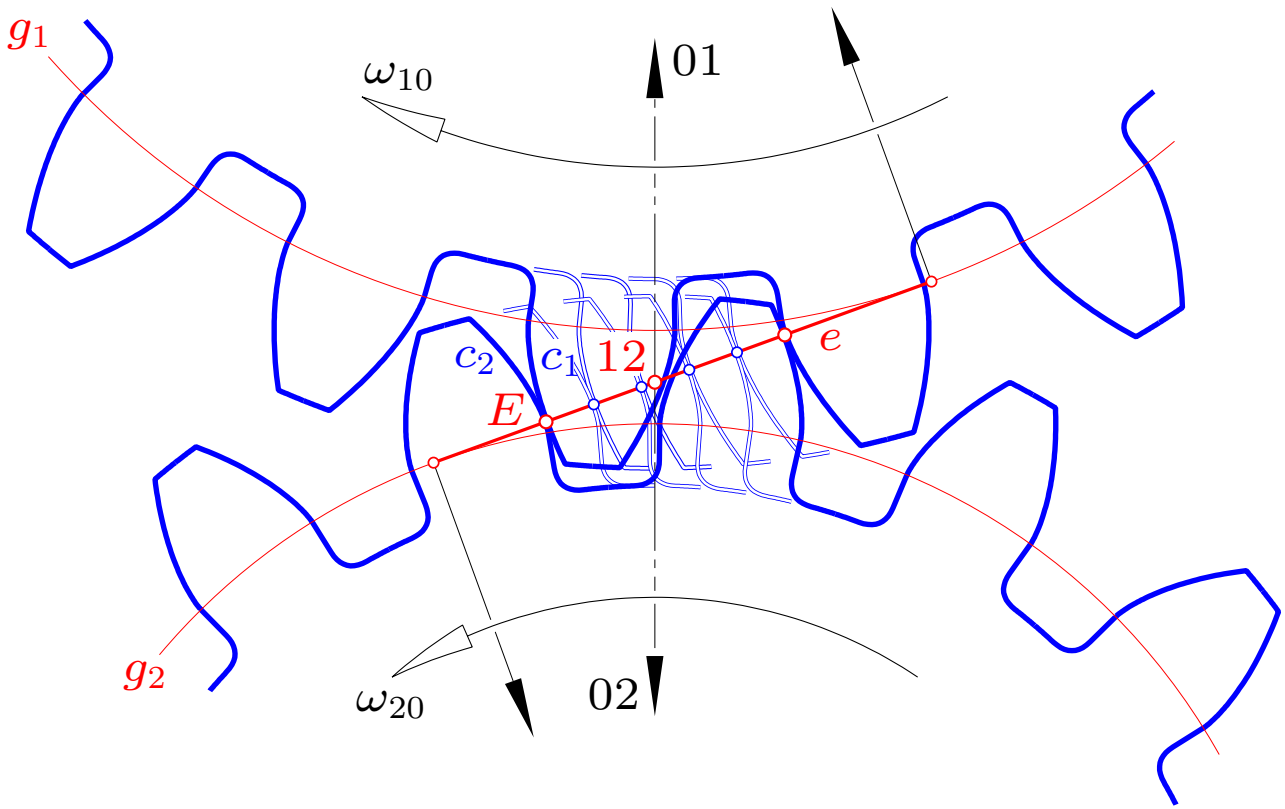
$c_1 \in \Sigma_1$ und $c_2 \in \Sigma_2$ sind genau dann Zahnprofile für eine gleichförmige Bewegungsübertragung, wenn die gemeinsame Normale e (= *Eingriffsnormale*) im Berührpunkt E (= *Eingriffspunkt*) stets durch den Relativpol 12 geht.

Ebene Evolventenverzahnung

L. Euler (1765):

Kennzeichnung der Evolventenverzahnung:

Alle Eingriffsnormalen e fallen zusammen.



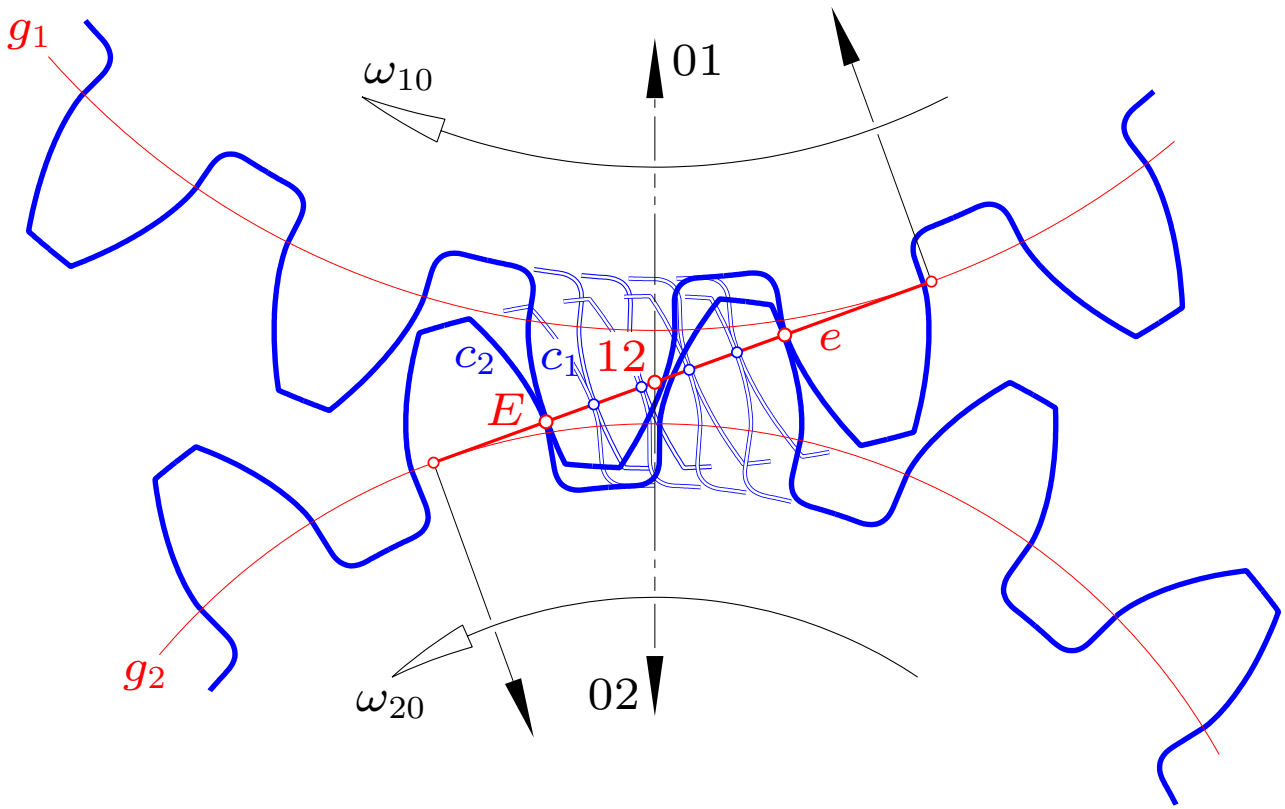
ebene Evolventenverzahnung

Vorteile der ebenen Evolventenverzahnung

(i) Bei konstantem ω_{10} läuft E auf e *mit konstanter Geschwindigkeit*.

(ii) Die *übertragende Kraft* hat eine konstante Wirkungslinie.

(iii) Das *Übersetzungsverhältnis* $i = \omega_{20}/\omega_{10}$ ist *unempfindlich gegenüber Montagefehlern*.



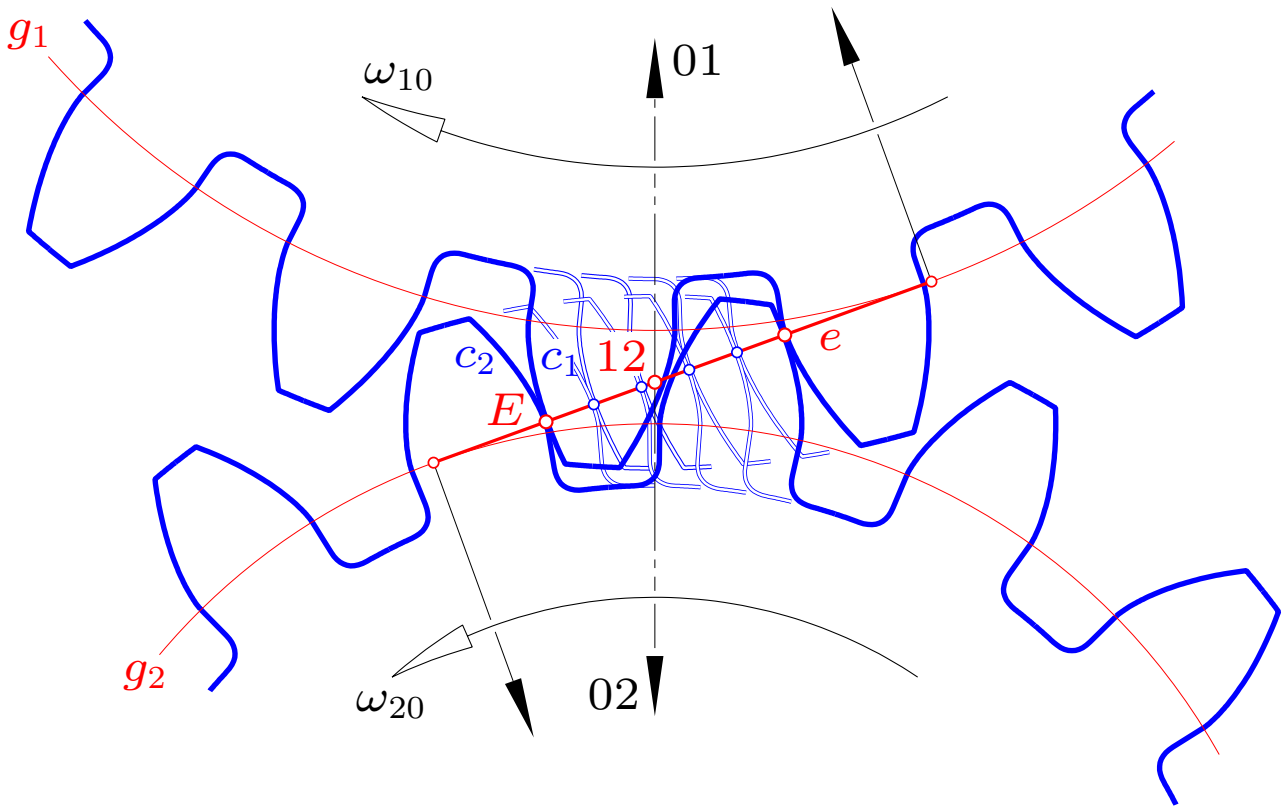
ebene Evolventenverzahnung

Vorteile der ebenen Evolventenverzahnung

(i) Bei konstantem ω_{10} läuft E auf e *mit konstanter Geschwindigkeit*.

(ii) Die *übertragende Kraft* hat eine konstante Wirkungslinie.

(iii) Das *Übersetzungsverhältnis* $i = \omega_{20}/\omega_{10}$ ist *unempfindlich gegenüber Montagefehlern*.



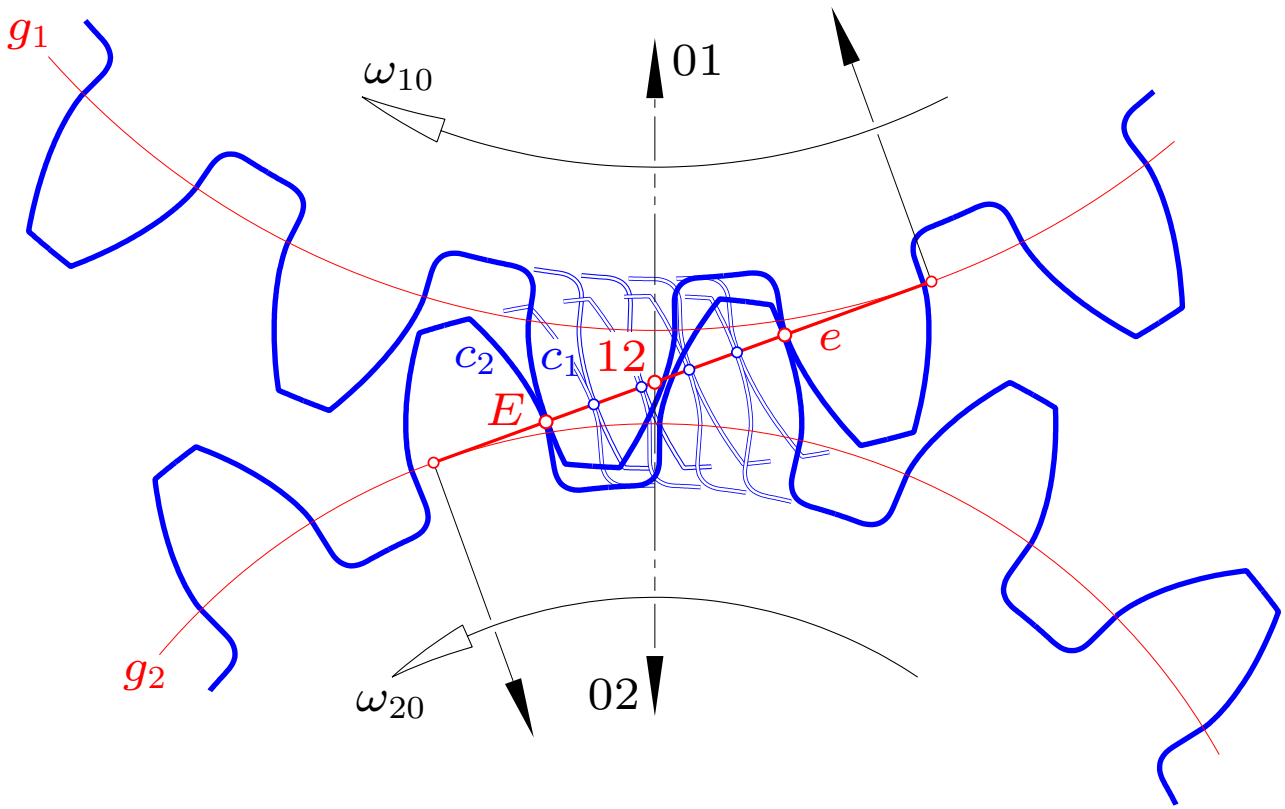
ebene Evolventenverzahnung

Vorteile der ebenen Evolventenverzahnung

(i) Bei konstantem ω_{10} läuft E auf e *mit konstanter Geschwindigkeit*.

(ii) Die *übertragende Kraft* hat eine konstante Wirkungslinie.

(iii) Das *Übersetzungsverhältnis* $i = \omega_{20}/\omega_{10}$ ist *unempfindlich gegenüber Montagefehlern*.



ebene Evolventenverzahnung

Ein Hilfssatz über räumliche Verzahnungen

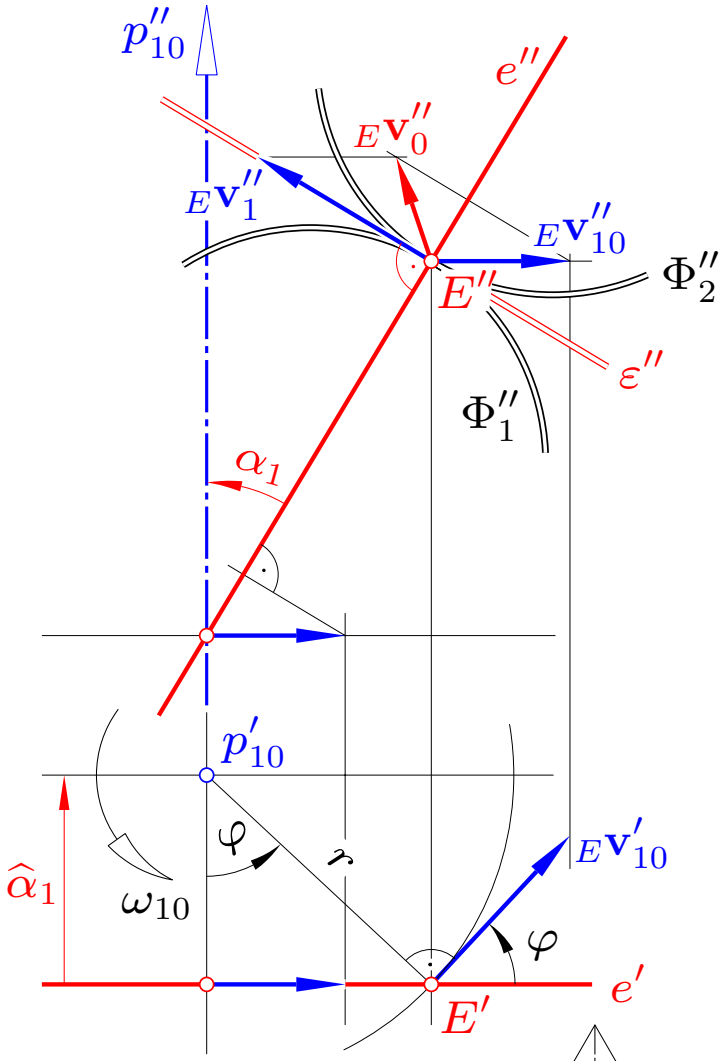
Hilfssatz:

1. *Ein einziger Eingriffspunkt E zwischen zwei Flankenflächen $\Phi_1 \in \Sigma_1$ und $\Phi_2 \in \Sigma_2$ legt das Übersetzungsverhältnis $i = \omega_{20}/\omega_{10}$ eindeutig fest.*

2. *Dieses hängt nur von der Eingriffsnormalen e ab gemäß*

$$i = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\widehat{\alpha}_1 \sin \alpha_1}{\widehat{\alpha}_2 \sin \alpha_2} .$$

mit $\widehat{\alpha}_j$ und α_j als Abstand bzw. Winkel zwischen e und der Drehachse p_{j0} .



Beweis des Hilfssatzes

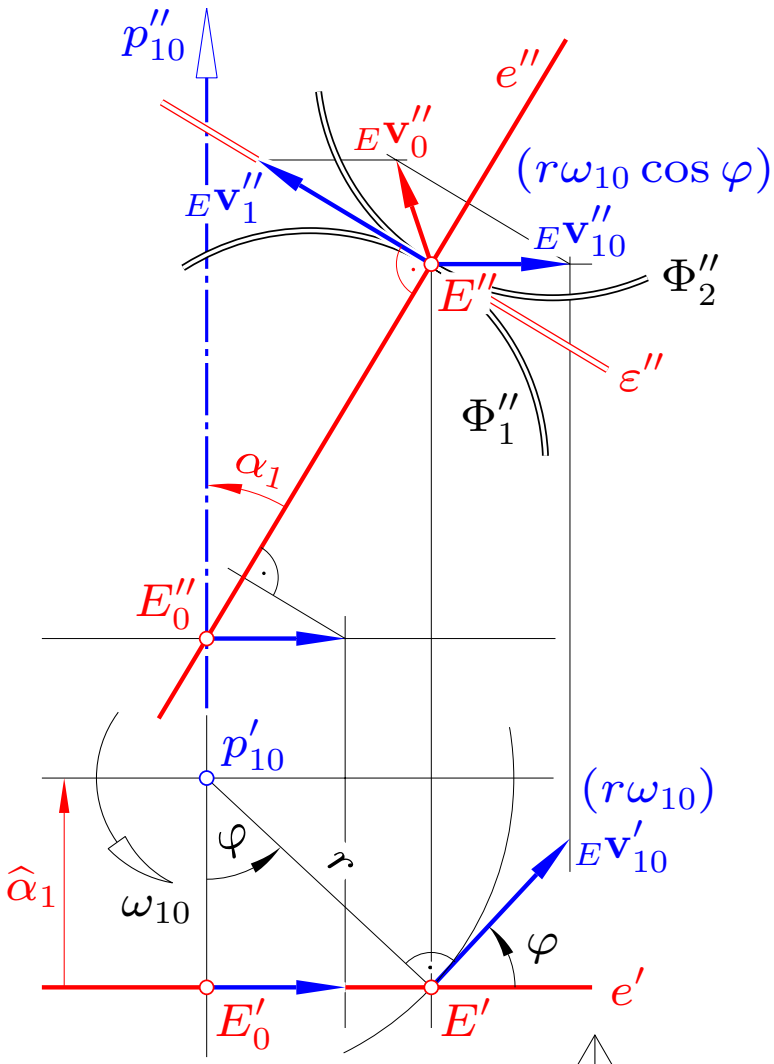
Beweis: Für die Absolutgeschwindigkeit ${}_E\mathbf{v}_0$ des Eingriffspunktes E gilt: ${}_E\mathbf{v}_0 = {}_E\mathbf{v}_{10} + {}_E\mathbf{v}_1$ sowie ${}_E\mathbf{v}_0 = {}_E\mathbf{v}_{20} + {}_E\mathbf{v}_2$.

Wegen ${}_E\mathbf{v}_1,\ {}_E\mathbf{v}_2 \parallel \varepsilon$ sind die Komponenten von ${}_E\mathbf{v}_{10}$ und ${}_E\mathbf{v}_{20}$ in Richtung von e gleich.

Nach dem *Projektionssatz* sind diese Komponenten in allen $E \in e$ gleich wie in E_0.

Oder: Wir wählen p_{10} und e parallel zum Aufriß. Aus der Aufrißlänge $r\omega_{10}\cos\varphi = \widehat{\alpha}_1\omega_{10}$ folgt für die Komponentenlänge

$$\omega_{10}\widehat{\alpha}_1 \sin\alpha_1 = \omega_{20}\widehat{\alpha}_2 \sin\alpha_2 \,.$$



Beweis des Hilfssatzes

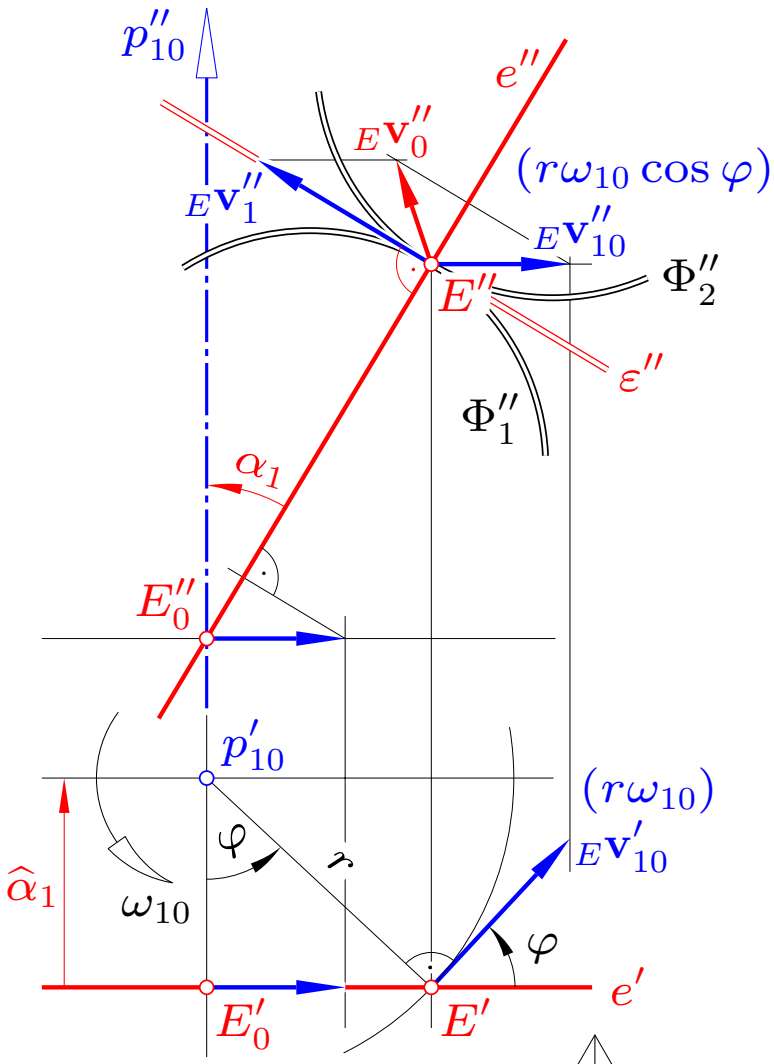
Beweis: Für die Absolutgeschwindigkeit ${}_E\mathbf{v}_0$ des Eingriffspunktes E gilt: ${}_E\mathbf{v}_0 = {}_E\mathbf{v}_{10} + {}_E\mathbf{v}_1$ sowie ${}_E\mathbf{v}_0 = {}_E\mathbf{v}_{20} + {}_E\mathbf{v}_2$.

Wegen ${}_E\mathbf{v}_1,\ {}_E\mathbf{v}_2 \parallel \varepsilon$ sind die Komponenten von ${}_E\mathbf{v}_{10}$ und ${}_E\mathbf{v}_{20}$ in Richtung von e gleich.

Nach dem *Projektionssatz* sind diese Komponenten in allen $E \in e$ gleich wie in E_0.

Oder: Wir wählen p_{10} und e parallel zum Aufriß. Aus der Aufrißlänge $r\omega_{10}\cos\varphi = \widehat{\alpha}_1\omega_{10}$ folgt für die Komponentenlänge

$$\omega_{10}\widehat{\alpha}_1 \sin\alpha_1 = \omega_{20}\widehat{\alpha}_2 \sin\alpha_2 \,.$$



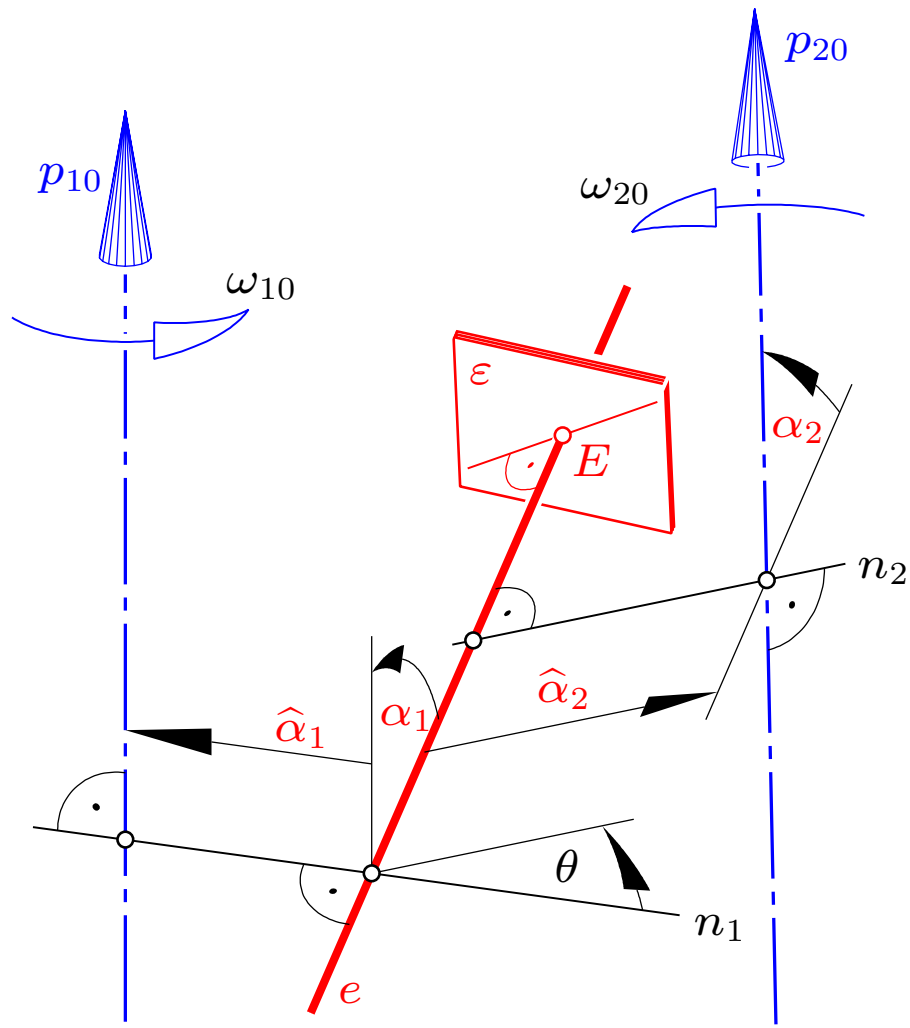
Nochmals der Hilfssatz

Wir wiederholen den

Hilfssatz: *Das Übersetzungsverhältnis ist durch eine einzige Eingriffsnormale* e *bereits bestimmt, denn*

$$i = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\widehat{\alpha}_1 \sin \alpha_1}{\widehat{\alpha}_2 \sin \alpha_2}$$

mit $\underline{\alpha}_1 = \alpha_1 + \varepsilon\widehat{\alpha}_1, \quad \underline{\alpha}_2 = \alpha_2 + \varepsilon\widehat{\alpha}_2$ *als dualen Winkeln zwischen* e *und den Drehachsen* p_{10} *bzw.* p_{20}.



3. Jack Phillips' räumliche Evolventenverzahnung

J. Phillips: *General Spatial Involute Gearing.*
Springer Verlag, New York 2003, 498 p

Jack Phillips (1923 –), Sydney

Definition der räumlichen Evolventenverzahnung

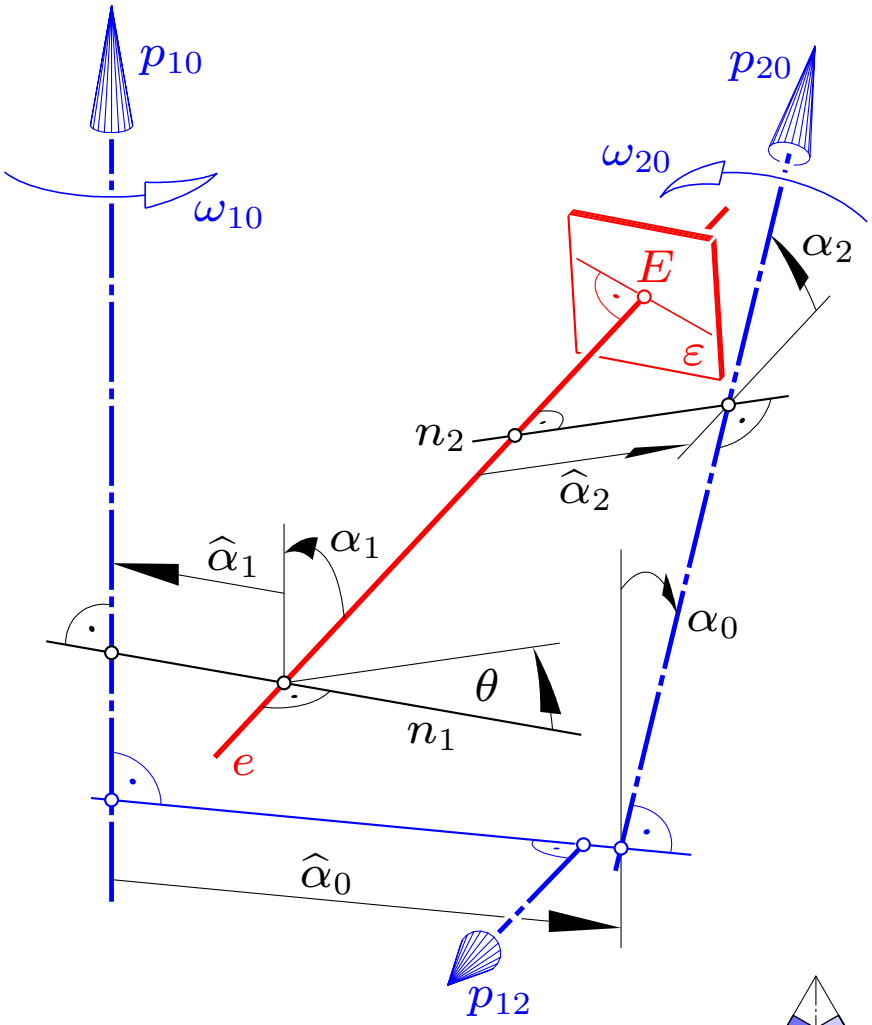
Definition:

Alle Eingriffsnormalen e fallen zusammen. (e ist windschief und nicht orthogonal zu p_{10} und p_{20}).

Folgerungen:

Nach obigem Hilfssatz ist das *Übersetzungsverhältnis konstant*.

In den Eingriffspunkten $E \in e$ sind die gemeinsamen Tangentialebenen ε an die Flankenflächen Φ_1, Φ_2 stets *orthogonal zu* e.



Definition der räumlichen Evolventenverzahnung

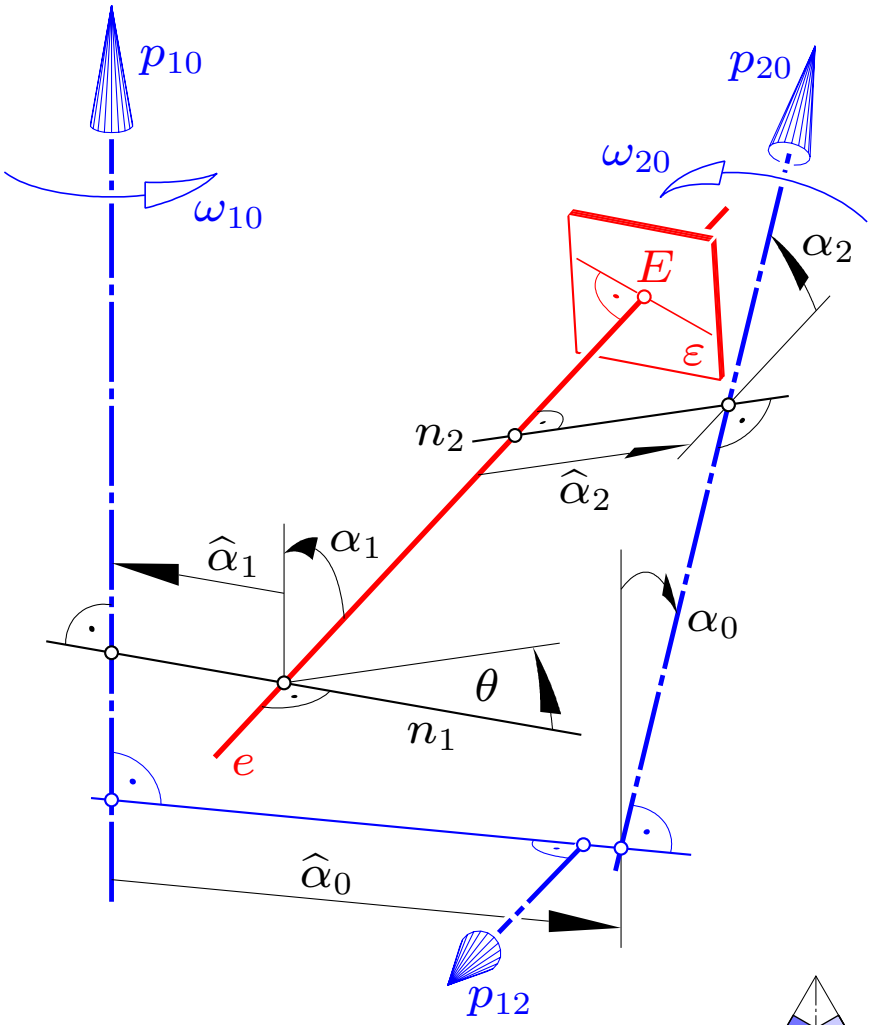
Definition:

Alle Eingriffsnormalen e fallen zusammen. (e ist windschief und nicht orthogonal zu p_{10} und p_{20}).

Folgerungen:

Nach obigem Hilfssatz ist das *Übersetzungsverhältnis konstant*.

In den Eingriffspunkten $E \in e$ sind die gemeinsamen Tangentialebenen ε an die Flankenflächen Φ_1, Φ_2 stets *orthogonal zu* e .



Relativbahnen des Eingriffspunktes E

Was ist die *Relativbahn* c_1, also die Bahn des Eingriffspunktes E relativ zu Σ_1 ?

Σ_1/Σ_0 ist eine Drehung um p_{10}, und relativ zu Σ_0 läuft E auf e $\Longrightarrow$ die Relativbahn c_1 liegt auf dem *einschaligen Drehhyperboloid* Π_1 durch e mit der Achse p_{10} .

Der Eingriffspunkt E liegt auf Φ_1 $\Longrightarrow$ die *Tangente an die Relativbahn ist k ist orthogonal zu* e.

Die Relativbahn c_1 von E ist eine *orthogonale Trajektorie einer Erzeugendenschar* auf dem einschaligen Drehhyperboloid Π_1 durch e mit der Achse p_{10} .

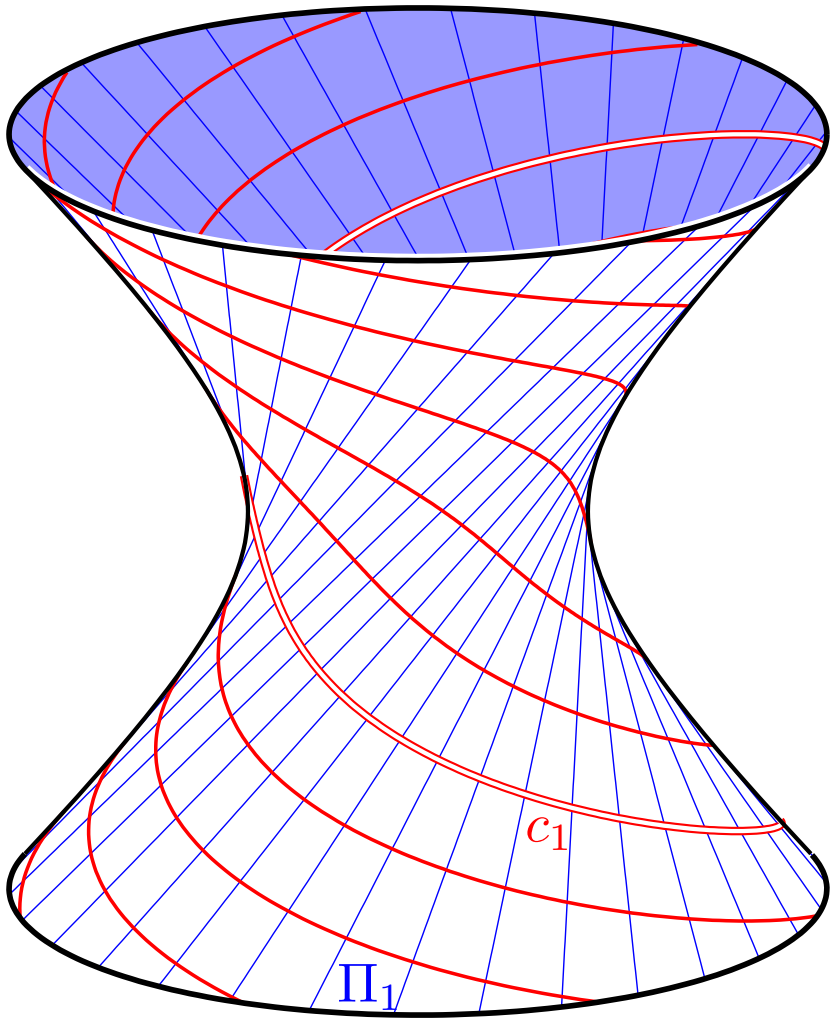
Relativbahnen des Eingriffspunktes E

Was ist die *Relativbahn* c_1, also die Bahn des Eingriffspunktes E relativ zu Σ_1 ?

Σ_1/Σ_0 ist eine Drehung um p_{10}, und relativ zu Σ_0 läuft E auf e $\Longrightarrow$ die Relativbahn c_1 liegt auf dem *einschaligen Drehhyperboloid* Π_1 durch e mit der Achse p_{10} .

Der Eingriffspunkt E liegt auf Φ_1 $\Longrightarrow$ die *Tangente an die Relativbahn ist k ist orthogonal zu* e.

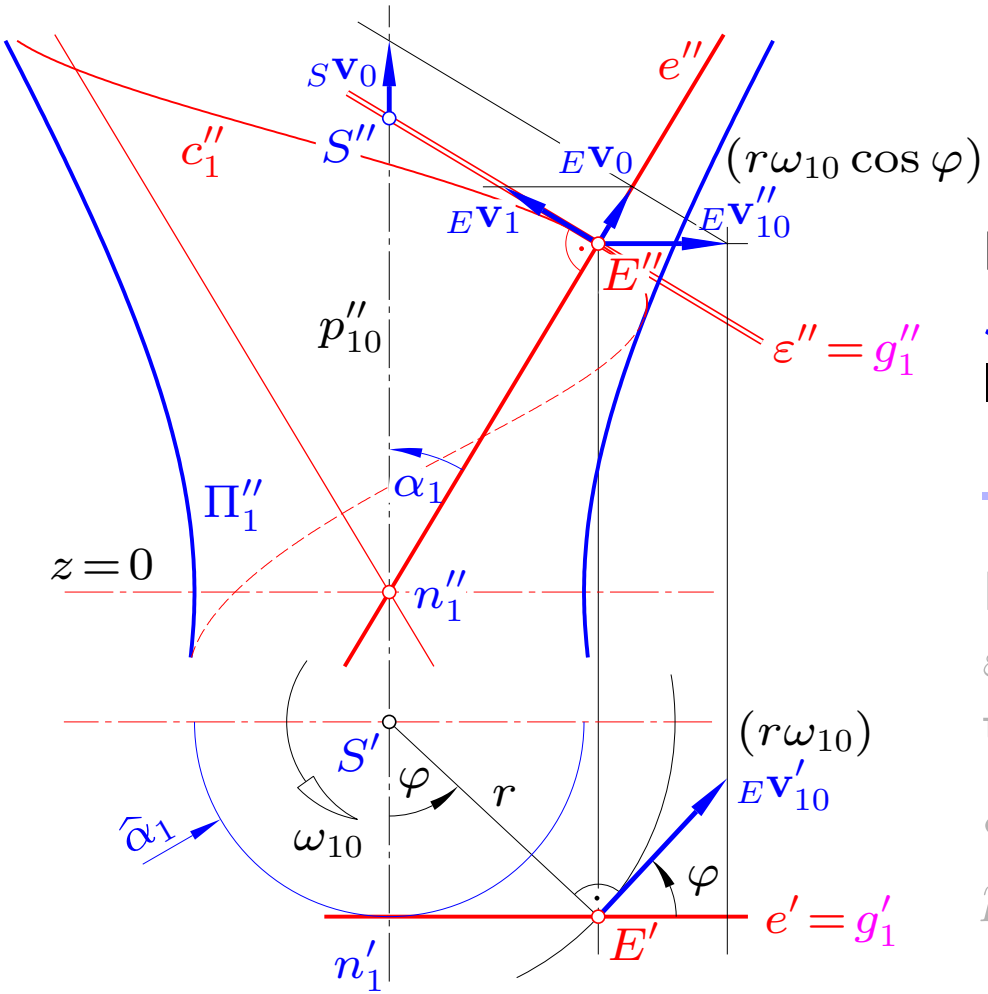
Die Relativbahn c_1 von E ist eine *orthogonale Trajektorie einer Erzeugendenschar* auf dem einschaligen Drehhyperboloid Π_1 durch e mit der Achse p_{10} .



einschaliges Drehhyperboloid mit einer Erzeugendenschar und orthogonalen Trajektorien c_1.

Diese Trajektorien sind Relativbahnen für die räumliche Evolventenverzahnung.

Hüllfläche der Eingriffsebenen längs c_1



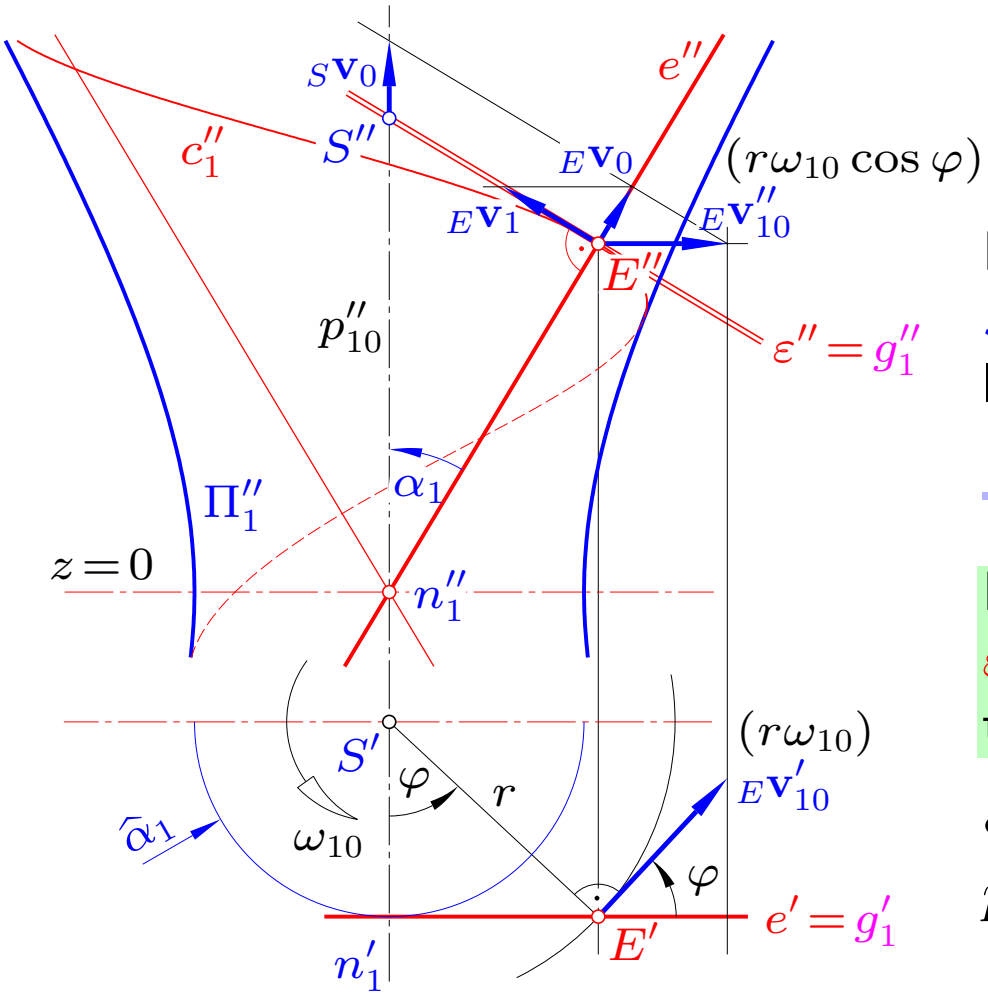
$$\|_E\mathbf{v}_0\| = \omega_{10}\widehat{\alpha}_1 \sin\alpha_1 = \text{konst.},$$
$$\|_S\mathbf{v}_0\| = \text{konst.} \implies$$

Die *Relativbahn* c_1 liegt auf einer *Schraubtorse* Φ_1, die das Drehhyperboloid Π_1 längs c_1 orthogonal durchsetzt.

Die Einhüllende Φ_1 der Eingriffsebenen ε ist eine *Schraubtorse*. Φ_1 ist gleichzeitig eine mögliche *Zahnflanke.*

Φ_1 ist durch e bis auf Drehungen um p_{10} eindeutig bestimmt.

Hüllfläche der Eingriffsebenen längs c_1



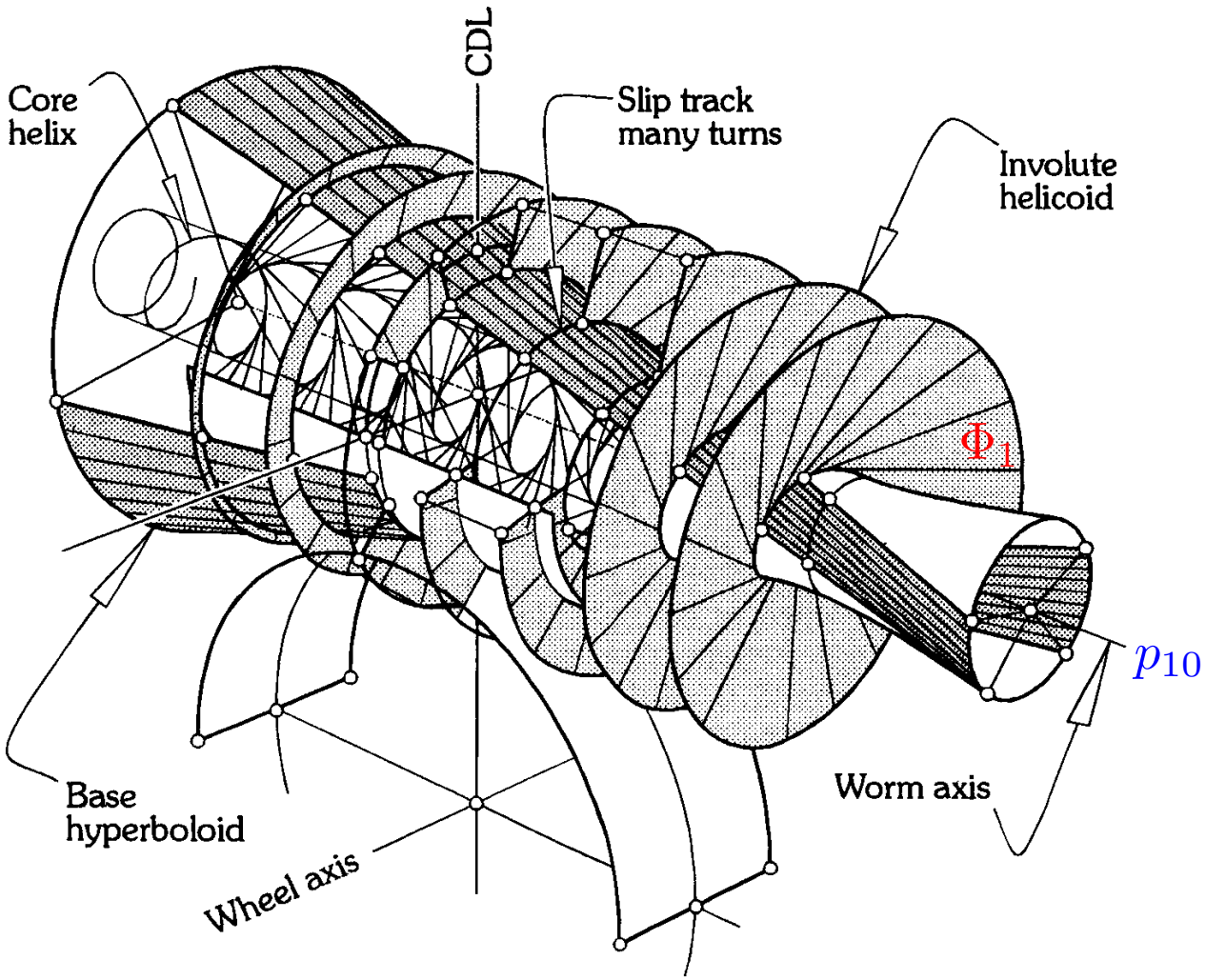
$$\|_E\mathbf{v}_0\| = \omega_{10}\widehat{\alpha}_1 \sin\alpha_1 = \text{konst.},$$
$$\|_S\mathbf{v}_0\| = \text{konst.} \implies$$

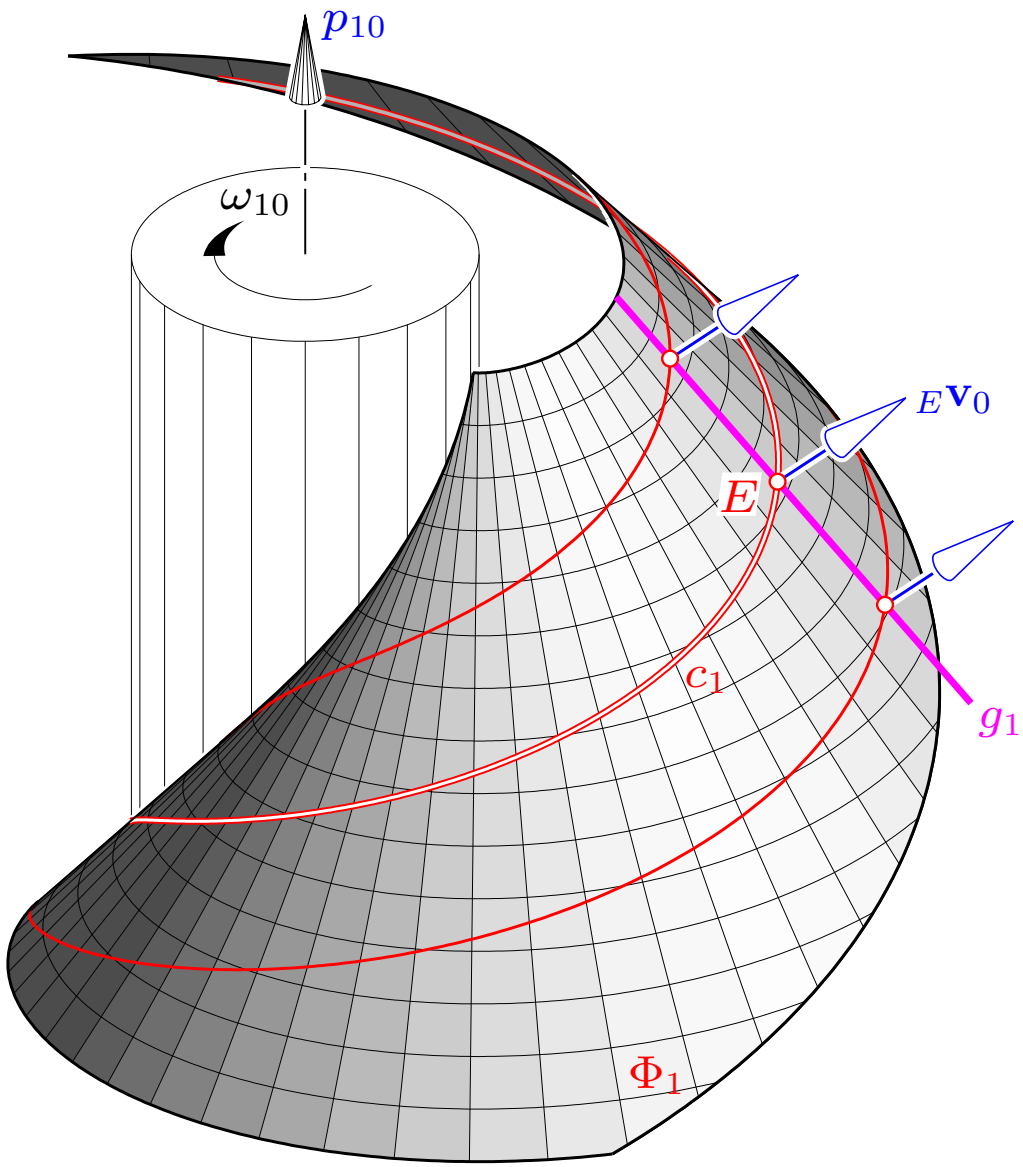
Die *Relativbahn* c_1 liegt auf einer *Schraubtorse* Φ_1, die das Drehhyperboloid Π_1 längs c_1 orthogonal durchsetzt.

Die Einhüllende Φ_1 der Eingriffsebenen ε ist eine *Schraubtorse*. Φ_1 ist gleichzeitig eine mögliche *Zahnflanke.*

Φ_1 ist durch e bis auf Drehungen um p_{10} eindeutig bestimmt.

Einschaliges Drehhyperboloid und Schraubtorse





Die einfachste Zahnflanke Φ_1 entsteht als Hüllfläche der Eingriffsebenen ε, während E eine Relativbahn durchläuft. Es ist dies eine Schraubtorse.

Links: Schraubtorse Φ_1 mit Relativbahnen c_1, die von Punkten E der Torsenerzeugenden g_1 durchlaufen werden.

3a) Hauptsätze der räumlichen Evolvenverzahnung

Erster Hauptsatz:

Die Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 sind passende Zahnflanken für eine räumliche Verzahnung mit Punktberührung, bei welcher alle Eingriffsnormalen in e zusammenfallen.

Zweiter Hauptsatz:

Werden zwei Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 in eine Position gebracht, bei welcher sie einander im Punkt E berühren, und werden ihre Achsen p_{10}, p_{20} nun fixiert, so sind Φ_1 and Φ_2 passende Zahnflanken für ein konstantes Übersetzungsverhältnis, gleichgültig, ob die Achsen parallel, schneidend oder windschief sind.

Das Übersetzungsverhältnis hängt nur von den Abmessungen der Schraubtorsen Φ_1 und Φ_2 ab, nicht aber von deren relativer Lage. Deshalb ist die räumliche Evolventenverzahnung unempfindlich gegenüber Montagefehlern.

3a) Hauptsätze der räumlichen Evolvenverzahnung

Erster Hauptsatz:

Die Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 sind passende Zahnflanken für eine räumliche Verzahnung mit Punktberührung, bei welcher alle Eingriffsnormalen in e zusammenfallen.

Zweiter Hauptsatz:

Werden zwei Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 in eine Position gebracht, bei welcher sie einander im Punkt E berühren, und werden ihre Achsen p_{10}, p_{20} nun fixiert, so sind Φ_1 and Φ_2 passende Zahnflanken für ein konstantes Übersetzungsverhältnis, gleichgültig, ob die Achsen parallel, schneidend oder windschief sind.

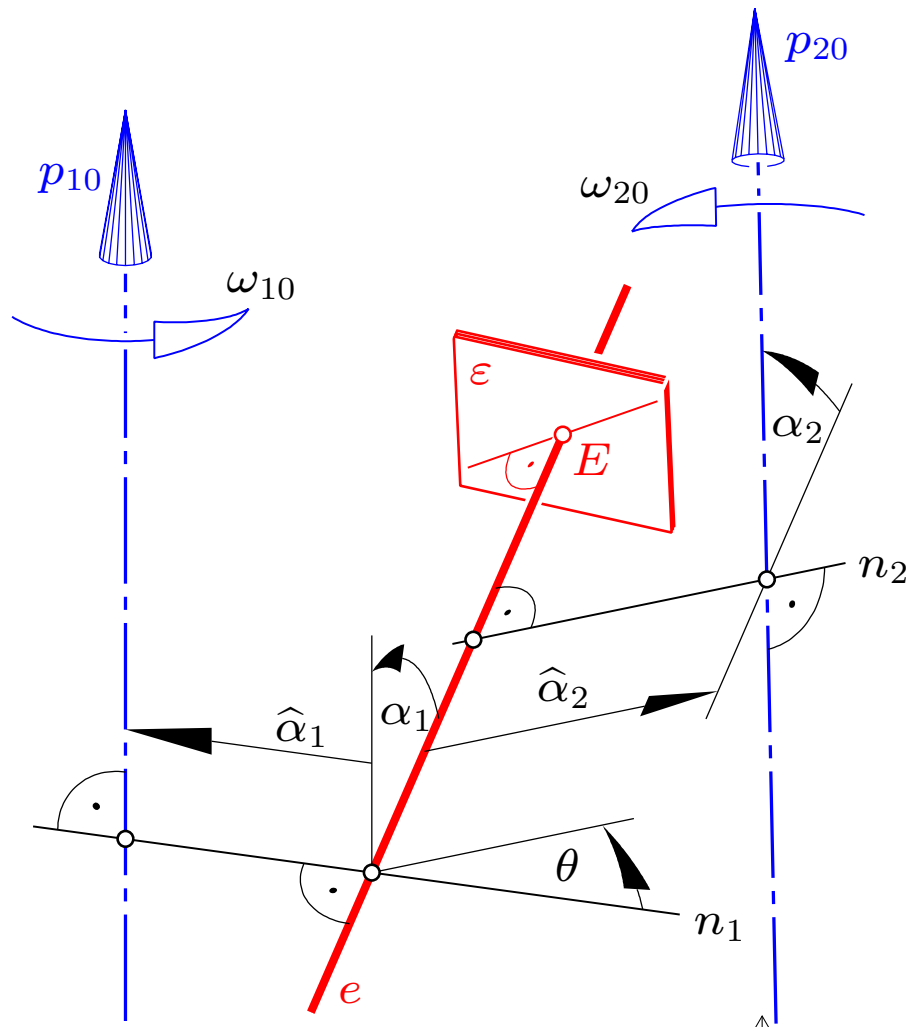
Das Übersetzungsverhältnis hängt nur von den Abmessungen der Schraubtorsen Φ_1 und Φ_2 ab, nicht aber von deren relativer Lage. Deshalb ist die räumliche Evolventenverzahnung unempfindlich gegenüber Montagefehlern.

Beweis des zweiten Hauptsatzes

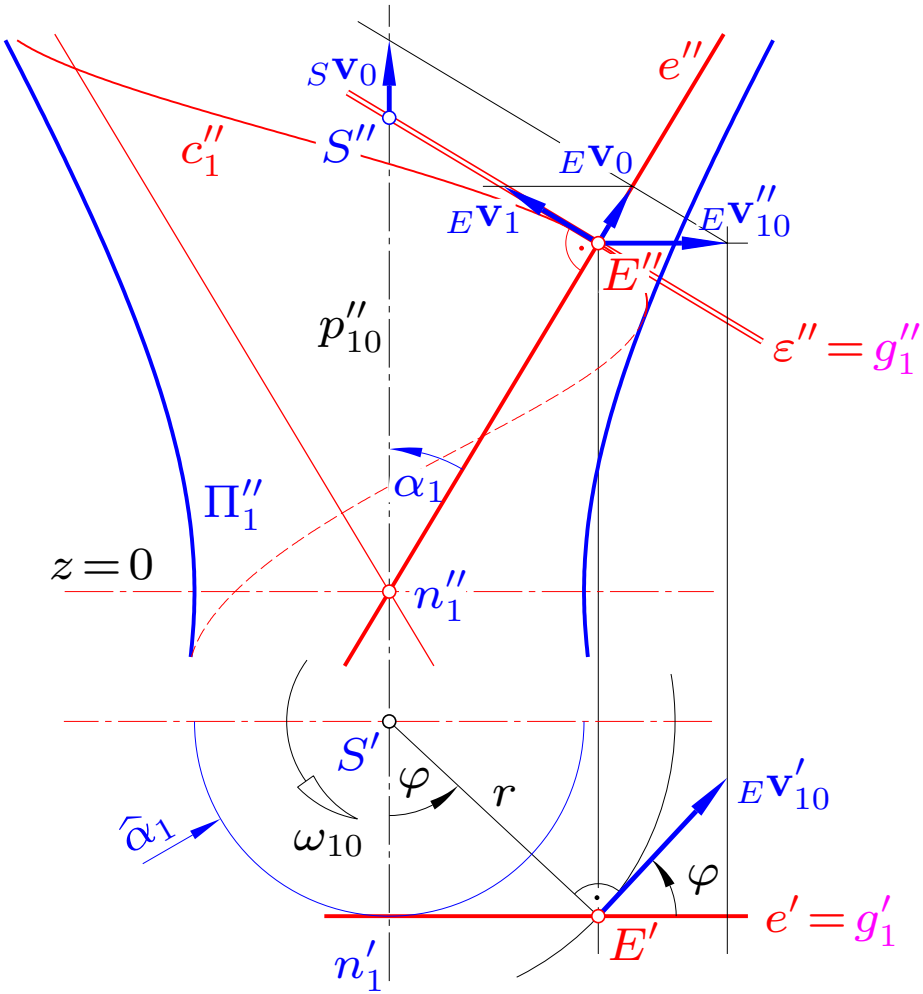
Dreht sich die Schraubtorse Φ_i mit konstantem ω_{i0} um p_{i0} und läuft E gleichzeitig entlang c_i mit einer geeigneten Geschwindigkeit, so läuft E gegenüber Σ_0 auf der Geraden e mit der Geschwindigkeit $\|{}_E\mathbf{v}_{0|i}\| = \omega_{i0}\widehat{\alpha}_i \sin\alpha_i$.

Die anfängliche Berührung bleibt erhalten, sofern ${}_E\mathbf{v}_{0|1} = {}_E\mathbf{v}_{0|2}$ ist. Dies ist nach dem Hilfssatz äquivalent zum konstanten Übersetzungsverhältnis, denn

$$i = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\widehat{\alpha}_1 \sin\alpha_1}{\widehat{\alpha}_2 \sin\alpha_2}\,.$$



Fortsetzung des Beweises



Sämtliche Normalen der Schraubtorse Φ_1 (Erzeugende g_1) haben denselben Abstand $\widehat{\alpha}_1$ von der Achse p_{10} und schließen mit p_{10} denselben Winkel α_1 ein wie e.

Nach dem Hilfssatz ist das Übersetzungsverhältnis unabhängig vom Berührpunkt. □

Erweiterung des ersten Hauptsatzes

Satz: (H.S. 2004) *Während der gleichförmigen Bewegungsübertragung mittels zweier Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 bleibt der im Eingriffspunkt E auftretende Winkel zwischen den Erzeugenden $g_1 \subset \Phi_1$ und $g_2 \subset \Phi_2$ konstant.*

Dieser Winkel ist kongruent zum Winkel θ zwischen den gemeinsamen Normalen n_1, n_2 zwischen e und den Achsen p_{10} bzw. p_{20}.

Korollar: *Werden zwei Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 derart plaziert, daß sie einander längs einer Erzeugenden berühren, so bleibt diese Linienberührung während der gleichförmigen Bewegungsübertragung bestehen.*

In diesem Fall liegen alle Eingriffsnormalen in derselben Parallelebene zu den beiden Achsen ($\theta = 0$).

Erweiterung des ersten Hauptsatzes

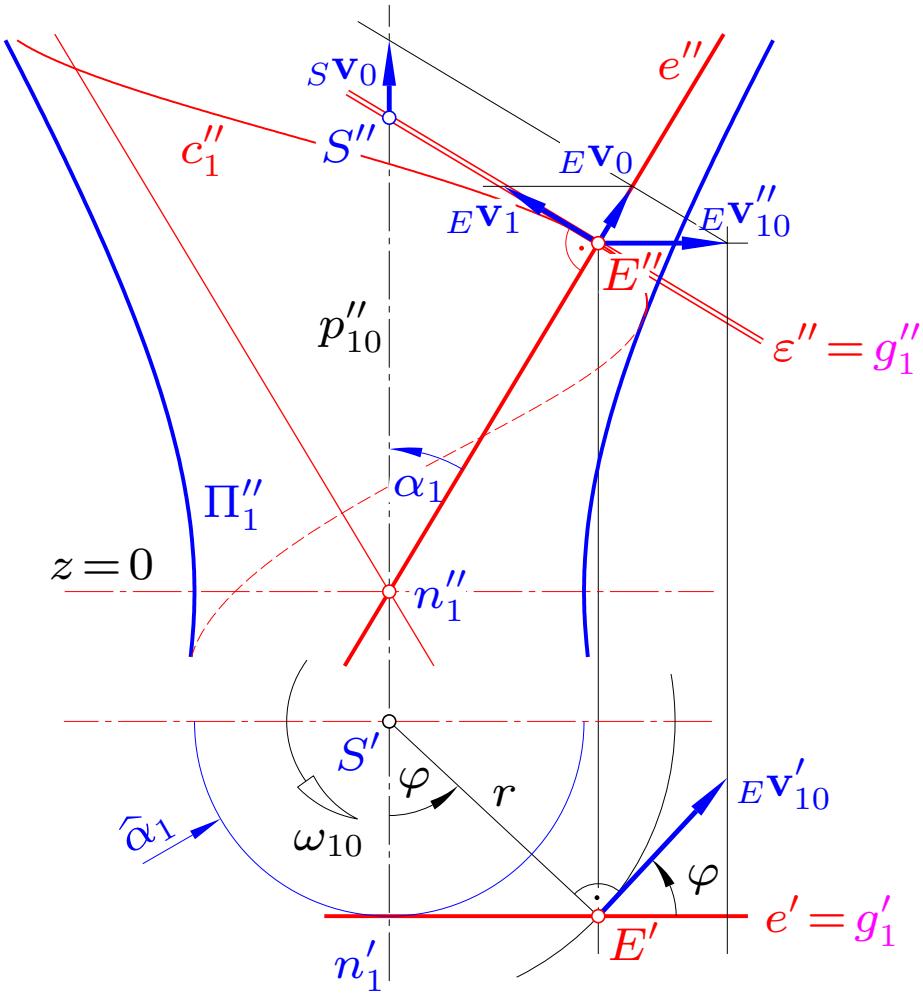
Satz: (H.S. 2004) *Während der gleichförmigen Bewegungsübertragung mittels zweier Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 bleibt der im Eingriffspunkt E auftretende Winkel zwischen den Erzeugenden $g_1 \subset \Phi_1$ und $g_2 \subset \Phi_2$ konstant.*

Dieser Winkel ist kongruent zum Winkel θ zwischen den gemeinsamen Normalen n_1, n_2 zwischen e und den Achsen p_{10} bzw. p_{20}.

Korollar: *Werden zwei Schraubtorsen Φ_1, Φ_2 derart plaziert, daß sie einander längs einer Erzeugenden berühren, so bleibt diese Linienberührung während der gleichförmigen Bewegungsübertragung bestehen.*

In diesem Fall liegen alle Eingriffsnormalen in derselben Parallelebene zu den beiden Achsen ($\theta = 0$).

Beweis zur Erweiterung

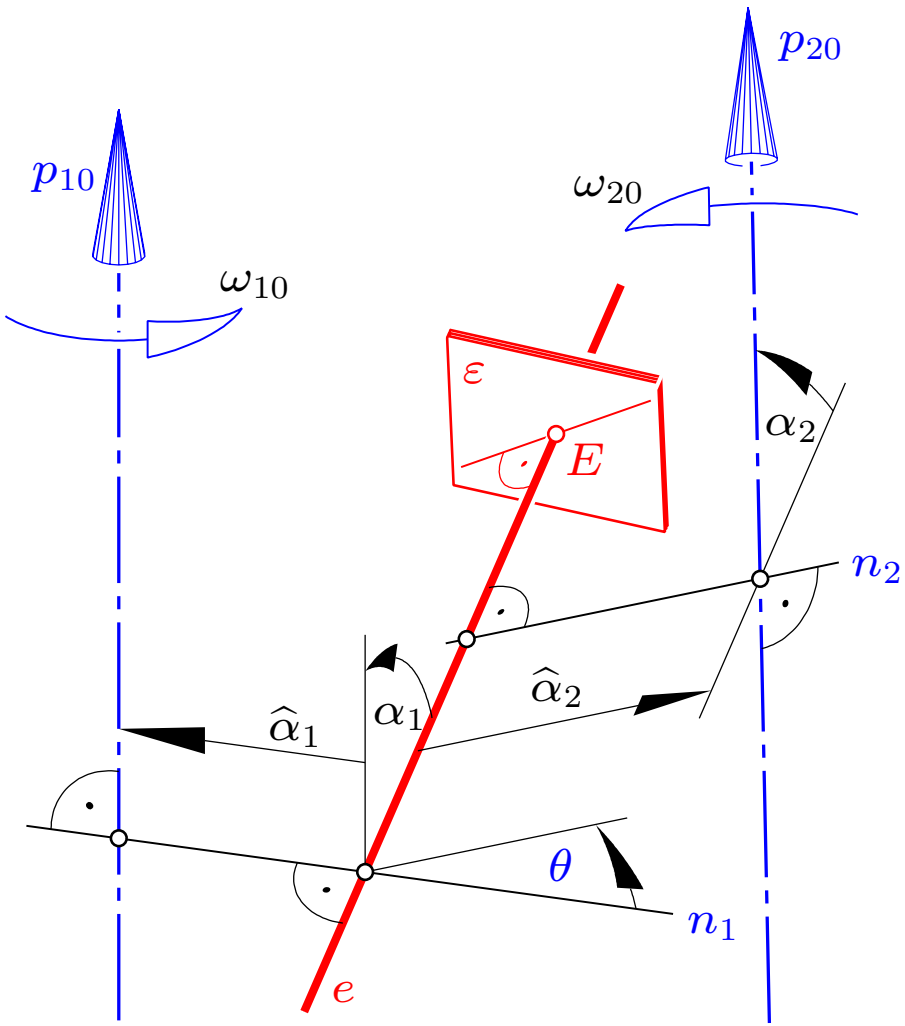


a) Die Erzeugenden $g_1 \subset \Phi_1$ und $g_2 \subset \Phi_2$ sind ebenso wie die gemeinsamen Normalen n_1 (zwischen e und p_{10}) und n_2 (zwischen e und p_{20}) orthogonal zu der festen Eingriffsnormalen e.

b) Zusätzlich ist für $i = 1, 2$ die Erzeugende g_i orthogonal zu n_i.

Also sind die Winkel $\sphericalangle\, g_1 g_2$ und $\sphericalangle\, n_1 n_2$ als Normalwinkel zueinander kongruent. $\square$

Beweis zur Erweiterung

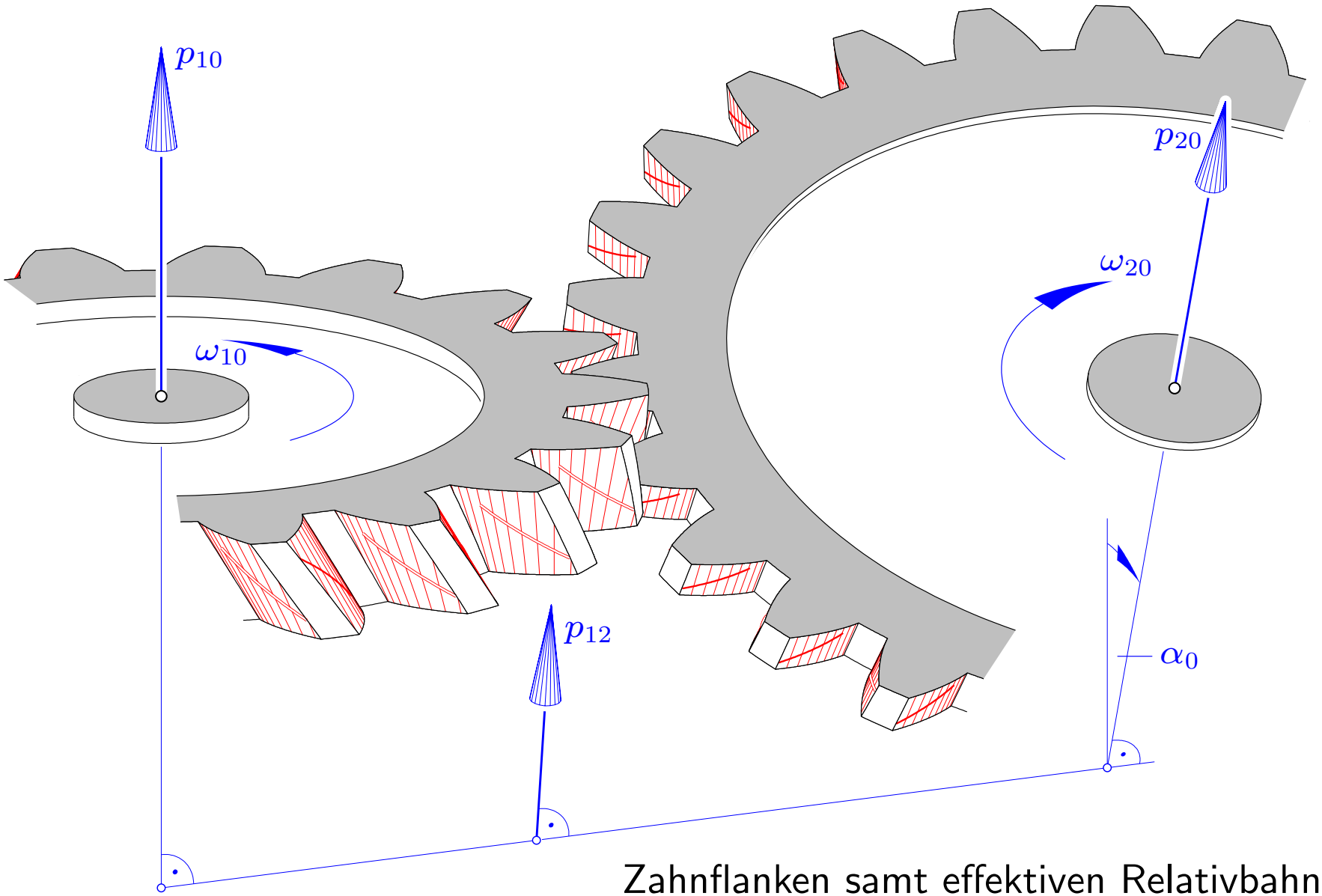


Die Winkel $\sphericalangle\, g_1 g_2$ und $\theta = \sphericalangle\, n_1 n_2$ sind als Normalwinkel zueinander kongruent. $\square$

ein Beispiel räumlicher Evolventenzahnräder

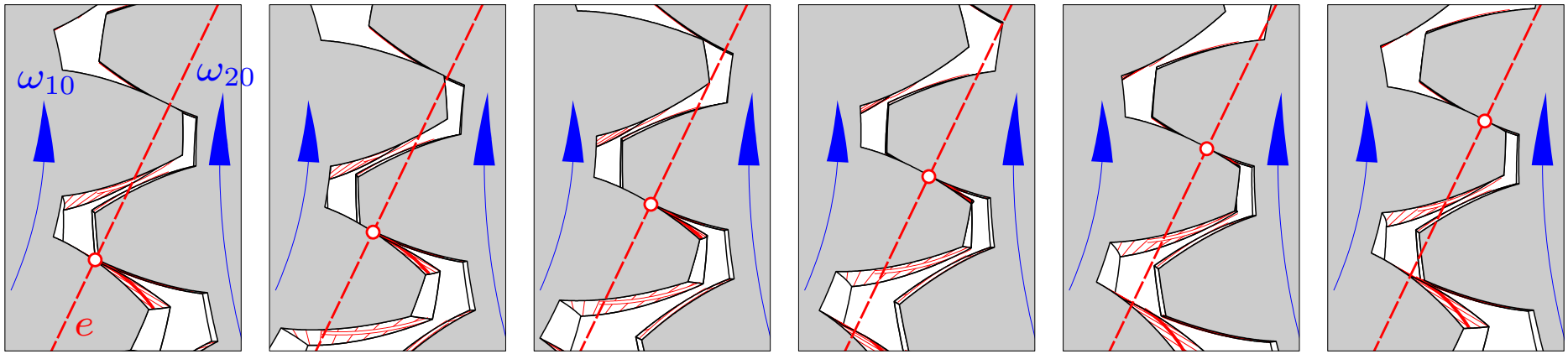
Abmessungen:

Übersetzungsverhältnis $i = -2/3$,
Zähnezahlen: $z_1 = 18$, $z_2 = 27$;
Überdeckungsverhältnis 1.095;
dualer Winkel zwischen p_{10} und p_{20}: $\alpha_0 = 21.35°$, $\widehat{\alpha}_0 = 117.01$;
dualer Winkel zwischen p_{10} und e : $\alpha_1 = -60.0°$, $\widehat{\alpha}_1 = 45.0$,
dualer Winkel zwischen p_{20} e : $\alpha_2 = 76.98°$, $\widehat{\alpha}_1 = 60.0$;
Winkel $\theta = 14.0°$.



Zahnflanken samt effektiven Relativbahnen

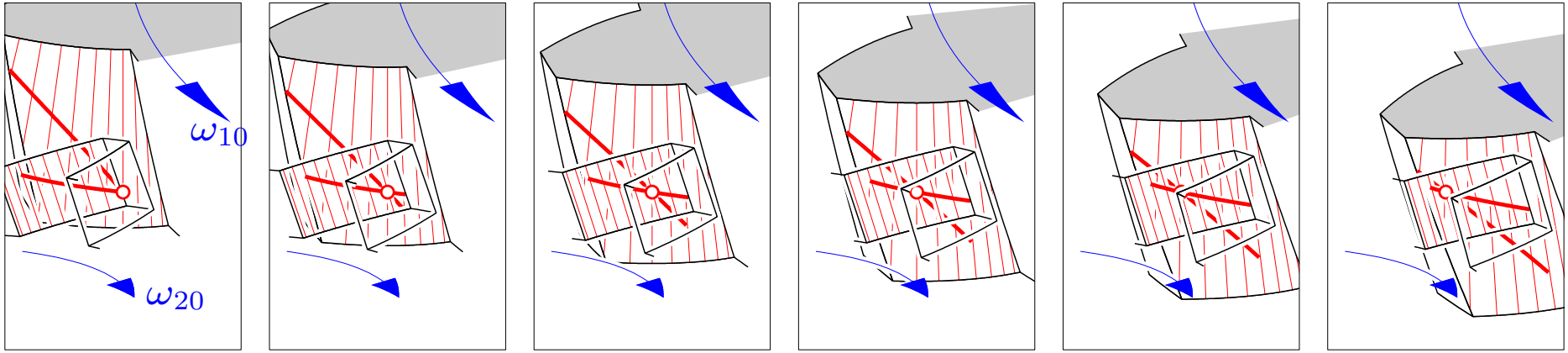
Kontrolle des Flankenspiels



$\varphi_{10} = 0°$ $\varphi_{10} = 3.6°$ $\varphi_{10} = 7.2°$ $\varphi_{10} = 10.8°$ $\varphi_{10} = 14.4°$ $\varphi_{10} = 18.0°$

verschiedene Positionen der Flankenflächen; e ist die Eingriffsnormale.
Intervall für den Antriebswinkel $\Delta\varphi_{10} = 3.6°$,
Intervall für den Abtriebswinkel $\Delta\varphi_{20} = -2.4°$.

Kontrolle der Punktberührung



$\varphi_{10} = 0°$ $\varphi_{10} = 3.6°$ $\varphi_{10} = 7.2°$ $\varphi_{10} = 10.8°$ $\varphi_{10} = 14.4°$ $\varphi_{10} = 18.0°$

verschiedene Positionen der Flankenflächen zusammen mit den effektiven Relativbahnen, *in Richtung der Eingriffsnormalen* e *betrachtet.*
Das zweite Rad ist als Drahtmodell dargestellt.

Literatur

- M. Husty, A. Karger, H. Sachs, W. Steinhilper: *Kinematik und Robotik*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1997.
- J. Phillips: *General Spatial Involute Gearing*. Springer Verlag, New York 2003, 498 p.
- H. Stachel: *Instantaneous spatial kinematics and the invariants of the axodes*. Proc. Ball 2000 Symposium, Cambridge 2000, no. 23, 14 p.
- H. Stachel: *On Spatial Involute Gearing*. Proc. 6th ICAI, Eger/Hungary, 2004 (to appear).
- H. Stachel: *On Jack Phillips' Spatial Involute Gearing*. Proc. 11th ICGG, Guangzhou / China, 2004, 43–48.