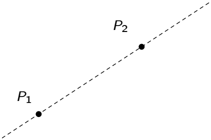
Mathematischer Zugang zum Papierfalten

Georg Eberharter

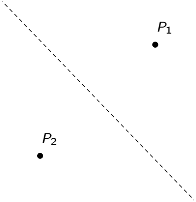
9. November 2017

Axiome

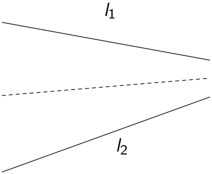
Axiome



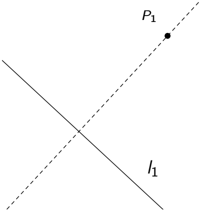
Axiom $O1$



Axiom $O2$

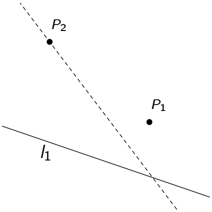


Axiom $O3$

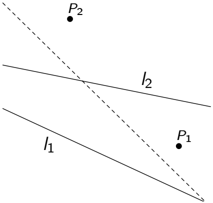


Axiom $O4$

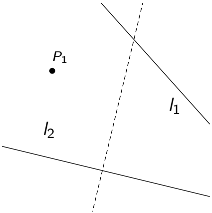
Axiome



Axiom $O5$

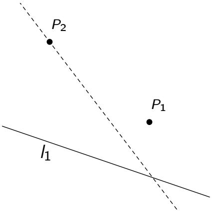


Axiom $O6$

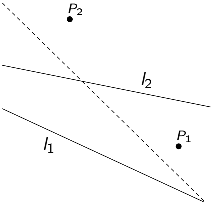


Axiom $O7$

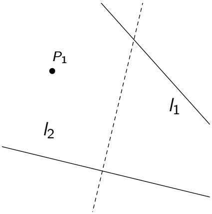
Axiome



Axiom $O5$



Axiom $O6$



Axiom $O7$

Es können keine weiteren *Axiome* gefunden werden.

Anwendung der Axiome

Gegeben:

Quadrat mit Ecken A, B, C, D und Seiten a, b, c, d

Gerade g

Gesucht:

Dreiteilung des spitzen Winkels $\angle(a, g)$

Anwendung der Axiome

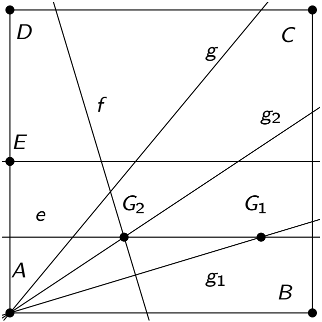
Gegeben:

Quadrat mit Ecken A, B, C, D und Seiten a, b, c, d

Gerade g

Gesucht:

Dreiteilung des spitzen Winkels $\angle(a, g)$



Lokale Eigenschaften von flachen Faltungen

Lokale Eigenschaften von flachen Faltungen

Satz von Maekawa

Sei ein Faltmuster mit nur einem Knoten flach faltbar und sei M die Anzahl der Bergkanten und V die Anzahl der Talkanten. Dann gilt:

$$M - V = \pm 2$$

Lokale Eigenschaften von flachen Faltungen

Satz von Kawasaki

Sei ein Faltmuster mit einem Knoten und $2m$ Kanten gegeben. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}$ der Reihe nach die Winkel zischen den Kanten. Dann gilt:

$$\text{Das Faltmuster ist flach faltbar} \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_{2m} = 0$$

Fold-and-Cut

Fold-and-Cut

Fragestellung

Ist es möglich, für jeden planaren Graphen G mit geraden Kanten ein flach faltbares Faltmuster zu finden, sodass im gefalteten Zustand der Graph G zu einer Strecke zusammenfällt?

Fold-and-Cut

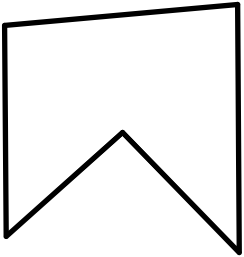
Fragestellung

Ist es möglich, für jeden planaren Graphen G mit geraden Kanten ein flach faltbares Faltmuster zu finden, sodass im gefalteten Zustand der Graph G zu einer Strecke zusammenfällt?

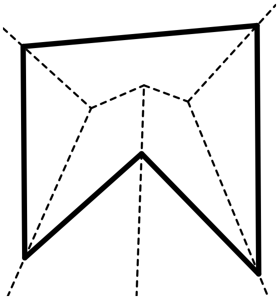
Lösungsansatz

Straight-Skeleton-Methode

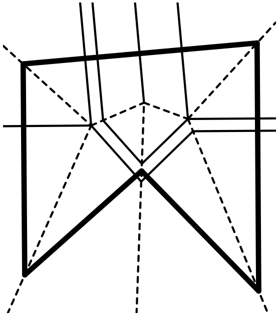
Straight-Skeleton-Methode



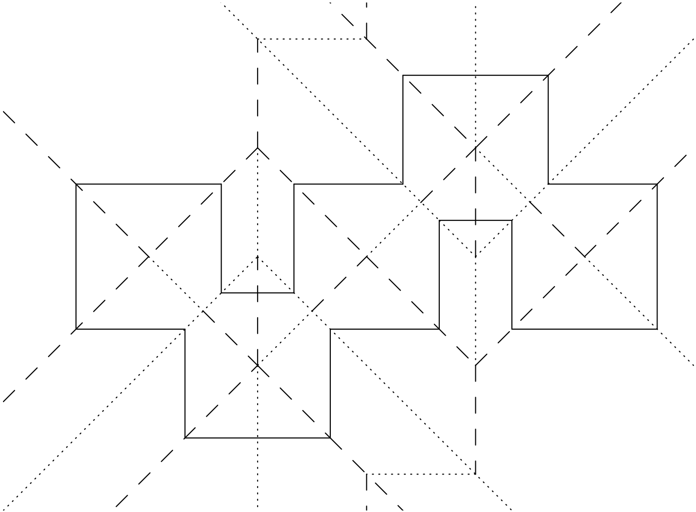
Straight-Skeleton-Methode



Straight-Skeleton-Methode



Faltmuster TU-Graz



Es werden Flächen betrachtet, welche stückweise C^2 sind.

Es werden Flächen betrachtet, welche stückweise C^2 sind.

- Halbkante, Halbecke
- Kante, Ecke
- Fläche ohne Kanten

Es werden Flächen betrachtet, welche stückweise C^2 sind.

- Halbkante, Halbecke
- Kante, Ecke
- Fläche ohne Kanten

Eigenschaften von Halbkanten

Jede Halbkante in einer Fläche ohne Kanten ist ein Geradenstück.

Eigenschaften von Halbecken

Eine Fläche ohne Kanten hat keine Halbecken im Inneren.

Struktursatz für abwickelbare Flächen ohne Kanten

Jeder innere Punkt einer abwickelbaren Fläche ohne Kanten hat eine Umgebung, die eine torsale Regelfläche ist. Die Fläche kann durch

$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{c}(s) + t\delta(s)$$

parametrisiert werden. Wobei $\mathbf{c}$ eine C^1-Funktion und δ eine C^0-Funktion ist.

Definitionen

Stück Papier	offene, ebene (beschränkte) Fläche in der $[x, y]$-Ebene
Faltlinie	Kurve in einem Stück Papier
Ecken	Endpunkte von Faltlinien
Faltpunkt	Punkt in einer Faltlinie
ordentliche Faltung	Isometrische Einbettung des Stück Papieres im $\mathbb{R}^3$
	Bild ist eine Fläche mit Kanten
	Faltmuster wird auf die Kanten abgebildet
Kegelerzeugende	Erzeugende mit gemeinsamen Endpunkt

Lemma

Eine gekrümmte Faltlinie wird auf eine Raumkurve gefaltet, welche keine geraden Stücke enthält.

Lemma

Eine gekrümmte Faltlinie wird auf eine Raumkurve gefaltet, welche keine geraden Stücke enthält.

Lemma

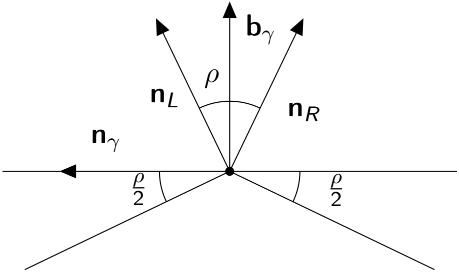
Falls ein Faltpunkt kegelfrei ist, dann hat er auf jeder Seite höchstens ein flaches Gebiet.

Für kegelfreie Punkte kann ein linker und rechter Normalvektor definiert werden.

Winkelhalbierungs-Eigenschaft

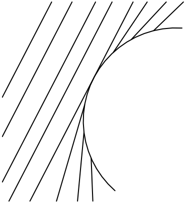
Satz

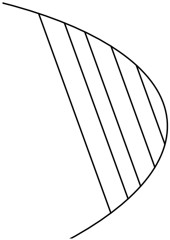
Für einen kegelfreien C^2-Punkt $\gamma(s)$ auf einer gekrümmten, gefalteten Kante gilt: Der Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ der Kurve γ ist winkelhalbierend zum linken Normalvektor $\mathbf{n}_L(s)$ und zum rechten Normalvektor $\mathbf{n}_R(s)$.



Folgerung

Für einen kegelfreien Punkt $\gamma(s)$ auf einer gefalteten Kante γ mit nicht verschwindender Krümmung an der Stelle s kann die Erzeugende der angrenzenden gefalteten Facette nicht tangential an γ sein.





Beispiele