Kugelpackungen

Michael Kerber

Strobl, Nov 12, 2016

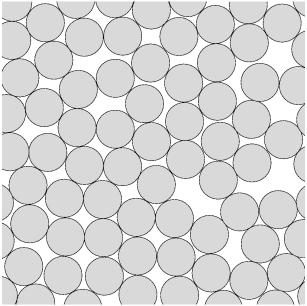
Inhalt

- Kreispackungen (2D)
- Kugelpackungen (3D)
- Aktuelle Forschungsergebnisse (kurz)

SpigelOnline 28.Aug 2016

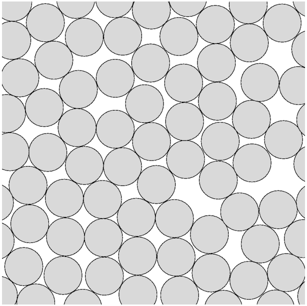
http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/vier-mathematiker-kochen-spaghetti-raetsel-der-woche-a-1109584.html

Packungen im $\mathbb{R}^2$

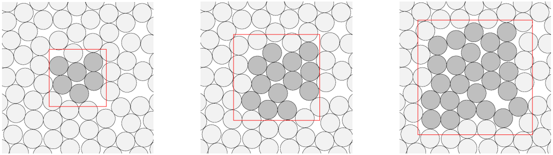


Packungsdichte: Welcher Anteil der Ebene ist durch die Kreise überdeckt?

Packungen im $\mathbb{R}^2$

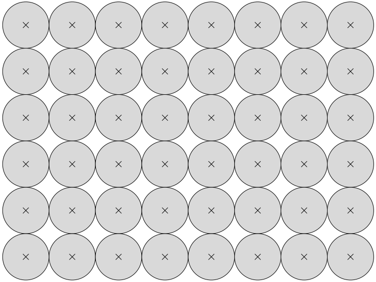


Packungsdichte: Welcher Anteil der Ebene ist durch die Kreise überdeckt?

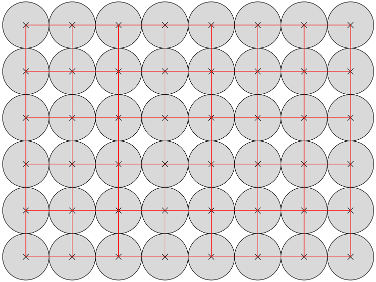


Beispiel 1: Das ganzzahlige Gitter

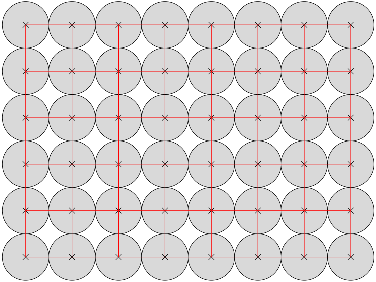
Beispiel 1: Das ganzzahlige Gitter



Beispiel 1: Das ganzzahlige Gitter

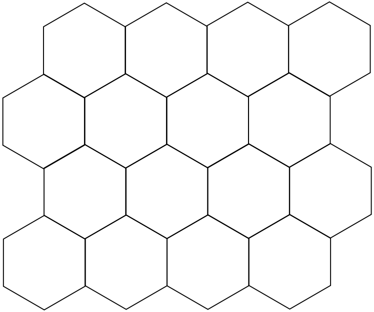


Beispiel 1: Das ganzzahlige Gitter

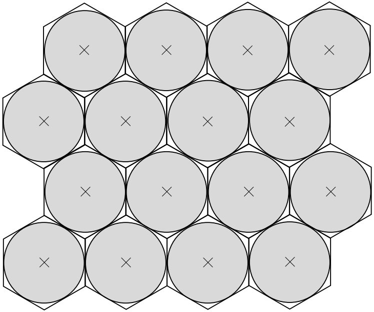


$$\text{Dichte} = \frac{\text{überd. Flächeninh. im Quadrat}}{\text{Flächeninh. von Quadrat}} = \frac{\pi}{4} \approx 78,5\%$$

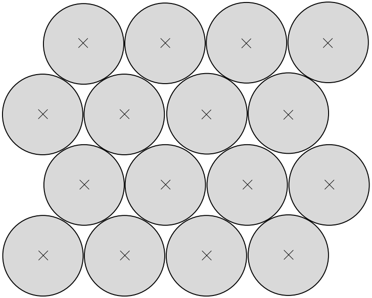
Beispiel 2: Das hexagonale Gitter



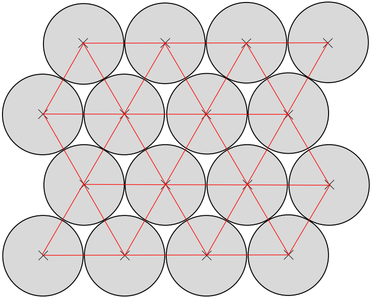
Beispiel 2: Das hexagonale Gitter



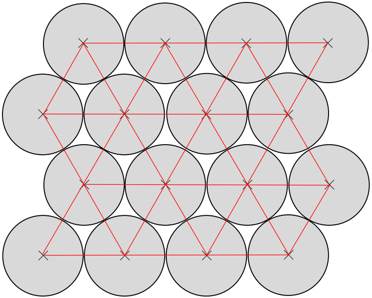
Beispiel 2: Das hexagonale Gitter



Beispiel 2: Das hexagonale Gitter



Beispiel 2: Das hexagonale Gitter



$$\text{Dichte} = \frac{\pi/8}{\sqrt{3}/4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,7\%$$

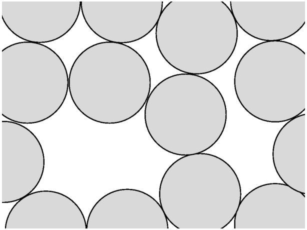
Optimalität

Theorem [Thue 1910, Fejes Toth 1940, Chang, Wang 2010]:
Die hexagonale Packung ist die beste Packung in der Ebene (d.h., mit maximaler Dichte $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$).

Optimalität

Theorem [Thue 1910, Fejes Toth 1940, Chang, Wang 2010]:
Die hexagonale Packung ist die beste Packung in der Ebene (d.h., mit maximaler Dichte $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$).

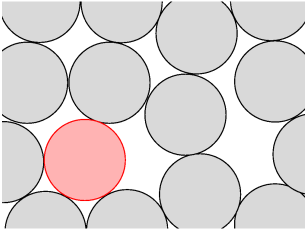
(1) Eine beste Packung ist saturiert.



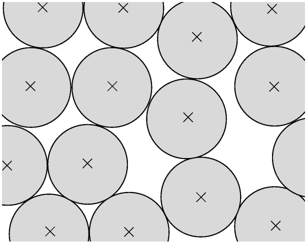
Optimalität

Theorem [Thue 1910, Fejes Toth 1940, Chang, Wang 2010]:
Die hexagonale Packung ist die beste Packung in der Ebene (d.h., mit maximaler Dichte $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$).

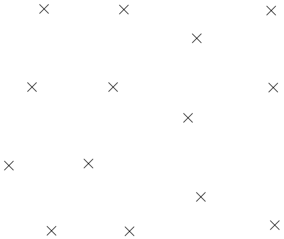
(1) Eine beste Packung ist saturiert.



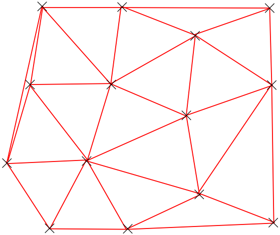
Delaunay-Triangulierung



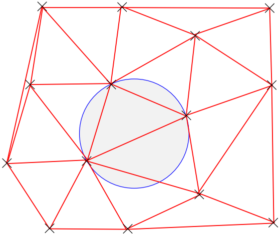
Delaunay-Triangulierung



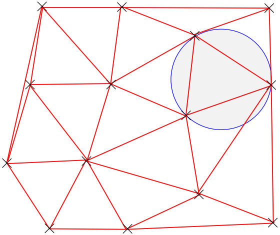
Delaunay-Triangulierung



Delaunay-Triangulierung

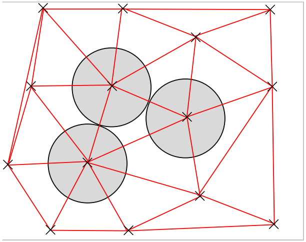


Delaunay-Triangulierung



(2) Es gibt eine Zerlegung in Dreiecke, so dass der Umkreis jedes Dreiecks keinen Kreismittelpunkt im Inneren enthält.

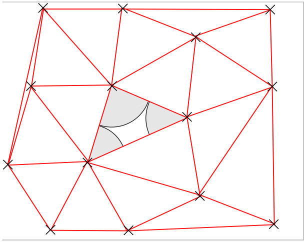
Delaunay-Triangulierung



(2) Es gibt eine Zerlegung in Dreiecke, so dass der Umkreis jedes Dreiecks keinen Kreismittelpunkt im Inneren enthält.

Es reicht z.z.: Die Dichte in jedem Dreieck ist $\leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Delaunay-Triangulierung

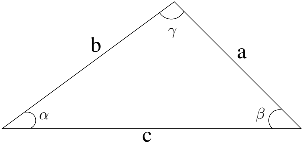


(2) Es gibt eine Zerlegung in Dreiecke, so dass der Umkreis jedes Dreiecks keinen Kreismittelpunkt im Inneren enthält.

Es reicht z.z.: Die Dichte in jedem Dreieck ist $\leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Es reicht z.z.: Die Fläche jedes Dreiecks ist $\geq \sqrt{3}$.

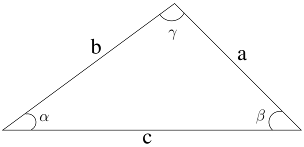
Flächeninhalt von Delaunaydreiecken



- Sei γ der grösste Winkel.
- Wenn $\frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{3}$, dann ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{a}_{\geq 2} \cdot \underbrace{b}_{\geq 2} \cdot \underbrace{\sin\gamma}_{\geq \frac{\sqrt{3}}{2}} \geq \sqrt{3}$$

Flächeninhalt von Delaunaydreiecken

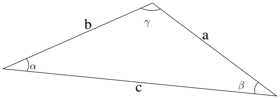


- Sei γ der grösste Winkel.
- Wenn $\frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{3}$, dann ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{a}_{\geq 2} \cdot \underbrace{b}_{\geq 2} \cdot \underbrace{\sin\gamma}_{\geq \frac{\sqrt{3}}{2}} \geq \sqrt{3}$$

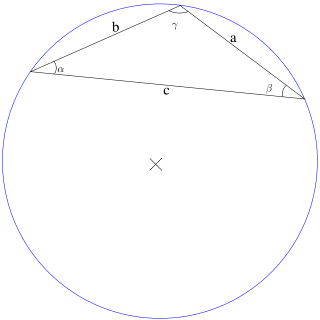
Es reicht z.z.: Der grösste Winkel im Delaunaydreieck ist höchstens $\frac{2\pi}{3}$.

Winkel in Delaunaydreiecken



- Sei $\gamma > \frac{2\pi}{3}$
- Dann ist ein Winkel (z.B. α) $< \frac{\pi}{6}$

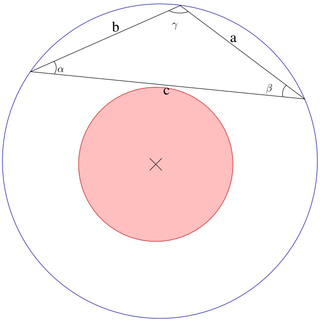
Winkel in Delaunaydreiecken



- Sei $\gamma > \frac{2\pi}{3}$
- Dann ist ein Winkel (z.B. α) $< \frac{\pi}{6}$
- Nach dem Sinussatz ist der Umkreisradius

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \geq \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

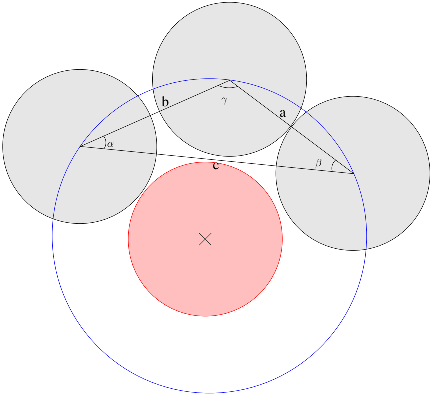
Winkel in Delaunaydreiecken



- Sei $\gamma > \frac{2\pi}{3}$
- Dann ist ein Winkel (z.B. α) $< \frac{\pi}{6}$
- Nach dem Sinussatz ist der Umkreisradius

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \geq \frac{2}{2\cdot\frac{1}{2}} = 2$$

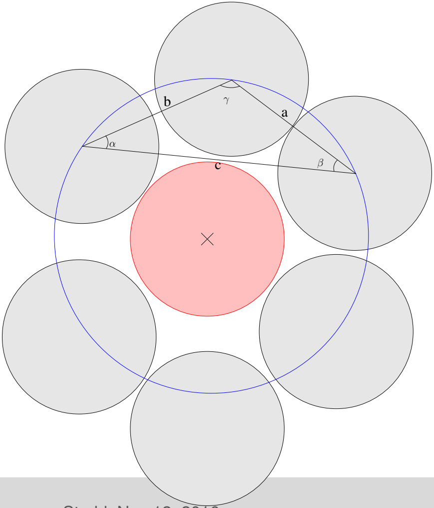
Winkel in Delaunaydreiecken



- Sei $\gamma > \frac{2\pi}{3}$
- Dann ist ein Winkel (z.B. α) $< \frac{\pi}{6}$
- Nach dem Sinussatz ist der Umkreisradius

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \geq \frac{2}{2\cdot\frac{1}{2}} = 2$$

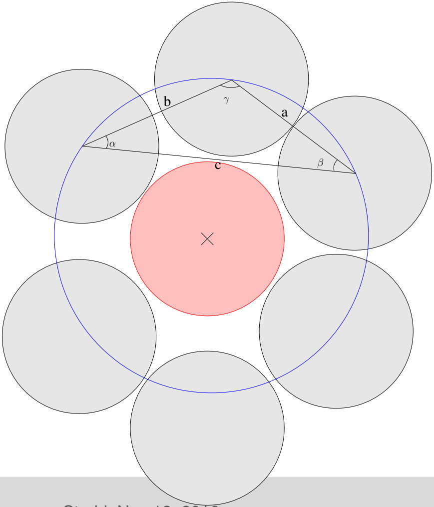
Winkel in Delaunaydreiecken



- Sei $\gamma > \frac{2\pi}{3}$
- Dann ist ein Winkel (z.B. α) $< \frac{\pi}{6}$
- Nach dem Sinussatz ist der Umkreisradius

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} \geq \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

Winkel in Delaunaydreiecken



- Sei $\gamma > \frac{2\pi}{3}$
- Dann ist ein Winkel (z.B. α) $< \frac{\pi}{6}$
- Nach dem Sinussatz ist der Umkreisradius

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} \geq \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

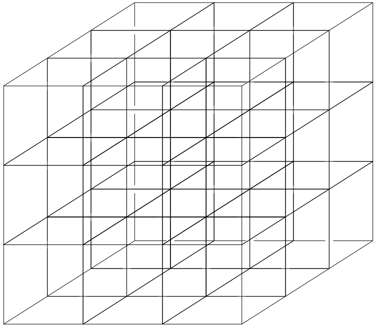
- Packung nicht saturiert. Widerspruch

Kugelpackungen

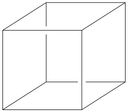
siehe z.B.
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kugeln_Baumaterial/Kugeln_Baumaterial.htm

Finde die Packung mit maximaler Dichte.

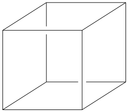
Ganzzahliges Gitter im $\mathbb{R}^3$



Ganzzahliges Gitter im $\mathbb{R}^3$

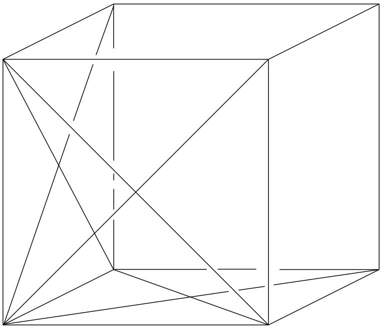


Ganzzahliges Gitter im $\mathbb{R}^3$

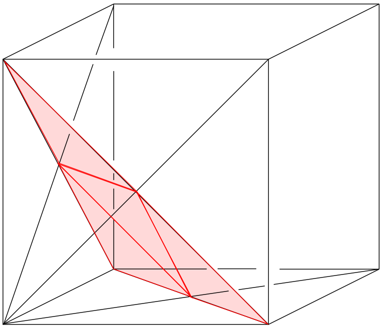


Dichte: $\frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2})^3}{1} = \frac{\pi}{6} \approx 52,3\%$

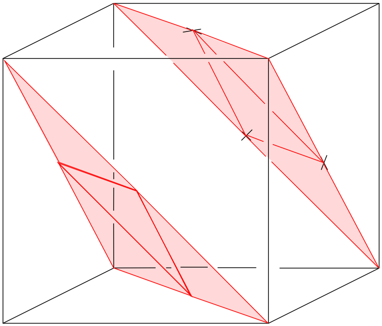
Das FCC Gitter



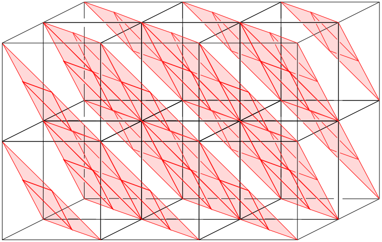
Das FCC Gitter



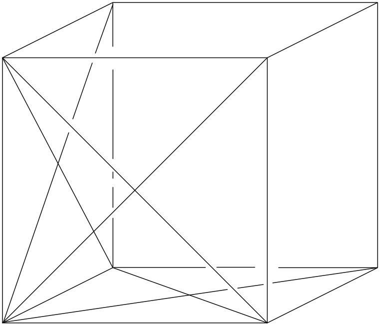
Das FCC Gitter



Das FCC Gitter



Das FCC Gitter



Dichte: $\dfrac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{2}}{4})^3}{1} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74,0\%$

Optimalität

Kepler'sche Vermutung (1611): Die FCC Packung maximiert die Dichte unter allen Kugelpackungen.

Optimalität

Kepler'sche Vermutung (1611): Die FCC Packung maximiert die Dichte unter allen Kugelpackungen.

reguläre Packung irreguläre Packung

Optimalität

Gauss (1831): Die FCC Packung maximiert die Dichte unter allen **regulären** Kugelpackungen.

Optimalität

Gauss (1831): Die FCC Packung maximiert die Dichte unter allen **regulären** Kugelpackungen.

Hales (2005): Die FCC Packung maximiert die Dichte unter allen Kugelpackungen.

Optimalität

Gauss (1831): Die FCC Packung maximiert die Dichte unter allen **regulären** Kugelpackungen.

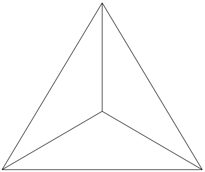
Hales (2005): Die FCC Packung maximiert die Dichte unter allen Kugelpackungen.

Hales' Beweis wurde 2014 von einem formalen Beweissystem verifiziert.

Ein Gegenbeispiel?

Hales (2005): Keine Packung erreicht eine Dichte grösser als $74,1\%$.

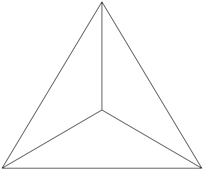
regulärer Tetraeder



Ein Gegenbeispiel?

Hales (2005): Keine Packung erreicht eine Dichte grösser als $74,1\%$.

regulärer Tetraeder

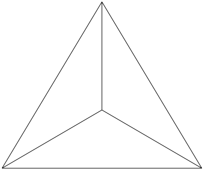


Zusammen ergeben die 4 Kugelstücke $\alpha \approx 17,5\%$ einer ganzen Kugel (Dieder- und Raumwinkel).

Ein Gegenbeispiel?

Hales (2005): Keine Packung erreicht eine Dichte grösser als $74,1\%$.

regulärer Tetraeder



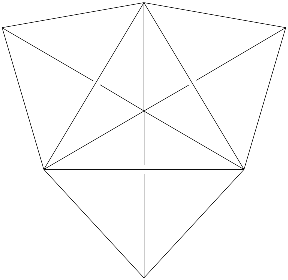
Zusammen ergeben die 4 Kugelstücke $\alpha \approx 17,5\%$ einer ganzen Kugel (Dieder- und Raumwinkel).

$$\text{Dichte:} \frac{\alpha \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}} \approx 78,0\%$$

Ein Gegenbeispiel?

Hales (2005): Keine Packung erreicht eine Dichte grösser als $74,1\%$.

regulärer Tetraeder



Zusammen ergeben die 4 Kugelstücke $\alpha \approx 17,5\%$ einer ganzen Kugel (Dieder- und Raumwinkel).

$$\text{Dichte:} \frac{\alpha \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}} \approx 78,0\%$$

Packungen in *d* Dimensionen

Packungen in *d* Dimensionen

Korkine, Zolotareff (1872): Das *Schachbrettgitter* ist die beste reguläre Packung in $d = 4$.

Packungen in d Dimensionen

Korkine, Zolotareff (1872): Das *Schachbrettgitter* ist die beste reguläre Packung in $d = 4$.

Korkine, Zolotareff (1879): Optimale reguläre Packung in $d = 5$.

Packungen in d Dimensionen

Korkine, Zolotareff (1872): Das *Schachbrettgitter* ist die beste reguläre Packung in $d = 4$.

Korkine, Zolotareff (1879): Optimale reguläre Packung in $d = 5$.

Blichfeldt (1925-35): Optimale reguläre Packung in $d = 6$, $d = 7$, $d = 8$.

Packungen in d Dimensionen

Korkine, Zolotareff (1872): Das *Schachbrettgitter* ist die beste reguläre Packung in $d = 4$.

Korkine, Zolotareff (1879): Optimale reguläre Packung in $d = 5$.

Blichfeldt (1925-35): Optimale reguläre Packung in $d = 6$, $d = 7$, $d = 8$.

Beste (allgemeine) Packung nur bekannt für $d = 2, 3$.

Packungen in *d* Dimensionen

Viazovska (2016): Keine Packung in $\mathbb{R}^8$ hat eine Dichte grösser als $\frac{\pi^4}{384} \approx 0,254$, die Dichte der besten regulären Packung in $\mathbb{R}^8$.

Packungen in d Dimensionen

Viazovska (2016): Keine Packung in $\mathbb{R}^8$ hat eine Dichte grösser als $\frac{\pi^4}{384} \approx 0,254$, die Dichte der besten regulären Packung in $\mathbb{R}^8$.

Cohn, Elkies (2003): Jede Packung (in $\mathbb{R}^8$) hat eine Dichte von höchstens $\frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \cdot \frac{\pi^4}{30720}$ für geeignete f.

Packungen in *d* Dimensionen

Viazovska (2016): Keine Packung in $\mathbb{R}^8$ hat eine Dichte grösser als $\frac{\pi^4}{384} \approx 0,254$, die Dichte der besten regulären Packung in $\mathbb{R}^8$.

Cohn, Elkies (2003): Jede Packung (in $\mathbb{R}^8$) hat eine Dichte von höchstens $\frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \cdot \frac{\pi^4}{30720}$ für geeignete f. Insbesondere hat jede Packung höchstens Dichte $1,00000000001 \cdot \frac{\pi^4}{384}$.

Packungen in *d* Dimensionen

Viazovska (2016): Keine Packung in $\mathbb{R}^8$ hat eine Dichte grösser als $\frac{\pi^4}{384} \approx 0,254$, die Dichte der besten regulären Packung in $\mathbb{R}^8$.

Cohn, Elkies (2003): Jede Packung (in $\mathbb{R}^8$) hat eine Dichte von höchstens $\frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \cdot \frac{\pi^4}{30720}$ für geeignete f.
Insbesondere hat jede Packung höchstens Dichte $1,00000000001 \cdot \frac{\pi^4}{384}$.
Viazovska konstruiert ein explizites f, welches die Schranke erreicht (mit Modulformen und komplizierten numerischen Berechnungen).

Packungen in d Dimensionen

Viazovska et al. (2016): Das *Leech* Gitter liefert die optimale Packung in $\mathbb{R}^{24}$.

Verallgemeinerte Packungen

Beste Packung mit (kleinem)
Überlapp der Kugeln?

[Iglesias-Ham, K., Uhler 2014]

Verallgemeinerte Packungen

Beste Packung mit (kleinem) Überlapp der Kugeln?

[Iglesias-Ham, K., Uhler 2014]

Beste Packung mit Überlapp bzgl. **einfach** überdeckten Bereichs?

[Edelsbrunner, Iglesias-Ham 2016]