36. Fortbildungstagung für Geometrie
in Strobl am Wolfgangsee
05. bis 07. Nov. 2015

Über das descartessche Kreistheorem

Klaus Holländer, Giessen (D)

Technische Hochschule Mittelhessen (THM) und StudiumPlus

Ablauf:

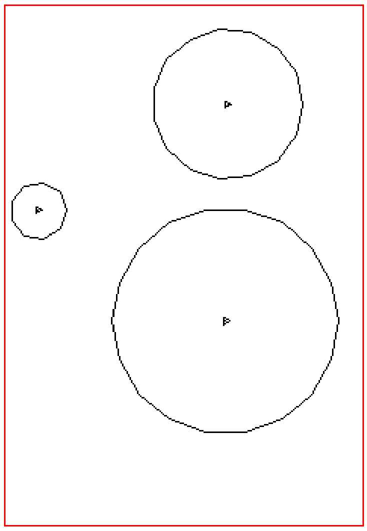
1. Das apollonische Berührungsproblem
2. Das descartessche Problem
3. Vom 2-dimensionalen zum 3-dimensinalen Problem
4. Von der Tetraederformel zum Kreistheorem von Descartes
5. Ergänzungen

E-Mail: klaus.hollaender@mni.thm.de

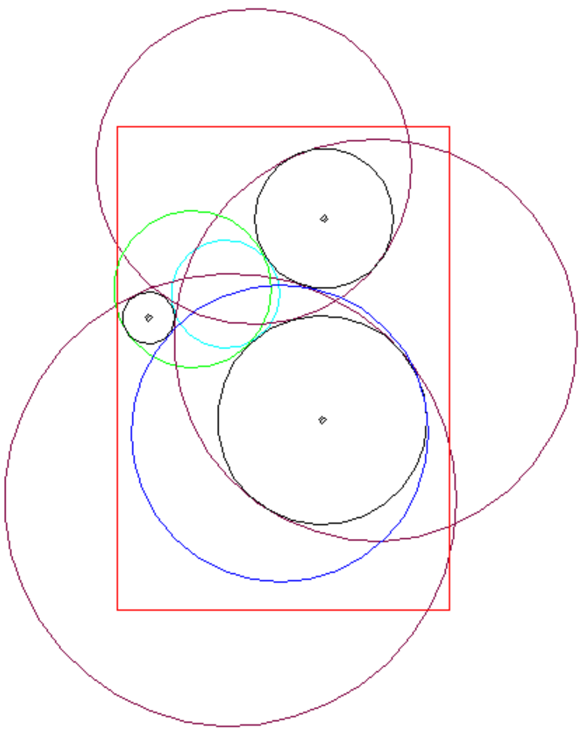
1. Das apollonische Berührungsproblem

Gegeben sind drei beliebige Kreise

Gesucht sind alle Kreise, die die gegebenen Kreise berühren



Im Allgemeinen gibt es 8 verschiedene Berührkreise



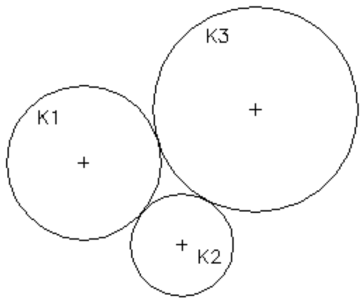
Methoden zur Konstruktion der Berührkreise:

- **mit Zirkel und Lineal (Gergonne) [2]**
- **Inversion am Kreis [6]**
- **zyklographische Methode [4]**
- **Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems (GPS) [3]**

2. Das descartessche Problem

- Gegeben sind drei sich gegenseitig von außen berührende Kreise

- Gesucht sind die Kreise, die die gegebenen Kreise berühren



Gegeben: r_1 r_2 r_3

$$2\cdot\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2$$

Krümmung: $k_i = 1/r_i$ mit $i = 1,2,3$ bzw. $k = 1/r$, $k = \frac{y''}{\left[1+y'^2\right]^{1.5}}$

Die Krümmung kann positiv oder negativ sein.

Gerade: $r = \infty$ und $k = 0$

$$\boxed{2\cdot(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k)^2 .}$$

Diese algebraische Gleichung wird descartessches Kreistheorem genannt. Descartes erwähnt dieses Theorem erstmals 1643 in einem Brief an die Prinzessin Elisabeth von Böhmen in der Form:

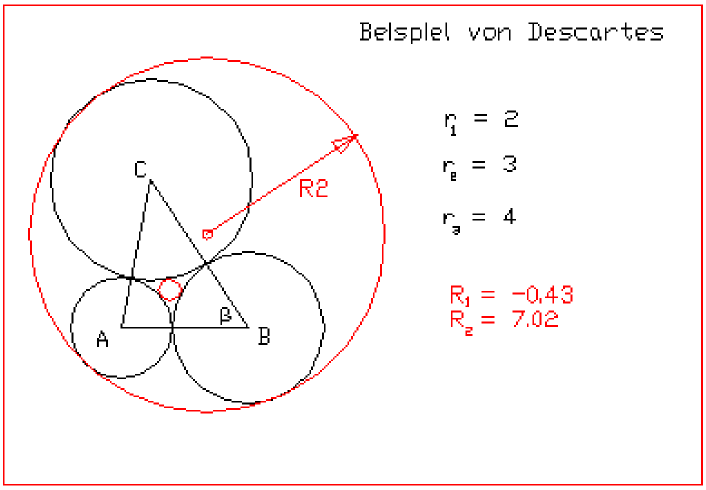
$$\begin{array}{ll} \quad ddeeff \;= & 2deffxx + 2deeffx \\ + ddeexx & + 2deefxx + 2ddeffx \\ + ddffxx & + 2ddefxx + 2ddeefx \end{array}$$

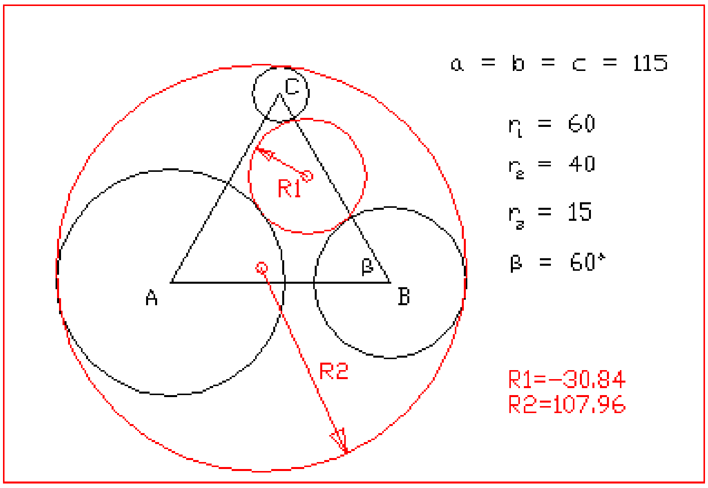
mit $d = r_1$, $e = r_2$, $f = r_3$ und $x = r$

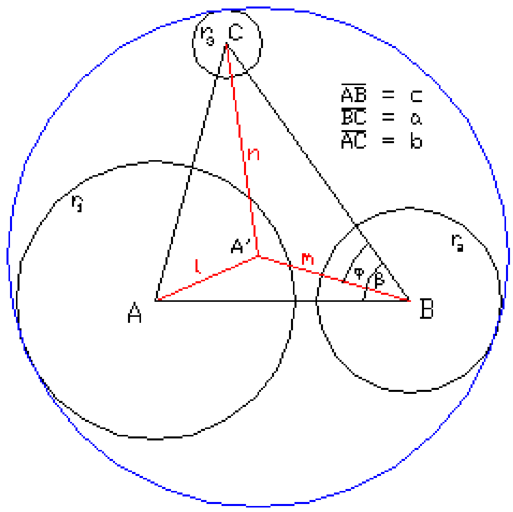
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\cdot\left[(r-r_1)^2-\overline{AB}^2-(r-r_2)^2\right]^2+$$

$$2\cdot\cos\boldsymbol{\beta}\cdot\left[(r-r_1)^2-\overline{AB}^2-(r-r_2)^2\right]\cdot\left[\overline{BC}^2+(r-r_2)^2-(r-r_3)^2\right]+$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\left[\overline{BC}^2+(r-r_2)^2-(r-r_3)^2\right]^2=4\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot(r-r_2)^2\cdot\sin^2\boldsymbol{\beta}$$





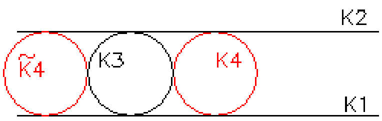


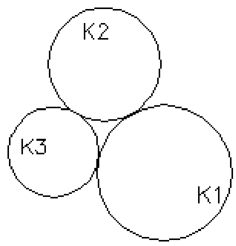
$$l = r - r_1 \quad (1)$$

$$m = r - r_2 \quad (2)$$

$$n = r - r_3 \quad (3)$$

Einige Sonderfälle:



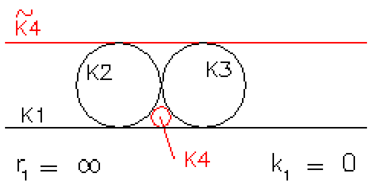


$r_1 = \infty$ $\qquad k_1 = 0$

$r_2 = \infty$ $\qquad k_2 = 0$

$r_3 = 2$ $\qquad k_3 = 0.5$

$r_4 = \tilde{r}_4 = 2$



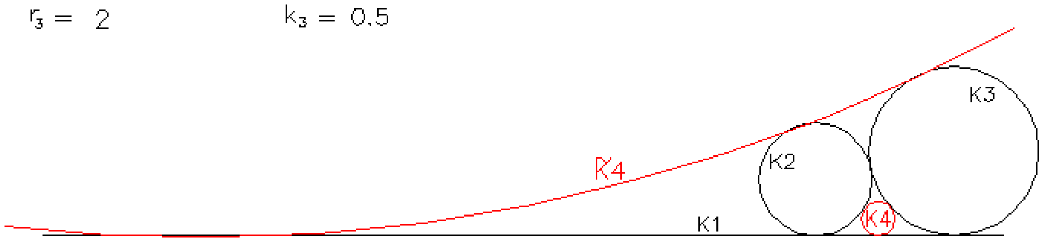
$r_1 = \infty$ $\qquad k_1 = 0$

$r_2 = 2$ $\qquad k_2 = 0.5$

$r_3 = 2$ $\qquad k_3 = 0.5$

$\tilde{r}_4 = \infty$

$r_4 = 0.5$



$r_1 = \infty$ $\qquad k_1 = 0$

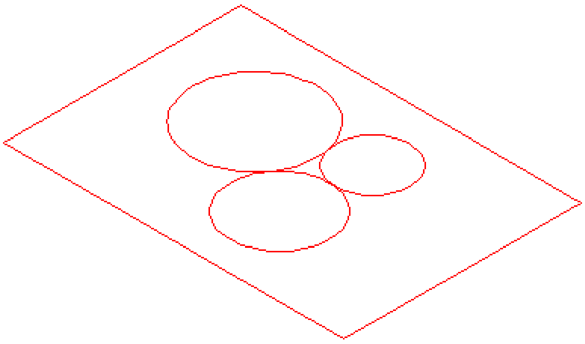
$r_2 = 2$ $\qquad k_2 = 0.5$

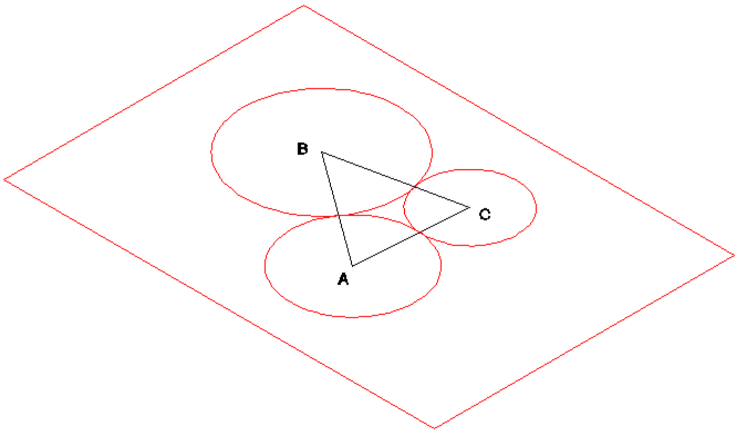
$r_3 = 3$ $\qquad k_3 = 0.333$

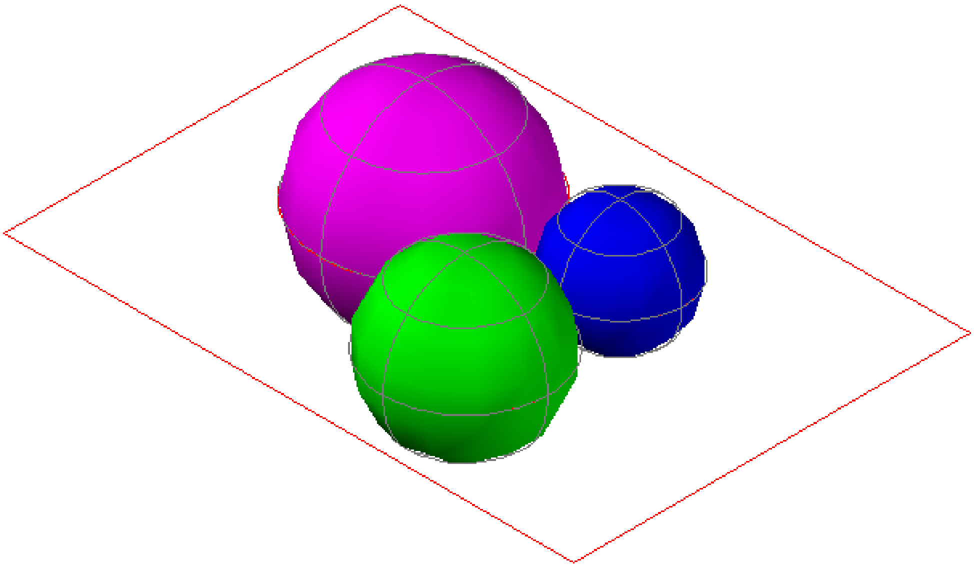
$r_4 = 0.606$

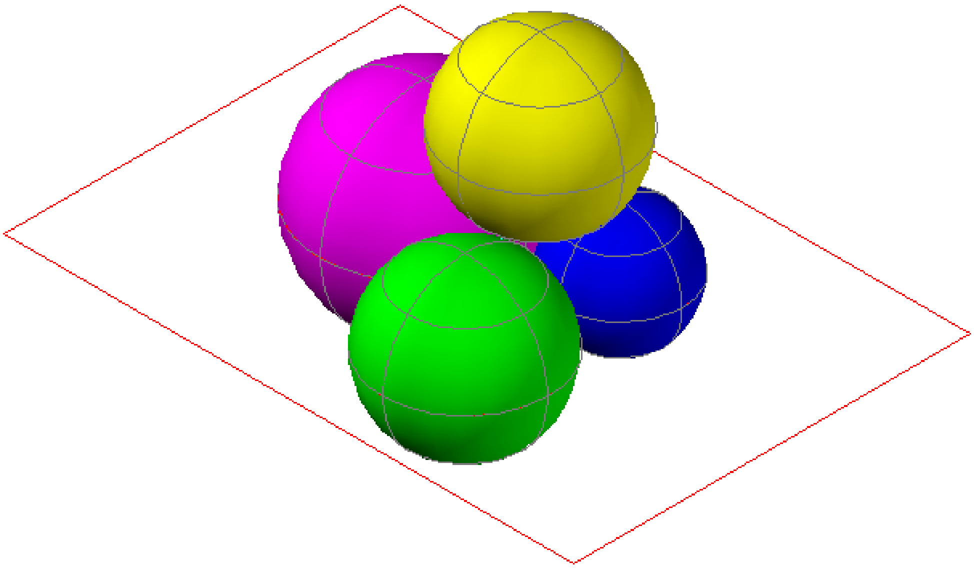
$\tilde{r}_4 = 59.277$

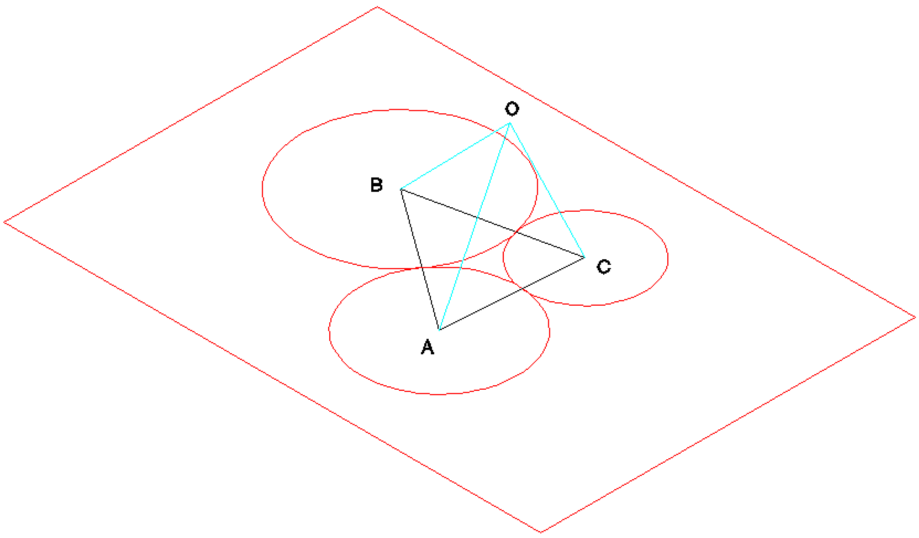
3. Vom 2-dimensionalen zum 3-dimensionalen Problem

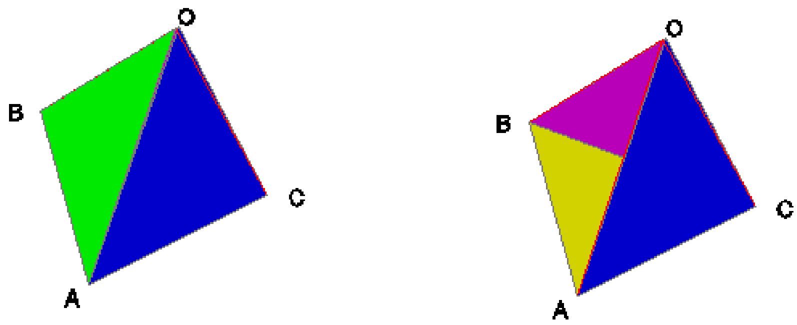












$\overline{AO} = a = r_1 + r$, $\overline{BO} = b = r_2 + r$, $\overline{CO} = c = r_3 + r$

$\overline{AB} = s = r_1 + r_2$, $\overline{BC} = p = r_2 + r_3$, $\overline{AC} = q = r_3 + r_1$

4. Vom Tetraedervolumen zum Kreistheorem von Descartes

Das Volumen eines Tetraeders mit den Kanten a, b, c, p, q und s kann mit der Cayley-Menger-Formel [1,5]berechnet werden:

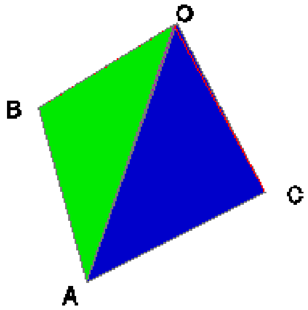
$$V^2 = \frac{1}{288} \cdot \begin{vmatrix} 0 & s^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ s^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{288} \cdot |M| \qquad (1)$$

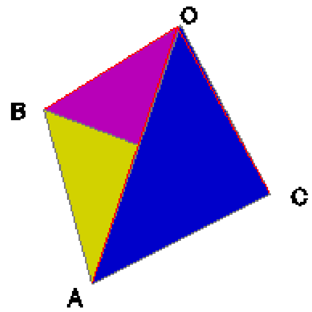
Mit den Kantenlängen: $a = r + r_1$, $b = r + r_2$, $c = r + r_3$, $p = r_2 + r_3$, $q = r_1 + r_3$, $s = r_1 + r_2$ erhält man die Determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & (r_1+r_2)^2 & (r_1+r_3)^2 & (r+r_1)^2 & 1 \\ (r_1+r_2)^2 & 0 & (r_2+r_3)^2 & (r+r_2)^2 & 1 \\ (r_1+r_3)^2 & (r_2+r_3)^2 & 0 & (r+r_3) & 1 \\ (r+r_1)^2 & (r+r_2)^2 & (r+r_3) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Das Softwaresystem MATHEMATICA liefert für |M| den Ausdruck:

$$|M| = -32 \cdot r_1^2 r_2^2 r^2 + 64 \cdot r_1^2 r_2 r_3 r^2 + 64 \cdot r_1 r_2^2 r_3 r^2 + 64 \cdot r_1^2 r_2^2 r_3 r - 32 \cdot r_1^2 r_3^2 r^2 + 64 \cdot r_1 r_2 r_3^2 r^2 +$$
$$64 \cdot r_1^2 r_2 r_3^2 r - 32 \cdot r_2^2 r_3^2 r^2 + 64 \cdot r_1 r_2^2 r_3^2 r - 32 \cdot r_1^2 r_2^2 r_3^2$$





Wird der Radius r nun so gewählt, dass die Kugelmittelpunkte A, B, C und O in einer Ebene liegen, dann ist das Tetraedervolumen V = 0 und folglich auch die Determinante: |M|=0. Aus obiger Gleichung folgt dann nach Division mit 32 das descartessche Kreistheorem.

Die Gleichung |M| = 0

Mit Hilfe der Determinantengesetze wird die Gleichung |M| = 0 umgeformt bzw. vereinfacht:

1. Addition eines Vielfachen der Elemente einer Reihe (Zeile oder Spalte) zu einer parallelen Reihe ändert den Wert der Determinante nicht.
2. Multiplikation einer Determinante mit einem Faktor k kann durch Multiplikation einer beliebigen Reihe mit dem Faktor k ausgeführt werden.

$$\begin{vmatrix} 0 & r_1^2+2r_1r_2+r_2^2 & r_1^2+2r_1r_3+r_3^2 & r^2+2rr_1+r_1^2 & 1 \\ r_1^2+2r_1r_2+r_2^2 & 0 & r_2^2+2r_1r_3+r_3^2 & r^2+2rr_2+r_2^2 & 1 \\ r_1^2+2r_1r_3+r_3^2 & r_2^2+2r_1r_3+r_3^2 & 0 & r^2+2rr_3+r_3^2 & 1 \\ r^2+2rr_1+r_1^2 & r^2+2rr_2+r_2^2 & r^2+2rr_3+r_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Mit Hilfe der Determinantengesetze kann die Gleichung (3) auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \frac{1}{r_2} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \frac{1}{r_3} \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} & \frac{1}{r} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Setzt man noch $k_i = \frac{1}{r_i}$ bzw. $k = \frac{1}{r}$ (für die Krümmung) so folgt:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & k_1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & k_2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & k_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ k_1 & k_2 & k_3 & k & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & k_1 + k_2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & k_3 - k \\ 0 & 2 & 2 & 0 & k_1 + k \\ 0 & k_1 + k_2 & k_1 + k_3 & k_1 + k & k_1^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

$$4\left[k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2\right] = 8\left[kk_1 + kk_2 + kk_3 + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3\right]$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2 = 2\left[kk_1 + kk_2 + kk_3 + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3\right] \qquad (7)$$

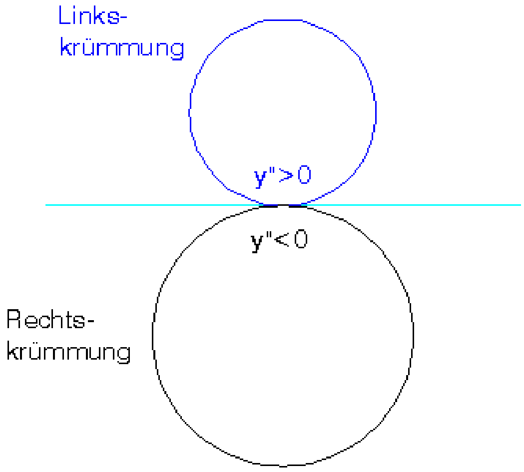
$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2 - 2\left[kk_1 + kk_2 + kk_3 + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3\right] = 0$$

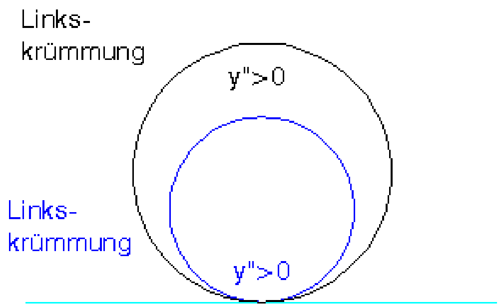
Für die Krümmungen k_1, k_2, k_3 und k gilt die nachstehende Multiplikationstafel:

$\frac{2.Faktor \rightarrow}{1.Faktor \downarrow}$	k_1	k_2	k_3	k
k_1	k_1^2	$-k_1k_2$	$-k_1k_3$	$-k_1k$
k_2	$-k_2k_1$	k_2^2	$-k_2k_3$	$-k_2k$
k_3	$-k_3k_1$	$-k_3k_2$	k_3^2	$-k_3k$
k	$-kk_1$	$-kk_2$	$-kk_3$	k^2

(8)

Die Summe aller Matrixelemente ist gleich null.





Addition von $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2$ auf beiden Seiten von (7) ergibt das **descartessche Kreistheorem**:

$$\mathbf{2\cdot(k_1^2 + k_1^2 + k_3^2 + k^2) = (k_1 + k_1 + k_3 + k^2)^2} \qquad \mathbf{(9)}$$

Der Schritt von (8) nach (9) erfolgt nach dem Schema:

$$a^2 + b^2 + x^2 = 2\cdot a\cdot b + 2\cdot a\cdot x + 2\cdot b\cdot x$$
$$a^2 + b^2 + x^2 = a^2 + b^2 + x^2$$

$$2\cdot(a^2 + b^2 + x^2) = a^2 + b^2 + x^2 + 2\cdot a\cdot b + 2\cdot a\cdot x + 2\cdot b\cdot x = (a + b + x)^2$$

6. Literatur:

[1] I.N. Bronstein u.a.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 2006.

[2] R. Haußner: Analytische Geometrie der Ebene, Sammlung Göschen Band 65, 1942.

[3] M. Joswig und T. Theobald: Algorithmische Geometrie, Vieweg Verlag Wiesbaden, 2008

[4] E. Müller und L. Krames: Vorlesungen über Darstellende Geometrie II, Leipzig und Wien, 1929.

[5] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenberger und H. Stachel: Mathematik, Springer Spektrum, Heidelberg, 2013.

[6] H. Scheid: Elemente der Geometrie, Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford,1996.

Prof. Dr. K. Holländer
THM Giessen (D)
Wiesen-Str. 14