Ebene Stewart-Gough Plattformen mit quadratischer Singularitätsfläche

PRÄSENTATION DER DIPLOMARBEIT VON
BERND AIGNER

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

BETREUER
PRIV.DOZ. MAG.RER.NAT. DR.TECHN. GEORG NAWRATIL

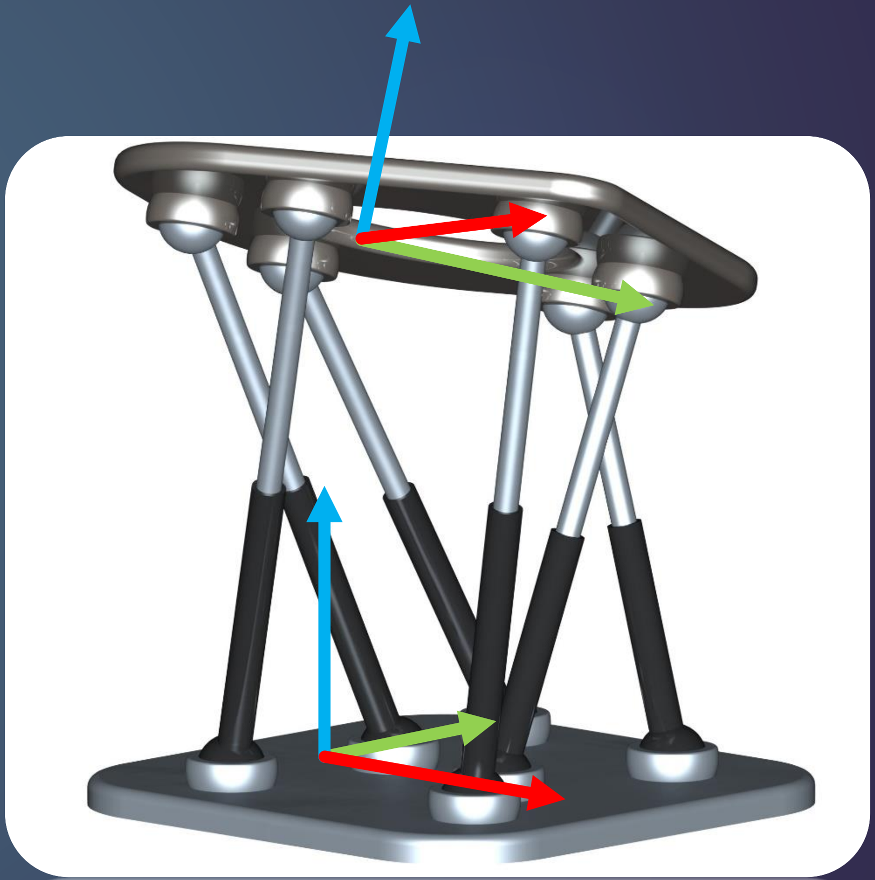
Aufbau einer Stewart-Gough Plattform

Plattform Σ mit Ankerpunkten $m_i = (a_i, b_i, c_i)^T$

$$\mathrm{m}_\mathrm{i}' = (\mathrm{a}_\mathrm{i}', \mathrm{b}_\mathrm{i}', \mathrm{c}_\mathrm{i}') = \mathbf{R}m_i + \boldsymbol{t}$$

$$h_i\colon (a_i' - A_i)^2 + (b_i' - B_i)^2 + (c_i' - C_i)^2 - d_i^2 = 0$$

Basis Σ_0 mit Ankerpunkten $M_i = (A_i, B_i, C_i)^T$



Motivation 1 - Vorwärtskinematik

$$h_i: (a_i' - A_i)^2 + (b_i' - B_i)^2 + (c_i' - C_i)^2 - d_i^2 = 0$$

Study-Parameter einer Schraubung

$(q_0 : q_1 : q_2 : q_3 : \hat{q}_0 : \hat{q}_1 : \hat{q}_2 : \hat{q}_3)$

Study-Quadrik

$$q_0\hat{q}_0 + q_1\hat{q}_1 + q_2\hat{q}_2 + q_3\hat{q}_3 = 0$$

Normierungsbedingung

$${q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = 1$$

Motivation 1 - Vorwärtskinematik

$$h_i: (a_i' - A_i)^2 + (b_i' - B_i)^2 + (c_i' - C_i)^2 - d_i^2 = 0$$

$h_i - h_j$ linear in $\hat{q}_0, \dots, \hat{q}_3$

Linearkombination $\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_6 h_6$,
welche unabhängig von $\hat{q}_0, \dots, \hat{q}_3$ sind

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 & \mathrm{a}_4 & \mathrm{a}_5 & \mathrm{a}_6 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 & \mathrm{b}_4 & \mathrm{b}_5 & \mathrm{b}_6 \\ \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 & \mathrm{A}_4 & \mathrm{A}_5 & \mathrm{A}_6 \\ \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 & \mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_4 & \mathrm{B}_5 & \mathrm{B}_6 \end{pmatrix}$$

Motivation 2 - Singularitätsfläche

Plückerkoordinaten der Manipulatorbeine

$$\underline{\boldsymbol{l}_i} = (m_i' - M_i, M_i \times \boldsymbol{l}_i)$$

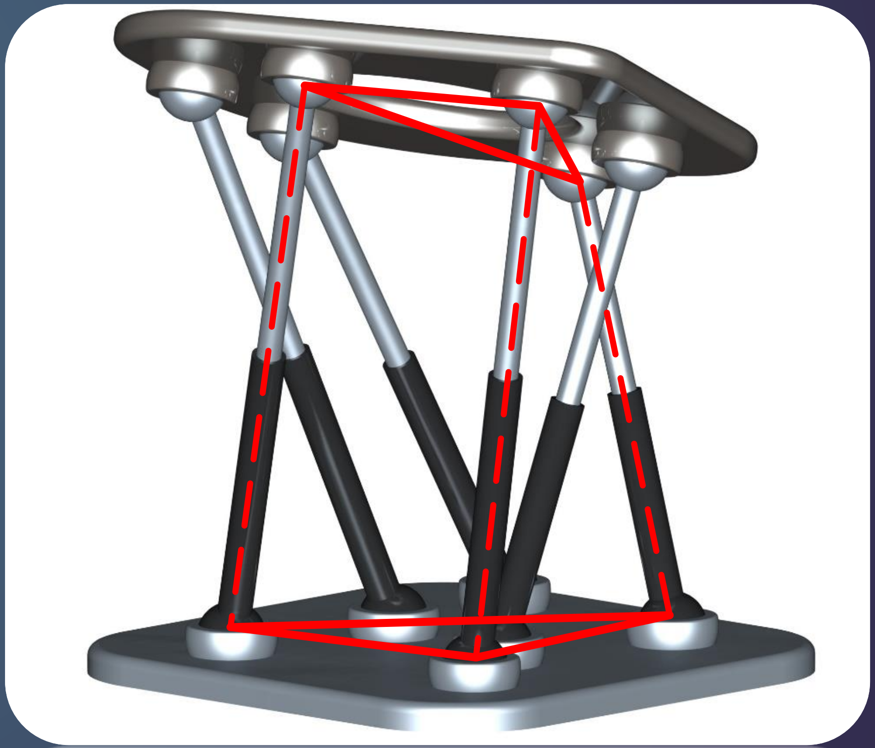
Jacobi-Matrix der SGP

$$\mathrm{J} = \det(\mathbf{J}) = 0$$

Satz: Eine nicht architektonisch singuläre SGP besitzt eine nicht kubische Singularitätsfläche, genau dann wenn rg(**a**,**b**,**c**,**A**,**B**,**C**) < 4 gilt; genauer wenn ein affiner Zusammenhang zwischen Basis und Plattform besteht oder rg(**M**)=4.

Vorbereitungen für rg(**M**)=4

Satz : Werden die Punkte in Basis oder Plattform, einer nicht architektonisch singulären SGP, regulären Affinitäten unterzogen, ändert sich der Rang der Matrix **M** nicht.



Satz : SGPen, welche nicht architektonsich singulär sind, besitzen zugehörige Ankerpunktstripel (M_i, M_j, M_k) und (m_i, m_j, m_k), sodass diese nicht degenerierte Dreiecke bilden.

Vorbereitungen für rg(**M**)=4

neue, vereinfachte Matrix **M**,
auf Grund der vorhergegangenen Sätze

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 1 & 0 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & 1 & B_4 & B_5 & B_6 \end{pmatrix}$$

Bedingungen für rg($\mathbf{M}$)=4

$$A_4 = \frac{A_6B_4 - A_6b_4 - B_4a_6 + B_6a_4 - a_4b_6 + a_6b_4}{B_6 - b_6}$$
$$A_5 = \frac{A_6B_5 - A_6b_5 - B_5a_6 + B_6a_5 - a_5b_6 + a_6b_5}{B_6 - b_6}$$
$$B_6 \neq b_6$$

$$B_6 = b_6$$
$$A_4 = \frac{A_5B_4 - A_5b_4 - B_4a_5 + B_5a_4 - a_4b_5 + a_5b_4}{B_5 - b_5}$$
$$A_6 = a_6$$
$$B_5 \neq b_5$$

$$B_6 = b_6$$
$$B_5 = b_5$$
$$B_4 = b_4$$

Bedingungen für rg(**M**)=4

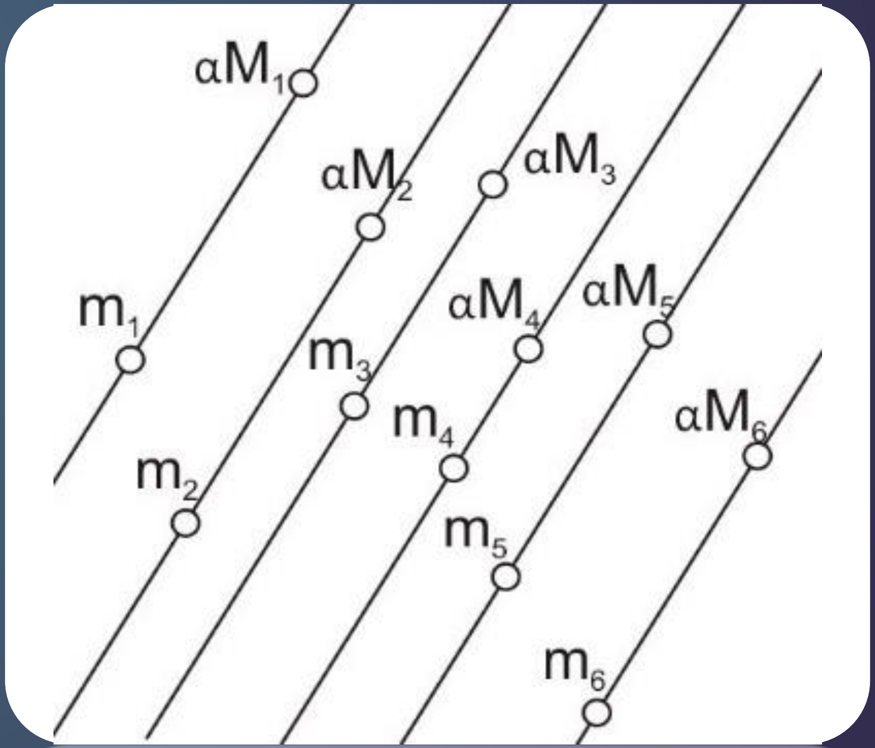
$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 1 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 1 & 0 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & 1 & B_4 & B_5 & B_6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{m}_{\_} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & A_4 - a_4 & A_5 - a_5 & A_6 - a_6 \\ 0 & 1 & B_4 - b_4 & B_5 - b_5 & B_6 - b_6 \end{pmatrix}$$

$$(A_i - a_i) : (B_i - b_i) = (A_j - a_j) : (B_j - b_j)$$

Geometrische Interpretation für rg(**M**)=4

$$(A_i - a_i) : (B_i - b_i) = (A_j - a_j) : (B_j - b_j)$$



Satz : Für ebene SGPen gilt:
rg(M)=4 gilt genau dann, wenn eine reguläre Affinität α von Basis- auf Plattformebene existiert, sodass alle sechs Ankerpunktspaare auf gleichen Geraden eines Parallelenbüschels liegen, also jede Gerade $[\alpha(M_i), m_i]$, mit i =1,…,6, inzitiert mit dem Fernpunkt des Parallelenbüschels.

Folgerung 1 - Vorwärtskinematik

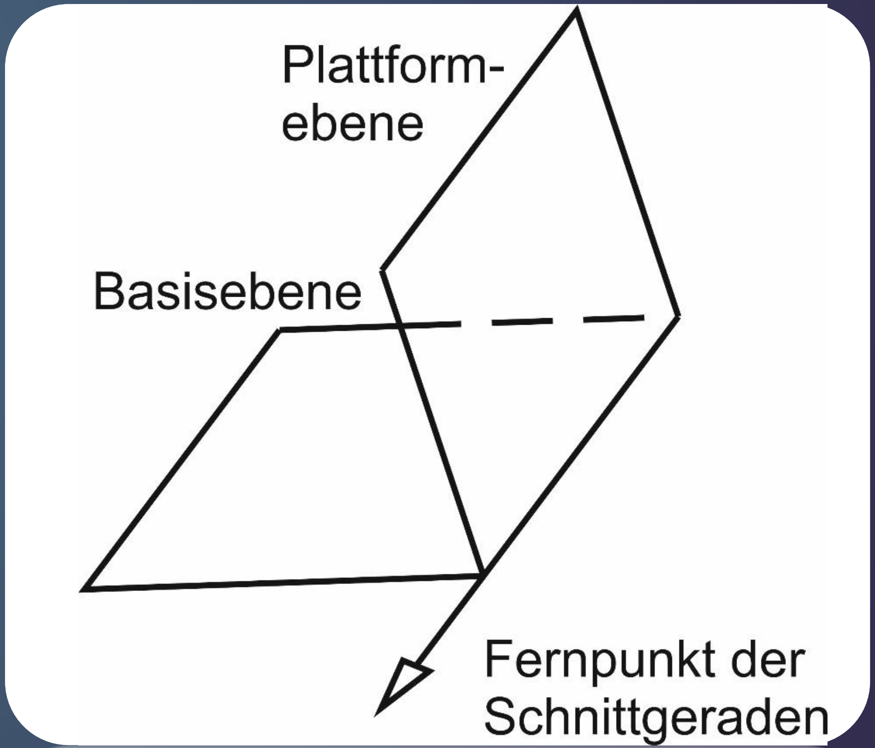
Im Allgemeinen ist das Problem der Vorwärtskinematik mit Gleichungen von Grad 4, 4 und 8 in den Eulerparametern q_0, q_1, q_2, q_3 lösbar.

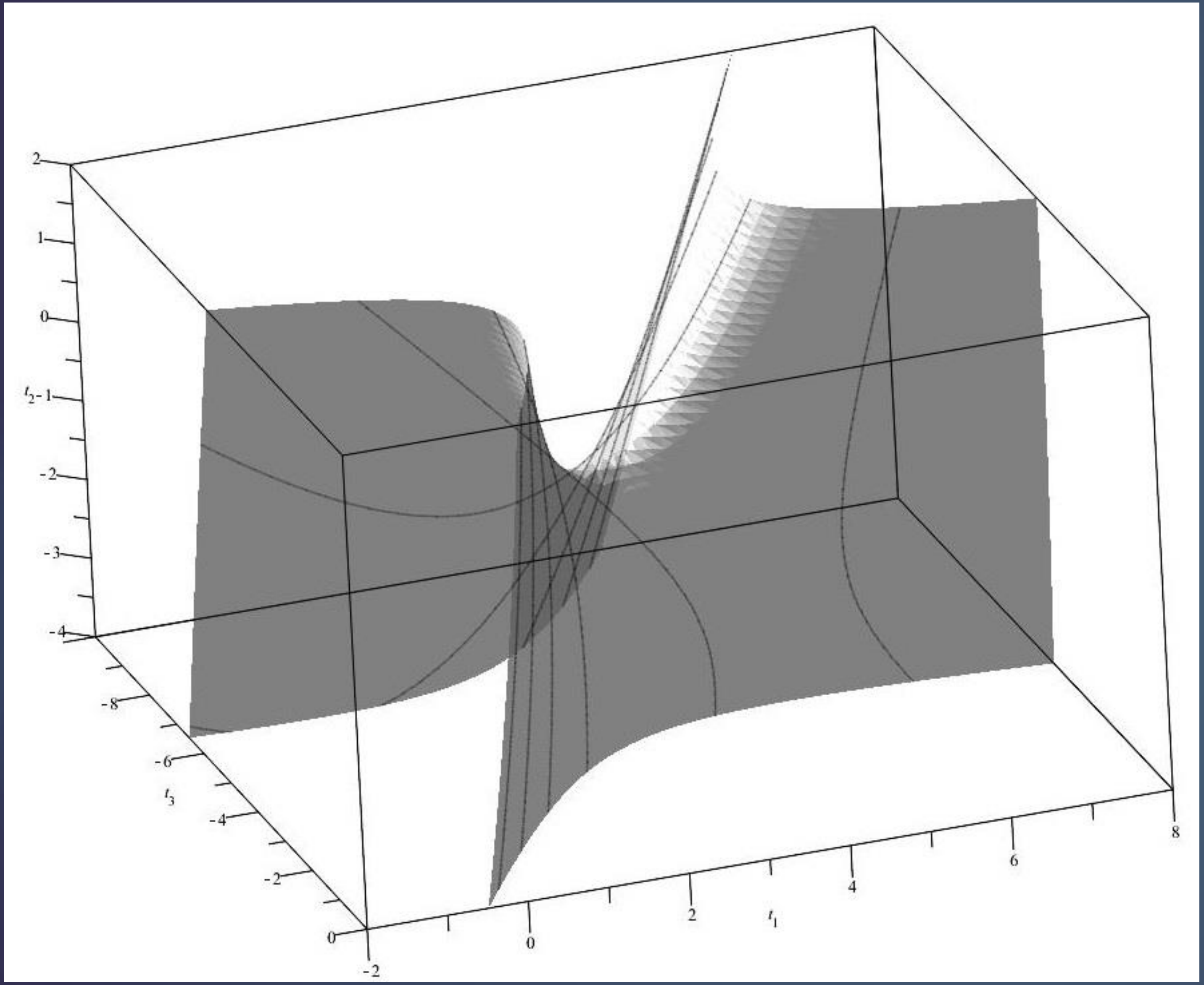
Bei ebenen SGP vereinfacht sich das Problem auf Gleichungen vom Grad 2, 4 und 8.

Bei zusätzlich rg(M)=4 verringern sich die Grade der Gleichungen auf 2, 2, und 8.

Folgerung 2 - Singularitätsfläche

Bei ebenen SGP mit rg(**M**)=4 ist die Singularitätsfläche in den Paramatern des dreidimensionalen Translationsraumes stets eine Quadrik.




2
1
0
t_2 -1
-2
-3
-4
-8
-6
t_3
-4
-2
0
-2
0
2
t_1
4
6
8


Danke für Ihre Aufmerksamkeit !