35. Fortbildungstagung für Geometrie

in Strobel am Wolfgangsee

04.- 06. Nov. 2014

Wie hängt die Ladungsdichte auf dem Ellipsoid von der Krümmung ab?

Klaus Holländer, Giessen (D)

Technische Hochschule Mittelhessen (THM)

Ablauf:

1. Das Ellipsoid

2. Die Ladungsdichte σ auf einem metallischen Ellipsoid

3. Die gaußsche Krümmung K und die mittlere Krümmung H

4. Die Ladungsdichte σ in Abhängigkeit von der gaußschen Krümmung

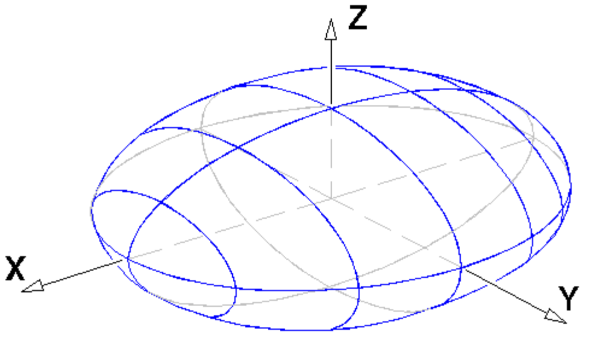
5. Die Ladungsdichte σ in Abhängigkeit von der mittleren Krümmung

6. Ergänzungen

E-Mail: klaus.hollaender@mni.thm.de

Das Ellipsoid mit den Halbachsen a > b > c

Gleichung des Ellipsoids: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$



Allgemeine Gleichung der Ebene: A·x + B·y + C·z +D = 0

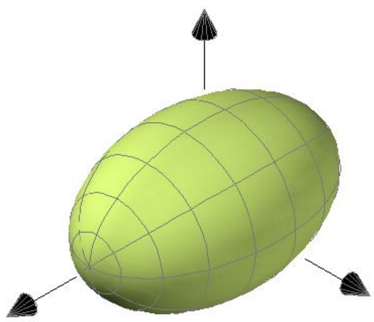
Gleichung der Tangentialebene ε im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$ des Ellipsoids:

$$\frac{x_0}{a^2}\cdot x+\frac{y_0}{b^2}\cdot y+\frac{z_0}{c^2}\cdot z-1=0$$

Abstand h der Ebene vom Ursprung O: $h=\left|\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$

Abstand h der Tangentialebene ε im Punkt P vom Mittelpunkt O des Ellipsoids:

$$\boxed{h_0=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}} \quad \text{oder} \quad \frac{x_0{}^2}{a^4}+\frac{y_0{}^2}{b^4}+\frac{z_0{}^2}{c^4}=\frac{1}{h_0^2}$$

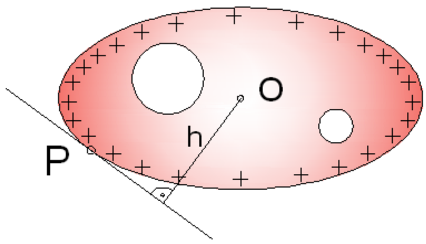


Die Flächenladungsdichte σ auf dem geladenen Ellipsoid

Befindet sich auf dem Flächenelement ΔF die Ladung ΔQ, so ist die Flächen-

ladungsdichte σ durch $\sigma = \frac{Ladungsmenge}{Fläche} = \frac{\Delta Q}{\Delta F}$ definiert.

Die elektrischen Ladungen eines Leiters (= Ladungsträger) sitzen nur auf seiner **äußeren Oberfläche.**



- Auf einer Kugel ist die Ladung gleichmäßig verteilt; auf einem nicht kugelförmigen Körper sitzen die Ladungen an Stellen stärkerer **Krümmung** dichter als an schwächer gekrümmten Stellen.
  (Cramer- Weidmann: Physik der Unterstufe, 1956)

Krümmung einer Fläche: Darunter versteht man die lokale Abweichung einer Fläche von der Ebene.
(Herder Lexikon)

Die Formel für die Flächenladungsdichte σ auf dem leitenden Ellipsoid lautet:

(1) $$\boxed{\sigma = Q \cdot \frac{1}{4\pi \cdot abc} \cdot h} \quad \text{mit} \quad h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Die Ladungsdichte σ ist proportional zum Abstand h: $\sigma \sim h$.

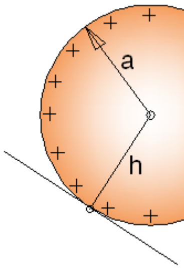
Die Einheit der elektrische Ladungsmenge ist 1 Coulomb:

1Coulomb = $3 \cdot 10^9$ ESE (elektrostatische Ladungseinheiten).

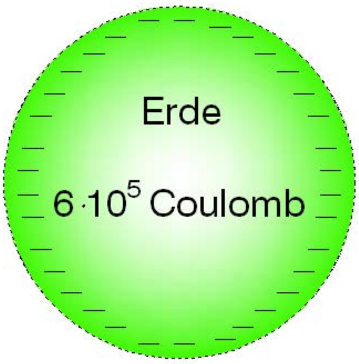
Die Einheit der Stromstärke ist 1 Ampère : 1 Ampère = $\frac{1\,Coulomb}{1\,Sekunde}$.

Auf der Kugel mit Radius r = a ist die Ladungsmenge Q gleichmäßig verteilt.
Es ist a = b = c und h = a; das in (1) eingesetzt ergibt:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi \cdot a^2} = const.$$

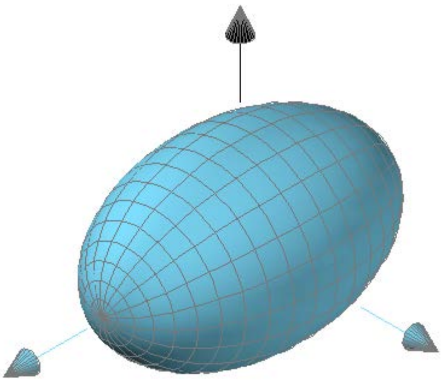


Ladungsverteilung an der Erdoberfläche



Die Erde trägt eine zeitlich gemittelte **negative** Ladung von $6 \cdot 10^5$ Coulomb.

Zerlegt man die Oberfläche des Ellipsoids in N Teilflächen ΔF_i, multipliziert diese mit der mittleren Ladungsdicht $\tilde{\sigma}_i$ und summiert die Produkte, so muss als Ergebnis näherungsweise die Ladungsmenge Q herauskommen:



$$\boxed{\sum_i \tilde{\sigma}_i \cdot \Delta F_i \approx Q}$$

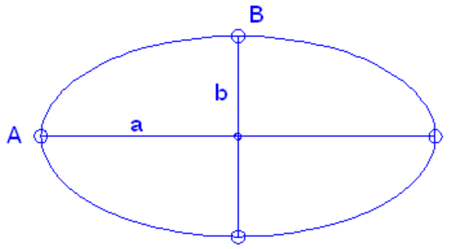
Die gaußsche Krümmung K und die mittlere Krümmung H

Es sei R_1 der kleinste Krümmungsradius und R_2 der größte Krümmungsradius in einem beliebigen Flächenpunkt P(x | y | z), dann ist

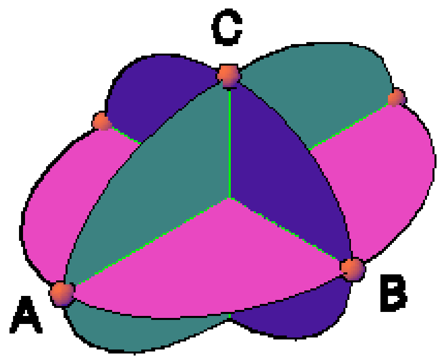
$$K = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \quad \text{das gaußsche Krümmungsmaß}$$

und

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \right) \quad \text{das mittlere Krümmungsmaß.}$$



Krümmungsradius im Punkt A: $\rho = \frac{b^2}{a}$ Krümmungsradius im Punkt B: $\rho = \frac{a^2}{b}$



In den Hauptscheitelpunkten A, B, C lassen sich die Krümmungsradien, die gaußsche Krümmung sowie die Ladungsdichte leicht angeben:

A(a |0 | 0): $R_1 = \frac{b^2}{a}$ bzw. $R_2 = \frac{c^2}{a}$, $K = \frac{a^2}{b^2c^2}$ und $\sigma_{\max} = \frac{Q}{4\pi \cdot bc}$

B(0 | b | 0): $R_1 = \frac{a^2}{b}$ bzw. $R_2 = \frac{c^2}{b}$, $K = \frac{b^2}{a^2c^2}$ und $\sigma = \frac{Q}{4\pi \cdot ac}$

C(0 | 0 | c): $R_1 = \frac{a^2}{c}$ bzw. $R_2 = \frac{b^2}{c}$, $K = \frac{c^2}{a^2b^2}$ und $\sigma_{\min} = \frac{Q}{4\pi \cdot ab}$

Die Ladungsdichte σ in Abhängigkeit von der gaußschen Krümmung K

Wir machen den Ansatz: (2) $\boxed{\sigma = D \cdot K^{\alpha}}$ mit $K = \dfrac{1}{R_1 \cdot R_2}$ und D = D(Q;a,b,c)

Ansatz (2) enthält zwei Unbekannte: D und α.

Im Scheitelpunkt A(a | 0 | 0) gilt : $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi \cdot bc}$ und $K = \dfrac{a^2}{b^2c^2}$.

Im Scheitelpunkt B(0 |b | 0) gilt: $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi \cdot ac}$ und $K = \dfrac{b^2}{a^2c^2}$.

Setzt man diese Werte in (2) ein, so erhält man zwei Gleichungen für D und α.

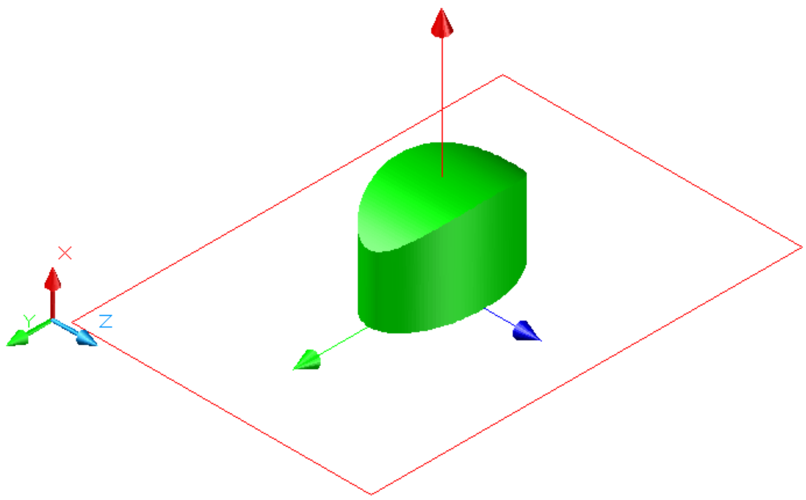
Die Auflösung ergibt: $\alpha = \dfrac{1}{4}$ und $D = \dfrac{Q}{4\pi \cdot \sqrt{abc}}$ und mit (2) folgt

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi \cdot \sqrt{abc}} \sqrt[4]{K}} \qquad (3)$$

Die Ladungsdichte σ ist proportional zur 4-ten Wurzel aus der gaußschen Krümmung:

$$\sigma \sim \sqrt[4]{K}$$

Die Kurven konstanter Ladungsdichte σ, gaußscher Krümmung K auf dem Ellipsoid sind identisch mit den Kurven mit konstantem Abstand h der Tangentialebene vom Mittelpunkt O.



σ = const. h = const. und K = const.

In der Kreiseltheorie wird eine solche Kurve **Polbahn** oder **Polhodie** genannt.

Wie berechnet man die Krümmung K in (3)?

Durch Gleichsetzung von (1) $\sigma = Q \cdot \frac{1}{4\pi \cdot abc} \cdot h$ und (3) $\sigma = \frac{Q}{4\pi \cdot \sqrt{abc}} \sqrt[4]{K}$ folgt die

geometrische Beziehung: $$\boxed{\frac{h^4}{(abc)^2} = \frac{1}{R_1 \cdot R_2}} \qquad (4)\ .$$

- Diese Beziehung hat W. Wunderlich geometrisch hergeleitet (1948 ?)

- Nach Müller und Krames gilt diese Formel für Mittelpunktsflächen zweiten Grades d.h. das Ellipsoid, das einschalige und zweischalige Hyperboloid (1931)

- Die Formel stammt vermutlich von George Salmon (1861)

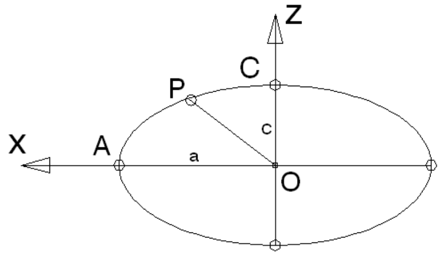
Die Ladungsdichte σ in Abhängigkeit von der mittleren Krümmung H

Ein Ansatz der Form $\boxed{\sigma = D \cdot H^{\alpha}}$ mit $H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \right)$

ist nicht möglich, weil der Faktor D auch von den Koordinaten x, y und z abhängt.

Problem: In einem Ellipsoidpunkt P den Hauptkrümmungsradius R_1 zu bestimmen; mit Hilfe der Beziehung (4) lässt sich dann der Hauptkrümmungskreis R_2 berechnen.

Am einfachsten ist es, einen Punkt P(x | 0 | z) auf der Ellipse mit den Scheitelpunkten A und C zu wählen:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad z = +\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad \overline{OP} = \sqrt{x^2 + z^2}\ .$$

Mit Hilfe der Formel $k = \frac{z''}{\left(1 + (z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ und $h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{0}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$

erhält man $$R_1 = a^2 c^2 \cdot \left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2 c^2}{h^3}\ .$$

Nach Formel (4) gilt: $R_2 = \frac{1}{R_1}\frac{(abc)^2}{h^4}$.

Die Addition von R_1 und R_2 ergibt nach einigen algebraischen Umformungen:

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{h}\cdot\left[a^2+b^2+c^2-\left(x^2+0+z^2\right)\right] \quad \text{mit } \overline{OP}^2 = x^2+z^2$$

und allgemein (5) $\boxed{R_1 + R_2 = \frac{1}{h}\cdot\left[a^2+b^2+c^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]}$ mit $\overline{OP}^2 = x^2+y^2+z^2$

Zusammen mit Gleichung (4) $\frac{1}{R_1\cdot R_2} = \frac{h^4}{(abc)^2} = K$

folgt für die mittlere Krümmung:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1\cdot R_2}\right) = \frac{1}{2}\cdot h^3\cdot\frac{\left[a^2+b^2+c^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]}{(abc)^2}$$

Die Auflösung nach h ergibt:

$$h = \sqrt[3]{H}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}}$$

und mit (1) folgt

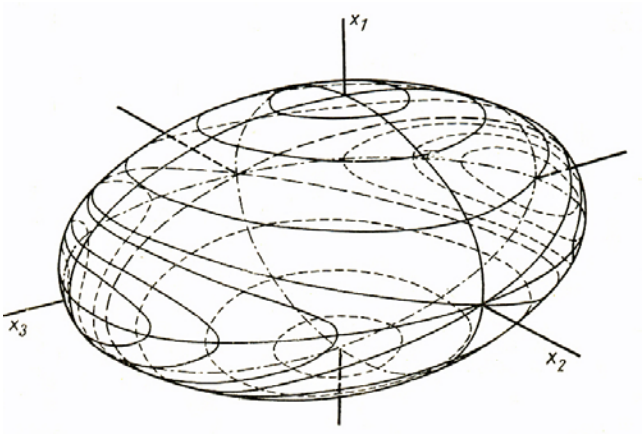
$$\sigma = \frac{Q\cdot\sqrt[3]{2}}{4\pi\cdot\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}}\cdot\sqrt[3]{H}$$

$$\boxed{\sigma = D(x,y,z)\cdot\sqrt[3]{H}} \qquad (6)$$

d.h. die Flächenladungsdichte σ hängt von der 3-ten Wurzel aus der mittleren Krümmung H ab.
Gilt zusätzlich $\overline{PO}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ = const., dann ist für alle Punkte auf den Schnittlinien zwischen dem **Ellipsoid** und den **Kugeln** (c < r < a) die Ladungsdichte σ proportional zur dritten Wurzel aus H:

$$\boxed{\sigma \sim \sqrt[3]{H}}$$

Längs der Schnittlinien Ellipsoid-Kugel sind die mittlere Krümmung H, die Ladungsdichte σ und der Abstand h der Tangentialebene von O **nicht konstant**!



Längs der Schnittlinien Ellipsoid-Kugel ist $\sigma \sim \sqrt[3]{H}$

Aus: L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd. I, Mechanik, Vieweg Akademische Verlagsanstalt Frankfurt, 1969.