Makro-Mathematik: Geometrisches Optimieren

Im Rahmen einer Tabellenkalkulation stehen – so die „Vision 2020“ – Funktionsmakros bereit für Konstruktionen und Abbildungen. Basis für das Optimieren ist ein Prozedurmakro zur Minimierung in einer Variablen. Eine Erweiterung auf zwei Variablen eröffnet Möglichkeiten zur Bestimmung von Punkten der Ebene, die einer Bedingung unterliegen. Erhöht man die Zahl der Parameter, so kann man auch Probleme aus der Variationsrechnung angehen. Den Rahmen der Grundvorstellungen braucht man dabei nicht zu verlassen.

Vorbemerkung zum Ansatz „Geometrie mit Makros“

In der Basis-Expertise des BLK-Versuchs Sinus von 1997 plädiert die Expertengruppe für ein „Bildungsprogramm, das synchron und diachron, also im Hinblick auf Gegenwart und Zukunft, nicht auf direkte Anwendung, sondern auf Anschlussfähigkeit für nachfolgendes Lernen hin konzipiert ist.“ Den Schülern (jeder Schulart) eine Basis zu bieten für ein anschließendes Lernen insbesondere außerhalb der Schule, das mag man als zentralen Hintergrund nehmen für das Plädoyer, Mathematik in der Schule forciert mit Tabellenkalkulation zu betreiben. Dass die Geometrie davon auszunehmen ist – auch über den Horizont 2020 hinaus –, ein Urteil dazu sollte man sich nicht erlauben, ohne die Chancen zu kennen, die hier bestehen.

Excel z.B. bietet mit VBA die Möglichkeit, eine Folge von Anweisungen nicht nur seriell abarbeiten zu lassen. Die Ausführung von Schritten oder die Anzahl der Wiederholungen kann man abhängig machen von Bedingungen. (If … Then … Else …, Select Case …; Do … Loop Until …). In dieser Hinsicht ist Excel – derzeit – anderen Tabellenkalkulationen ebenso klar überlegen wie der Standardsoftware zur Schulgeometrie: Der Slogan „Mit Excel kommst du weiter!“ bestätigt sich hier bereits im engen Feld der Geometrie.

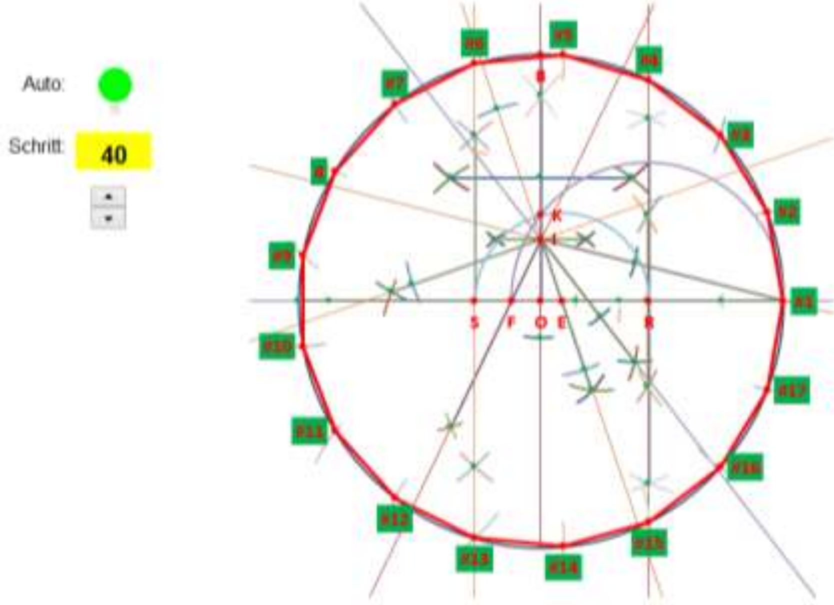
Die numerische Geometrie ist eine reine Koordinatengeometrie. Damit ist der Rahmen viel weiter gesteckt als der der klassischen Geometrie („unlösbar mit den Werkzeugen Zirkel und Lineal verbunden“).

In einer Tabellenkalkulation bearbeitet man konkrete Probleme mit festen Werten. Allgemeinheit ergibt sich dann daraus, dass diese Werte als Parameter fungieren. Die Überlegungen bleiben aber stets „lokal“. Überlegungen zum „theoretischen Hintergrund“ – zuvörderst die spannende Eingangsfrage „Geht das überhaupt mit Zirkel und Lineal?“ – erübrigen sich: Nicht Einfallsreichtum und Kenntnis tiefer liegender Zusammenhänge – und seien es nur der Umfangswinkelsatz oder der Apolloniuskreis – sind gefordert. In der Regel kommt man als „Macher“ mit Routine und Ausdauer zum Ziel. Ein sehr präziser Umgang mit den Möglichkeiten erweist sich allerdings als unumgänglich. Beides ist wohl für den Computereinsatz und letztlich auch für die Mathematik ganz allgemein nicht untypisch.

Innerfachlich muss die Theoriearmut als Defizit angesehen werden. Versucht man jedoch, das Potential von „Grundbegriffen und Grundvorstellungen“ auszuloten, so kann man diese Theoriearmut auch als Vorteil sehen.

Im Übrigen:

Sich auf den „klassischen Geist“ der Geometrie zu beschränken, das bleibt auch in Excel jedem überlassen. So kann man etwa die Konstruktion des regelmäßigen 17-ecks in 40 Schritten umsetzen und den Vorgang mit der Beschreibung des Vorgehens schrittweise abrufen.



Algebrafreie Lösung der einfachen Schnittprobleme

Die Tabellenkalkulation ist in den Lehrplänen der Bundesländer verankert. Grundkenntnisse dürfen deshalb vorausgesetzt werden: Das Erstellen einer Funktionstabelle und einer Grafik dazu. Die Erzeugung von Geraden und Kreisen ist damit bereits abgedeckt.

Als erstes gefragt ist dann die Bestimmung von Schnittpunkten.

Den Kanon der bereitgestellten Funktionen kann man erweitern im Rahmen einer Klasse „Benutzerdefinierte Funktionen“. Dazu ruft man den VBA-Editor auf mit der Tastenkombination ALT-F11. (Sie führt auch wieder in das Arbeitsblatt zurück.) Über den Menüpunkt „Einfügen“ erzeugt man ein Modul, ein Arbeitsblatt. Hier wird eine Funktion deklariert:

```
Function schnittx(mg, bg, mh, bh)
m = mg - mh
b = bg - bh
schnittx = -b / m
End Function
```

Das ist natürlich nicht mehr als eine bloße Transkription der Formel

$$x_s = -\frac{bg-bh}{mg-mh}$$

Die Lösung ist beschränkt auf den Schnitt zweier Geraden. Für den Schnitt einer Geraden mit einem Kreis, den Schnitt zweier Kreise oder anderer Graphen bzw. Kurven müsste man jeweils neu ansetzen. Das ist nicht sehr effizient.

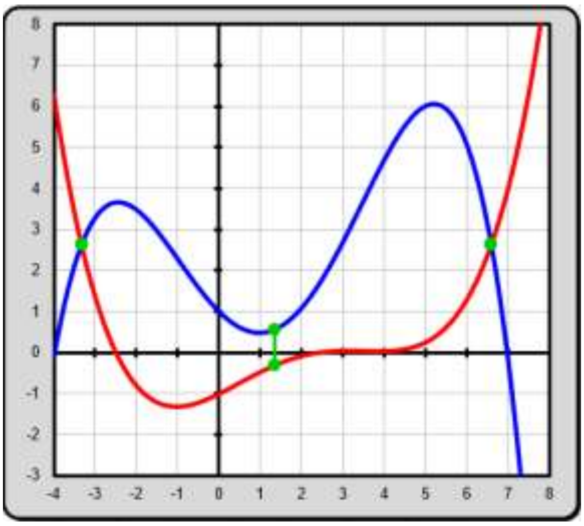
Wir halten es ganz mit Hans Schupp („Mit vorhandenen Mitteln ein Maximum an Wirkung zu erzielen oder aber ein bestimmtes Ziel mit einem Minimum an Aufwand zu erreichen ist ein durchgreifendes Lebensprinzip.“): Wir überlegen uns eine Suchstrategie. Dazu müssen wir den Abstand der beiden Geraden im Blick behalten, also die Differenz bei gleicher Abszisse. Ihr Betrag verringert sich zunächst, nach Überschreiten der Schnittstelle wächst er wieder an: Zeit umzukehren! Genauer gesagt: Wir kehren die Bewegungsrichtung unserer Suche um, sobald die betragsmäßige Differenz „diff“ anfängt zu wachsen. Mit der Umkehr verringern wir die Schrittweite. Das leistet die Anweisung „IF diffalt < diff then inc = -inc/2“. Die Suche wird abgebrochen, sobald das Inkrement inc dem Betrag nach die Genauigkeitsgrenze unterschreitet. Besser noch als „Abs(inc) < genau“ passt hier als Abbruchbedingung der Suche „diff < genau“. Was „genau“ bedeutet wird vorab festgelegt in einer Konstanten.
Im Ganzen sieht unser Makro dann so aus:

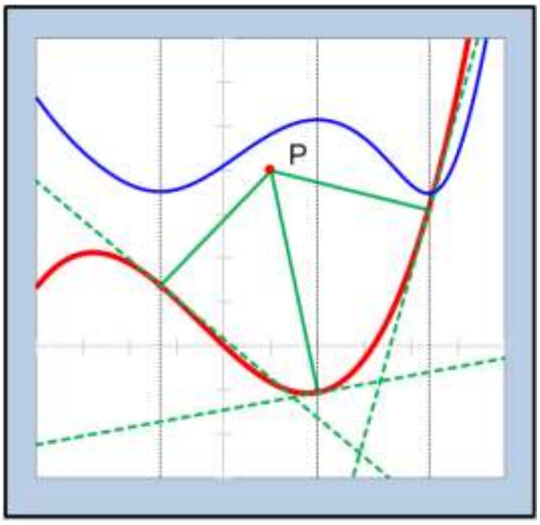
```
Const genau = 0.000001
Sub losmin()
inc = 0.1
[test] = -4
diffalt = 100
Do
[test] = [test] + inc
diff = Abs([wert1] - [wert2])
If diff > diffalt Then inc = -inc / 2
diffalt = diff
abbruch = diff < genau
Loop Until abbruch
End Sub
```

[test] ist die Zelle mit der Abzisse

[wert1] und [wert2] sind die Zellen mit den Funktionswerten

Dies Verfahren führt nun aber nicht nur bei Geraden zum Ziel, genauso gut natürlich bei Parabeln. Mit der Wahl der Startwerte kann man auch sicherstellen, dass gegebenenfalls beide Schnittstellen gefunden werden. Mehr noch: Im Falle, dass die Parabeln einander nicht schneiden, wird als Ersatz die Stelle minimalen Abstands angeboten.
Der Formel-Fan mag auch hier noch abwinken und sagen: „Na gut, Lösung einer Extremwertaufgabe. Aber man weiß doch: Das ist hier eigentlich nur eine Sache mit quadratischen Gleichungen.“ Immerhin wird er sich klar machen können, dass das natürlich bei jedem Paar von Funktionsgraphen funktioniert. (Im Bild: Polynomfunktionen vom Grad 4) Auch die Lösung der Aufgabe, die <u>Extremalstellen für den Abstand eines Punktes von einer Kurve</u> zu bestimmen, ist gleich inbegriffen. (Obere Kurve: Distanzfunktion.) Um derartige – naheliegende! – Fragestellungen einen Bogen zu machen, dazu gibt es überhaupt keinen Grund! Beschränkt man sich auf Algebra und Analysis, so kann man zwar einen Teil des Weges mit Termen begleiten. Für das Erreichen des Ziels sind sie aber nur hinderlich!





Umgangssprachlich formuliert sieht unser Suchverfahren so aus:

> Wähle eine beliebige Schrittweite.
> Dann wiederhole:
>   Gehe einen Schritt voran.
>   Prüfe, ob du deinem Ziel näherkommst.
>   Falls du dich entfernst,
>   dann kehre um mit halbierter Schrittweite.
> … und zwar so lange, bis
>   die Schrittweite hinreichend klein ist.

Fasst man das als Regel für einen Wanderer auf, so wird man nicht bestreiten können, dass hier nur prämathematische Grundvorstellungen zur Bewegung einfließen.

Analysisfreie Minimierung in der Geometrie

Auch in der Geometrie gibt es einfache Problemstellungen, bei denen unser Algorithmus leicht zum Ziel führt. Klassiker ist das „Problem der gekreuzten Leitern“ (1):

> Zwei Leitern lehnen an zwei sich gegenüberliegende Wände. Gegeben ist die Höhe, in der sie sich kreuzen. Wie groß ist der Abstand der Wände?

Die Aufgabenstellung wirkt ganz harmlos: Für den Ansatz braucht man jeweils nicht mehr als den Satz von Pythagoras und Ähnlichkeitsbeziehungen in Dreiecken, also die Strahlensätze. „Der Charme dieser Aufgabe liegt in der scheinbaren Einfachheit der Lösung, die schnell in einen algebraischen Dschungel führt.“ schreibt Gardner dazu. Die analytische Lösung führt auf eine Gleichung 4. Grades, entweder einigermaßen direkt oder aber erst nach einer geschickten Substitution in eine Gleichung vom Grad 8.

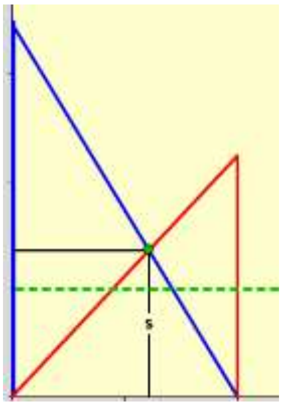
$$x^4 - 2h\cdot x^3 - (r^2 - l^2)\cdot x^2 + 2h(r^2 - l^2)\cdot x - h^2 (r^2 - l^2) = 0$$

x steht dabei für $\sqrt{r^2 - stelle^2}$. D.h. gesuchte Stelle erhält man als stelle = $\sqrt{r^2 - x^2}$

Bei dieser mit viel Mühe erreichten Gleichung bleibt dann nichts anderes übrig als eine numerische Lösung.

Für unser Vorgehen ist dieser algebraische Vorlauf – das Aufstellen der Gleichung – völlig überflüssig. Statt nach einer Lösung für eine Gleichung 4. Grades zu suchen, suchen wir direkt nach einer Positionierung des rechten Fußpunktes derart, dass die Schnitthöhe s gleich der Sollhöhe ist. Was an Formeln benötigt wird, beschränkt sich auf die zur Schnittstelle zweier Geraden.

Mit der Schaufigur ist das Entscheidende geschafft. Tatsächlich: Der Rest ist Routine – eine Routine, die sich immer wieder und in den verschiedensten Kontexten abrufen lässt:




```
Sub minimiere1()
schritt = 0.1
Min = 100
Do
[stelle] = [stelle] + schritt
umkehr = [wert] > Min
If umkehr Then schritt = -schritt / 2
Min = [wert]
Loop Until Abs(schritt) < 0.000000001
End Sub
```

Die gleiche Situation beim „Bierdeckelproblem“ (2) und bei der „Ziege am Strick“ (3)

> Wie weit muss man zwei Bierdeckel übereinander schieben,
> wenn die überdeckte Fläche gerade einen halben Bierdeckel ausmachen soll?

> Gegeben ist ein Kreis mit Radius 1. Auf der Kreislinie ist ein Stock festgesteckt.
> An dem Stock wird eine Ziege festgebunden.
> Die Ziege soll genau die Hälfte des Kreises "abgrasen". Wie lang muss der Strick sein?

In beiden Fällen haben wir die Möglichkeit, das Problem algebraisch auf den Punkt zu bringen mit einer Gleichung: $z - sin(z) = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2} + 2\alpha \cdot cos(2\alpha) - sin(2\alpha) = 0$. Einer Lösung bringt uns das aber keinen Schritt näher als der Direkteinsatz unseres Suchmakros.

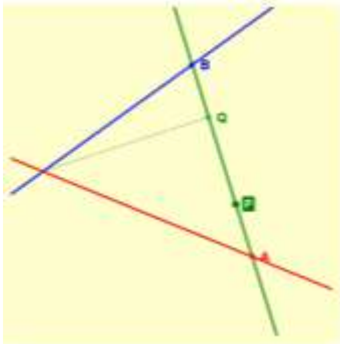
(Um uns unabhängig zu machen von Formeln aus der Trigonometrie sollten wir uns hier um eine Möglichkeit zur Berechnung der Fläche unter einer Kurve kümmern. Das ist natürlich kein Aufwand, erweist sich aber als schon an sich sehr nützlich.)

Näher am klassischen Geist der Mathematik ist man mit der Aufgabe: „Philo’s Gerade“ (4):

> Gegeben sind ein Winkelfeld und ein Punkt P innerhalb. Für welche Gerade durch P
> ist die Strecke zwischen den Schnittpunkten mit den Schenkeln des Winkels minimal?

Bereits Newton soll nach einer Zirkel-und-Lineal-Lösung des Problems gesucht haben.

Im Internet findet sich eine Bearbeitung. Dazu heißt es: “The problem of finding the shortest segment is more tricky than one first suspects. … Had I known it was as tricky to begin with I may not have spent as long investigating it! It was certainly worthwhile though and I encountered a fun mix of calculus, geometry and algebra (polynomials).”

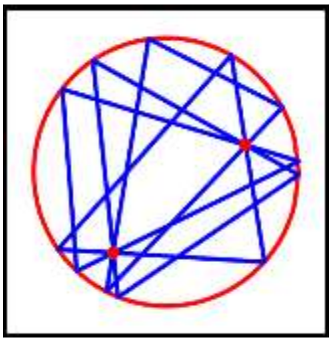


Die Terme, in die sich die gesuchte Länge hier kondensieren lässt, sind von „Grundvorstellungen“ allzu weit entfernt. Das Ergebnis, zu dem diese Terme führen, kann man aber auch ganz einfach durch Variation der Steigung erreichen. Das wird man der Schaufigur leicht ansehen.

Die Reduzierung auf ein Problem der Minimierung in einer Variablen ist aber nicht immer so einfach. Das wird deutlich bei den folgenden drei Problemen:

„Alhazen’s Billard-Problem“ (5)

Gegeben sind zwei Positionen A und B auf einem kreisförmigen Billardtisch.
Gesucht ist nach Möglichkeiten, eine Kugel von A „über Bande“ nach B zu spielen.

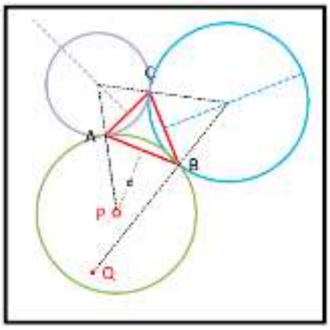


Im Allgemeinen gibt es 4 derartige Punkte. In jedem der Fälle erreicht man sein Ziel über eine Minimierung in einer Variablen.

Das Problem hatte eine große Anziehungskraft für die Mathematiker: Huyghens, l’Hospital und viel andere haben sich um eine algebraische Lösung bemüht. Erst im Jahre 1997 gelang eine derartige Lösung tatsächlich!

Kreisberührung (6)

Gegeben: 3 Punkte in der Ebene.
Gesucht: 3 Kreise,
die sich in diesen 3 Punkten berühren.



„Malfatti-Problem“ (7)

Gegeben ist ein Marmorprisma. Wie kann man daraus am besten 3 zylindrische Säulen gewinnen, d.h. 3 Säulen derart, dass das Gesamtvolumen der Säulen maximal ist?

Dass es hier um Maximierung geht, macht natürlich eigentlich keinen Unterschied. Bei der Lösung kommt man allerdings mit einem Maximierungsmakro allein nicht weit. Zusätzlich sind Funktionstools aus der Geometrie-Toolbox erforderlich.

Optimieren in 2 Variablen

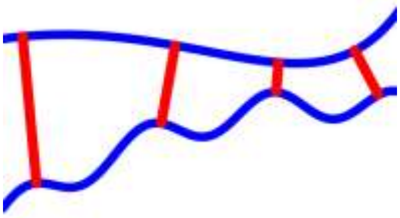
Bisher haben wir bei unserer Suche auf einer Geraden jeweils einen Schritt vor oder zurück gemacht. Bei einer Suche in der Ebene prüfen wir von unserem Standort alle umliegenden Felder, ob wir unserem Ziel näher kommen. Falls das der Fall ist, gehen wir auf dies Feld, sonst verkleinern wir die Schrittweite unserer Suche.

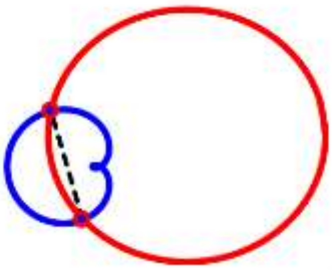
Die Vorstellung vom Wandern in einer Landschaft auf der Suche nach einem ausgezeichneten Punkt drängt sich hier in besonderem Maße auf.

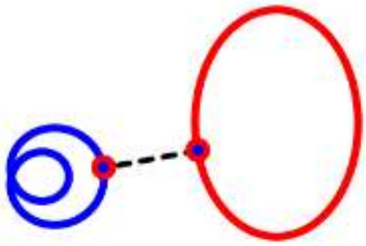
Entsprechend ist das Auffinden der Extrempunkte einer Funktionsfläche die nächstliegende Anwendung. Dass das Ergebnis der Suche abhängt vom Startpunkt, liegt auf der Hand.

Abstandsminimierung von Funktionsgraphen und Schnitt und Abstandsminimierung von Kurven bieten sich als weitere Einsatzmöglichkeiten an:

```
Sub minimiere2()
schritt = 1
hmin = 100
Do
  a = [param1]
  b = [param2]
  For na = -1 To 1
    For nb = -1 To 1
      [param1] = a + na * schritt
      [param2] = b + nb * schritt
      Calculate
      If [fwert] <= hmin Then
        hmin = [fwert]
        nam = na
        nbm = nb
        End If
      Next nb
    Next na
[param1] = a + nam * schritt
[param2] = b + nbm * schritt
sfertig = (nam = 0 And nbm = 0)
If sfertig Then schritt = schritt / 2
Loop Until Abs(schritt) < genau
End Sub
```



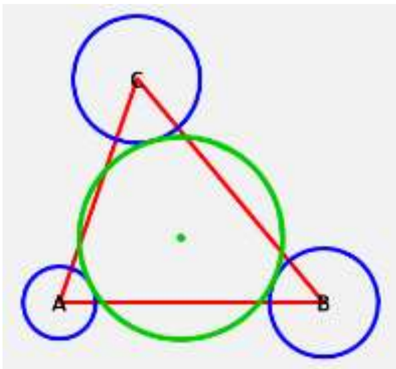




Dass im Rahmen der Geometrie in der Ebene ein Punkt gesucht wird mit besonderen Eigenschaften, das ist gewiss nicht selten. In einer ganzen Reihe von Fällen kommt man mit der eingeführten Suche in 2 Parametern sehr direkt zum Ziel.

Zu dieser Art von Problemen gehören etwa der Fermatpunkt mit Verallgemeinerung auf konvexe n-Ecke), die Brochard-Punkte sowie das

„Kreisberührungsproblem von Apollonius“ (8)

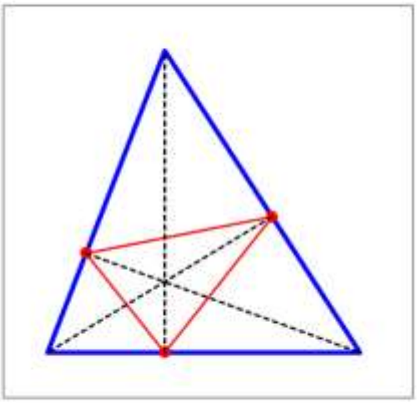


Gegeben: 3 Kreise. Gesucht: Ein Kreis, der alle 3 berührt.

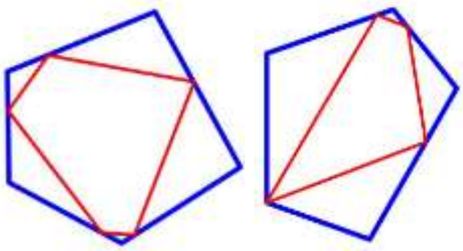
Optimieren in 3 Variablen:

Nach passenden Problemen in der Ebenen Geometrie muss man erst suchen. Das „Problem von Fagnano“ (9) könnte man hier einordnen.

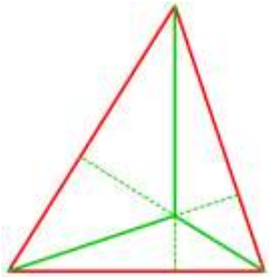
Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck Δ. Gesucht ist unter den Dreiecken, deren Ecken auf den Seiten von Δ liegen, dasjenige mit minimalem Umfang.



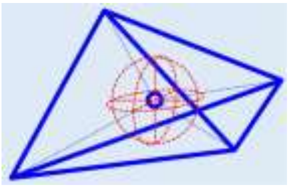
Eigentlich interessant wird das Minimieren mit Makros hier aber erst, wenn man vom Dreieck übergeht auf konvexe 5-Ecke. (Tatsächlich lässt sich unser Wandermakro auch noch ausweiten auf 5 Variablen.)

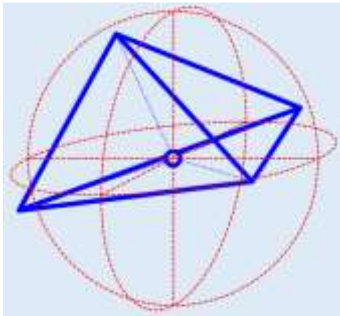


Etwas weniger direkt erweist die Minimierung in 3 Variablen sich als hilfreich bei der Suche nach Dreiecken aus Vorgaben, die eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausschließen. Die Aufgabe „Dreieck aus den Höhenabschnitten“ zählt dazu.



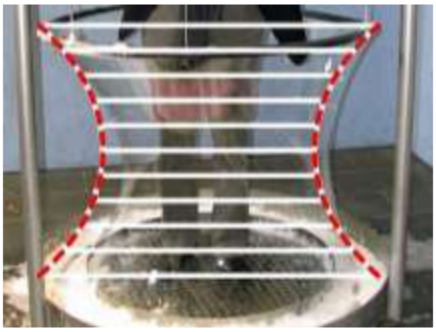
Mehr Möglichkeiten zum Minimieren in 3 Variablen bietet natürlich die Raumgeometrie, und zwar im Rahmen der Suche nach Punkten im Raum mit besonderen Eigenschaften. Das Auffinden von Inkreis und Umkreis eines Tetraedes fallen in diese Kategorie.





Optimieren in mehr als 3 Variablen:

Mit dem Optimieren in 5 Variablen erreichen wir die Grenze dessen, was man dem „Wandermakro“ zumuten kann. Um das Katenoid als Minimalfäche zu finden, kommen wir – unter Nutzung der Symmetrie – noch mit 5 Variablen aus. Um dann aber weitergehend Probleme der Variationsrechnung zu lösen – etwa: „Kürzeste Wege in einer Funktionslandschaft“ – müsste man ganz neu ansetzen.



Den Rahmen der „Grundbegriffe und Grundvorstellungen“ wollen wir nicht überschreiten!