34. Fortbildungstagung für Geometrie

Über Kurven die entstehen, wenn ein Ellipsoid mit festem Mittelpunkt auf einer Ebene rollt

Klaus Holländer (Giessen)
Technische Hochschule Mittelhessen (THM)

Ablauf:

1. Das Ellipsoid

2. Die Ladungsverteilung auf einem Ellipsoid

3. Die Kurven auf dem Ellipsoid und auf der Ebene

4. Die Bestimmung der Kurven auf der Ebene mit Hilfe von Polarkoordinaten

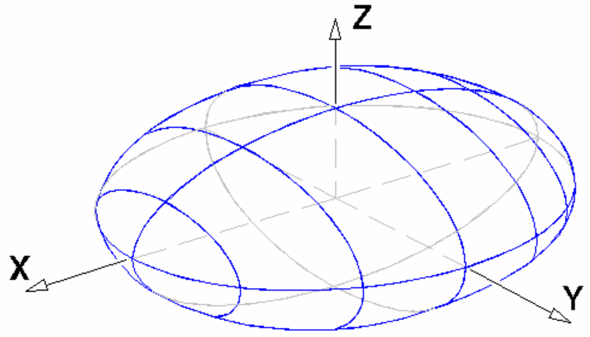
5. Die Spirale

6. Ergänzungen

E-Mail: klaus.hollaender@mni.thm.de

Das Ellipsoid mit a > b > c

Gleichung des Ellipsoids $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Allgemeine Gleichung der Ebene: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$

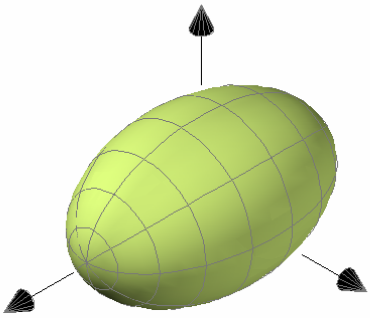
Abstand h der Ebene vom Ursprung O: $$h=\left|\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$ des Ellipsoids:

$$\frac{x_0}{a^2}\cdot x+\frac{y_0}{b^2}\cdot y+\frac{z_0}{c^2}\cdot z-1=0$$

Abstand h der Tangentialebene vom Mittelpunkt O des Ellipsoids:

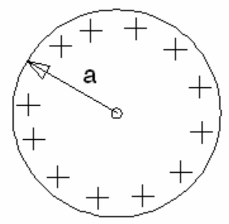
$$h_0=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$$ oder $$\frac{{x_0}^2}{a^4}+\frac{{y_0}^2}{b^4}+\frac{{z_0}^2}{c^4}=\frac{1}{h_0^2}$$



Die Flächenladungsdichte auf einem Ellipsoid

Die Flächenladungsdichte ist: $\omega = \frac{Ladungsmenge}{Fläche} = \frac{\Delta Q}{\Delta F}$

1. auf der Kugel ist die Ladungsmenge Q gleichmäßig verteilt:



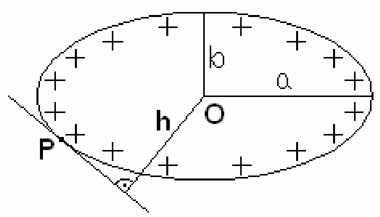
$$\omega = \frac{Q}{4\pi \cdot a^2}$$

$$\omega = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \phi}{\partial n}\bigg|_{r=a} \qquad \text{mit } \phi = \frac{Q}{r} \text{ und } \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{Q}{r^2}$$

2. auf dem Rotationsellipsoid (b = c) ist die Ladungsmenge ungleichmäßig verteilt:

$$\omega = \frac{Q}{4\pi \cdot ab^2} h = \frac{Q}{3 \cdot V_E} h$$

$$\omega = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{mit } \phi = \frac{Q}{2c} \ln\left(\frac{z+c+r_1}{z-c+r_2}\right) \quad [1]$$



3. auf dem Ellipsoid (a > b> c) gilt:

$$\omega = \frac{Q}{4\pi \cdot abc} h = \frac{Q}{3 \cdot V_E} h \qquad (V_E = \frac{4}{3}\pi \cdot abc)$$

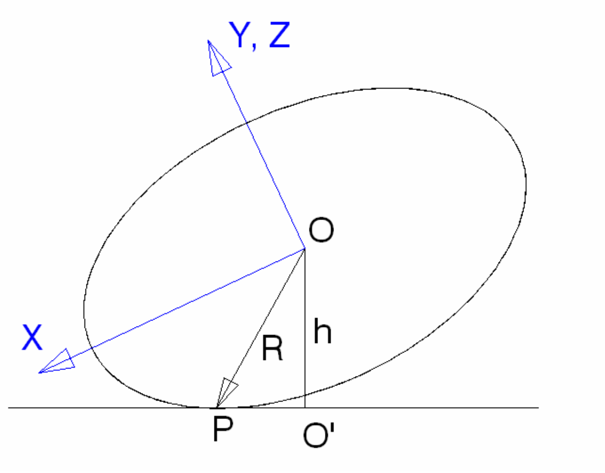
Der Laplace- Operator $\Delta\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}$ muss zur Herleitung dieser Formel auf elliptische Koordinaten umgeschrieben werden [5,6].

Physiker: Bestimme auf dem Ellipsoid Kurven längs denen die Flächenladungsdichte ω konstant ist.

Oder:

Geometer: Bestimme auf dem Ellipsoid Kurven längs denen die Tangentialebenen einen festen Abstand h zum Mittelpunkt O haben.

Kurve s auf dem Ellipsoid (Polbahn oder Polhodie)



(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ (Ellipsoid)

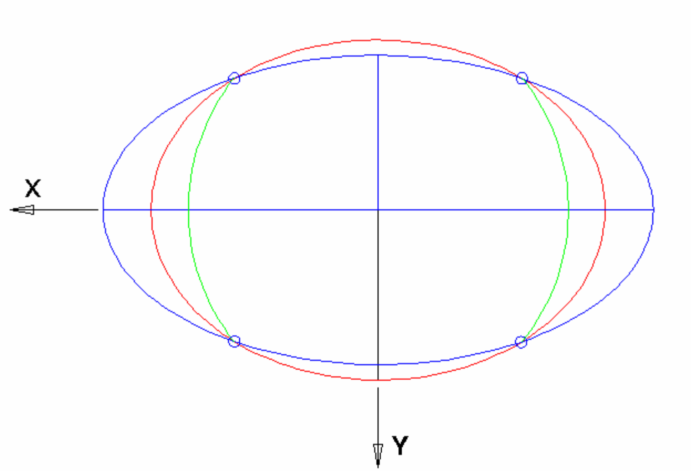
(2) $$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{h^2}$$ (Abstand h)

Zahlenbeispiel: a = 8 , b = 6 , c = 5 und h = 6.6

$$\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{6^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$$ (Ellipsoid I)

$$\frac{x^2}{9.7^2} + \frac{y^2}{5.5^2} + \frac{z^2}{3.8^2} = 1$$ (Ellipsoid II)

Die Schnittkurve zwischen diesen beiden Ellipsoiden ist die gesuchte Rollkurve s.



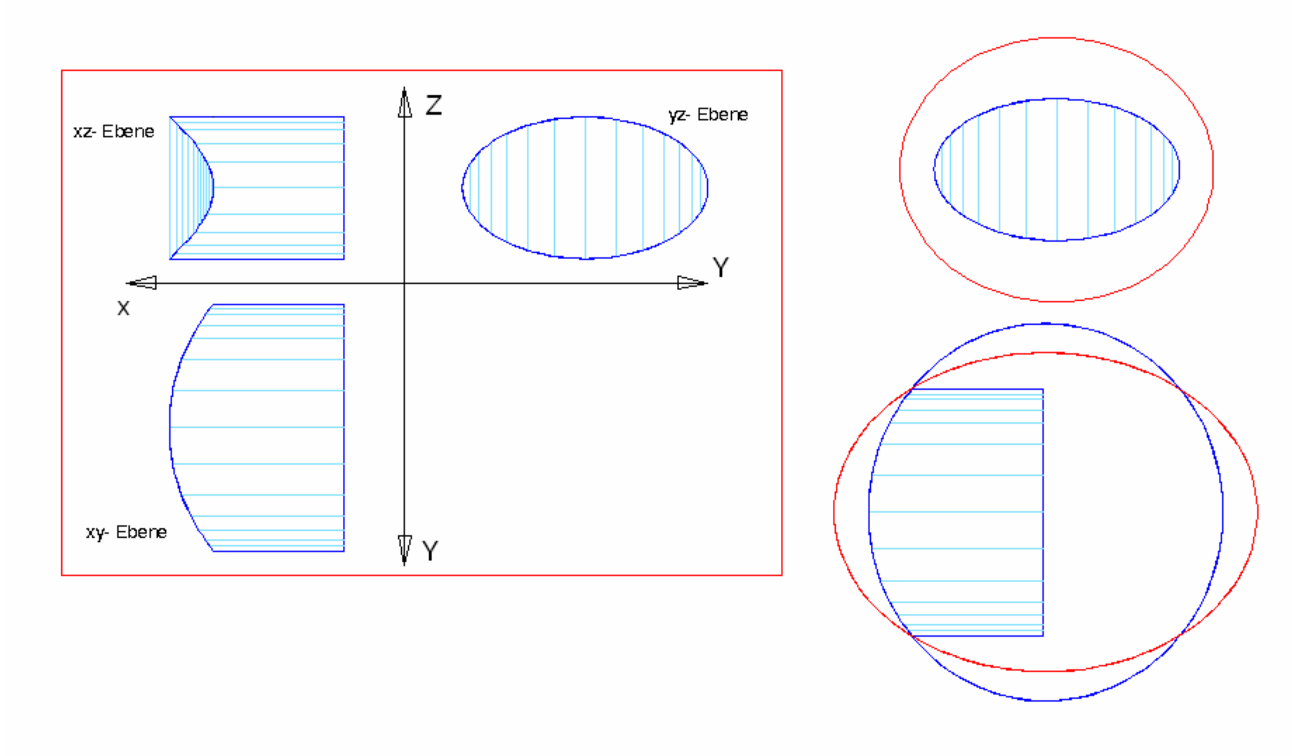
Elimination von x^2 ergibt die Projektion auf die yz- Ebene [7]:

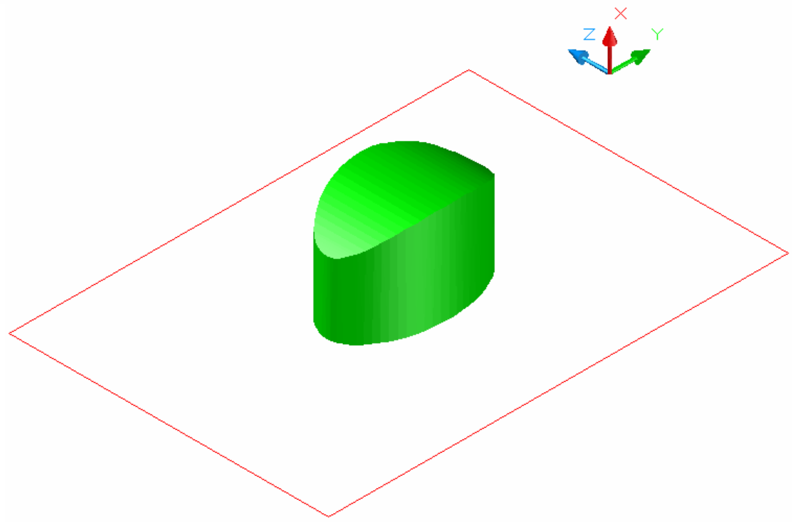
$$\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2 + \frac{a^2 - c^2}{c^4} z^2 = \frac{a^2 - h^2}{h^2}$$

$$\frac{y^2}{4.7^2} + \frac{z^2}{2.7^2} = 1 \quad \text{(Ellipse)}$$

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{3.1^2} = 1 \quad \text{(Hyperbel)}$$

$$\frac{x^2}{6.7^2} + \frac{y^2}{7.1^2} = 1 \quad \text{(Ellipse)}$$





3D-Drucker

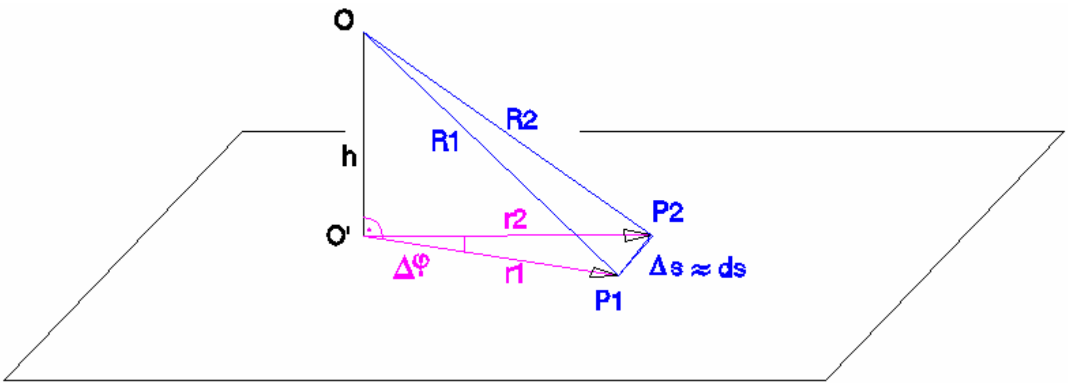
Parameterdarstellung der Kurve s auf dem Ellipsoid (Polbahn)

(1) $$x = a \cdot \left[1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right]^{1/2} = 8 \cdot [1 - 0.603 \cdot \cos^2 t - 0.301 \cdot \sin^2 t]^{1/2}$$

(2) $y = 4.661 \cdot \cos t$

$0 <= t <= \pi/2$

(3) $z = 2.742 \cdot \sin t$



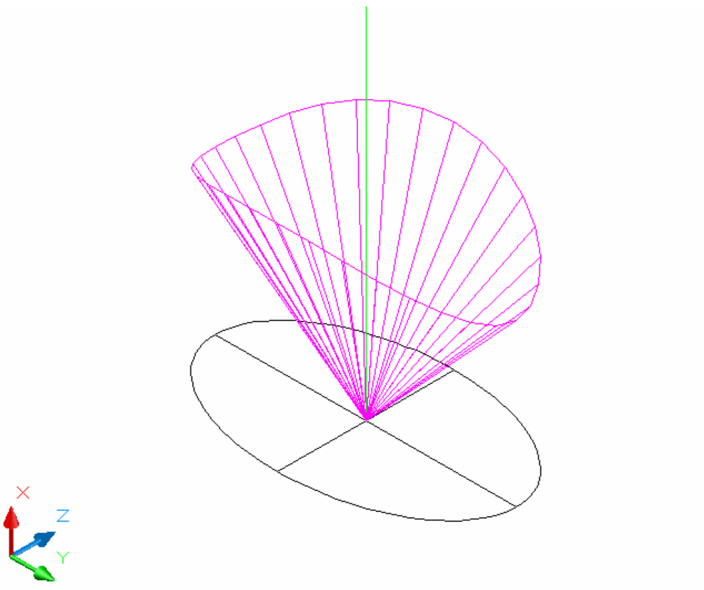
t_i	X_i	Y_i	Z_i	R_i	r_i	Δs_i	$\Delta\varphi$
0	5.0377	4.661	0	6.8632	1.8824	0.5496	16.52°
$\pi/16$	5.1104	4.5714	0.5349	6.8775	1.9339	0.6146	17.10°
$\pi/8$	5.3118	4.3062	1.0493	6.9181	2.0737	...	...
...	...	...	...	...	...	0.9129	17.74°
$\pi/2$	6.6897	0	2.742	7.2298	2.9513		

$\sum \Delta\varphi = 142.08°$

(4) $R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$, (5) $r_i = \sqrt{R_i^2 - h^2}$

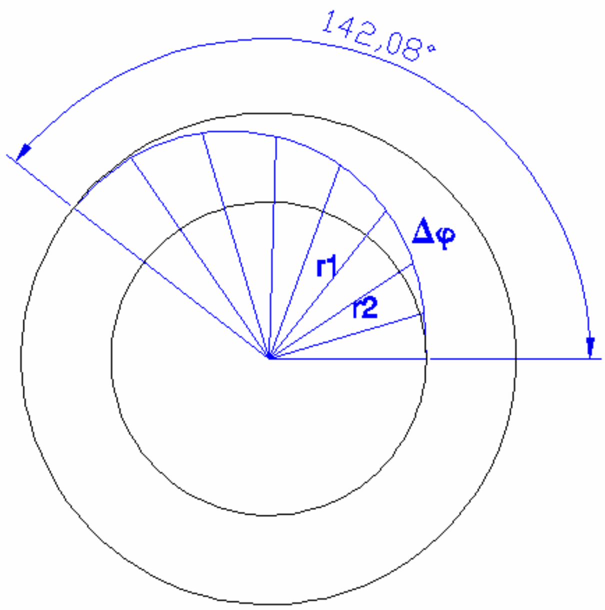
(6) $\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2}$ (Abstand zwischen P_i und P_{i+1})

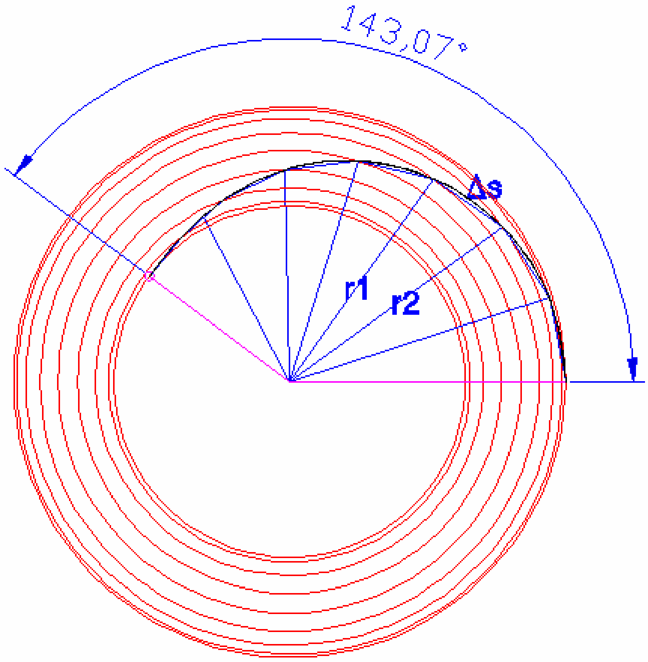
(7) $$\cos\Delta\varphi_i = \frac{(x_i \cdot x_{i+1} + y_i \cdot y_{i+1} + z_i \cdot z_{i+1}) - h^2}{r_i \cdot r_{i+1}}$$ (Winkel zwischen r_i und r_{i+1})

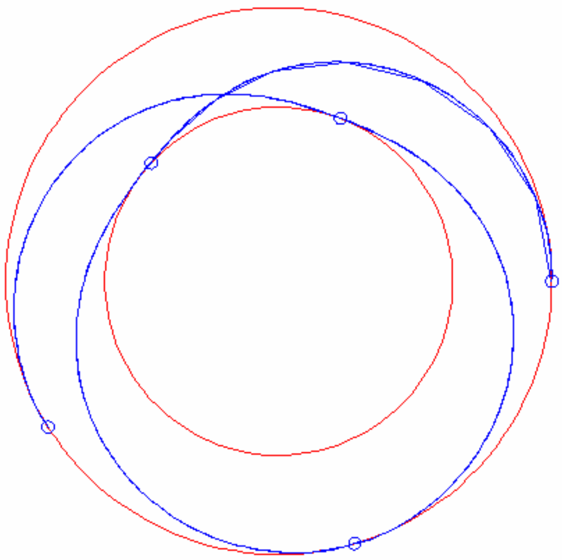


3D-Polbahn (Gangpolkegel)

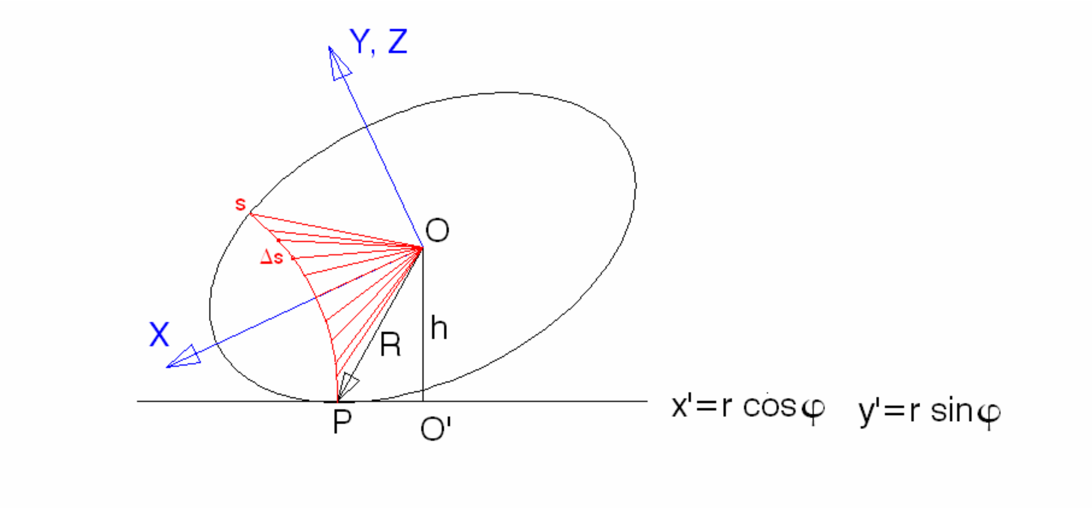
Konstruktion der Spurbahn auf der Ebene mit Hilfe von (1) bis (6):




143,07°
Δs
r1
r2



Kurve l auf der Ebene (Spurbahn oder Serpolhodie)



$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Zur Bestimmung der **Kurven l** muss die **Raumkurve s** längentreu auf die Ebene abgebildet werden.

Dazu wird das Bogendifferential (Bogenelement) der Raumkurve benötigt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \textbf{oder} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Es stehen folgende Gleichungen zur Verfügung [7]:

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{(Ellipsoid)}$$

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{h^2} \qquad \text{(Abstand h)}$$

$$(3)\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad \text{(Radius } R = \overline{OP}\text{)}$$

$$x^2 = A\,(R^2 - D) \qquad x = \sqrt{A(R^2 - D)}$$

$$y^2 = B\,(R^2 - E) \qquad y = \sqrt{B(R^2 - E)} \qquad R_{\min} \le R \le R_{\max}$$

$$z^2 = C\,(R^2 - F) \qquad z = \sqrt{C(R^2 - F)}$$

Es ist $A = A(a,b,c)$ u.s.w. und $D = D(b,c,h)$, $E = E(a,c,h)$, $F = F(a,b,h)$

$$dx^2 = R^2 dR^2 \frac{A}{R^2 - D} \quad , \quad dy^2 = R^2 dR^2 \frac{B}{R^2 - E} \quad \text{und} \quad dz^2 = R^2 dR^2 \frac{C}{R^2 - F}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = R^2 dR^2 \cdot \left[\frac{A}{R^2 - D} + \frac{B}{R^2 - E} + \frac{C}{R^2 - F} \right]$$

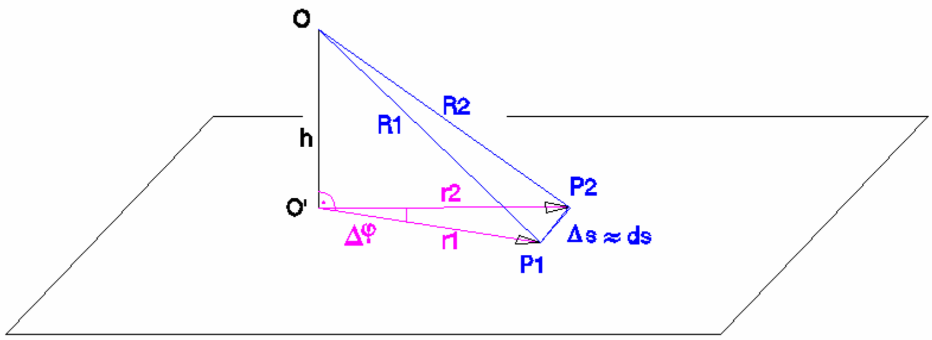
Wegen $R^2 = r^2 + h^2$ gilt $RdR = rdr$ und damit

$$\frac{ds}{dr} = r \cdot \sqrt{\frac{A}{r^2 + h^2 - D} + \frac{B}{r^2 + h^2 - E} + \frac{C}{r^2 + h^2 - F}}$$

Zahlenbeispiel: $a = 8$, $b = 6$, $c = 5$, $h = 6.6$

$$\frac{ds}{dr} = r \cdot \sqrt{\frac{3.7509}{r^2 + 3.22116} - \frac{4.20905}{r^2 - 8.70905} + \frac{1.45688}{r^2 - 3.54744}}$$

$$1.88346 < r < 2.95110$$



Polarkoordinaten in der Ebene [7]: $x' = r \cos\varphi$ $y' = r \sin\varphi$

Das Bogendifferential dl: $dl^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2$

Es muss $ds^2 = dl^2$ gelten: $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2$ oder

$$d\varphi^2 = \frac{1}{r^2}\left[ds^2 - dr^2\right]$$

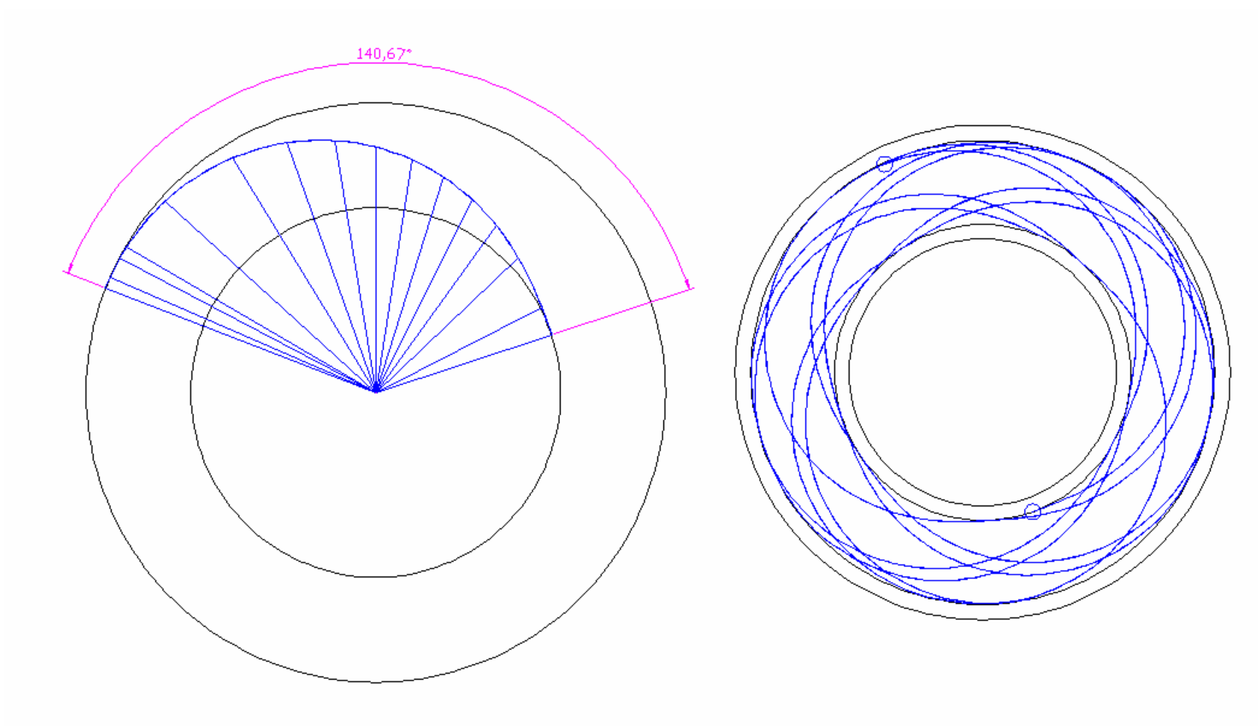
$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{A}{r^2 + h^2 - D} + \frac{B}{r^2 + h^2 - E} + \frac{C}{r^2 + h^2 - F} - \frac{1}{r^2}} = f(r)$$

Zahlenbeispiel 1a: $a = 8$, $b = 6$, $c = 5$ und $h = 6.6$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{3.7509}{r^2+3.22116} - \frac{4.20905}{r^2-8.70905} + \frac{1.45688}{r^2-3.54744} - \frac{1}{r^2}} = f(r)$$

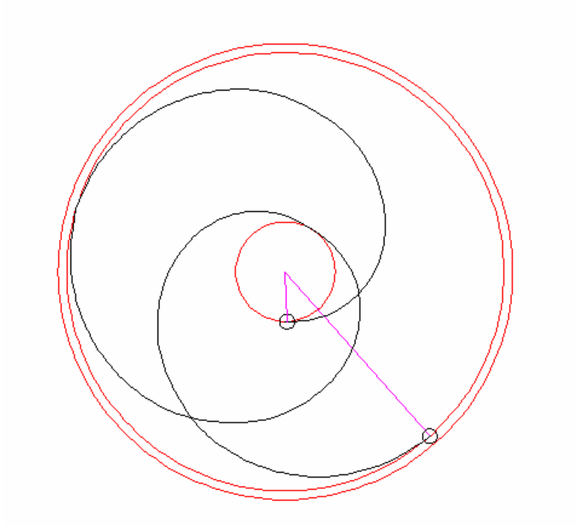
$r_{min} = 1.88346 \; < \; r \; < \; r_{max} = 2.95110$

Startwerte: $r_0 = 2.0$ und $\varphi_0 = 0$ (rad) $\quad \Delta\varphi_i = \int_{r0}^{ri} f(r)dr$



Das Ergebnis ist eine rosettenförmige Kurve.
Die Kurve ist nur dann geschlossen, wenn $n \cdot \Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ gilt (m, n = 1,2,3…).

Zahlenbeispiel 1b: a = 8 , b = 6 , c = 5 und **h = 6.05**

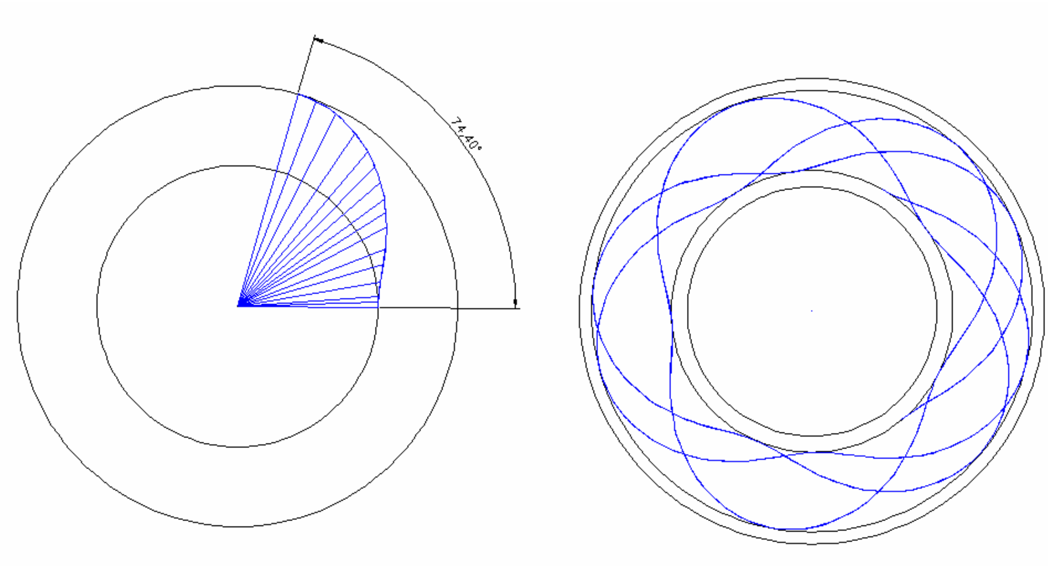


Zahlenbeispiel 2: **a = 12** , b = 6 , c = 5 und h = 6.6

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{1.61}{r^2+3.22} - \frac{1.09}{r^2-42.80} + \frac{0.48}{r^2-17.43} - \frac{1}{r^2}}$$

$r_{min} = 4.18 \quad < r < \quad r_{max} = 6.54$

Startwerte: $r_0 = 5.0$ und $\varphi_0 = 0$



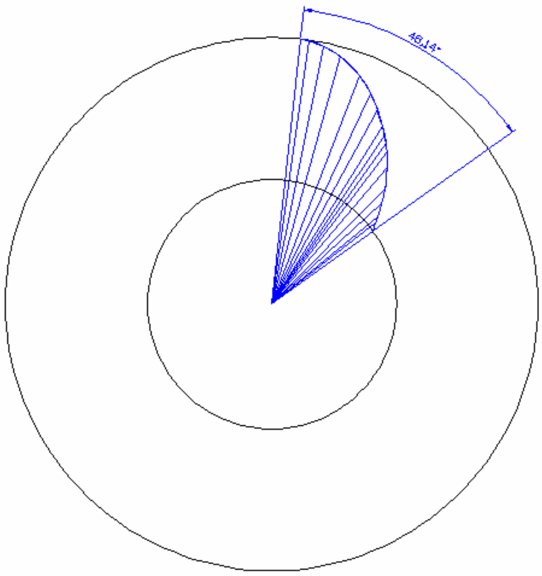
Das Ergebnis ist eine wellenförmige Kurve (Herpoloide bzw. Serpoloide [4]).

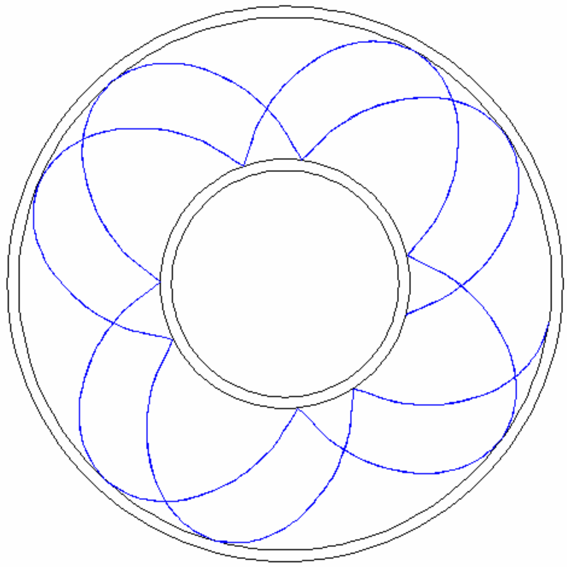
Zahlenbeispiel 3: a = 12 , b = 6 , **c = 3** und h = 6.6

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{1.42}{r^2+6.0} - \frac{0.44}{r^2-79.69} + \frac{0.022}{r^2-17.43} - \frac{1}{r^2}}$$

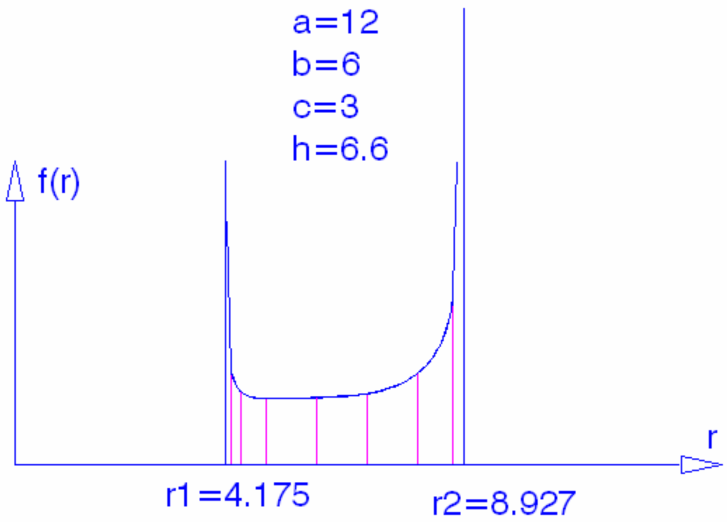
$r_{min} = 4.18 \quad < r < \quad r_{max} = 8.92$

Startwerte: $r_0 = 6.0$ und $\varphi_0 = 0$





Das Ergebnis ist eine Kurve mit Spitzen.



Der Sonderfall h = b: Spirale

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(Ellipsoid)}$$

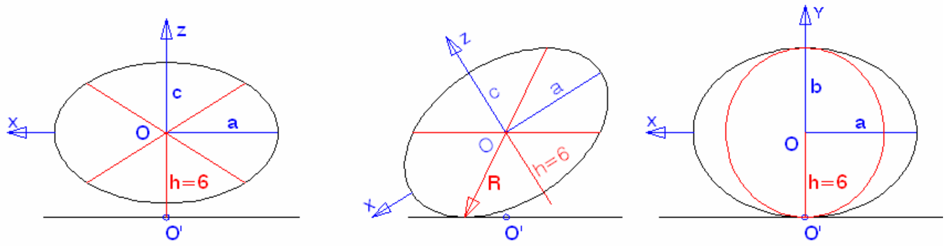
$$(2)\,) \quad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=1 \qquad \text{(Abstand h=b)}$$

Zahlenbeispiel: a = 8 , b = 6 , c = 5 und **h = b = 6**

$$\frac{y^2}{6^2}+\frac{z^2}{3.53^2}=1 \qquad \text{(Ellipse in der yz- Ebene))}$$

z = + 0.623 x und z = - 0.623 x (zwei Geraden in der xz- Ebene)

$$\frac{x^2}{5.66^2}+\frac{y^2}{6^2}=1 \qquad \text{Ellipse in der xy- Ebene)}$$



$$\frac{d\varphi}{dr}=\sqrt{\frac{A}{r^2+h^2-D}+\frac{B}{r^2+h^2-E}+\frac{C}{r^2+h^2-F}-\frac{1}{r^2}}=f(r)$$

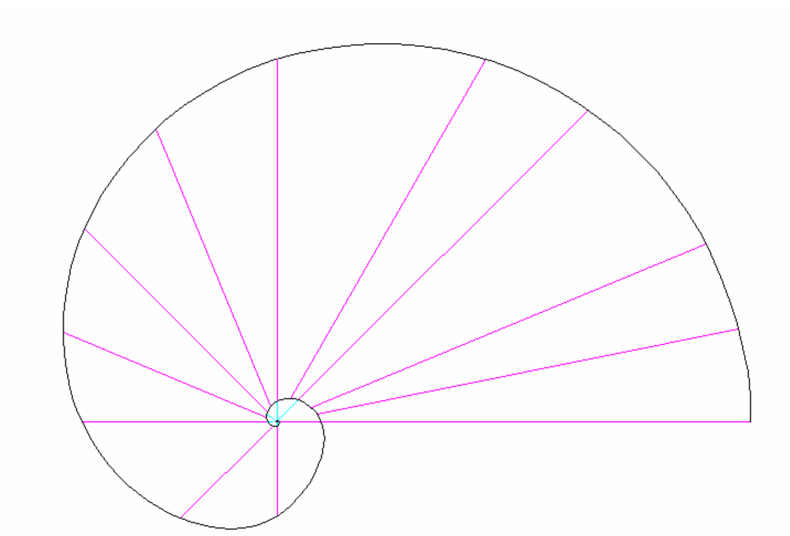
$$\frac{d\varphi}{dr}=\sqrt{\frac{3.7509}{r^2}-\frac{4.20779}{r^2-8.5555}+\frac{1.45688}{r^2}-\frac{1}{r^2}}$$

$r_{min} = 0 < r < r_{max} = 2.9249$

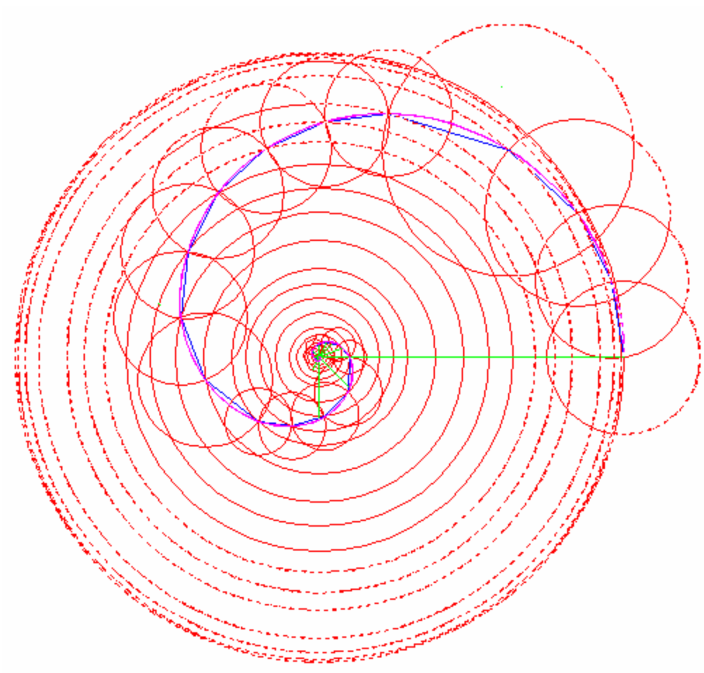
$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{6}{r\cdot\sqrt{8.5555-r^2}}$$

Formelsammlung[2]: $\varphi=\frac{-6}{2.925}\ln\left(\frac{2.925+\sqrt{8.5555-r^2}}{r}\right)$ Spirale)

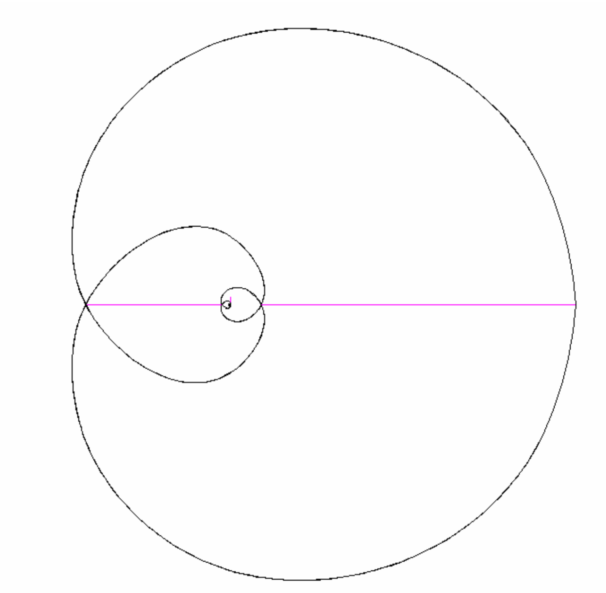
Die Auflösung nach r ergibt: $r=\frac{2.925}{\cosh(0.487\varphi)}$ (Polargleichung der Spirale) mit $\cosh(0{,}487\varphi) = (e^{0.487\varphi} + e^{-0.487\varphi})/2$

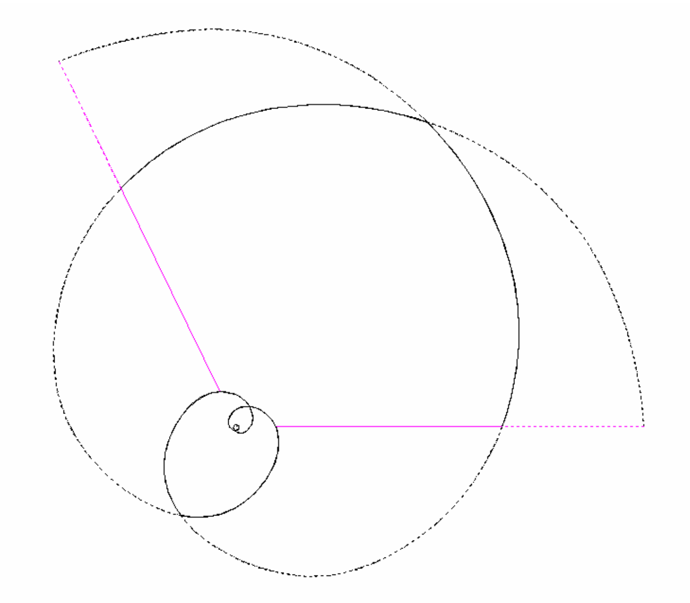


Die Länge der Spirale ist gleich einem Viertel des Ellipsenumfangs: U/4 = 9.96 L. E.



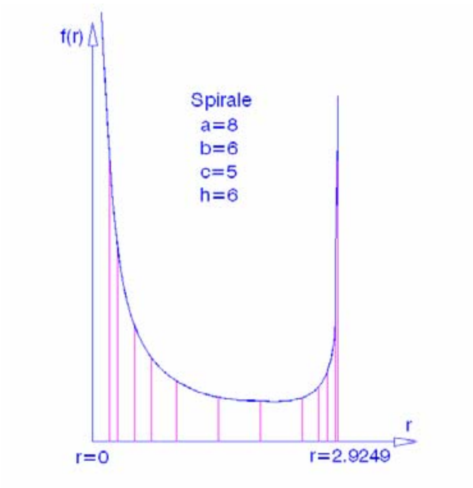
Diese Spirale wurde mit Hilfe der Tabelle konstruiert nach Abschnitt Polbahn konstruiert.



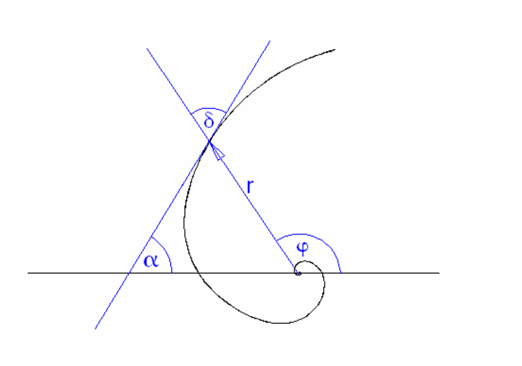


Die Spirale hat eine endliche Länge (U/4 = 9.96 L.E,), rotiert jedoch unendlich oft um das Zentrum.

$$f(r) = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{6}{r \cdot \sqrt{8.5555 - r^2}} = \frac{6}{r \cdot (\sqrt{2.9249 - r}) \cdot (\sqrt{2.9249 - r})}$$



Der Kurswinkel δ [13]:



Es gilt [12]: $\delta = \varphi - \alpha$ und $\tan\delta = \dfrac{r}{r'}$ mit $r' = \dfrac{dr}{d\varphi}$

$$\tan\delta = \frac{b}{\sqrt{\beta^2 - b^2 - r^2}} = \frac{6}{\sqrt{44.56 - 36 - r^2}}$$

Für $r \to 0$ gilt $\tan\delta = 2.05$, d.h. $\delta = 64°$.

Polarkoordinaten

Polargleichung der Spirale: $r = \dfrac{2.925}{\cosh(0.487\varphi)}$

Polarkoordinaten: $x = \dfrac{2.925}{\cosh(0.487\varphi)}\cos\varphi \qquad y = \dfrac{2.925}{\cosh(0.487\varphi)}\sin\varphi$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-0.487 \cdot \tanh(0.487\varphi) \cdot \sin\varphi + \cos\varphi}{-0.487 \cdot \tanh(0.487\varphi) \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}$$

Für große Werte φ strebt tanh(0.487φ) gegen 1 und man erhält: $y' \approx \dfrac{-0.487 \cdot \tan\varphi + 1}{-0.487 - \tan\varphi}$

Setze: $\varphi = n \cdot \pi + x$ (n = 1, 2, 3 …)

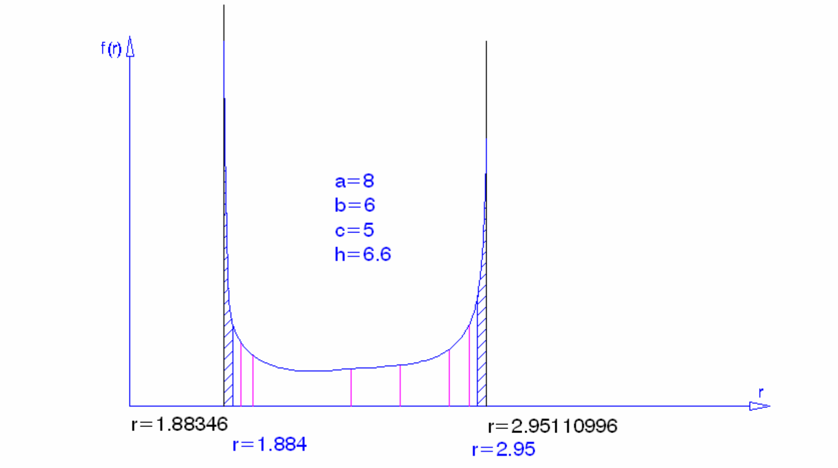
Die Funktion tanφ ist π- periodisch, d. h. $\tan(n \cdot \pi + x) = \tan x$ mit $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

Mit $\tan\varphi = 0$ erhält man $y' = \dfrac{1}{-0.487} = -2.0534$ und $\alpha = -64°$.

Für $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ist $\tan\varphi = \infty$, $y' = 0.487$ und $\alpha = 26°$.

Zum Polarwinkel Δφ

a =8, b = 6, c = 5, h = 6.6



$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{3.7509}{r^2 + 3.22116} - \frac{4.20779}{r^2 - 8.70905} + \frac{1.45688}{r^2 - 3.54744} - \frac{1}{r^2}}$$

Rechte Grenze: $r_b = 2.95$ $r_{max} = 2.95110996 = \sqrt{8.70905}$

Näherungsweise Berechnung des Integral:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{0.607 - \frac{0.7131}{r - r_{\max}} + 0.2826 + 0.1149} =$$

$$= \sqrt{\frac{0.7131}{r_{\max} - r} + 1.0045} \approx \frac{0.8445}{\sqrt{r_{\max} - r}}$$

Unter der Wurzel kann 1.0045 vernachlässigt werden, weil $1.0045 << \frac{0.7131}{r_{\max} - r_b} \approx 642.46$ ist.

$$\Delta\varphi_1 = \int_{8.926}^{r_{\max}} \frac{0.8445}{\sqrt{r_{\max} - r}} dr = 0.8445 \cdot \left[-2\sqrt{r_{\max} - r}\right]_{2.95}^{2.95110996} = 0.0627 rad = \underline{\underline{3.224^0}}$$

Kontrolle: Näherungsweise Berechnung des Integrals mit der Rechteckformel:

$$\int_b^a f(r) \cdot dr \approx (b - a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Es ist $\dfrac{a+b}{2} = 2.9506$ und $f(2.9506) = 25.348$.

$$\int_{2.95}^{2.95110996} f(r)\cdot dr \approx (2.95110996 - 2.95)\cdot 25.348 = 0.028 rad = \underline{\underline{1.61^o}}$$

Linke Grenze: $r_a = 1.884$ $r_{min} = \sqrt{3.54744} = 1.88346$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{3.7509}{r^2+3.22116} - \frac{4.20779}{r^2-8.70905} + \frac{1.45688}{r^2-3.54744} - \frac{1}{r^2}}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{0.554-(-0.8155)+\frac{0.3867}{r-r_{\min}}+0,2817} = \sqrt{1.6512+\frac{0.3867}{r-r_{\min}}} \approx \frac{0.6219}{\sqrt{r-r_{\min}}}$$

weil $1.6512 << \dfrac{0.3867}{\sqrt{1.884-r_{\min}}} = 716.11$ ist.

$$\Delta\varphi_2 = \int_{1.884}^{r_{\min}} \frac{0.6216}{\sqrt{r-r_{\min}}} dr = -0.6216\cdot\left[2\sqrt{r-r_{\min}}\right]_{r_{\min}}^{1.884} = -0.02889 rad = -\underline{\underline{1.655°}}$$

Der Polarwinkel $\Delta\varphi$:

$r_{\min} = 1.884 \rightarrow \varphi_{\min} = -70.36°$

$r_{\max} = 2.95 \rightarrow \varphi_{\max} = 66.62°$

$\Delta\varphi = 70.36° + 1.655° + 66.62° + 3.224° = \underline{\underline{141.86°}}$

Literatur

[1] M. Abraham u. R. Becker: Theorie der Elektrizität Band I, Teubner Verlag Leipzig und Berlin, 1930
[2] H.-J. Bartsch: Mathematische Formeln, Fachbuchverlag Leipzig, 21. Auflage, 1986
[3] T. Fließbach: Elektrodynamik, 4. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 2005
[4] W. Greiner: Theoretische Physik, Band 2: Mechanik II, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt a. M. , 1986
[5] O.D. Kellog: Foundations of Potential Theory, Dover Publications, New York, 1954
[6] L.D. Landau und E.M. Lifschitz: Elektrodynamik der Kontinua, Band VIII, Vieweg Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M. 1961
[7] L. Poinsot: Théorie nouvelle de la rotation des corps, Journal de mathémathiques pures et appliqués, tome 16 (1851), p. 9-129
[8] L. Poinsot: Neue Theorie der Drehung der Körper, Übersetzung von K. H. Schellbach, Berlin, 1851, Druck und Verlag von A.W. Hayn
[9] R. Rothe: Höhere Mathematik, Bd. I , Teubner Verlag, Leipzig, 1948
[10] A. Sommerfeld: Elektrodynamik, Bd. III , Verlag Harry Deutsch, Frankfurt, 2001
[12] W.I. Smirnow: Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil I, VEB Verlag Berlin, 1963
[13] W. Wunderlich: Darstellende Geometrie, Bd. 2, HTB Bd. 133, Mannheim, 1967