



# Geometrisches Modellieren

zwischen Rekonstruktion und Design

# KMK Bildungsstandards 2003

## Kompetenzen und Leitideen

### **(K 3) Mathematisch modellieren**

Dazu gehört

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, übersetzen in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen,
- in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen

### **Mathematisch modellieren**

Dazu gehört:

- vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen
- Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, vornehmen
- komplexe oder unvertraute Situationen modellieren

# KMK Bildungsstandards 2003

## Allgemeine mathematische Kompetenzen (vgl. PISA-Studie)

- (K 1) Mathematisch argumentieren
- (K 2) Probleme mathematisch lösen
- **(K 3) Mathematisch modellieren**
- (K 4) Mathematische Darstellungen verwenden
- (K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik

## inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, geordnet nach fünf mathematischen Leitideen

- (L 1) Leitidee Zahl
- (L 2) Leitidee Messen
- **(L 3) Leitidee Raum und Form**
- (L 4) Leitidee Funktionaler Zusammenhang
- (L 5) Leitidee Daten und Zufall

# Thesen zum Modellieren

- Das mathematische Modellieren ist ein Übersetzen in Mathematik.
- Die Weiterverarbeitung („Arbeiten im Modell“) ist nicht Teil des Modellierens.
- Modellieren und Unterrichtsalltag – das passt nicht zusammen.
- Modellieren und „PISA“-Aufgaben – das passt nicht zusammen
- Parametrische Lösungen („Szenarios“) ersetzen Lösungsformeln.
- Modellieren und CAS – das passt nicht zusammen.
- Der Computer ist ein Standardwerkzeug beim Modellieren.
- Betrachtungen über Genauigkeit der Eingangsdaten sind unverzichtbar.
- Der modellierte Sachverhalt muss kein realer sein.

# Thesen zum Geometrischen Modellieren

- Der Computer ist ein Standardwerkzeug beim GM.
- Innerfachlich geht es um Koordinaten- und Differentialgeometrie (Numerik).
- Die Validierung eines geometrischen Modelles erfolgt in der Regel visuell.
- Für räumliches Modellieren ist Darstellende Geometrie die Grundlage.
- Arbeiten mit Material („Basteln“) sollte mit in Betracht gezogen werden.
- Kinematische Modellierungen („Simulationen“) sollten stärker einfließen.
- Die Möglichkeiten, fächerübergreifend zu modellieren, werden missachtet.

# Modellierungsaufgaben

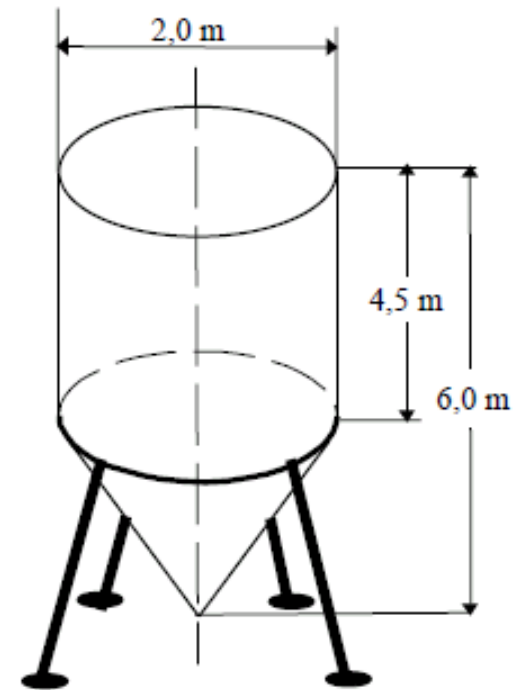
- **Komplexität**
- **Kontextfreiheit**
- **Potentielle Uferlosigkeit**



## (14) Wassertank

### Aufgabenstellung

In der nebenstehenden Abbildung ist ein Wassertank dargestellt.  
(Abbildung nicht maßstabsgerecht)



- a) Überschlagen Sie das Gesamtvolumen des Tanks und kreuzen Sie an.

Überschlag, zum Beispiel

(1)  $V_{\text{Tank}} \approx V_{\text{Zylinder}} \approx 18 \text{ m}^3$  oder

(2)  $V_{\text{Tank}} \approx V_{\text{Quader}} = 24 \text{ m}^3$

Damit ist **15 m<sup>3</sup>** der anzukreuzende Wert.

# Modellierungsaufgabe für PISA-Erhebungen:

IQB Klassenstufe 9

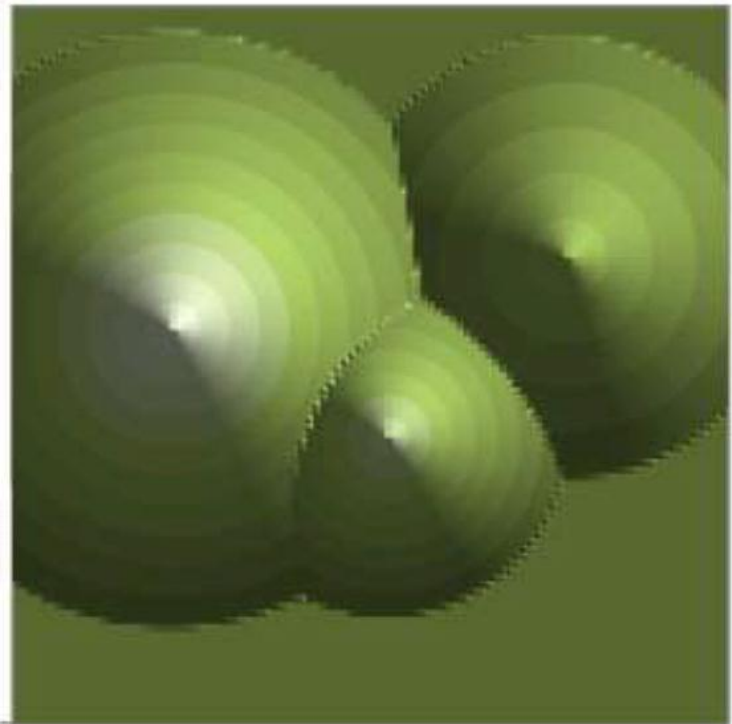
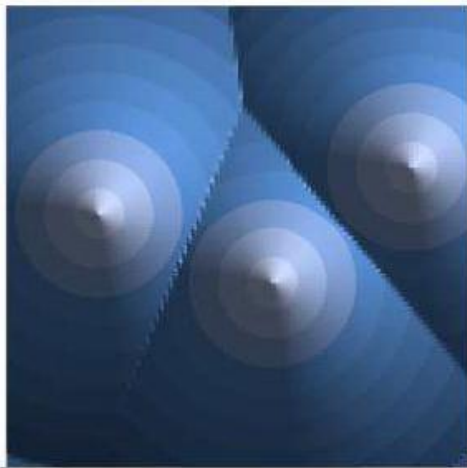
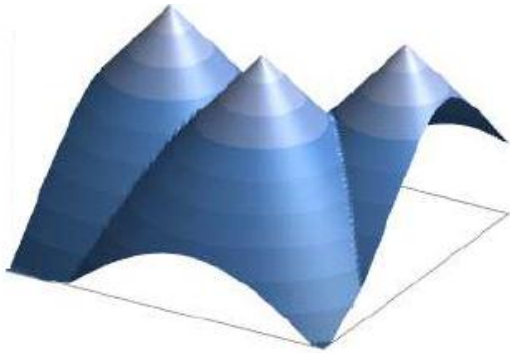
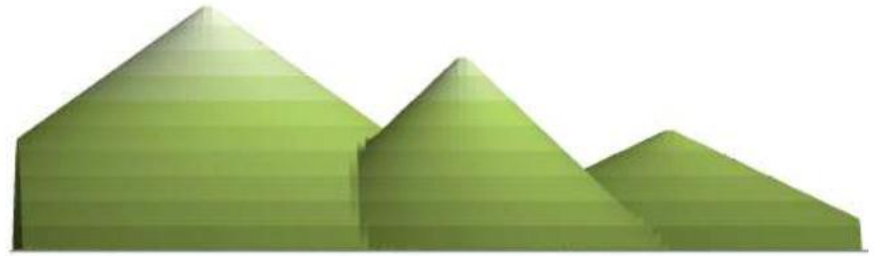
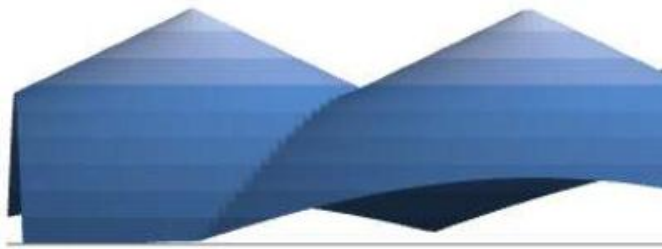
## Implementationsaufgaben für Mathematik Sek I

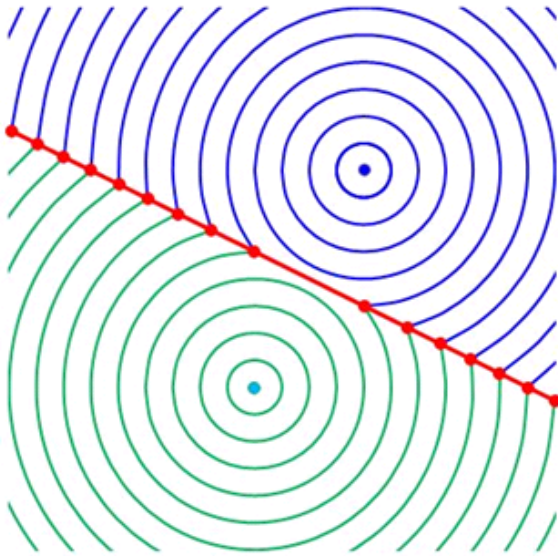
Leitideen	Allgemeine Kompetenzen
<ul style="list-style-type: none"><li><input type="radio"/> L1 Zahl</li><li><input type="radio"/> L2 Messen</li><li><input checked="" type="radio"/> L3 Raum und Form</li><li><input type="radio"/> L4 Funktionaler Zusammenhang</li><li><input type="radio"/> L5 Daten und Zufall</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li><input type="checkbox"/> K1 Mathematisch argumentieren</li><li><input type="checkbox"/> K2 Probleme mathematisch lösen</li><li><input checked="" type="checkbox"/> K3 Mathematisch modellieren</li><li><input type="checkbox"/> K4 Mathematische Darstellungen verwenden</li><li><input type="checkbox"/> K5 Mit Mathematik symbolisch/ formal/ technisch umgehen</li><li><input type="checkbox"/> K6 Mathematisch kommunizieren</li></ul>

Trinkpäckchen

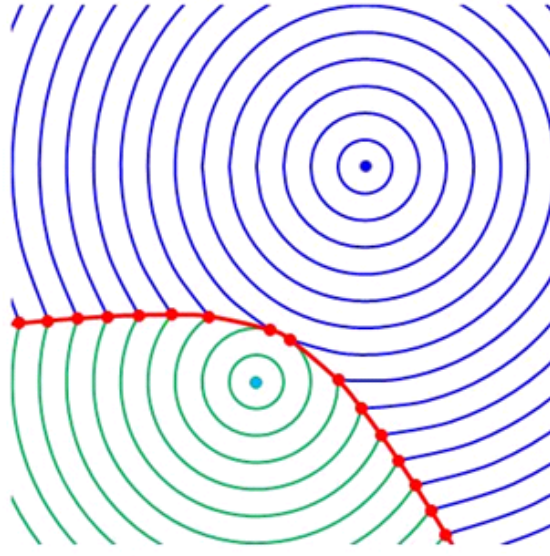




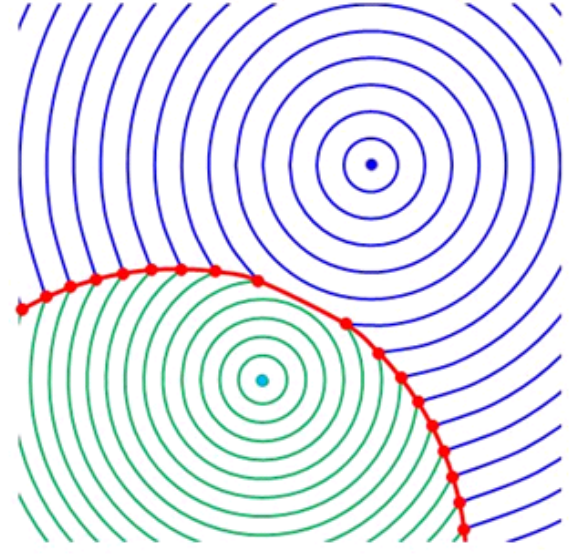




Gleicher Abstand:  
**Geraden**



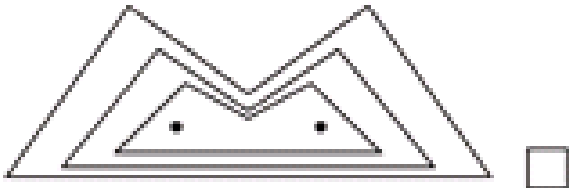
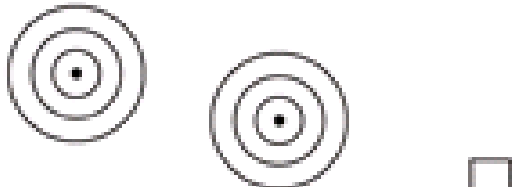

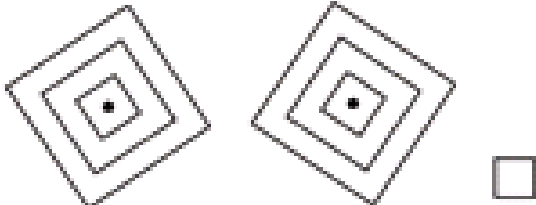
Gleiche Abstandsdifferenz:  
**Hyperbeln**



Gleiches Abstandsverhältnis:  
**Kreise**

- c) In einer Höhengschichtenkarte werden Punkte gleicher Höhe zu Linien verbunden und entsprechend des Maßstabes dargestellt. Dies ermöglicht eine anschauliche Darstellung der Höhenverhältnisse im Gelände. Nachfolgend siehst du vier dieser Darstellungen.


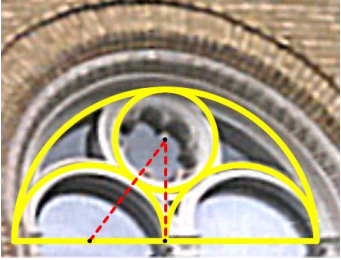
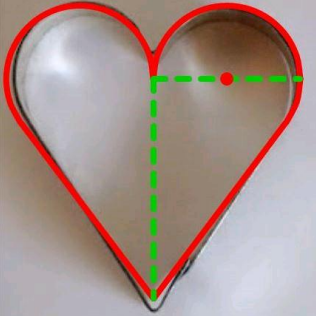
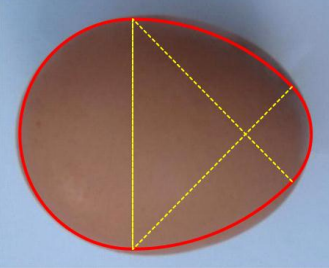
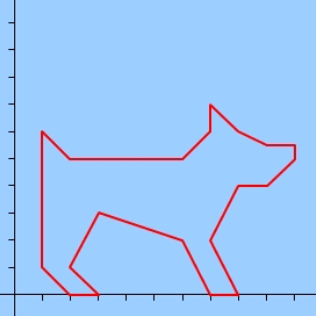
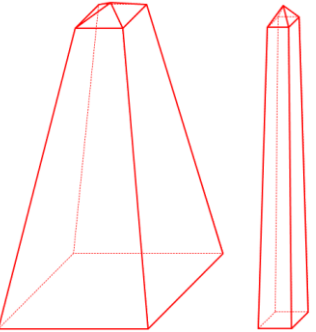
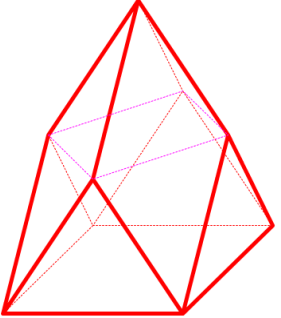
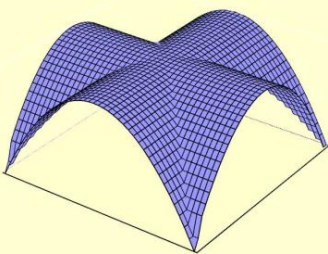
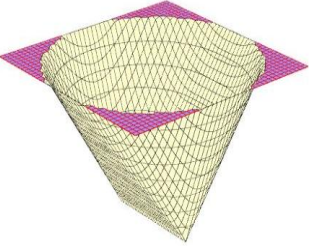
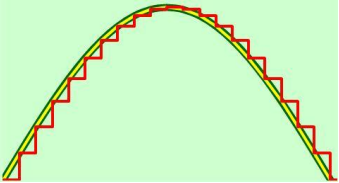
Welche passen am besten zum Foto? Kreuze an.

A	B
	
C	D
	

# Übersicht

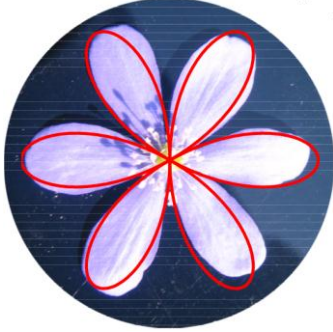
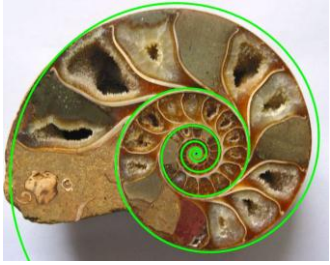
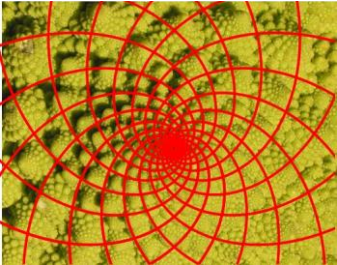
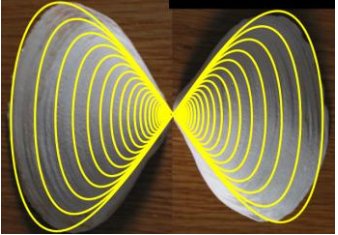

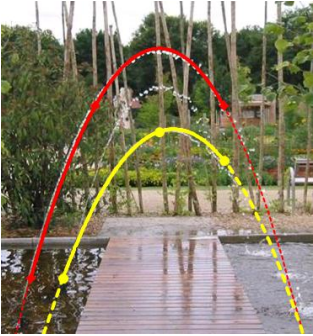
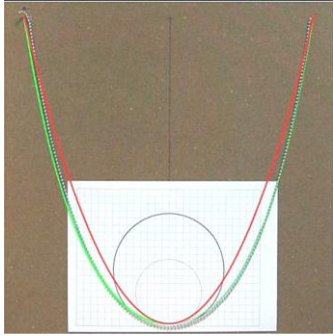
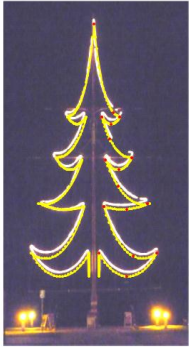

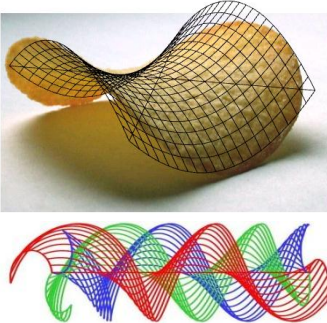
<b>Technik</b>	E	Elementargeometrie	10	
	D	Differentialgeometrie	11	Objekte
	A	Differentialgeometrie	10	Verfahren
<b>Ziel</b>	S	Visualisierung	9	Statisch
	K	Visualisierung	10	Kinematisch Allgemein
	F	Visualisierung	10	Kinematisch Fachlich
	R	Replikation	<b>Modellieren:</b> Wiedergabe einer augenfälligen Gegebenheit  <b>Visualisieren:</b> Aufdeckung eines verborgenen Sachverhalts Aufweis eines theoretischen Hintergrunds Umsetzung eines abstrakten Sachverhalts Illustration eines imaginierten Sachverhalts	
	P	Produktion		
<b>Darstellung</b>	T	Projektion		

# Technik: Elementargeometrisch

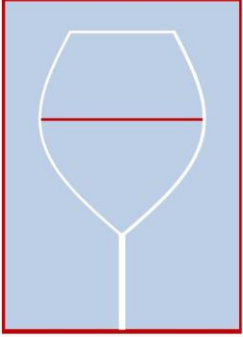

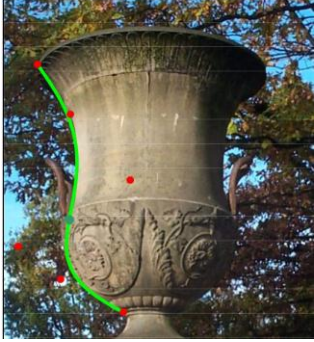
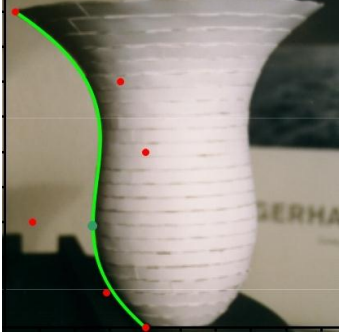
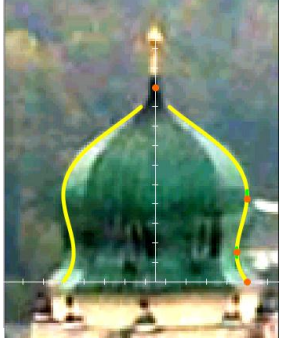


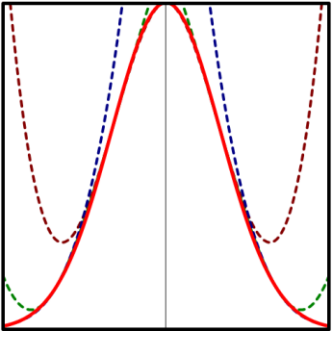
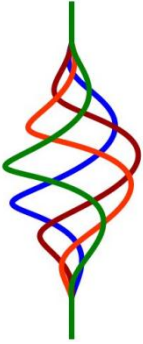
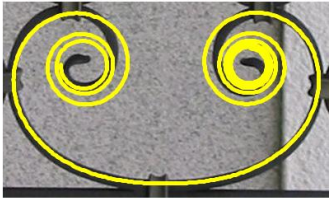
				
Tanne	Maßwerk	Backform	Ei	Hund
				
Metronom      Basilisk	Rautendach	Kreuzgang	Kaffeefilter	Blumenbeet (Umrandung)



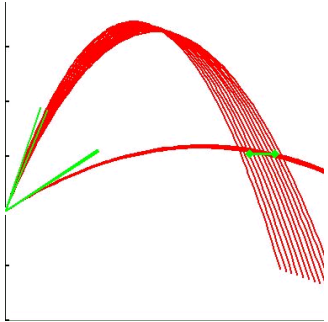
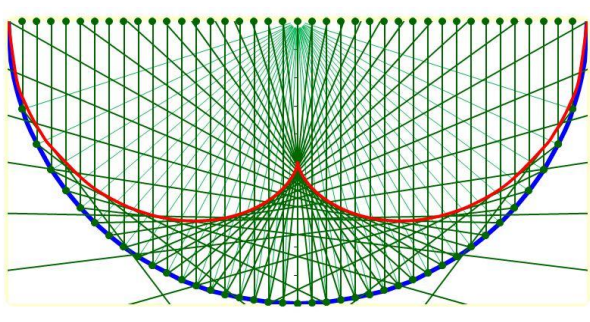
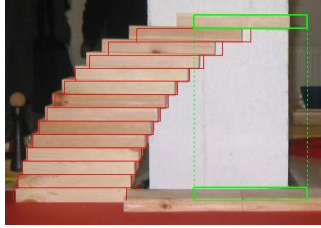
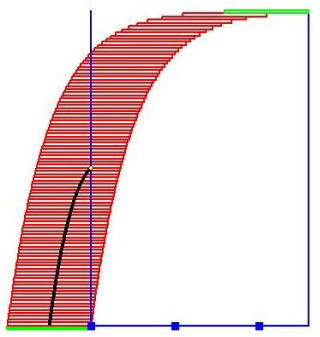


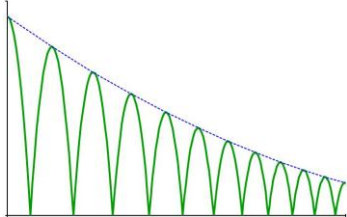

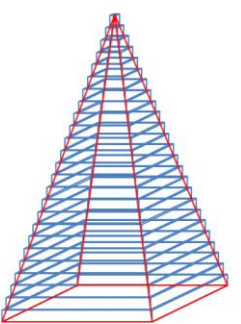
# Technik: Differentialgeometrisch - Objekte

				
Leberblümchen	Phylloceras	Romanesco-Kohl	Venusmuschel	Kegelmuschel
				
Fontäne	Hängende Kette	Weihnacht am Rhein Speyer	Niemeyer-Kirche Brasilia	Chips Nudel

# Technik: Differentialgeometrisch - Verfahren

				
Vorgabe-Typ	Polynomisch	Bezier	Bezier statt polynomisch	Polynomisch (Passau)
				
Superellipse Stockholm - Sergels Torg	Übergang differenzierbar	Spline	Raumkurve Zirbel	Krümmung quadr. Gitterelement

# Ziel: Visualisierung (Statisch)

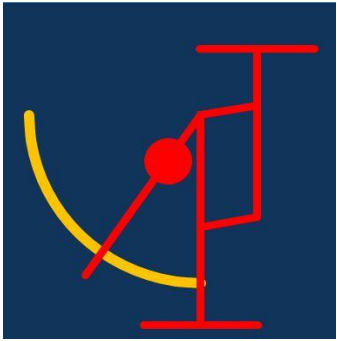
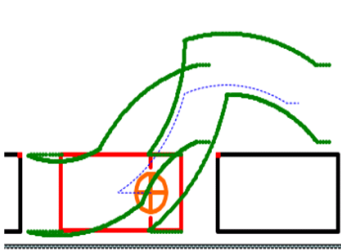
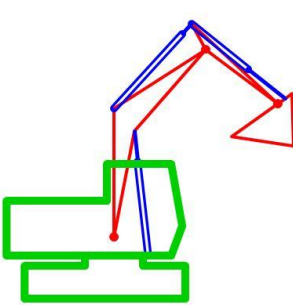
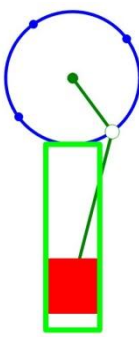
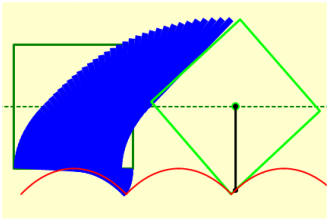
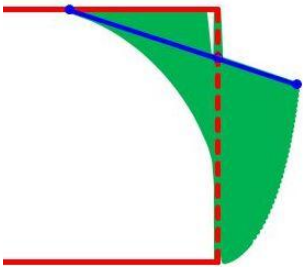
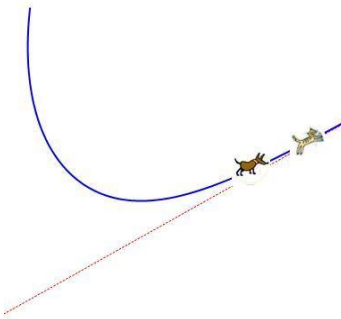
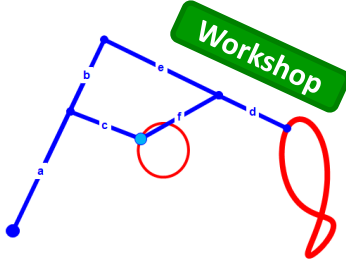
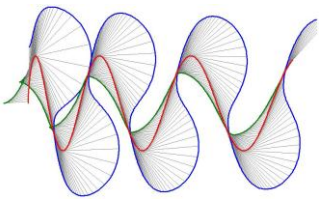
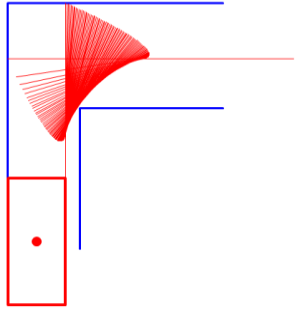
			
<b>V</b> Basketball: Korbwurf	<b>T</b> Grabinger 1997 „Simulation“ - „Modellierung einer lebensnahen Erscheinung“	<b>T</b> Bauklotz-Überhang	<b>A</b> Divergenz der Harmonischen Reihe
			
<b>T</b> Oberflächen-Minimum mit Kegelstümpfen	<b>T</b> Brachistochrone Denkmal in Groningen	<b>V</b> Sprunghöhen beim Flummi	
		<b>A</b> Konvergenz	<b>A</b> Approximation

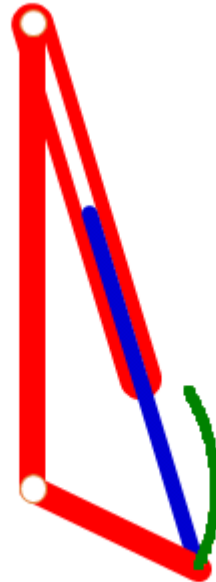
„Zu den in der Geometrie authentisch und dennoch elementar darstellbaren Tätigkeiten gehören das Aufklären von Phänomenen, das Aufdecken verborgener Beziehungen und die Präzisierung qualitativer Beziehungen. Neubrand

Aufdeckung eines **V**erborgenen Sachverhalts  
 Aufweis eines **T**heoretischen Hintergrunds  
 Umsetzung eines **A**bstreten Sachverhalts  
 Illustration eines **I**maginierten Sachverhalts



# Ziel: Visualisierung (Kinematisch)

				
Briefwaage	Einparken	Bagger	Hubkolben	Quadratische Räder
				
Garagentor	Hund verfolgt Katze	Entenschnabel	Fahren mit Hänger	Gangbreite

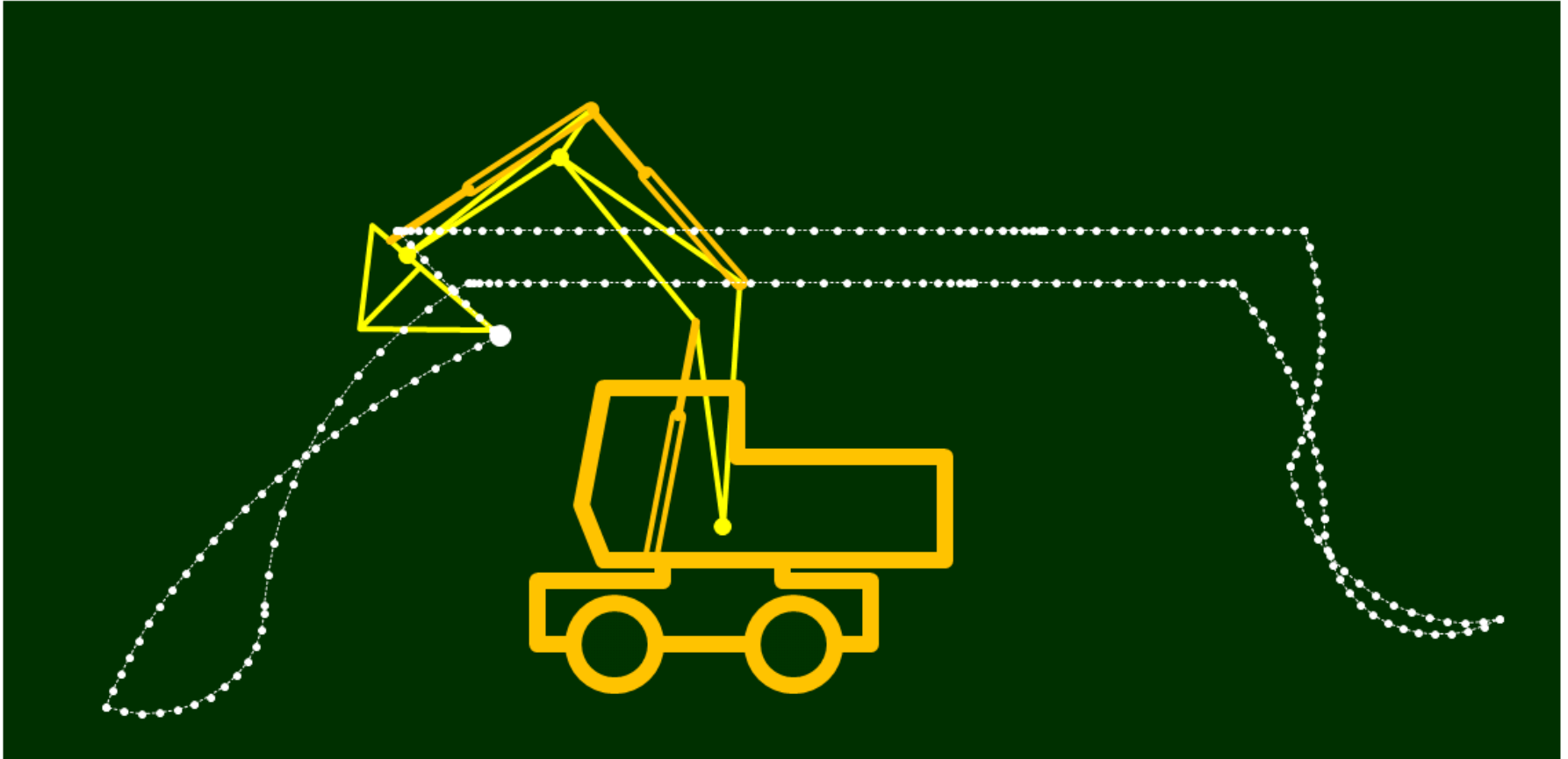


**Roth MU 5-2010: Bagger „Phänomene geometrisch modellieren“**

**Function SchnittKK(P, r, Q, s, nr, stelle)**



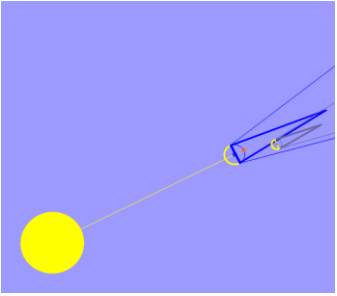
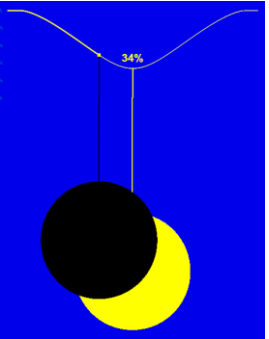
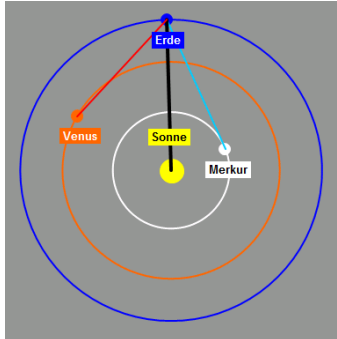
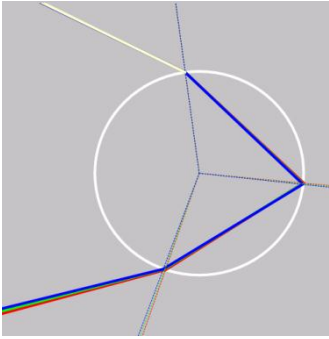
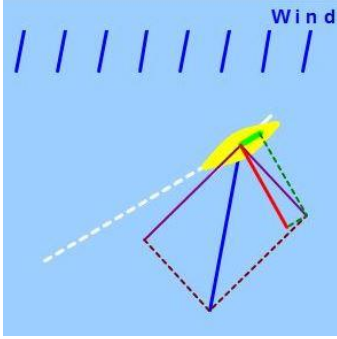
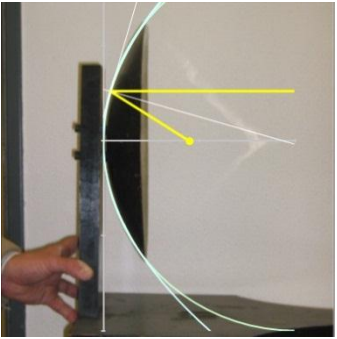
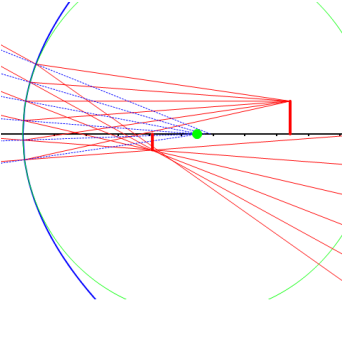
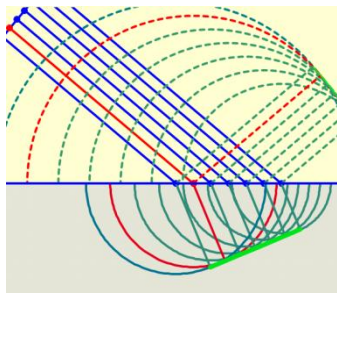
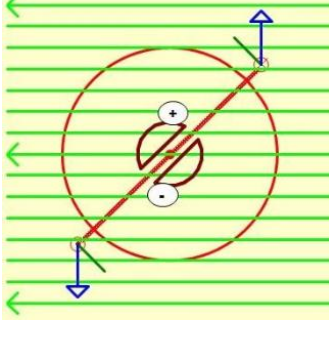
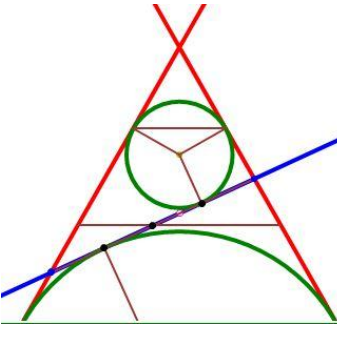




Bewegung programmierbar über 12 Zwischenstationen

Baggertour

# Visualisierung (Kinematisch: Physik, Mathematik)

				
<b>V</b> Mondfinsternis	<b>V</b> Sonnenfinsternis	<b>V</b> Venus als Abendstern	<b>T</b> „Regenbogen“	<b>T</b> Windkraftzerlegung beim Segeln
				
<b>T</b> Parabolspiegel	<b>T</b> Strahlenmodell: Hohlspiegel	<b>T</b> Beugung nach Huygens	<b>T</b> Elektromotor	<b>A</b> Dandelinsche Kugeln: Kegelschnitte

Aufdeckung eines **V**erborgenen Sachverhalts  
 Aufweis eines **T**heoretischen Hintergrunds  
 Umsetzung eines **A**bstakten Sachverhalts

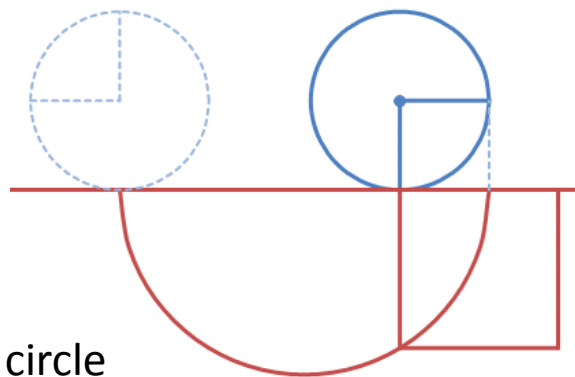
# These:

Visualisierungen zur Ortslinienerzeugung sind als Modellierungen einzustufen ferner auch die zur mechanischen Erzeugung von Kurven insgesamt.

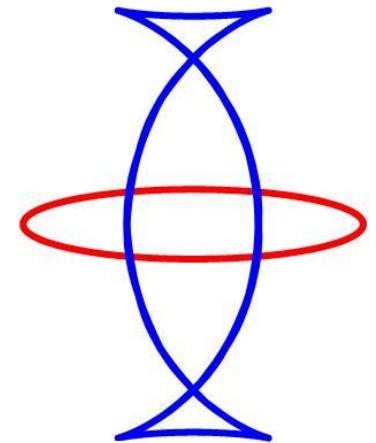
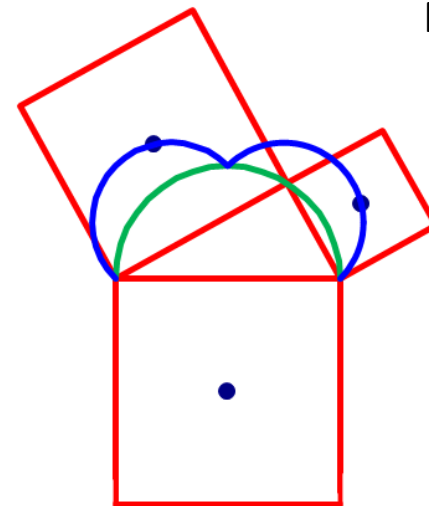
## Probleme:

Wie steht es um Dynamische Visualisierungen zu innermathematischen Sachverhalten?

Wie steht es um die Einordnung der „Visuell-Dynamischen Beweise“?



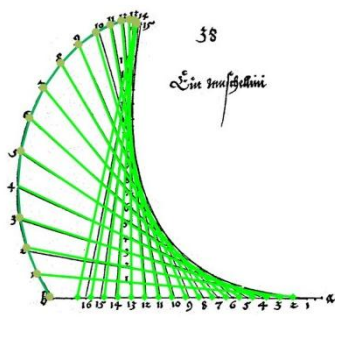
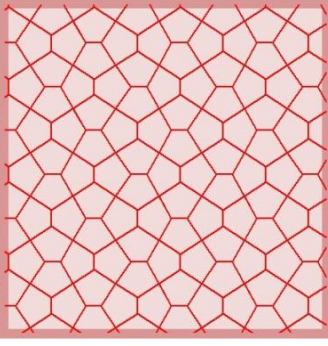
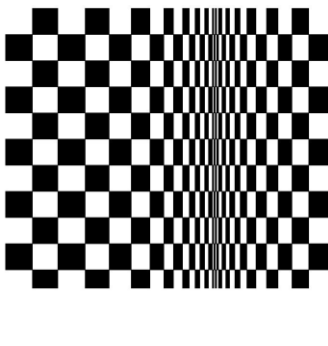


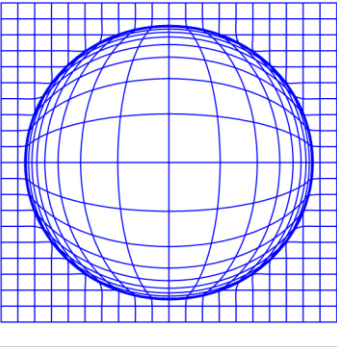
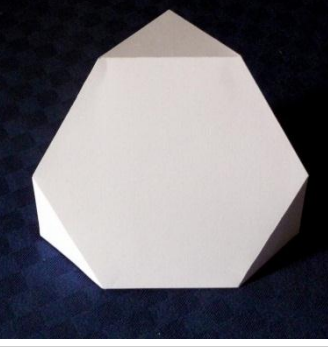
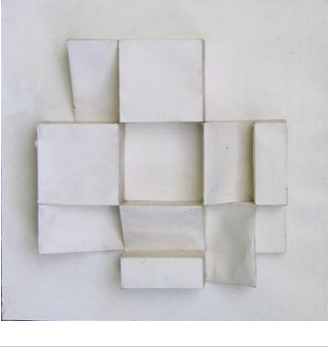
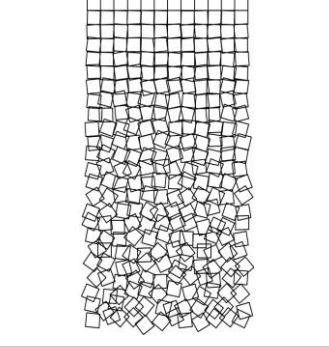
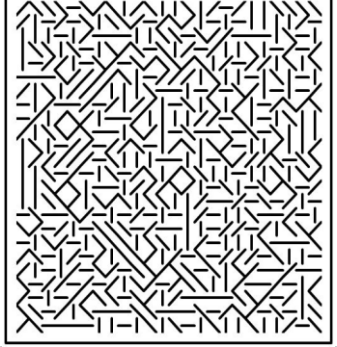
„The rolling circle squares itself“









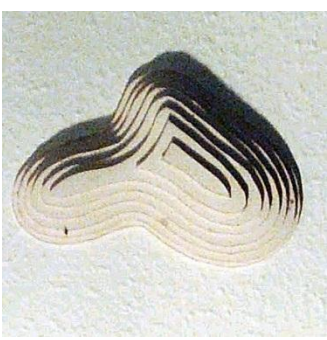
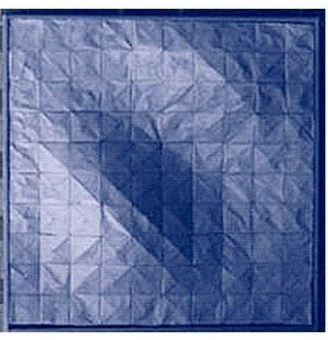
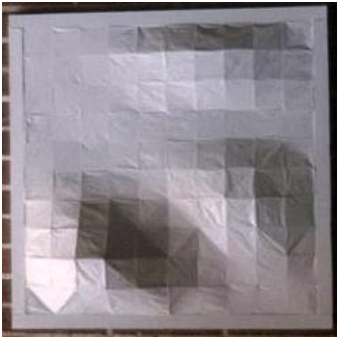
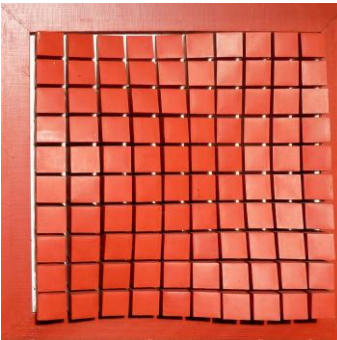
Parallelkurven einer Ellipse



# Replikation

				
Dürer: Muschellinie	„Cairo“-Parkettierung	Bridget Riley	Louise Bourgeois	Josef Albers
				
Victor Vasarely dynamisch	Max Bill	Mary Martin	Georg Nees: Schotter randomisiert	Vera Molnar randomisiert

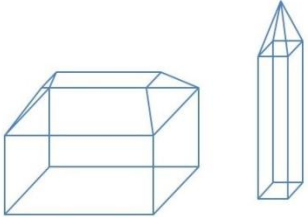
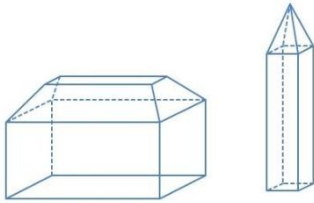
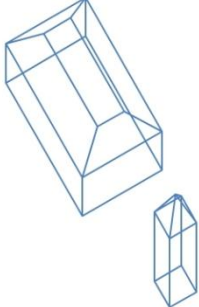
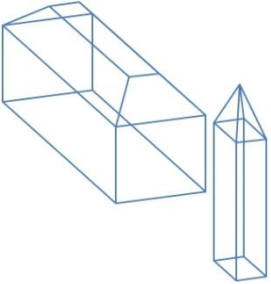
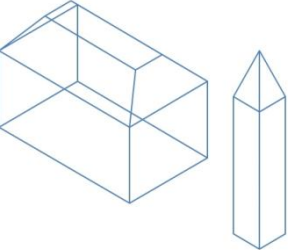
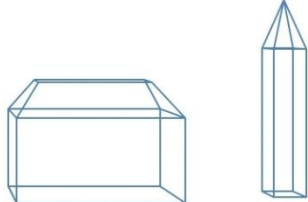
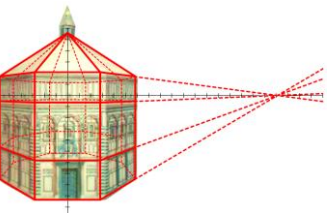
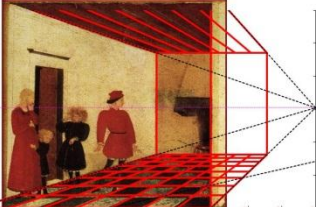
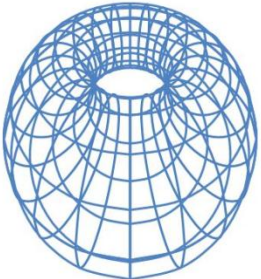
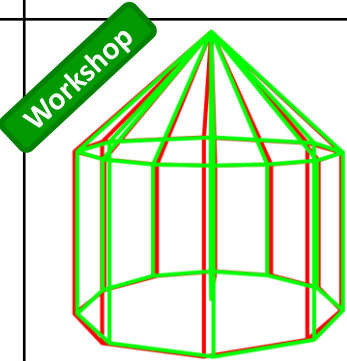


				
Raumparkettierung fcc-Gitter	Ei aus Kegelstümpfen	Vase aus Streifen	Voronoi-Parkett	Delaunay-Triangulation
				
Oloid	Höhenschichtenmodell	Quadrate aus 4 Dreiecken	Quadrate aus 2 Dreiecken	Quadrate aus 3 Ecken Spiegelobjekt A. Luther

**„Die Geometrie kennt als mathematische Aktivitäten reflektierte(!) konkrete Tätigkeiten:  
Falten, schneiden, kleben, rollen, zusammensetzen, bewegen.“**

**Neubrand**

# Technik

				
Schrägbild	Kavalierperspektive	Militärperspektive	Dimetrie	Isometrie
				
Zentral aus der Ferne	Zentralprojektion	Zentralprojektion	Torus visuell	3D aus Zentralprojektion

# Geometrisches Modellieren

**„Das geometrische Modellieren beschäftigt sich mit dem rechnergestützten Entwurf und der Manipulation geometrischer Formen.“**

**„Kombinatorisches Modellieren“**

„Dabei werden geometrische Formen zusammengesetzt aus Grundelementen wie Punkten, Kurven, Flächenstücken und Polyedern.“

**„Differentialgeometrisches Modellieren“**

„Analyse geometrischer Formen unter dem Blickwinkel der Differentialrechnung“

„Dabei geht es etwa Krümmungs- und Metrikaspekte von Kurven und Flächen.“

***Abramowski, Müller: Geometrisches Modellieren - Teubner-Verlag 1991***

**„Mit dem Begriff ‘Geometrisches Modellieren’ umschreibt man das Herzstück jedes rechnergestützten CAD/CAM-Systems.“**

**Analytische Verfahren** (mit „Standardprimitiven“)

Bauwesen, Architektur, Maschinen- und Werkzeugbau

**Approximierende Verfahren**

Fahrzeug-, Flugzeug- und Schiffbau

Fräsen, Gießen, Schneiden

***Brüderlin, Meier: Computergrafik und geometrisches Modellieren - Teubner 2001***

## **Stärken des Ansatzes**

- Begrenzbarkeit der Aufgabenstellung
- Portionierbarkeit der Aufgabenstellung
- Differenzierungsmöglichkeiten über Vorgaben
- Breite und Vielfalt der Themen
- Breite der Streuung in den Lösungsmöglichkeiten
- Vielfalt der herausgeforderten mathematischen Mittel
- Nicht-Absehbarkeit der herausgeforderten Mittel
- Beschränktheit der jeweils geforderten fachlichen Mittel
- Reichweite einfacher fachlicher Mittel
- Direktheit der Validierung
- Vielfalt der Arbeitsformen
- Anschlussfähigkeit des Erlernten: Technik, Architektur

## **Grundproblem**

- Einsatz eines Computers unverzichtbar:  
Verfügbarkeit im Unterricht unzureichend  
Einsatz erfordert jeweils größere Zeiteinheiten

# Mathematische Grundbildung im Jahre 2012

12th ICME - July, 2012, Seoul, Kaye [Stacey](#)

New PISA 2012 definition of mathematical literacy

- mathematical literacy as it is likely to be encountered in modern workplaces -

“Doing mathematics with the assistance of a computer  
is now part of mathematical literacy.”

“**Using mathematical tools** is an additional FMC.  
- Fundamental Mathematical Capability #7”

“Computers are now so commonly  
used **in the workplace and in  
everyday life** that a level of  
competency in mathematical literacy  
in the 21st century includes using  
computers.”

“PISA 2012 represents only a starting point.

Items requiring use of specific mathematically-able software  
(e.g. to program a **spreadsheet**, or use a **generic tool to plot a graph**)  
have not been used at this early stage.”





Herzlichen Dank  
für Ihre Geduld!

[Homepage mit Dateien](#)