

# Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen

Hellmuth Stachel, Technische Universität Wien



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

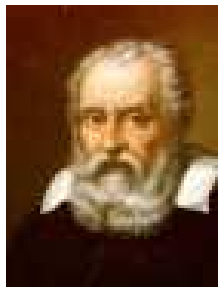


stachel@dmg.tuwien.ac.at — <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel>

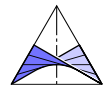


# Inhalt

1. Die Ideen des Künstlers
2. Schattenwurf und Lichtschacht
3. Spiegelungseffekte
4. Pläne für die Handwerker
5. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren

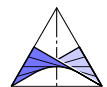


... Zitat von Galileo Galilei (Samira Elsayed oder Felzmann, Blümel, Müller, Vilsecker: Geometrische Bilder, öbv)



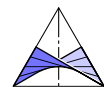


Am **9. September 2012** segnete Weihbischof Dr. Andreas **Laun** auf dem Platz vor dem Badener Tor des [Zisterzienserstiftes Heiligenkreuz](#) das *“Denkmal zur Gewissens- und Religionsfreiheit als Grundlage des Friedens”*





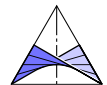
Dieses Denkmal umfasst ein Mosaik, gestaltet nach dem Bild  
*"Epiphanie"* des französischen Künstlers Philippe **Lejeune** (geb. 1924),  
sowie den *"Gnomon"*, eine schmale dreiseitige spiegelnde Pyramide







Das Denkmal wurde gestiftet vom *“Verein Moderner Sakralbau”* unter dem Obmann  
Mag. Prinz Gundakar **von und zu Liechtenstein** und dem Obmannstellvertreter  
Weihbischof Dr. Andreas **Laun** ... am Ende einer *fünfjährigen Planungszeit*



# 1. Ideen des Künstlers



Zu Beginn der Planung gab es das Gemälde *“Epiphanie”* mit Maria und dem Jesuskind im Zentrum.

Das Fest der Epiphanie ( “die Erscheinung des Herren” ) wird in christlichen Kirchen am Dreikönigstag gefeiert.

# 1. Ideen des Künstlers



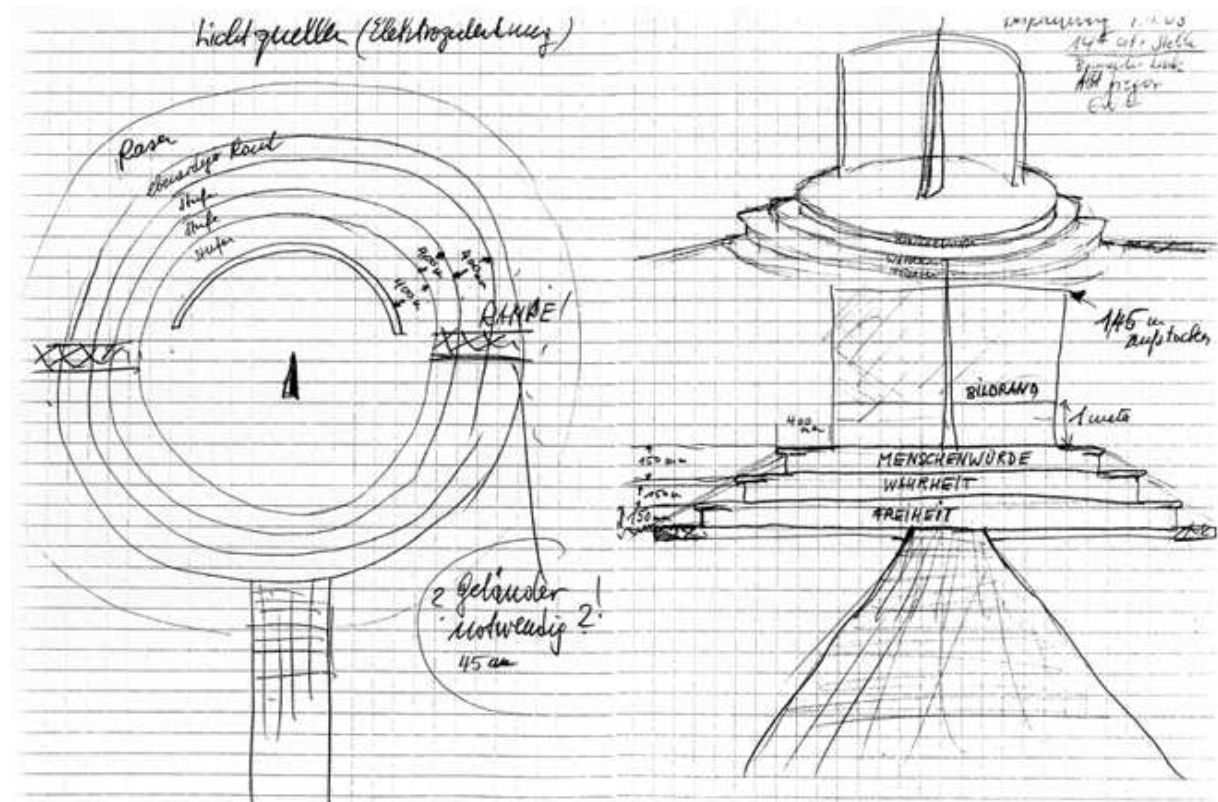
Zu Beginn der Planung gab es das Gemälde “*Epiphanie*” mit Maria und dem Jesuskind im Zentrum.

Das Fest der Epiphanie (“die Erscheinung des Herren”) wird in christlichen Kirchen am Dreikönigstag gefeiert.



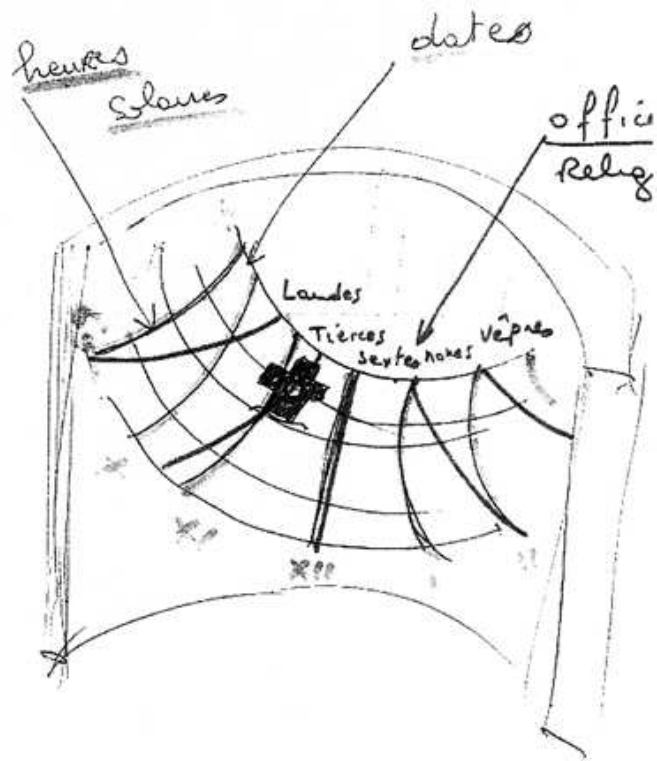
# 1. Ideen des Künstlers

... und es gab Skizzen





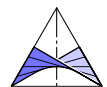
# 1. Ideen des Künstlers



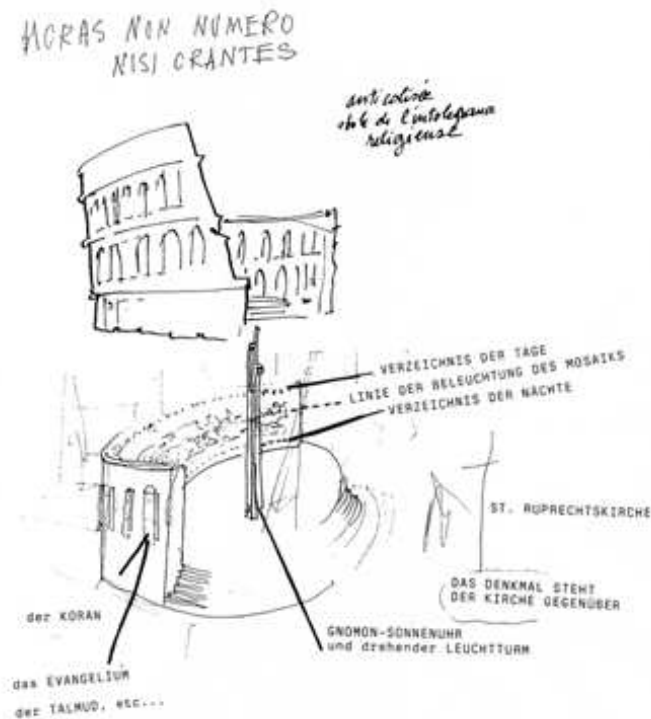
das Rundbild sollte zugleich  
als **Sonnenuhr** fungieren;



dazu sollte zu einem gewissen Zeitpunkt ein  
**Lichtstrahl** das dargestellte Jesuskind treffen;



# 1. Ideen des Künstlers

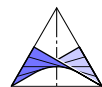
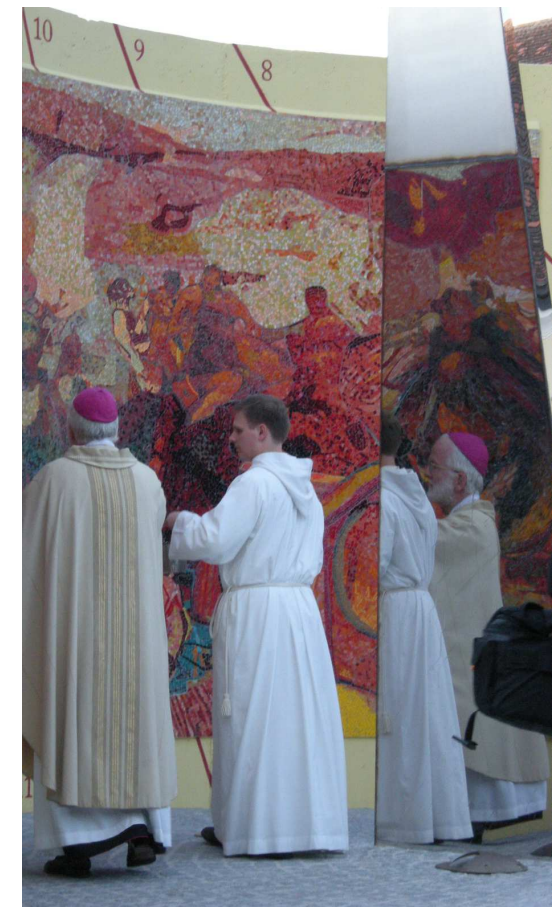


Die Gründertexte der Religionen sind in die Außenwand graviert, angebracht wie Ikonen, als ob es Fenster wären in denen die Schrift erscheint.

Das Gnomon der Sonnenuhr wirft den Schatten. Man könnte ein Linsensystem entwerfen, dessen Brennpunkt auf der Bildfläche zu liegen kommt, und somit inmitten des Halbschattens die Sonnenstrahlen gebündelt auf das Bild werfen.

die ganze Anlage sollte an eine **Plakatwand** oder an ein römisches Amphitheater (z.B. Kolosseum?) erinnern.

**Spiegelungen am Gnomon** sollten die Wirkung noch verstärken; der Besucher sollte sich selbst innerhalb der dargestellten Menschenmenge erkennen.



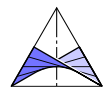
# 1. Ideen des Künstlers

Im September 2011 wurde mir offiziell die Frage gestellt:

Inwieweit lassen sich die Vorstellungen des Künstlers realisieren ?

---

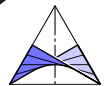
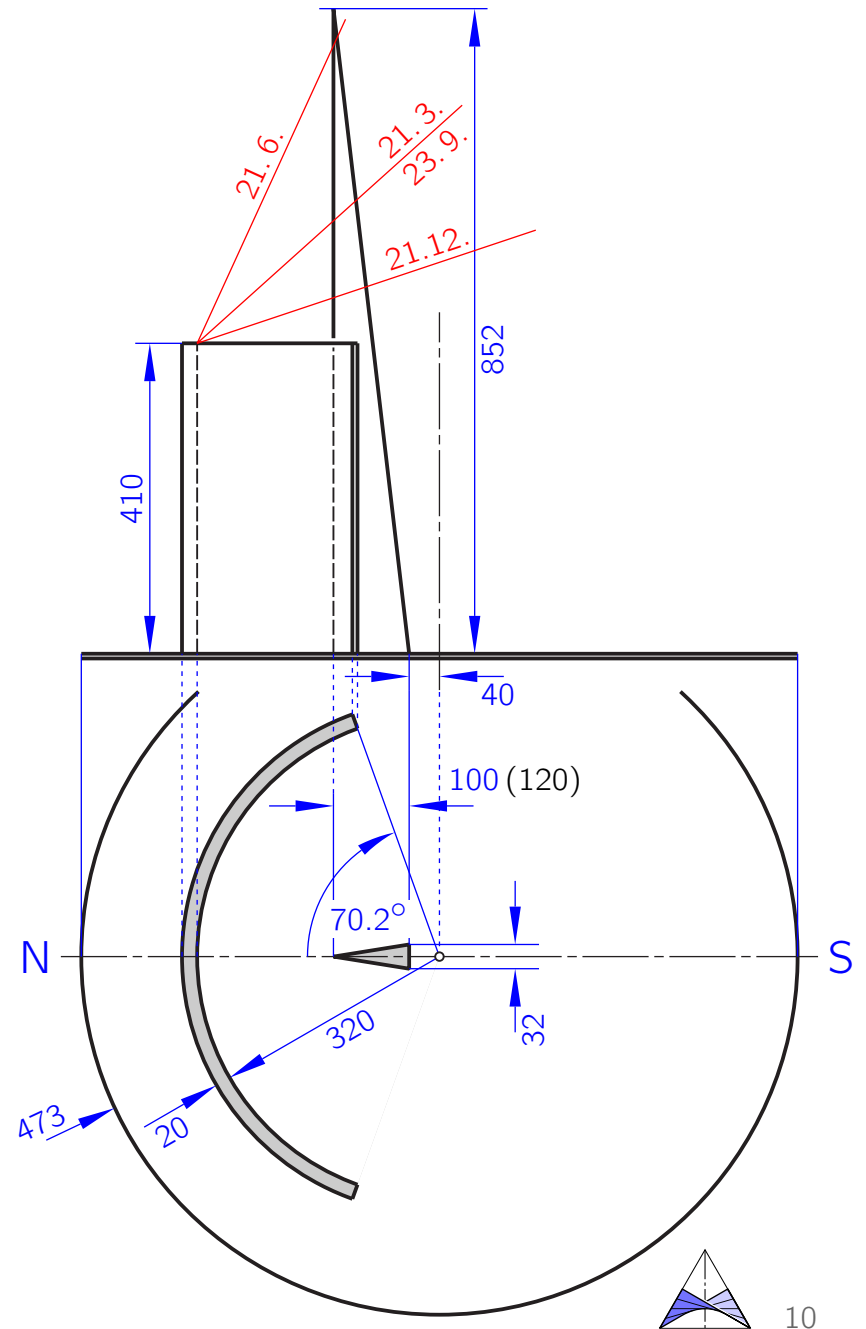
... ich konnte mich dankenswerterweise mit Koll. Hofmann beraten



Zu diesem Zeitpunkt stand bereits die **Rundmauer** für das Mosaik (4 m hoch, genau nach Süden ausgerichtet).

Für die voraussichtlichen Abmessungen des **Gnomons** sowie für dessen Position gab es ungefähre Pläne.

Maße in cm

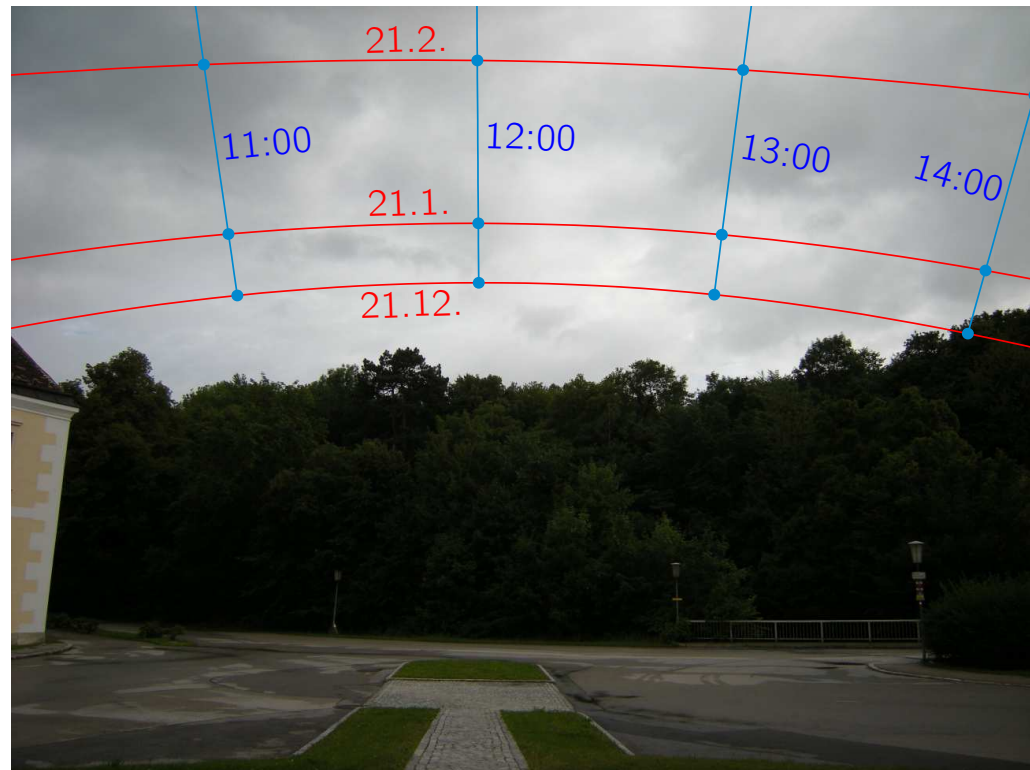




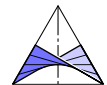
## 2. Schattenwurf und Lichtschacht

Herr Hofmann klärte die Besonnungsverhältnisse (MEZ):

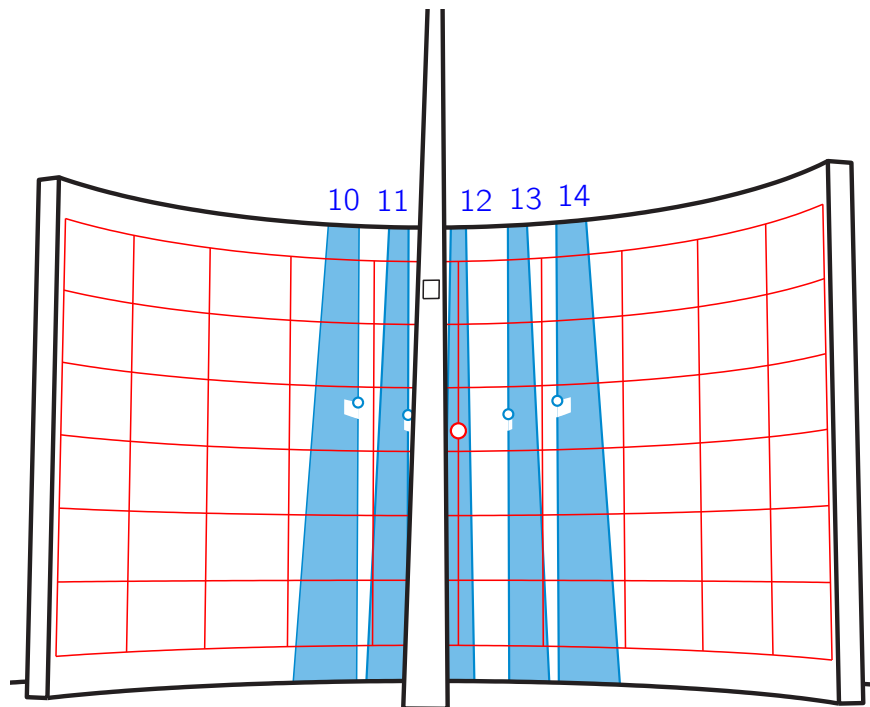
<i>Wann scheint Sonne auf Standort um den 20. des</i>	<i>von bis</i>
Dezember	10:30 – 13:30
Jänner, November	10:30 – 14:00
Februar, Oktober	09:15 – 13:00
März, September	08:00 – 15:00
April, August	07:00 – 16:00
Mai, Juli	07:15 – 16:00
Juni	07:30 – 16:30



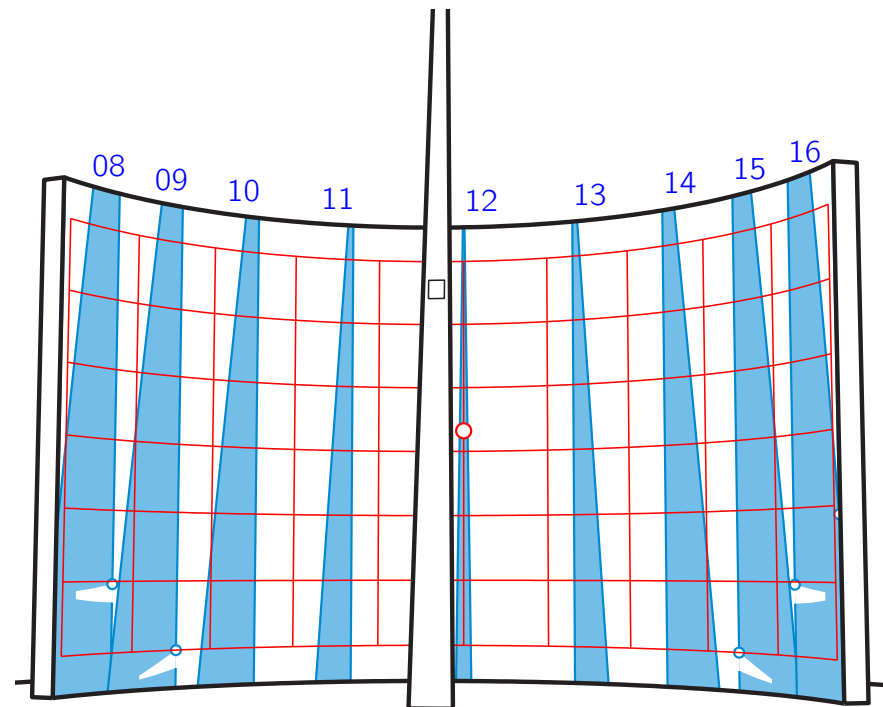
Blick vom Denkmal nach Süden



## 2. Schattenwurf und Lichtschacht

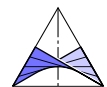


21.12.

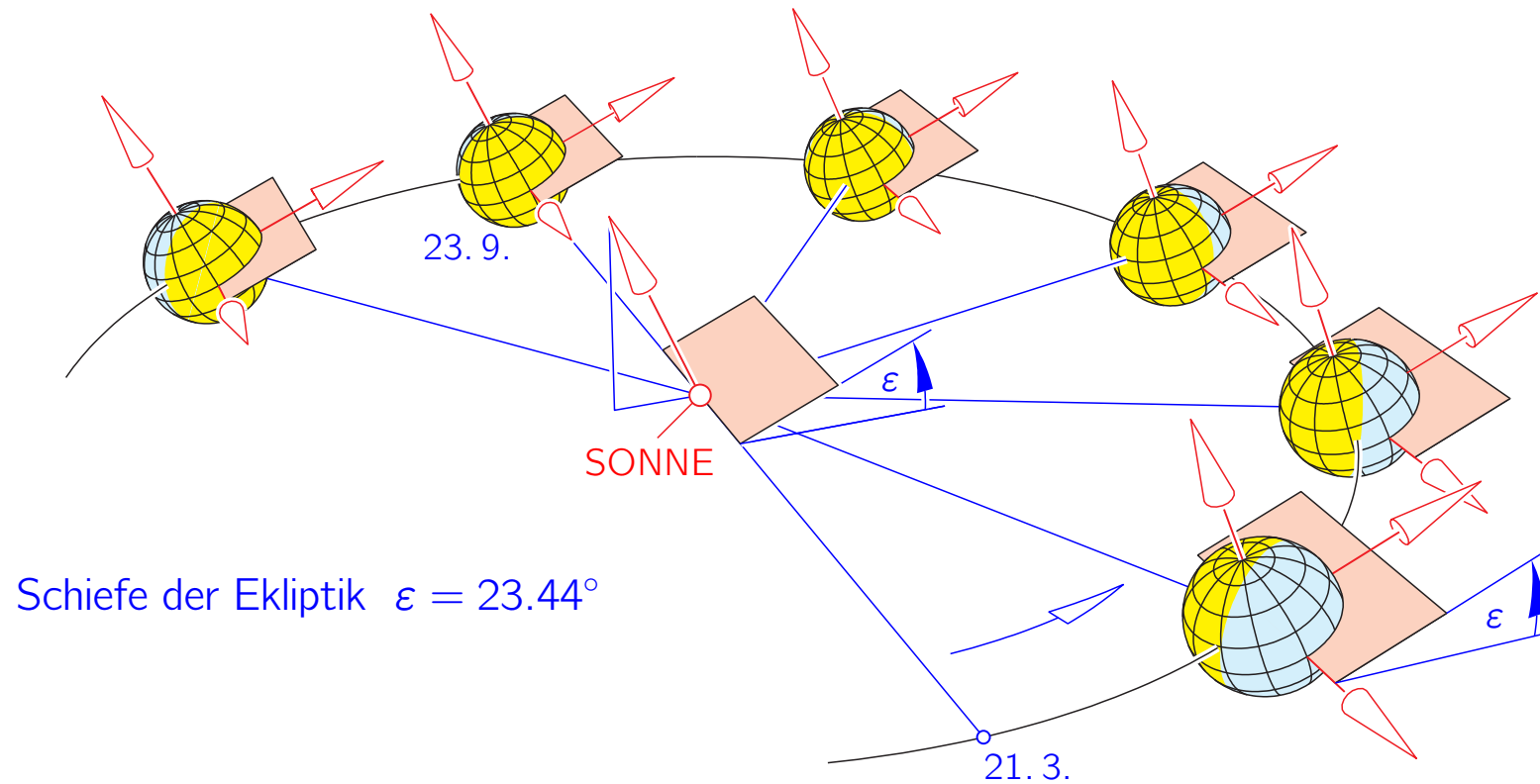


21.6.

Derartige Bilder sollten illustrieren, dass der Schlagschatten des lotrechten Gnomons für eine traditionelle Sonnenuhr nicht brauchbar ist.

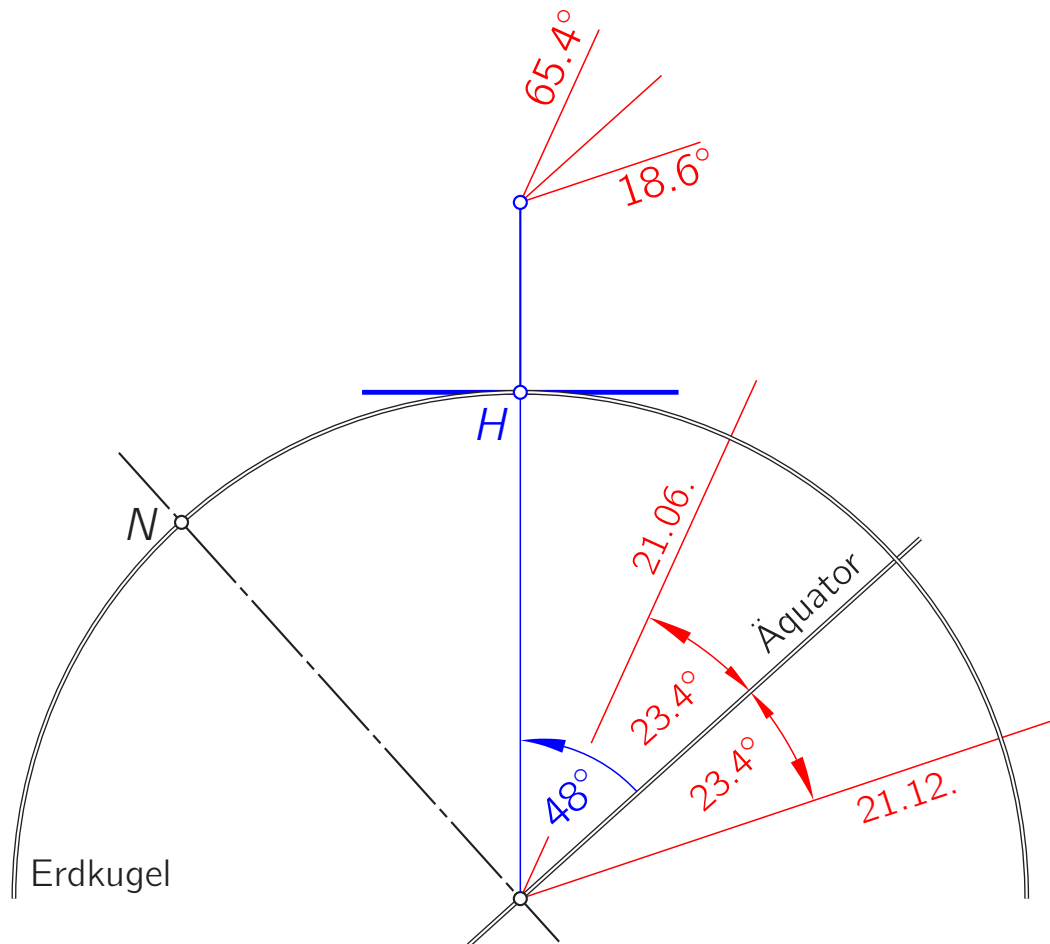


# Crash-Kurs über Sonnenuhren



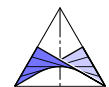
Während der Bewegung der Erde um die Sonne variiert der **Erhebungswinkel der Sonne** gegenüber der Äquatorebene zwischen  $-\epsilon$  und  $\epsilon$ .

# Crash-Kurs über Sonnenuhren



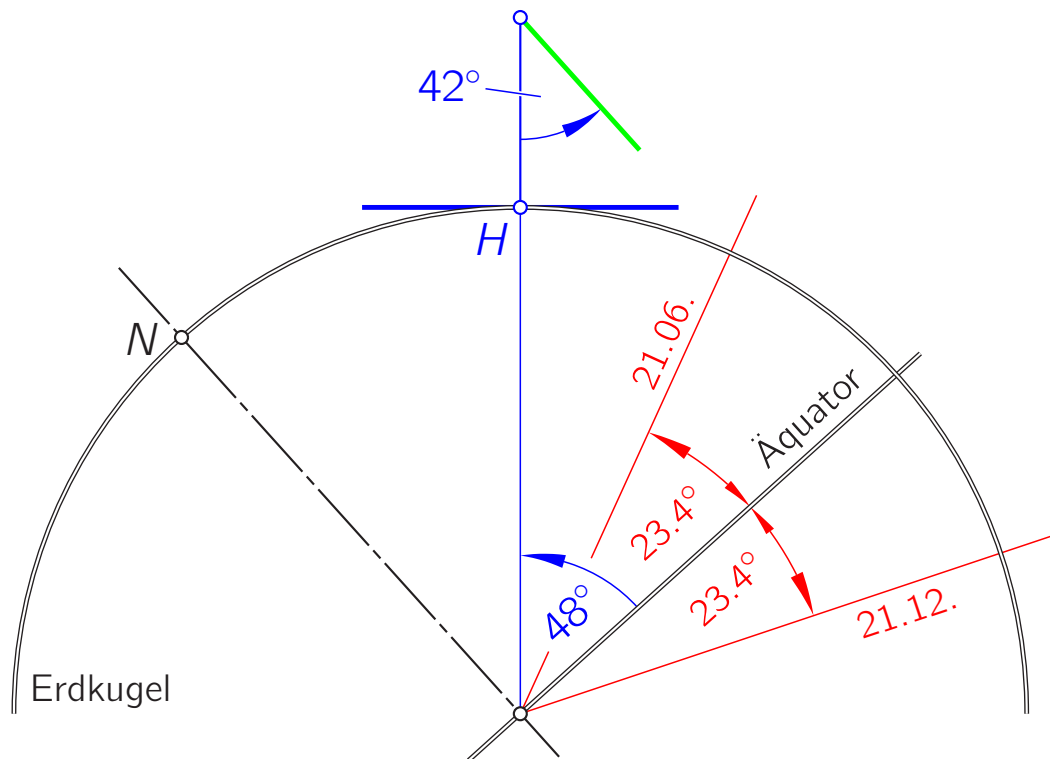
Das bedeutet für Heiligenkreuz (geogr. Breite  $48.055^\circ$ ) maximale Erhebungswinkel der Sonne zwischen  $18.6^\circ$  und  $65.4^\circ$ .

Zur gleichen Tageszeit ('Sonnenzeit') liegt die Sonne in derselben Meridianebene der Erde.





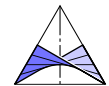
# Crash-Kurs über Sonnenuhren



Der Schatten eines Stabes fällt genau dann zur selben Tageszeit auf dieselbe Gerade, wenn die Schattenebene parallel zur zugehörigen Meridianebene ist. Dann ist sie eine 'Stundenebene', und ihre Spur heißt 'Stundenlinie'.

⇒ der Schattenstab muss parallel zur Erdachse sein.

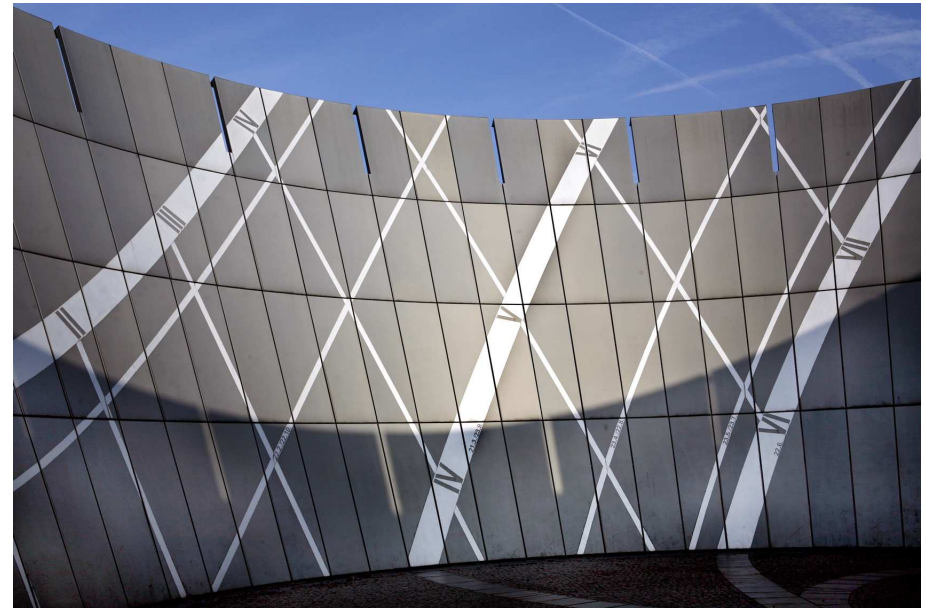
Eine Parallele zur Erdachse ragt in Heiligenkreuz unter  $42^\circ$  aus einer nach Süden weisenden Hauswand.



# Crash-Kurs über Sonnenuhren



Traditionelle Sonnenuhr mit dem Zeiger parallel zur Erdachse



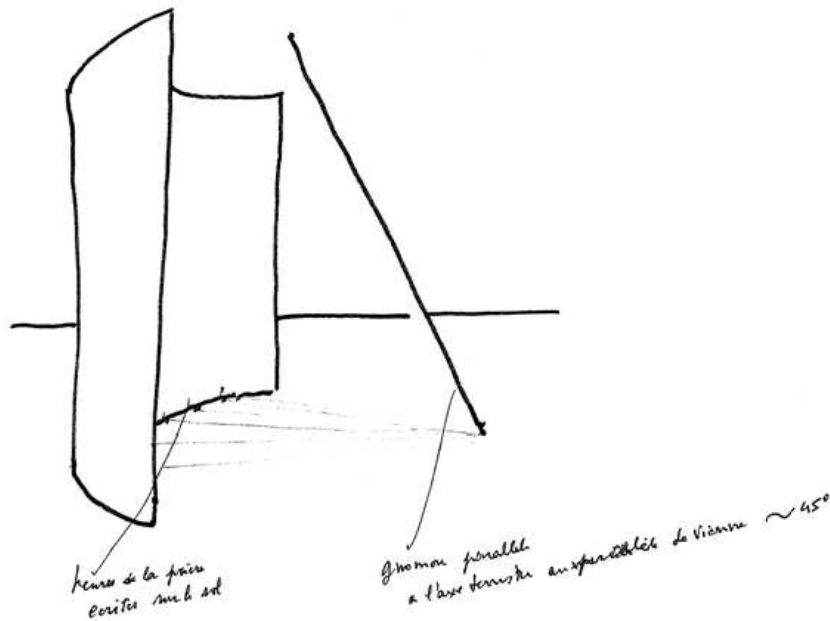
Sonnenuhr in München

Mittels Stunden- und Datumslinien sind **Datum** (zweideutig) und **Tageszeit** ablesbar

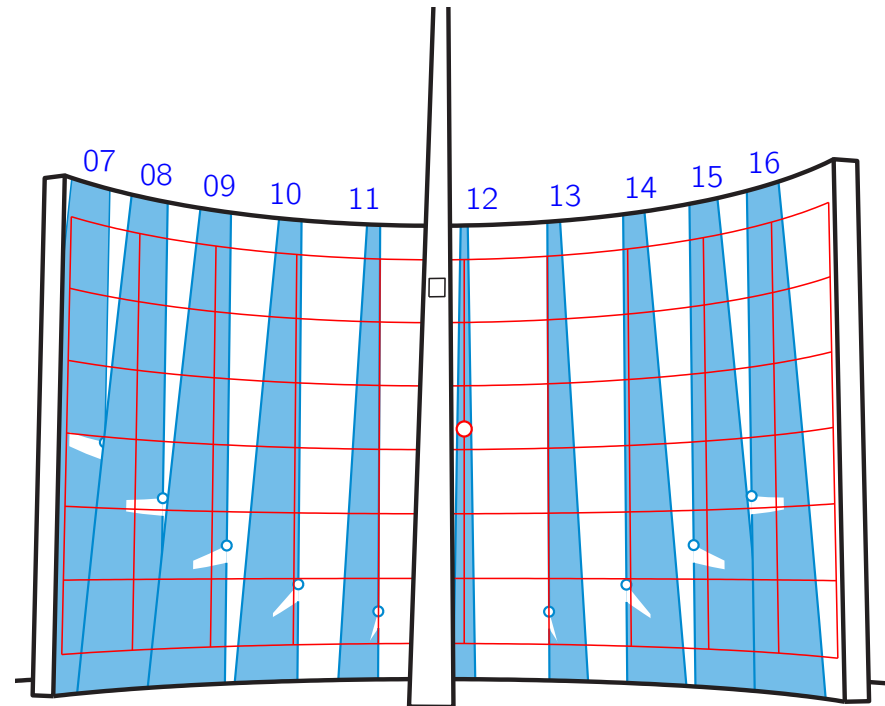


## 2. Schattenwurf und Lichtschacht

Mit Ausnahme von 12:00 Uhr ändern sich die zur gleichen Tageszeit vom Gnomon geworfenen Schlagschatten im Laufe des Jahres.



Das dürfte auch der Künstler geahnt haben.

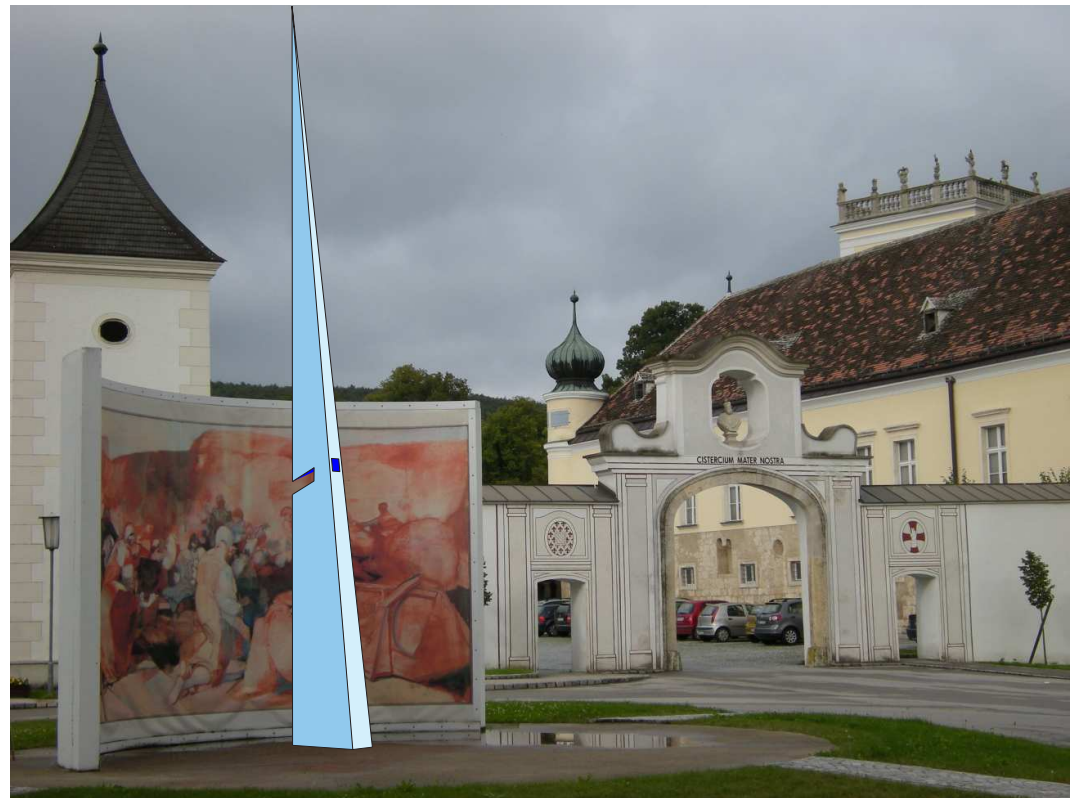


Die Schlagschatten des Gnomons (mit Schacht) zeigen den Schatten eines Punktes. Nur mittels Stunden- und Datumslinien wäre die Tageszeit ablesbar.



## 2. Schattenwurf und Lichtschacht

Auch der **Lichtschacht** im Gnomon, durch welchen genau am Dreikönigstag zu Mittag ein Sonnenstrahl auf das Jesuskind (exakt nördlich vom Gnomon) fällt, hat **nicht** die erwartete Wirkung.



Fotomontage: Gnomon mit Lichtschacht

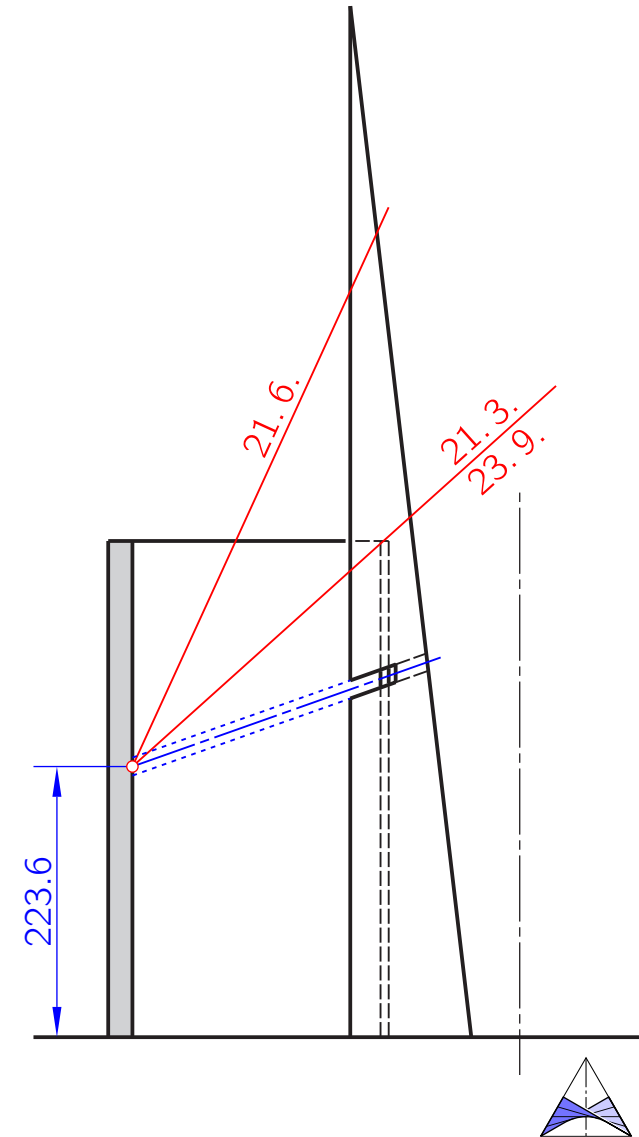




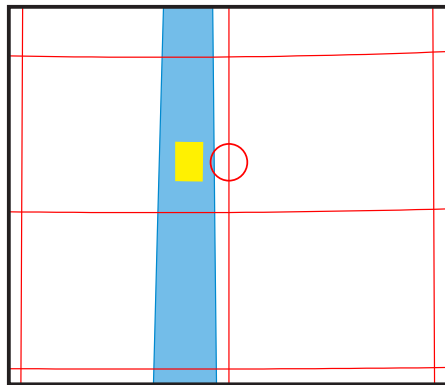
## 2. Schattenwurf und Lichtschacht

Wahrscheinlich ist der **Helligkeitsunterschied** zu gering (an einem sonnigen Wintertag). Auch gibt es **keinen Einmaleffekt**.

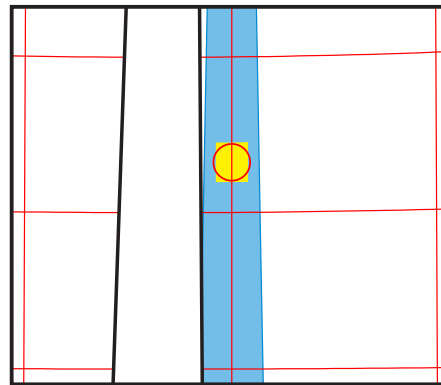
Die gewählte Schachtweite (12 cm breit, 14 cm hoch) entspricht der Kopfgröße des Jesuskindes in der Darstellung.



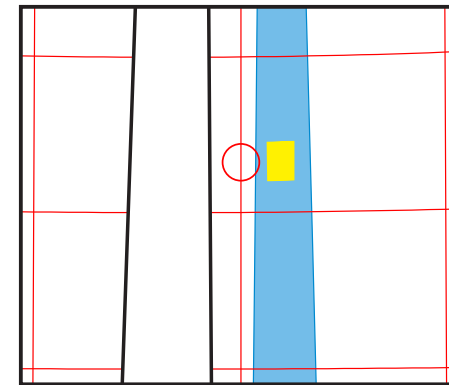
## 2. Schattenwurf und Lichtschacht



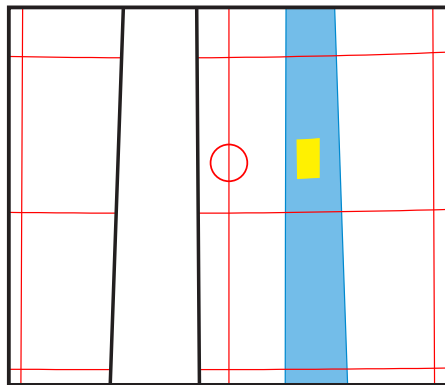
11:45



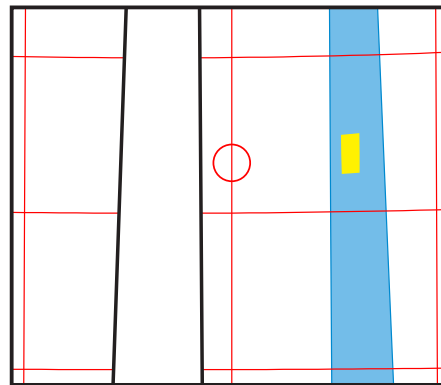
12:00



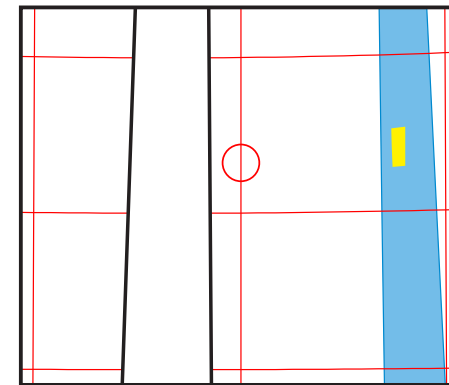
12:15



12:30

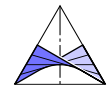


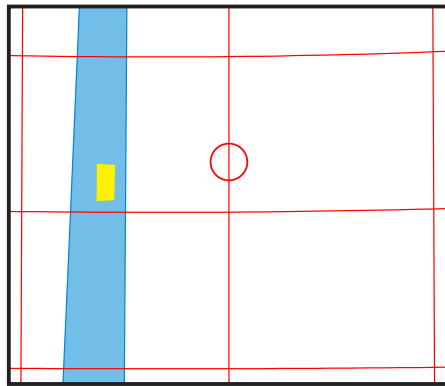
12:45



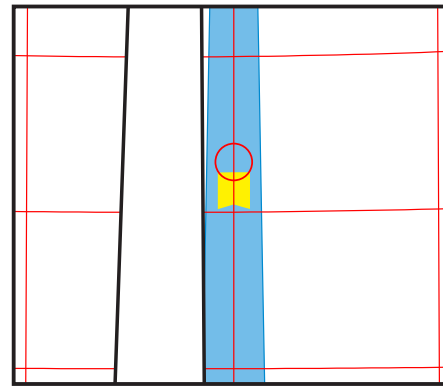
13:00

Effekte am 6. Jänner und ebenso am 5. Dezember

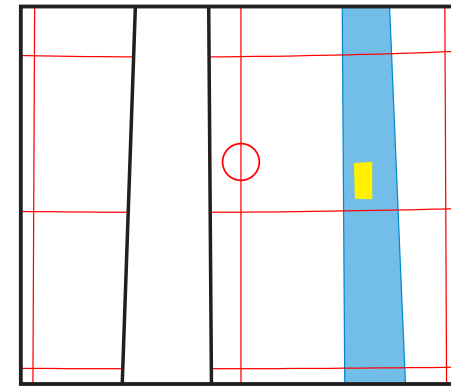




11:15

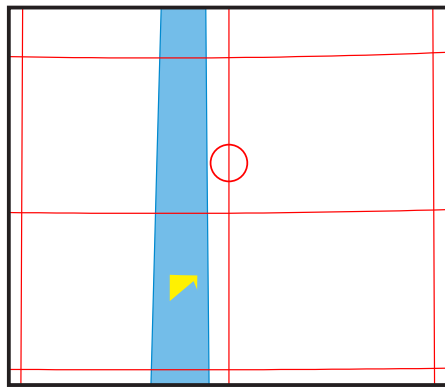


12:00

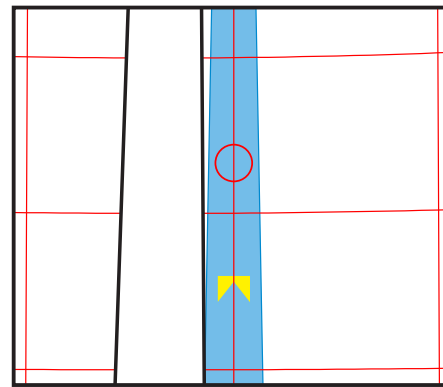


12:45

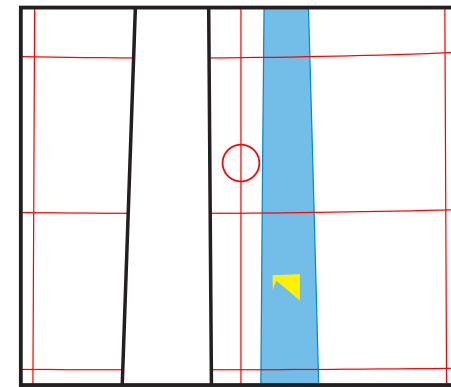
zwei Wochen später, am 20. Jänner, und ebenso am 20. November



11:45



12:00



12:15

40 Tage später, am 15. Feber, und ebenso am 27. Oktober



## 2. Schattenwurf und Lichtschacht

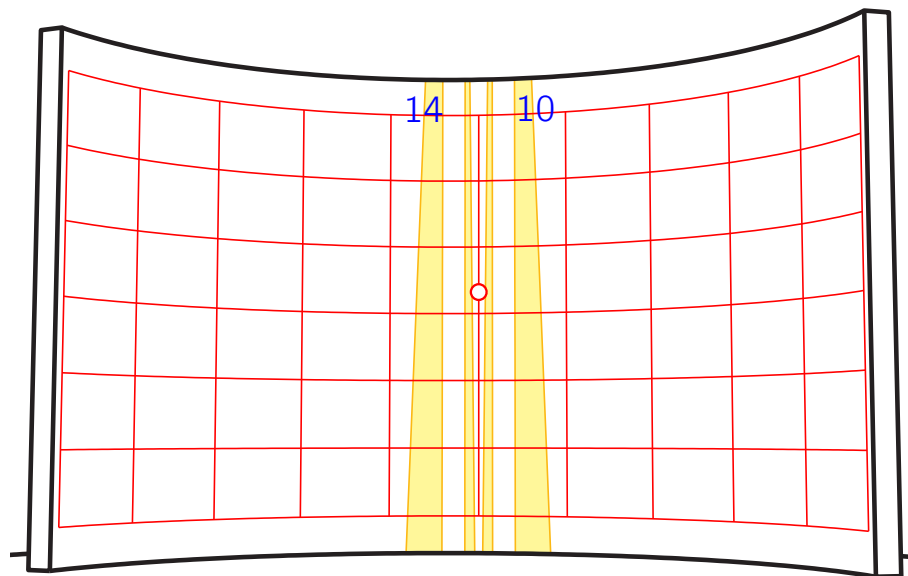
Der vom Lichtschacht verursachte Lichtfleck wäre von Ende Oktober bis Mitte Februar um die Mittagszeit festzustellen.

Deshalb gibt es für das Mosaik nunmehr eine **künstliche Beleuchtung** (gekoppelt mit Straßenbeleuchtung) mit einer eigenen **Spotleuchte** für das Jesuskind

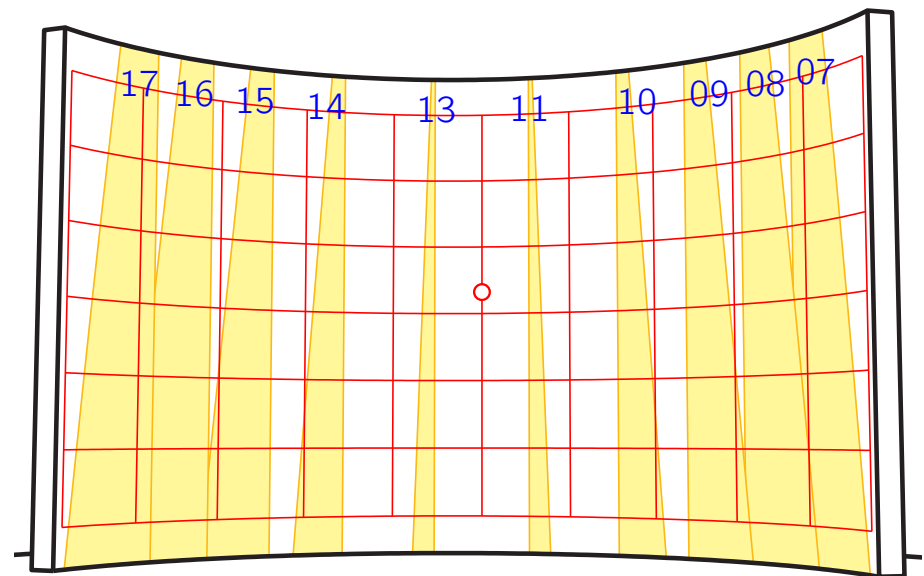




### 3. Spiegelungseffekte



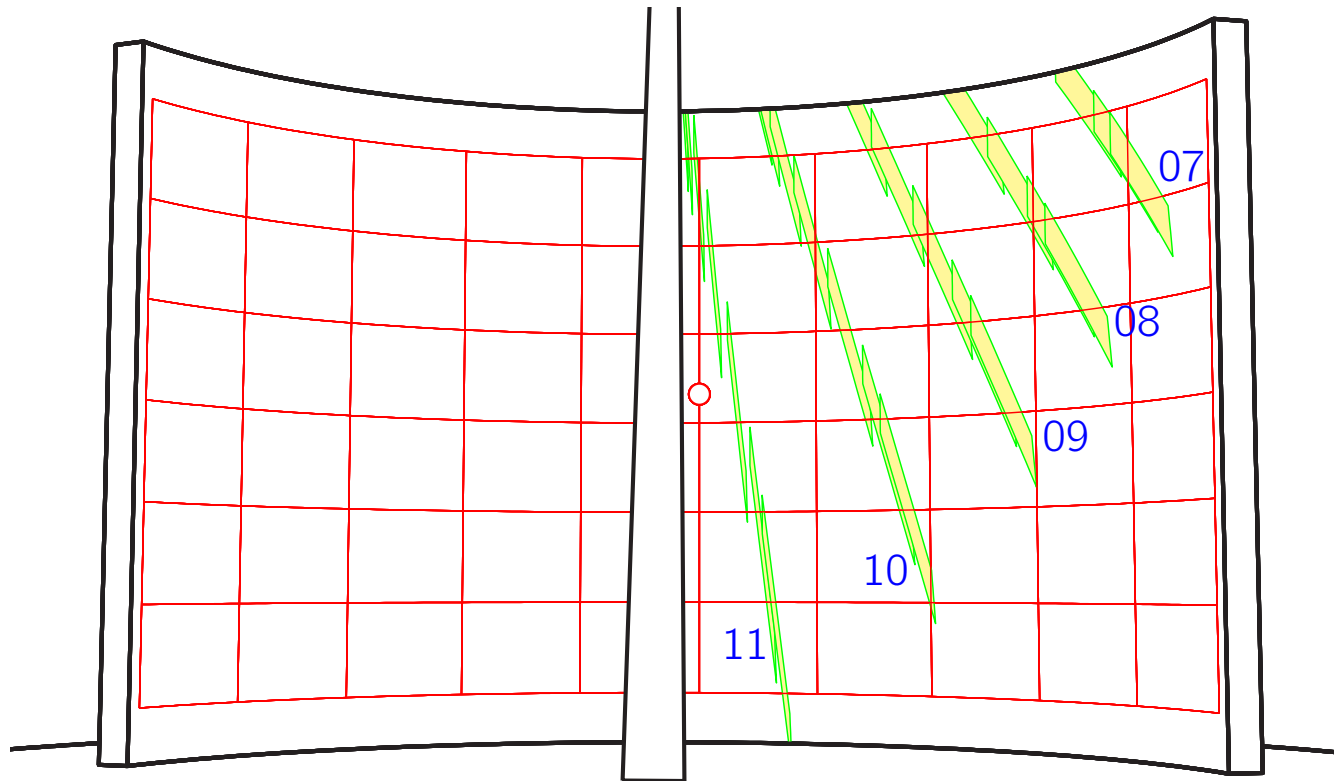
21.12.



21.6.

Die **Spiegelungen des Sonnenlichtes** an der Ost- und Westflanke des Gnomons erzeugen helle Streifen auf dem Mosaik. Ähnlich den Schlagschatten erlauben auch diese **keine** von der Jahreszeit unabhängige Zeitablesung.

### 3. Spiegelungseffekte



Ein [zur Erdachse annähernd paralleler Streifen](#) auf Ost- und Westwand bewirkt helle Streifen auf der Rundwand wie bei Sonnenuhr. Das Bild zeigt den Verlauf der Reflexionen über die Monate.

### 3. Spiegelungseffekte

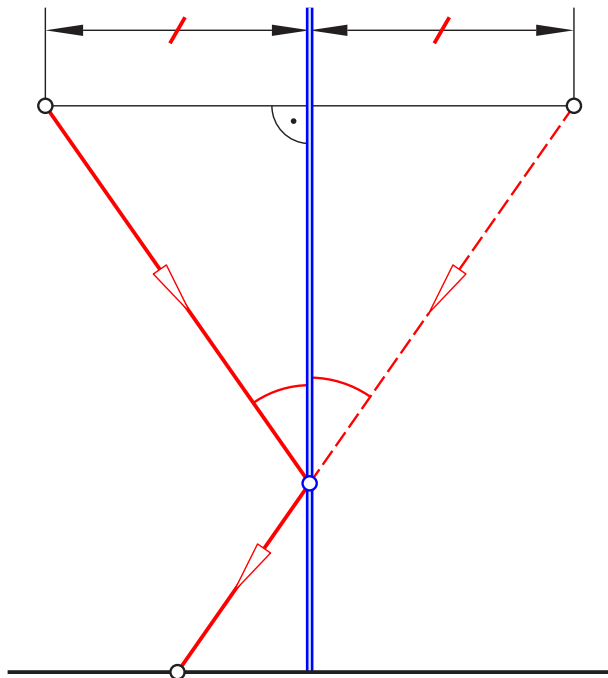


Fotomontage mit **reflektierenden Streifen** und den zugehörigen Reflexionen am 9. September.

Die Reflexionen wirken wie Schatten zu der an der Ost- bzw. Westwand **gespiegelten Sonne**.

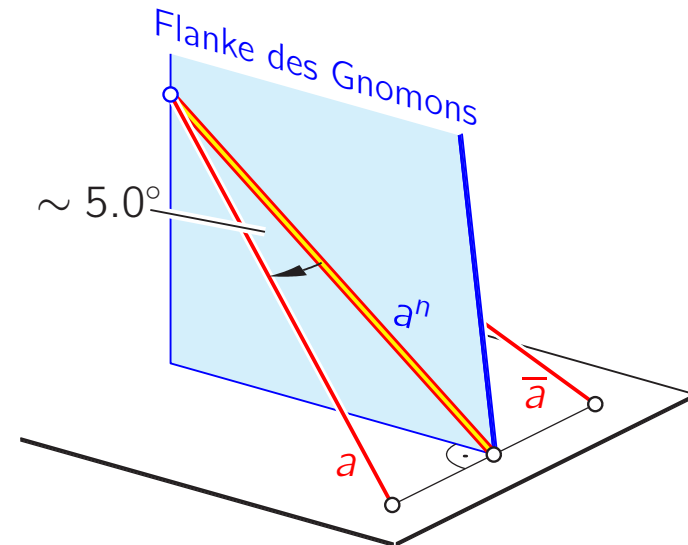


### 3. Spiegelungseffekte



Jede Reflexion wirkt wie ein Schatten zu der an der Ost- bzw. Westwand **gespiegelten Sonne**.

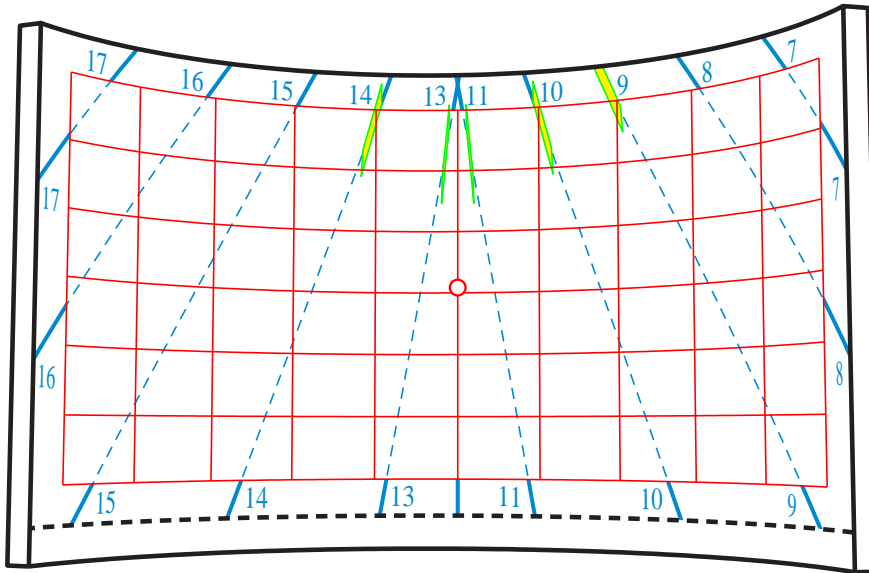
Die gespiegelten Sonnenstrahlen zur gleichen Tageszeit (Sonnenzeit) liegen in derselben Ebene durch die **gespiegelte Erdachse  $\bar{a}$** .



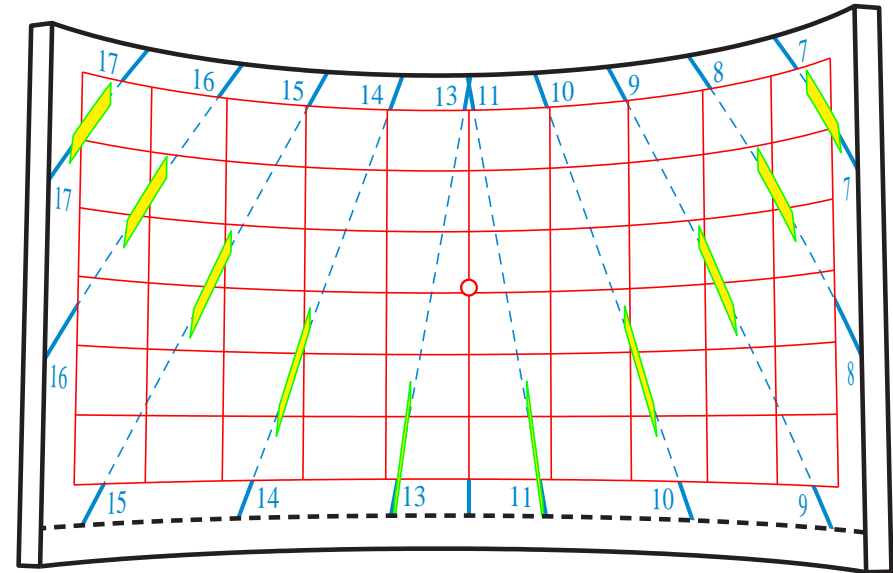
Die **bestmögliche Näherung** für die gespiegelte Erdachse  $\bar{a}$  innerhalb der Flanke des Gnomons ist der **Normalriss  $a^n$**  der Erdachse  $a$  in dieser Wand.



### 3. Spiegelungseffekte



21.2., 21.10.



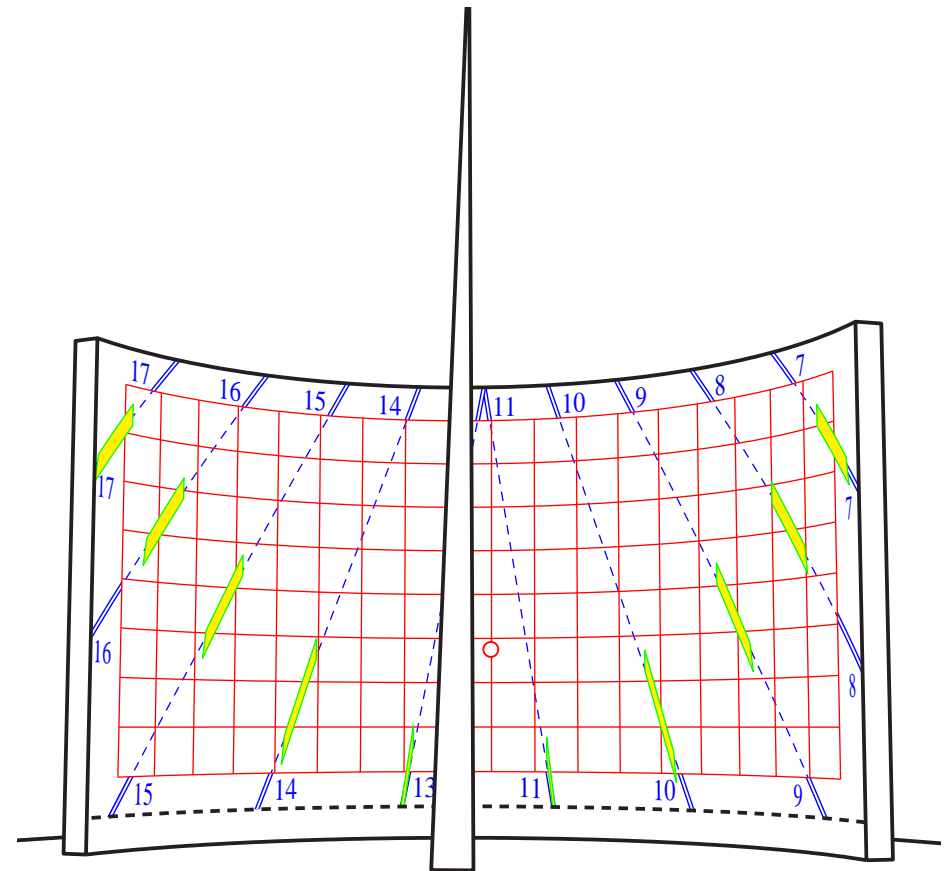
21.5., 21.7.

Die Höhe der reflektierenden Streifen wurde derart gewählt, dass selbst zur Winter- und Sommersonnenwende die Reflexionen auf die Rundwand fallen.



### 3. Spiegelungseffekte

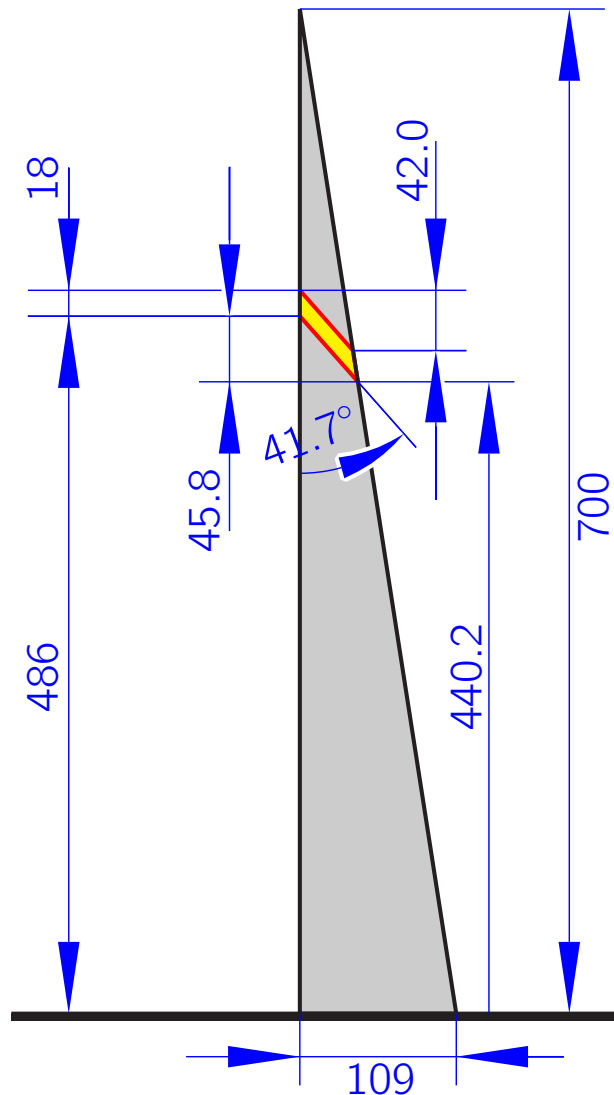
Die Tatsache, dass **Licht** anstelle von **Schatten** die Zeit anzeigt, überzeugte **Abt Maximilian Heim** und er gab dem Projekt die **Zustimmung** ...  
nach Verkürzung des Gnomons auf 7 m



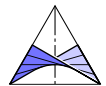
21. 6.



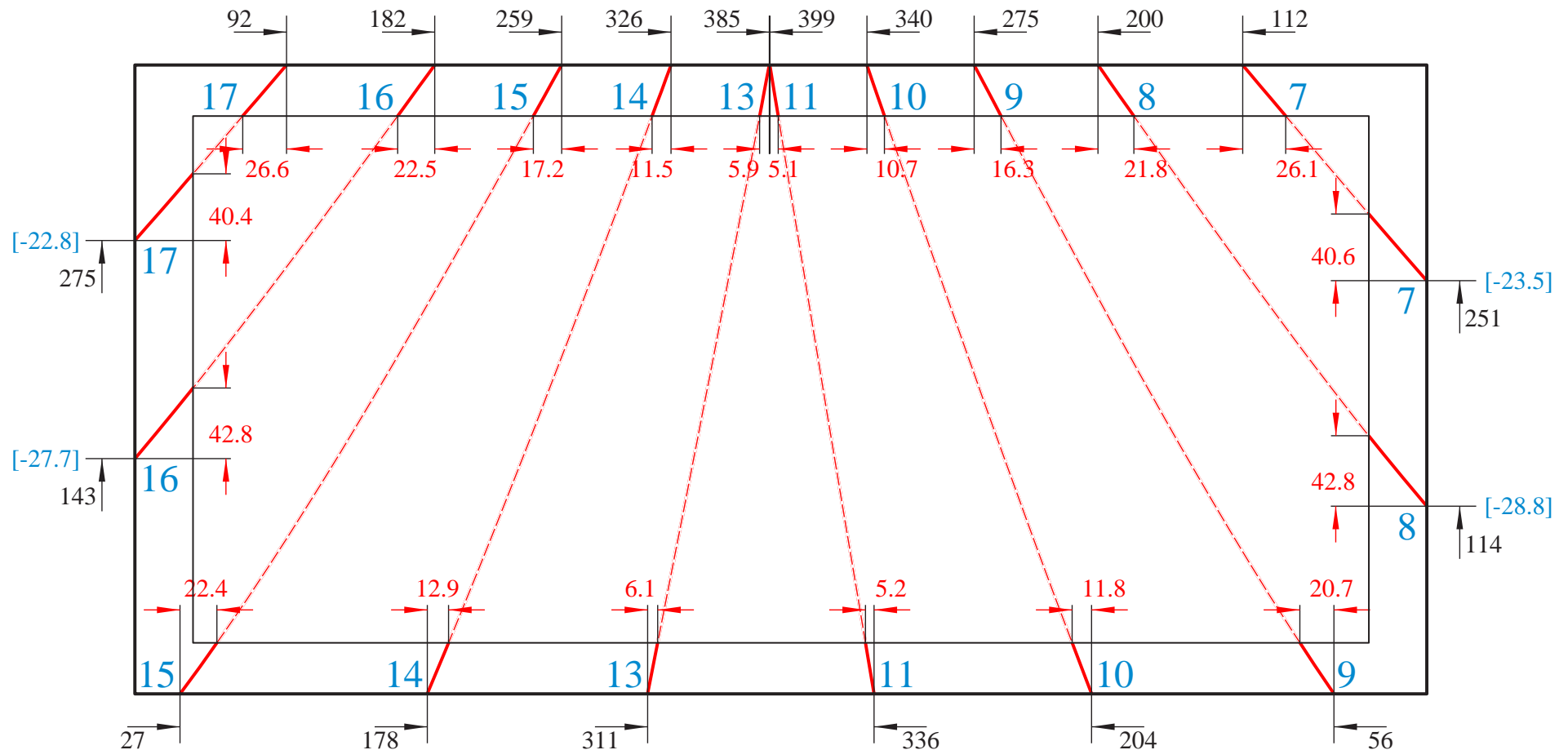
## 4. Pläne für die Handwerker



Aufriss des Gnomons mit dem spiegelnden Streifen (Maße in cm)



## 4. Pläne für die Handwerker



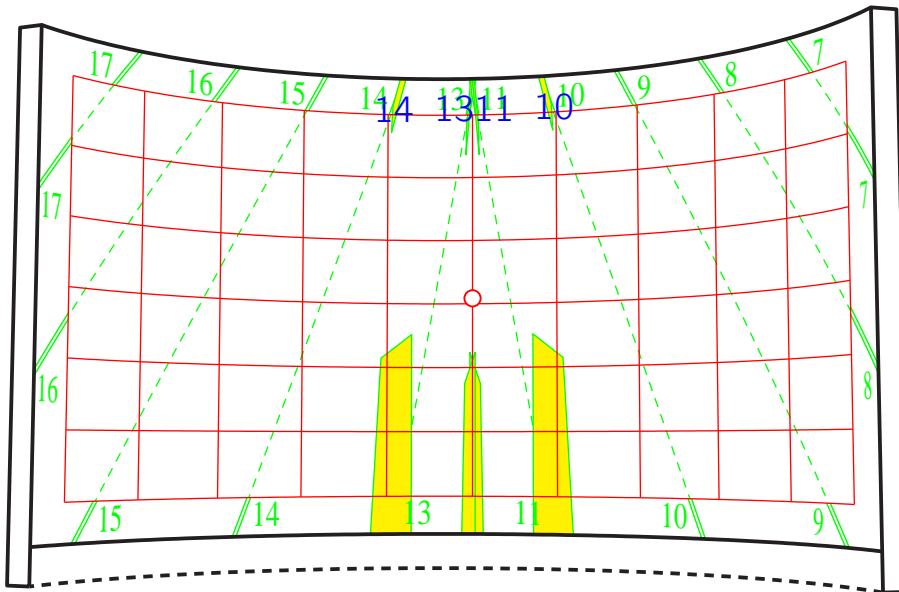
Plan für Stundenlinien (unter Berücksichtigung der geographischen Länge 16.049°)



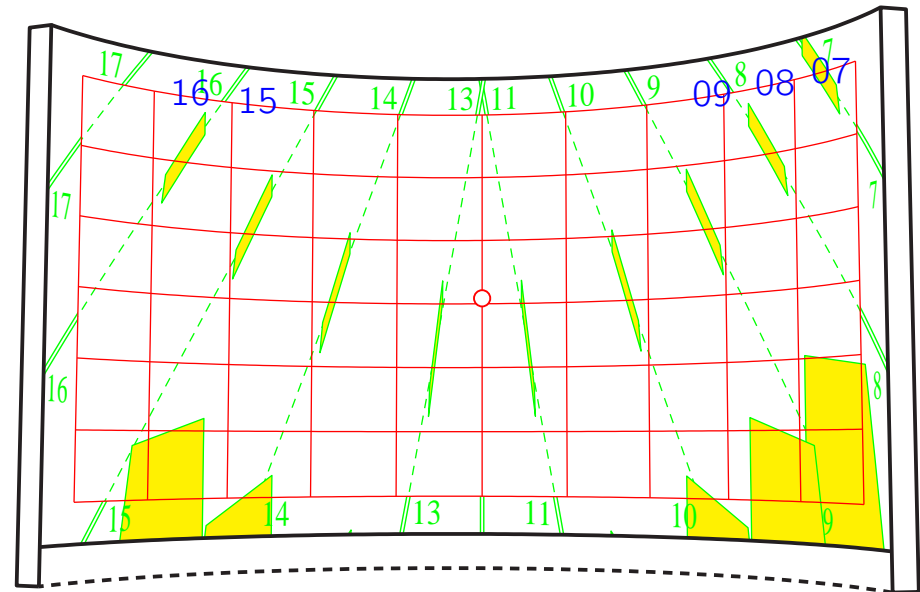


Die untere Hälften der Gnomonflanken sind herstellungs- und temperaturbedingt leicht gewölbt und stören die Zeitablesungen durch **unregelmäßige Reflexionen** (15.8.)

## 4. Pläne für die Handwerker



21.1., 21.11.

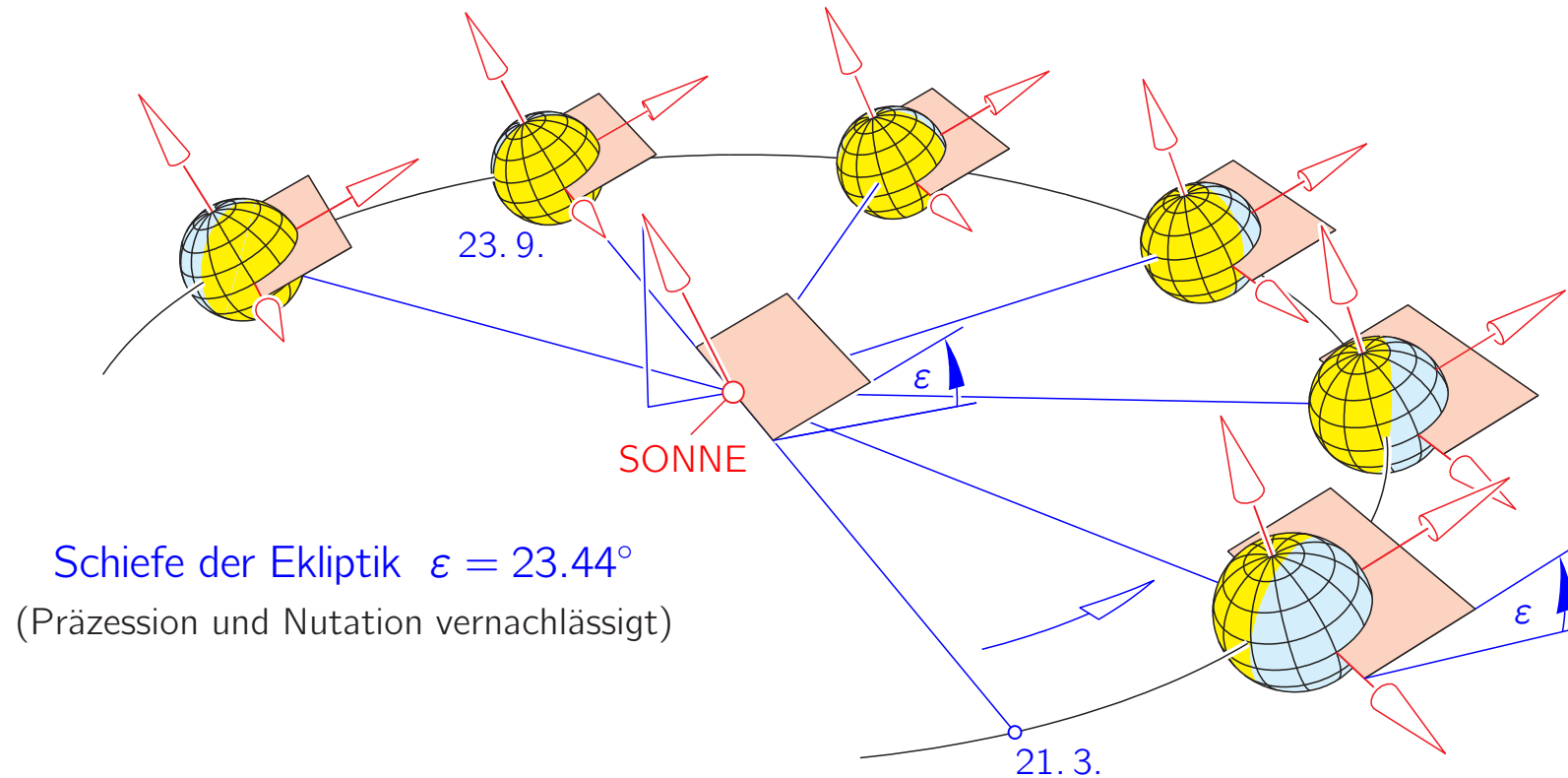


21.4., 21.8.

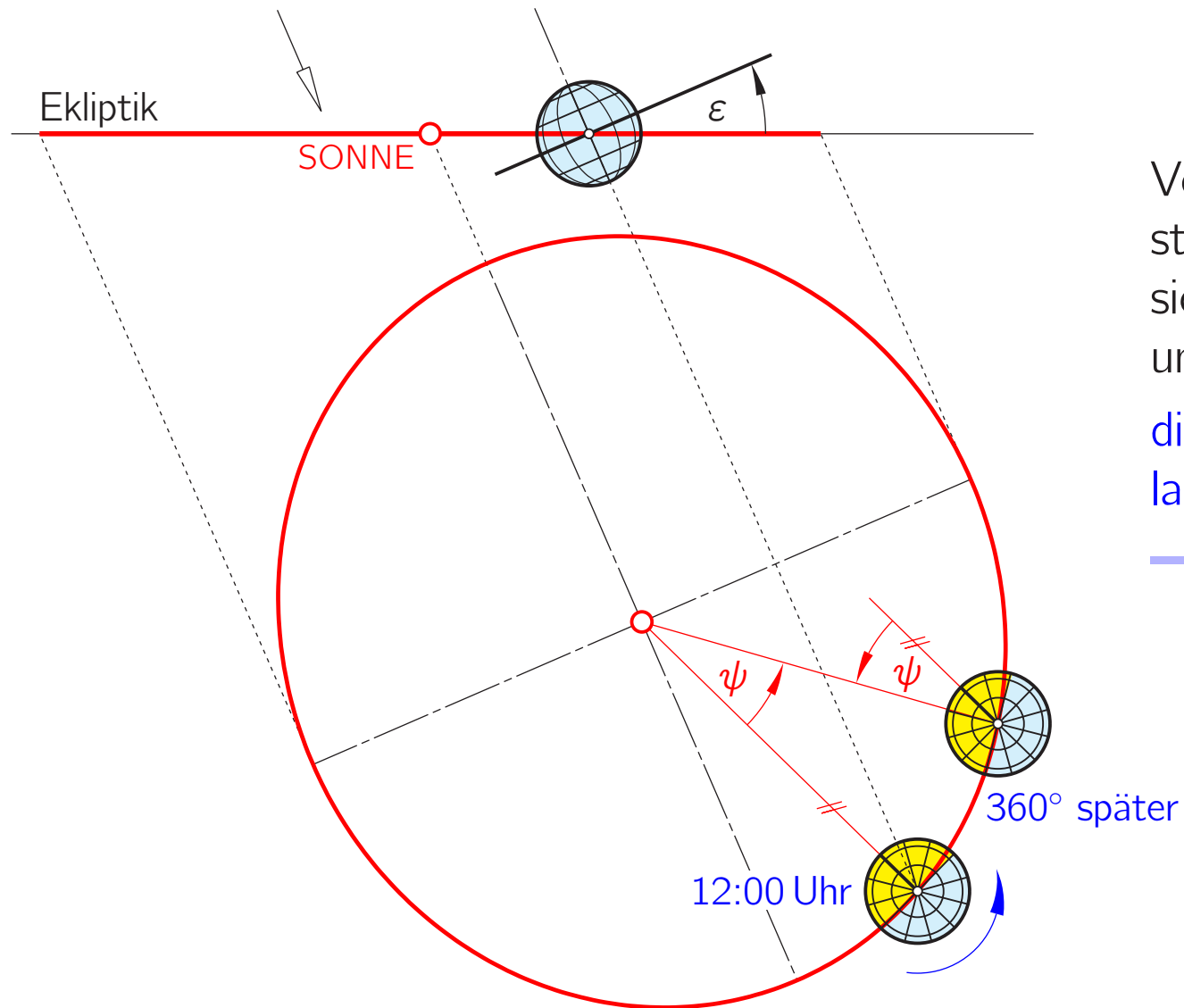
eine Senkung der Abmattungsgrenze um 50 cm verbesserte die Situation etwas



## 5. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren

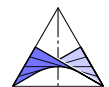


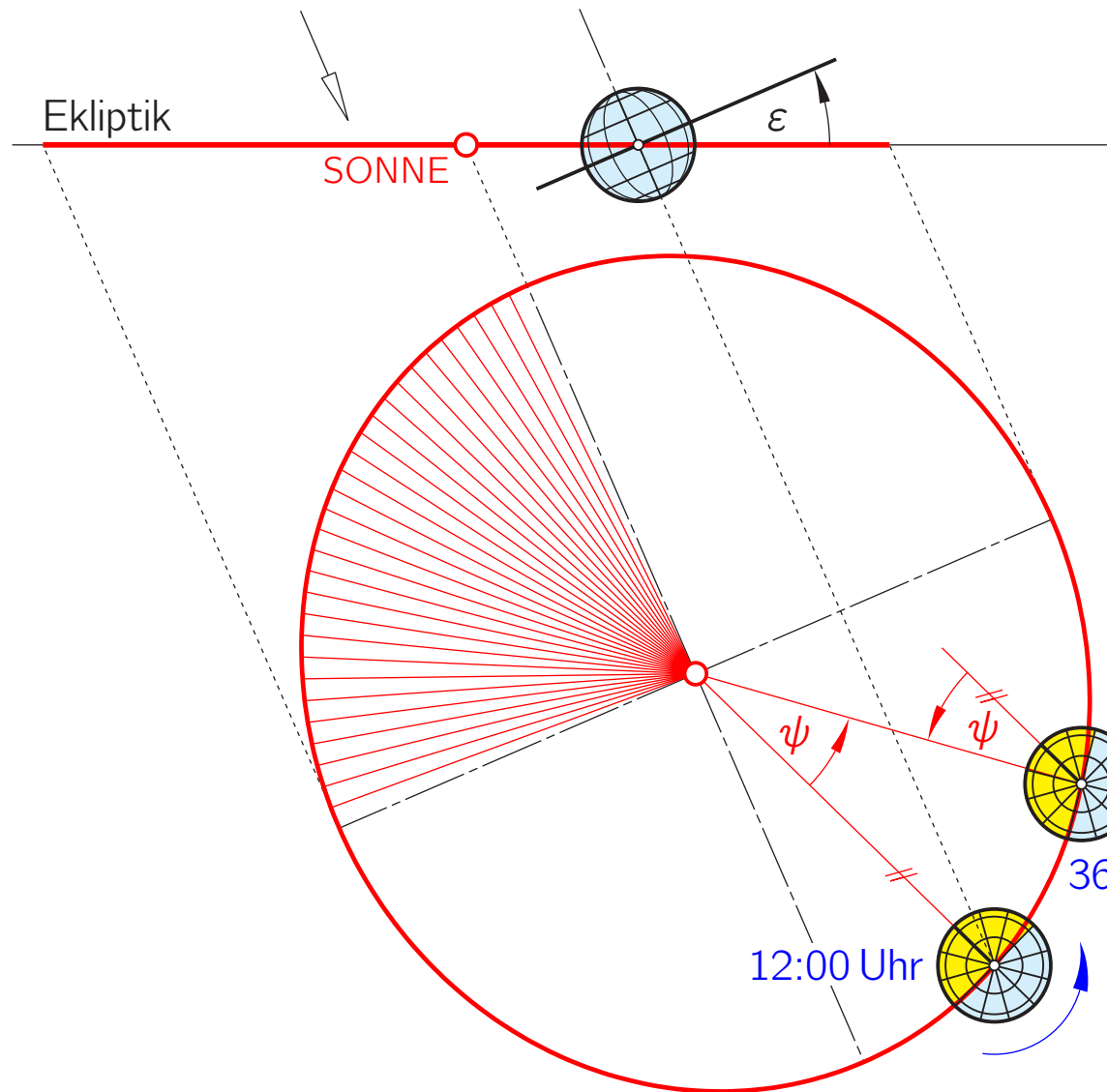
Wir projizieren die Bahn der Erde orthogonal in eine Äquatorebene, um die  
Drehung der Erde um ihre Achse in wahrer Größe zu sehen.



Von einem Sonnenhöchststand zum nächsten muss sich die Erde durch  $360^\circ + \psi$  um ihre Achse drehen  $\Rightarrow$  die Tage sind verschieden lang!

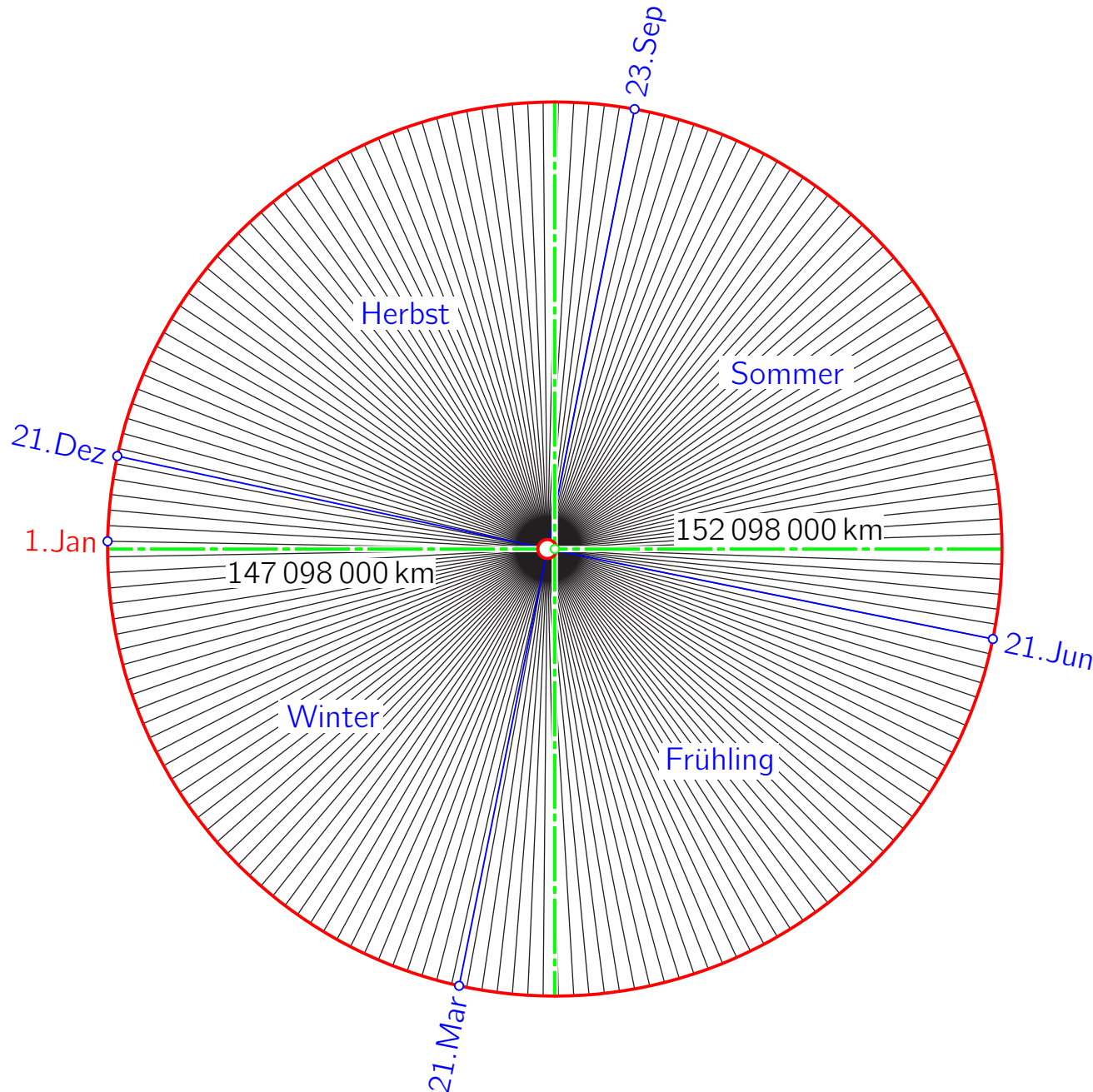
(Bild nicht maßstabstreu)





Von einem Sonnenhöchststand zum nächsten muss sich die Erde durch  $360^\circ + \psi$  um ihre Achse drehen  $\Rightarrow$  die Tage sind verschieden lang!

Selbst bei einer Kreisbahn ändern sich die pro Tag (mittlere Zeit) überstrichenen Zentriwinkel  $\psi$  wegen der affinen Verzerrung von Tag zu Tag.



Die Bahn der Erde um die Sonne ist Ellipse, die mit konstanter **Flächengeschwindigkeit** durchlaufen wird.

(2 Tage Zeitintervall zwischen den Teilungsstrichen).

### Bahndaten:

$$a = 149.598 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$b = 149.577 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$e = 2.500 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\varepsilon = e/a = 0.01671$$

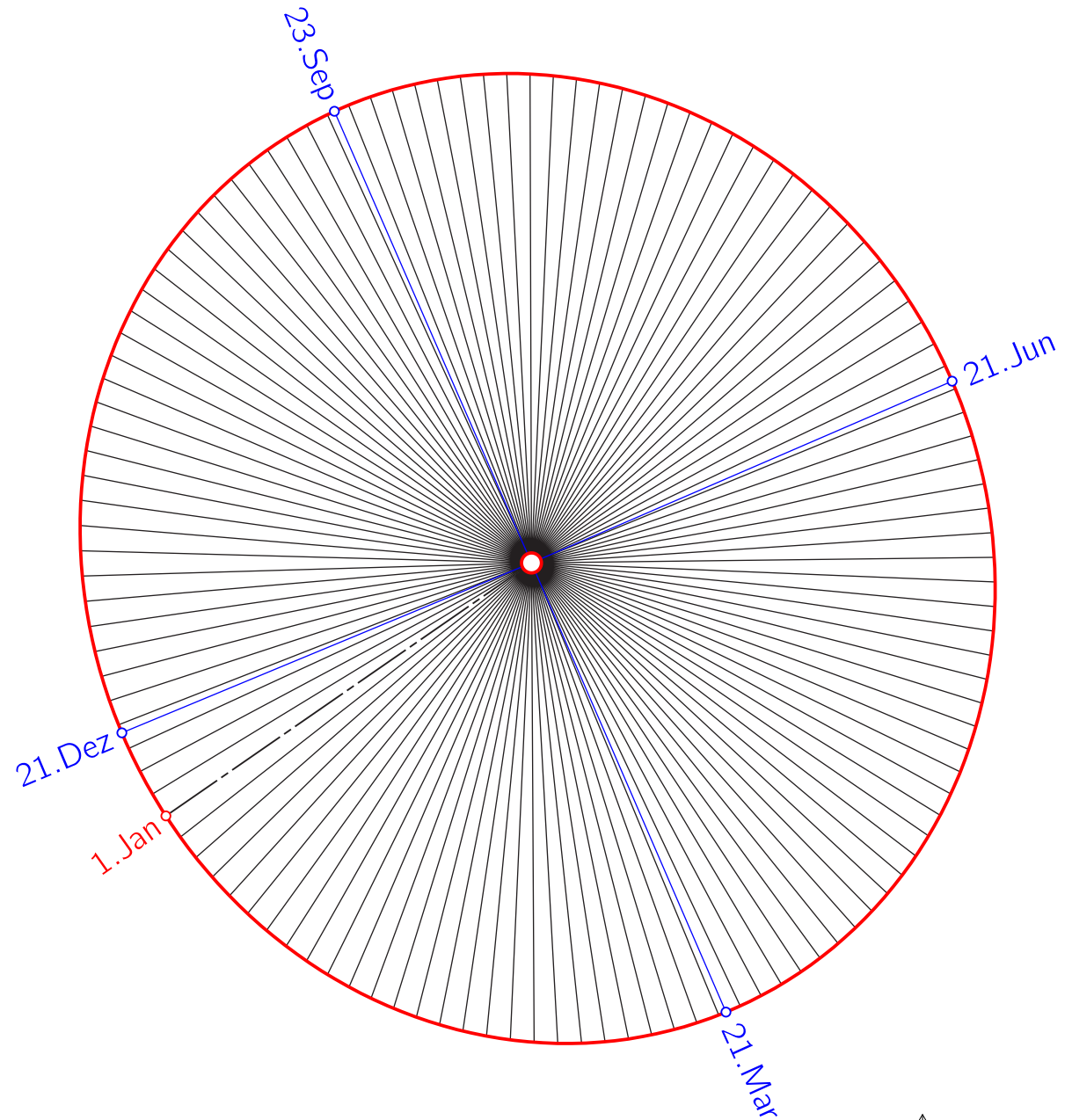


Das ist der **Seitenriss der elliptischen Erdbahn**; dieser wird ebenfalls mit **konstanter Flächengeschwindigkeit** durchlaufen.

(3 Tage Zeitintervall zwischen den Teilungsstrichen (mittlerer Zeit).)

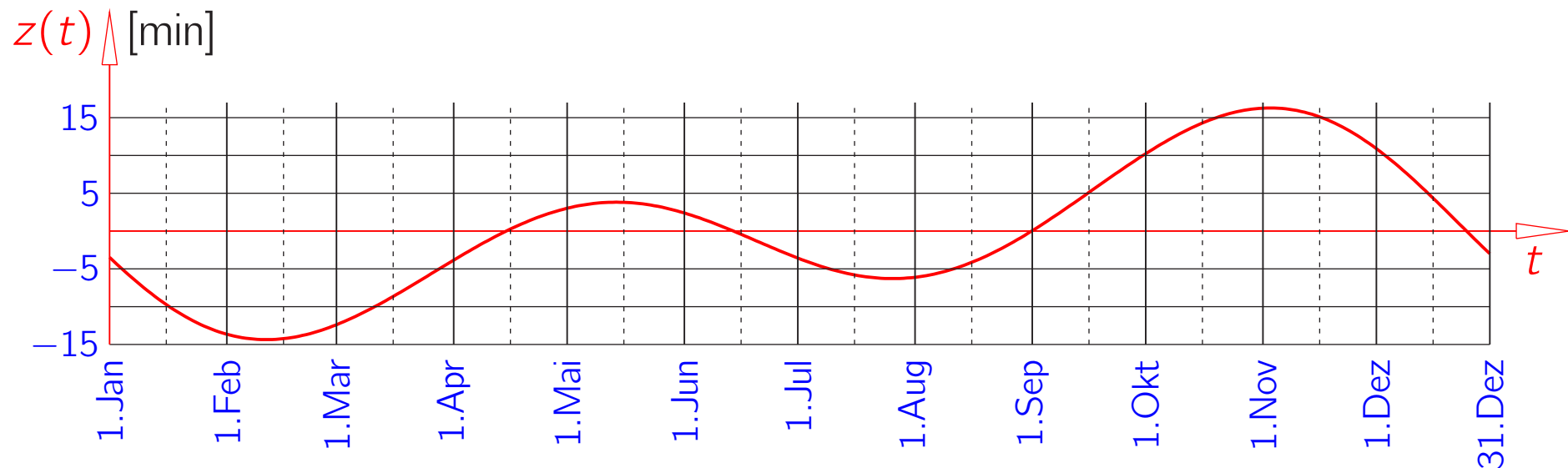
---

Die Abweichungen der Zentriwinkel vom Durchschnittswert  $360/365^\circ$  sind die Ursache für die **Zeitgleichung**.

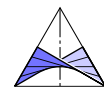




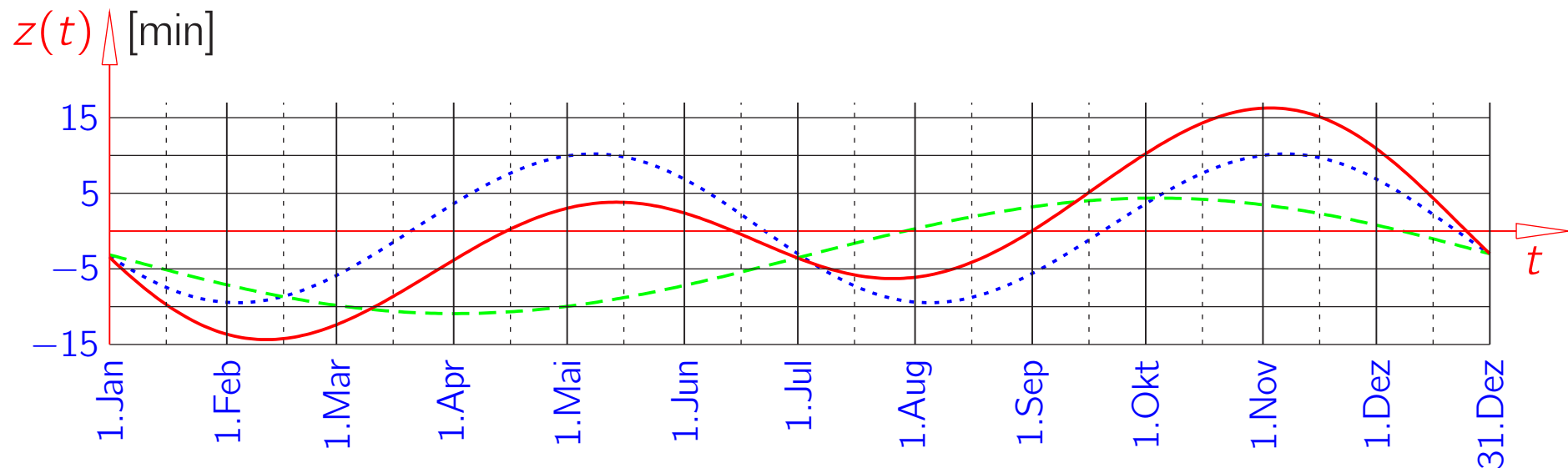
## 5. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



**Zeitgleichung:** wahre Zeit = Sonnenzeit = mittlere Zeit +  $z(t)$



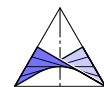
## 5. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



**Zeitgleichung:** wahre Zeit = Sonnenzeit = mittlere Zeit +  $z(t)$

..... Zeitgleichung im Falle einer Kreisbahn ( $e = 0$ )

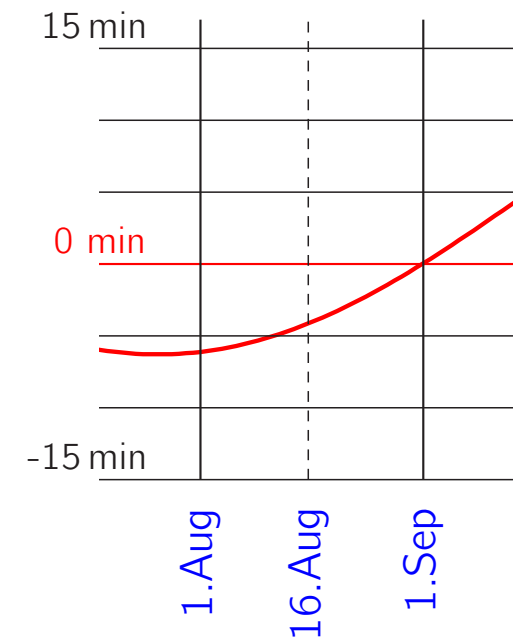
- - - - - Zeitgleichung ohne Schiefe der Ekliptik ( $\varepsilon = 0$ )



## 5. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



### Zeitgleichung:



Ablesebeispiel, 15. August: Die Reflexion zeigt  $\sim 8:05$ ; es ist Sommerzeit, die Zeitgleichung ergibt  $z = -5 \text{ min}$  (Sonnenzeit – mittl. Zeit)  $\Rightarrow$  Resultat:  $\sim 9:10 \text{ Uhr}$





Segnung am 9. September 2012  
Abt Maximilian, Weihbischof Laun, Abt Gregor mit "Sonnenprojektionsuhr"

# Literatur

- H. Stachel: *Spiegelung und Brechnung im DG-Unterricht*. Informationsblätter der Geometrie **2**/1, 23–29 (1983).

