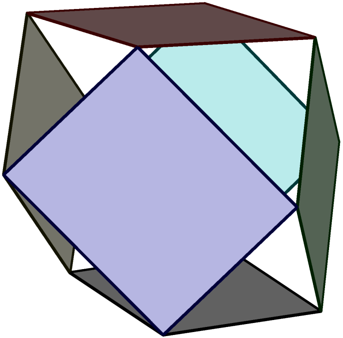
Selbstkorrigierende Aufgaben am Tetraeder

Hans-Peter Schröcker

Arbeitsbereich für Geometrie and CAD
Universität Innsbruck

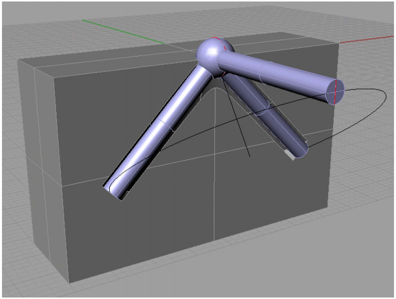
33. Fortbildungstagung für Geometrie
Strobl, 5.–8. November 2012

Ziele des Vortrags



- »Angewandte« und »reine« Aufgaben
- Vorstellung einiger »reiner« Aufgaben
- Beweisideen

»Angewandte« Aufgaben



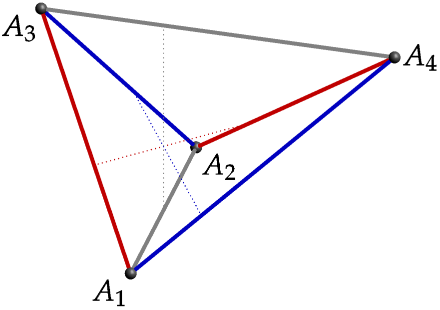
(Drehkreuz nach Fuhs und Stachel, 1988)

Selbstkorrigierende Aufgaben am Tetraeder

Tetraeder: Geordnetes Quadrupel $A_1A_2A_3A_4$ von vier nicht-komplanaren Punkten.

- Aufgabenstellung und Lösung erfordern lediglich Inzidenzen und Orthogonalität.
- Die Lösung ist eher systematisch als »kniffelig«.
- Die letzten geforderten Inzidenzen oder Orthogonalitäten ergeben sich automatisch.
- Es ist sofort offensichtlich, ob die Aufgabe richtig gelöst wurde oder nicht.
- Die Lösung der Aufgabe endet mit einem Überraschungseffekt.

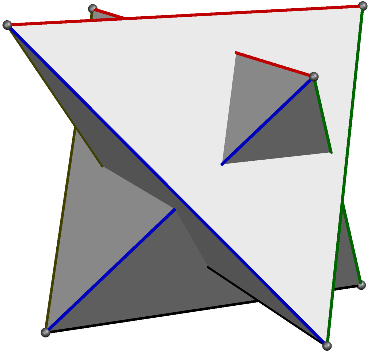
Orthogonale Tetraeder

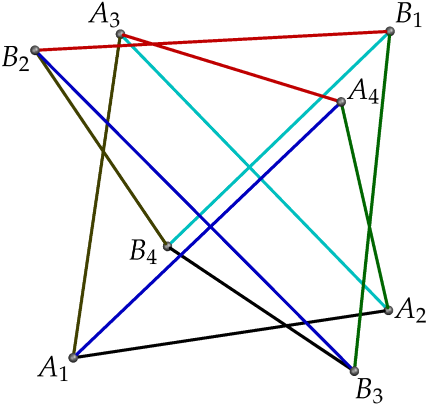


Aufgabe

Konstruieren Sie ein orthogonales Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$
(gegenüberliegende Seiten sind orthogonal).

Orthogonale Tetraeder

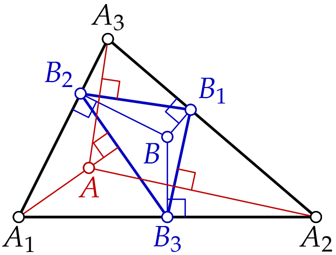


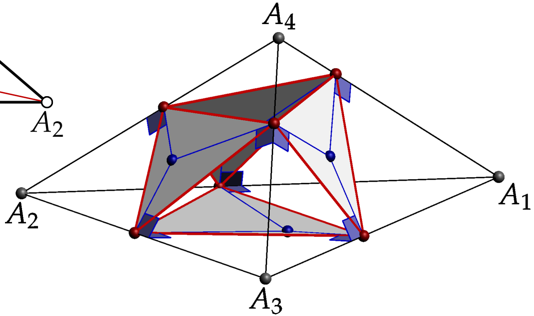


Aufgabe

Konstruieren Sie ein Paar orthogonaler Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ (gegenüberliegende Seiten der beiden Tetraeder sind orthogonal).

Fußpunktsketten

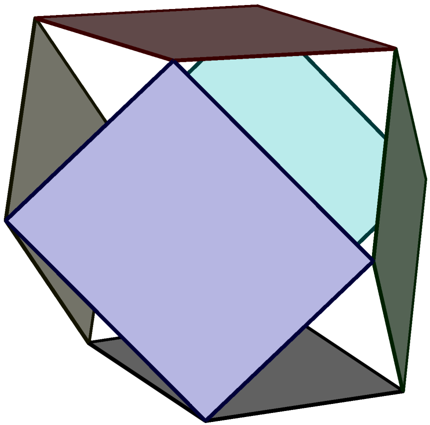




Aufgabe

Konstruieren Sie eine geschlossene Fußpunktskette auf einem Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$.

Saturiertes System von sechs Rechtecken

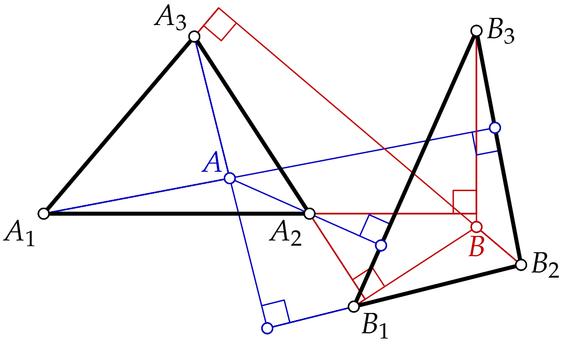


Aufgabe

Konstruieren Sie ein saturiertes System von sechs Rechtecken.

Warum Beweise sein müssen …

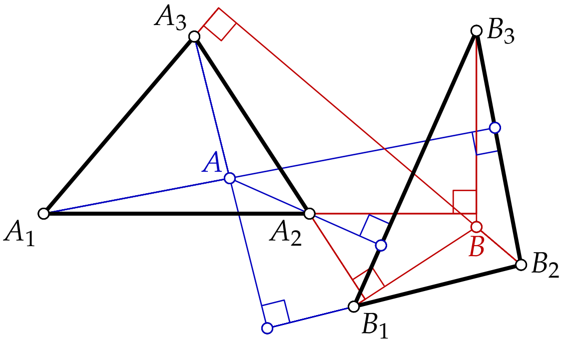
Orthologe Dreiecke



Definition

Zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ heißen ortholog, wenn sich die drei Geraden durch Ecken von $A_1A_2A_3$ und orthogonal zu gegenüberliegende Seitenkanten von $B_1B_2B_3$ in einem Punkt A (dem Orthologiezentrum) schneiden.

Orthologe Dreiecke



Satz

Auch die Geraden durch Ecken von $B_1B_2B_3$ und orthogonal auf gegenüberliegende Seitenkanten von $A_1A_2A_3$ schneiden sich in einem Orthologiezentrum B.

Orthologe Tetraeder

Definition

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ heißen ortholog, wenn sich die Geraden durch Ecken von $A_1A_2A_3A_4$ und orthogonal zu gegenüberliegenden Seitenflächen von $B_1B_2B_3B_4$ in einem Orthologiezentrum A schneiden.

Satz

Auch die Geraden durch Ecken von $B_1B_2B_3B_4$ und orthogonal auf gegenüberliegende Seitenflächen von $A_1A_2A_3A_4$ schneiden sich in einem Orthologiezentrum B.

Orthogonale Tetraeder

Definition

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ heißen orthogonal, wenn jeweils gegenüberliegende Kanten orthogonal sind.

Satz

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ sind genau dann ortholog wenn sie orthogonal sind.

Orthogonale Tetraeder

Definition

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ heißen orthogonal, wenn jeweils gegenüberliegende Kanten orthogonal sind.

Satz

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ sind genau dann orthologe wenn sie orthogonal sind.

Beweis.

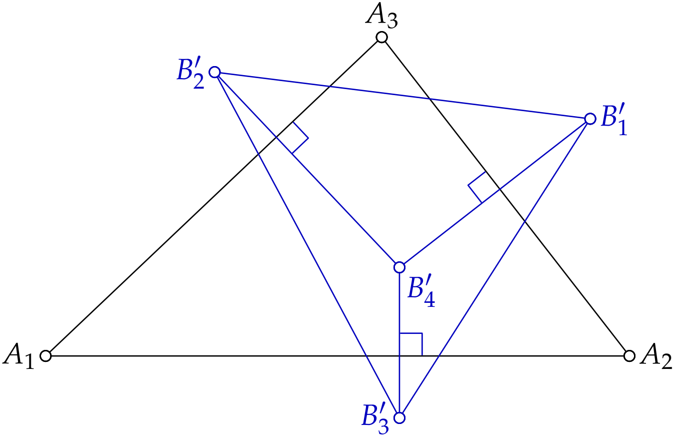
ortholog $\implies$ orthogonal:

- $A_1A \perp B_2B_3B_4$
- $A_2A \perp B_1B_3B_4$
- $A_1A_2A \perp B_3B_4$
- $A_1A_2 \perp B_3B_4$

$\square$

Orthogonale Tetraeder

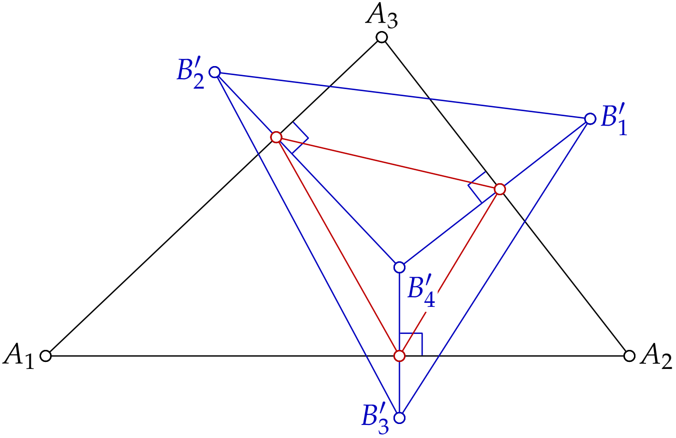
Beweis.
orthogonal $\implies$ ortholog:



$\square$

Orthogonale Tetraeder

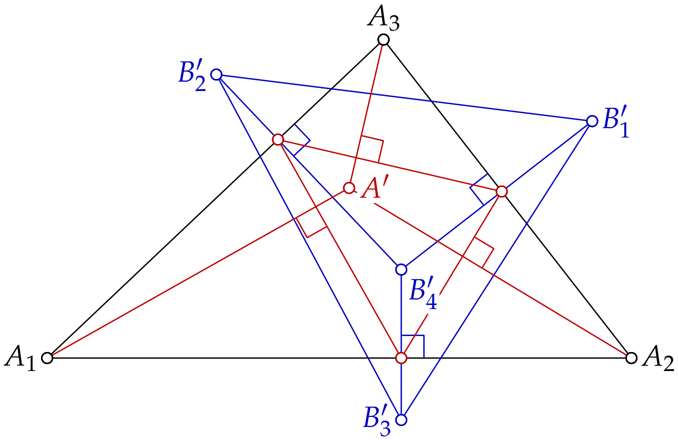
Beweis.
orthogonal $\implies$ ortholog:



□

Orthogonale Tetraeder

Beweis.
orthogonal $\Longrightarrow$ ortholog:



□

Folgerungen

Der Beweis zeigt die Äquivalenz von Orthogonalität und Existenz eines Orthologiezentrums A:

$$A \text{ existiert} \iff \text{Tetraeder orthogonal} \iff B \text{ existiert}$$

Die Definition von »orthologisch« ist daher symmetrisch.

Folgerungen

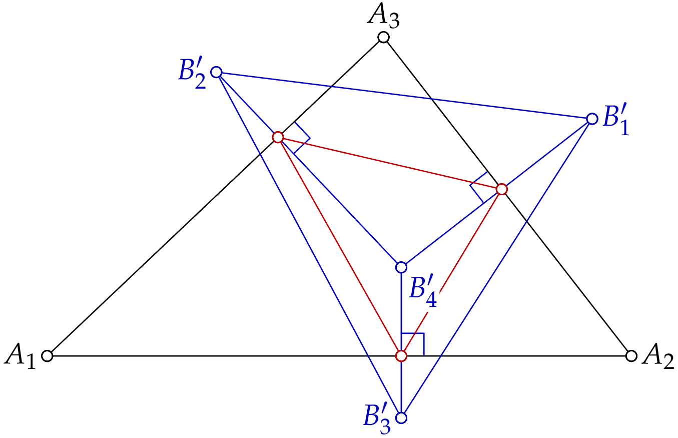
Orthogonalität von fünf Kantenpaaren impliziert Existenz eines Orthologiezentrums. Daher gilt:

Satz

Sind fünf gegenüberliegende Kantenpaare der Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ *und* $B_1B_2B_3B_4$ *orthogonal, so gilt das auch für das sechste.*

Folgerungen

Sind $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ ortholog, so liefern die Normalprojektionen von B_1, B_2, B_3, B_4 auf die gegenüberliegenden Seitenebenen von $A_1A_2A_3A_4$ die Pole einer geschlossenen Fußpunktskette.

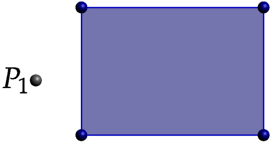


Saturierte Rechtecksketten

Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Vierecksdiagonalen orthogonal sind.

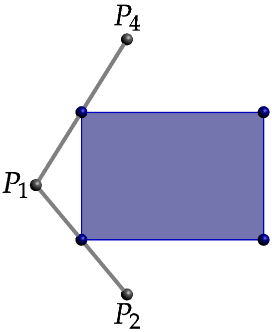
Saturierte Rechtecksketten



Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ *ist genau dann ein Rechteck, wenn die Vierecksdiagonalen orthogonal sind.*

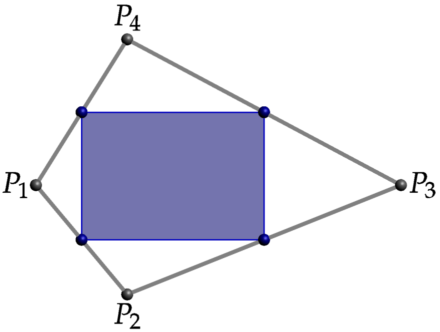
Saturierte Rechtecksketten



Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Vierecksdiagonalen orthogonal sind.

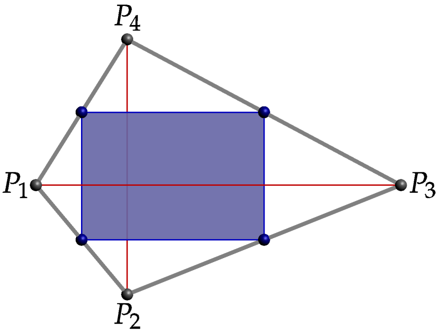
Saturierte Rechtecksketten



Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Vierecksdiagonalen orthogonal sind.

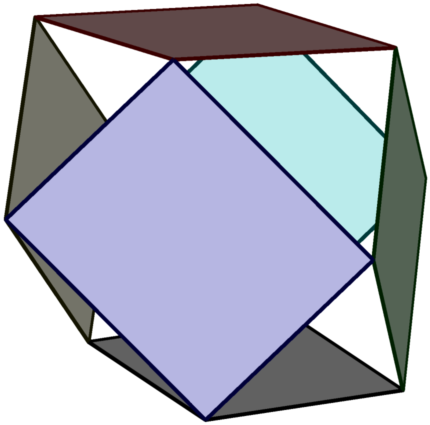
Saturierte Rechtecksketten



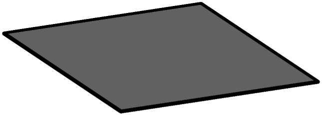
Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ *ist genau dann ein Rechteck, wenn die Vierecksdiagonalen orthogonal sind.*

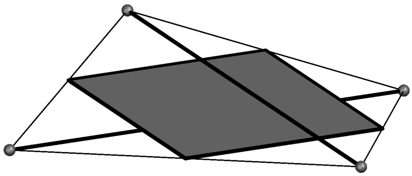
Saturierte Rechtecksketten



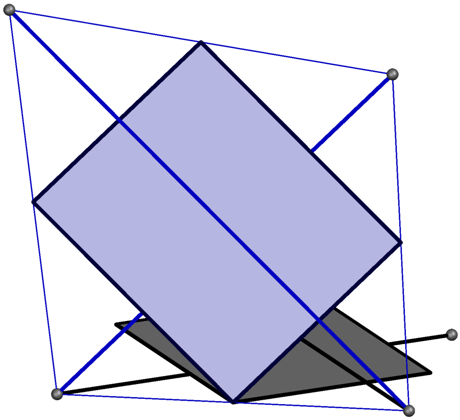
Saturierte Rechteckketten



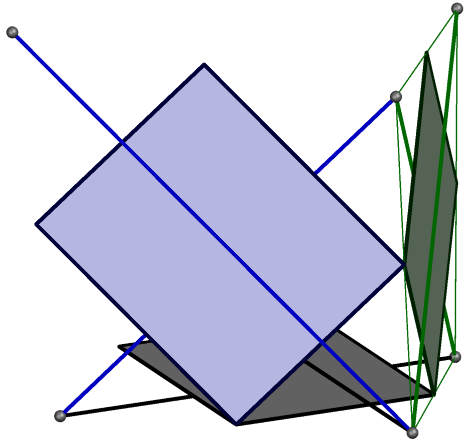
Saturierte Rechtecksketten



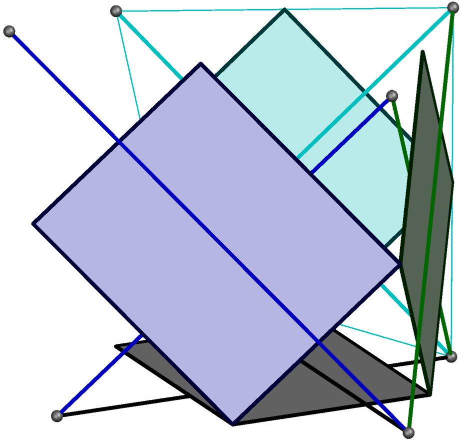
Saturierte Rechtecksketten



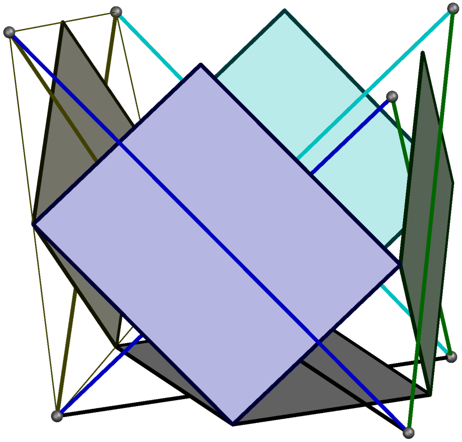
Saturierte Rechtecksketten



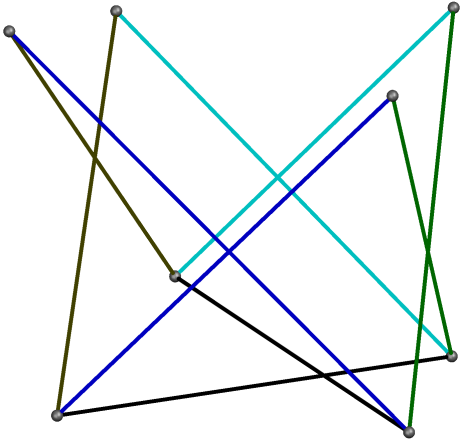
Saturierte Rechtecksketten



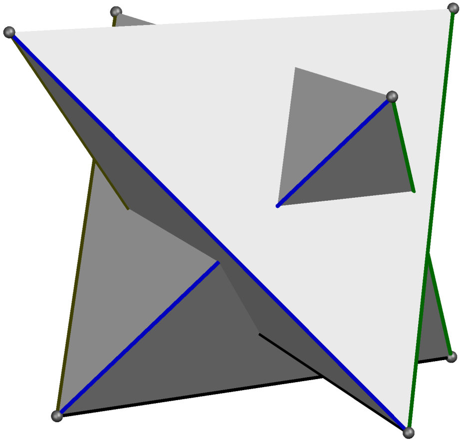
Saturierte Rechteckketten



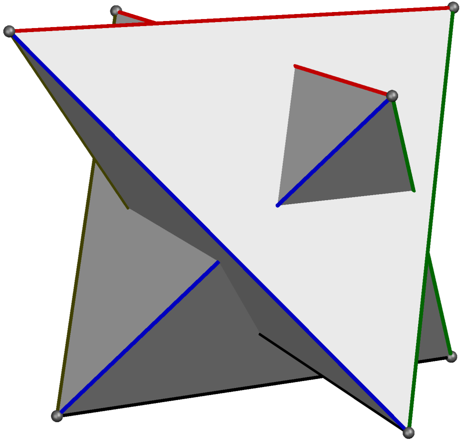
Saturierte Rechtecksketten



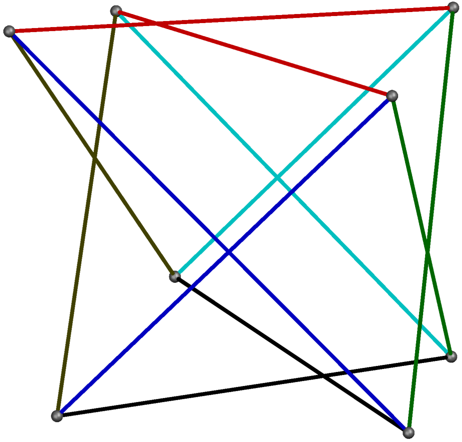
Saturierte Rechteckketten



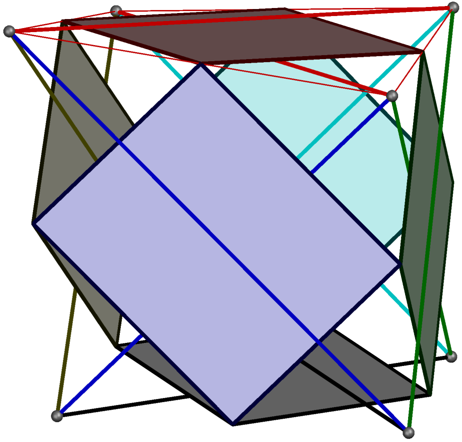
Saturierte Rechtecksketten



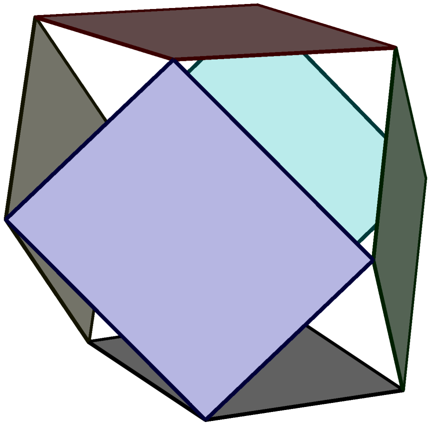
Saturierte Rechtecksketten



Saturierte Rechtecksketten



Saturierte Rechteckketten



Workshop

- Mittwoch, 7. November 2012, 14:30–16:00

Literatur

H.-P. Schröcker
Selbstkorrigierende Aufgaben am Tetraeder
Inf. Bl. Geom., 30(2):27–29, 2011.

H.-P. Schröcker
Diskrete Geometrie
Vorlesungsskriptum, Hochschullehrgang Darstellende Geometrie, PH Tirol, 2011.