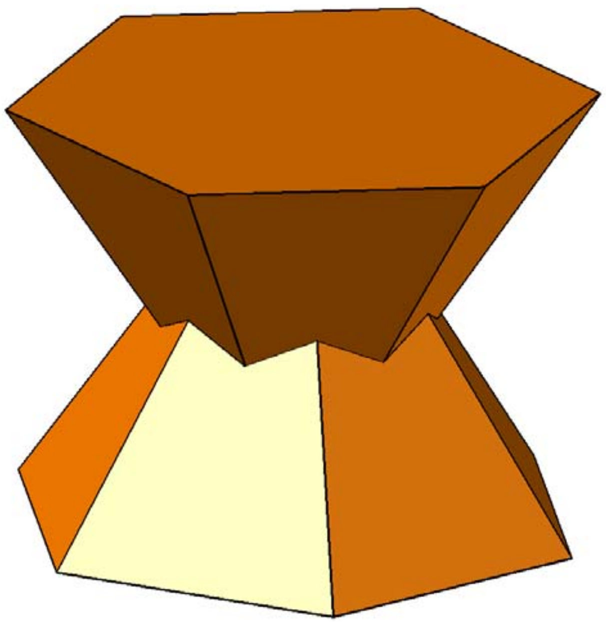
VERALLGEMEINERTE ANTIPRISMEN

O. Röschel, Strobl, November 2011

(Erschienen in IBDG 30/1, 28-33, 2011)



Literatur:

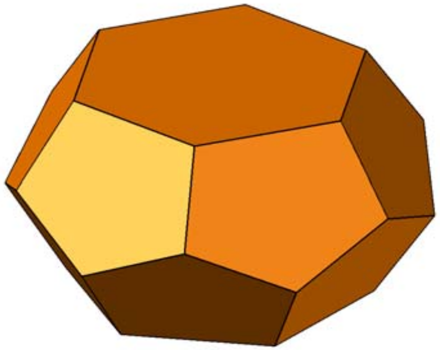
[1] J. Böhm – E. Quaisser: Schönheit und Harmonie geometrischer Formen. Akademie Verlag, Berlin 1991.

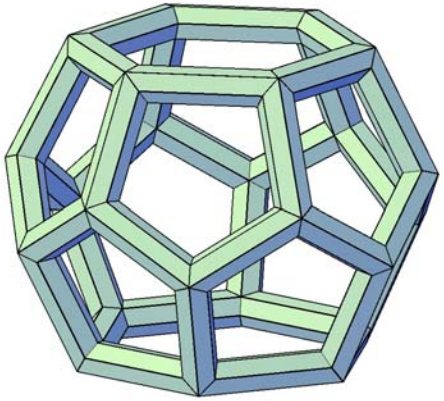
[2] P. R. Cromwell: Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.

[3] L. Fejes – Toth: Regular Figures. Int. Series of Monogr. in Pure and Appl. Math. 48, Pergamon, Oxford 1964.

[4] B. Grünbaum: Convex Polytopes. Pure and Applied Mathematics vol. XVI, Wiley, London – New York – Sidney, 1967.

[5] H. Pottmann et al.: Architekturgeometrie. Bentley Inst. Press, Springer, Wien-New York, 2010.

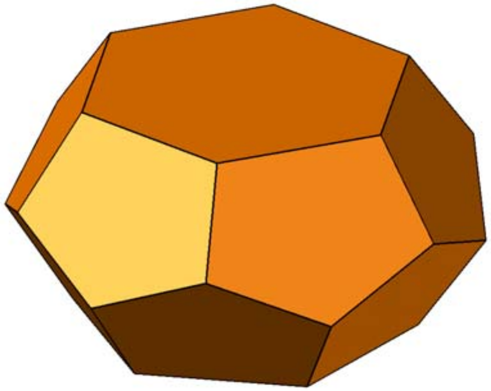




Zu diesem Vortrag: Artikel in IBDG!

Inhalt

- Definition
- Erzeugung
- Symmetrie
- Verschiedene Aufgaben
- Zusammenfassung

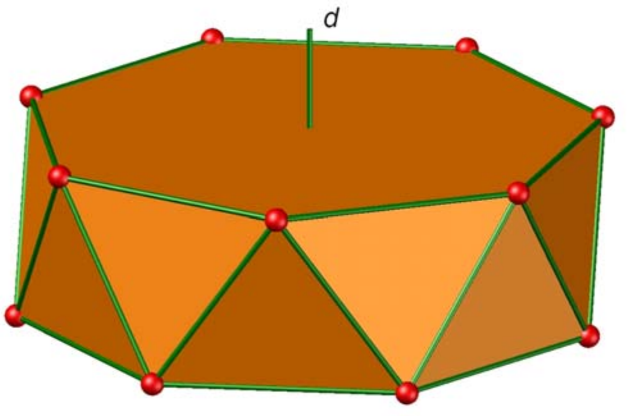


I. Definition

Startpunkt: F. GRUBER (2010)

Suche nach speziellen Polyedern mit ebenen Fünfecks-Fassetten sowie ‚sehr regulären' Polygonen als Basis und Deckel.

Nahe an Antiprismen!

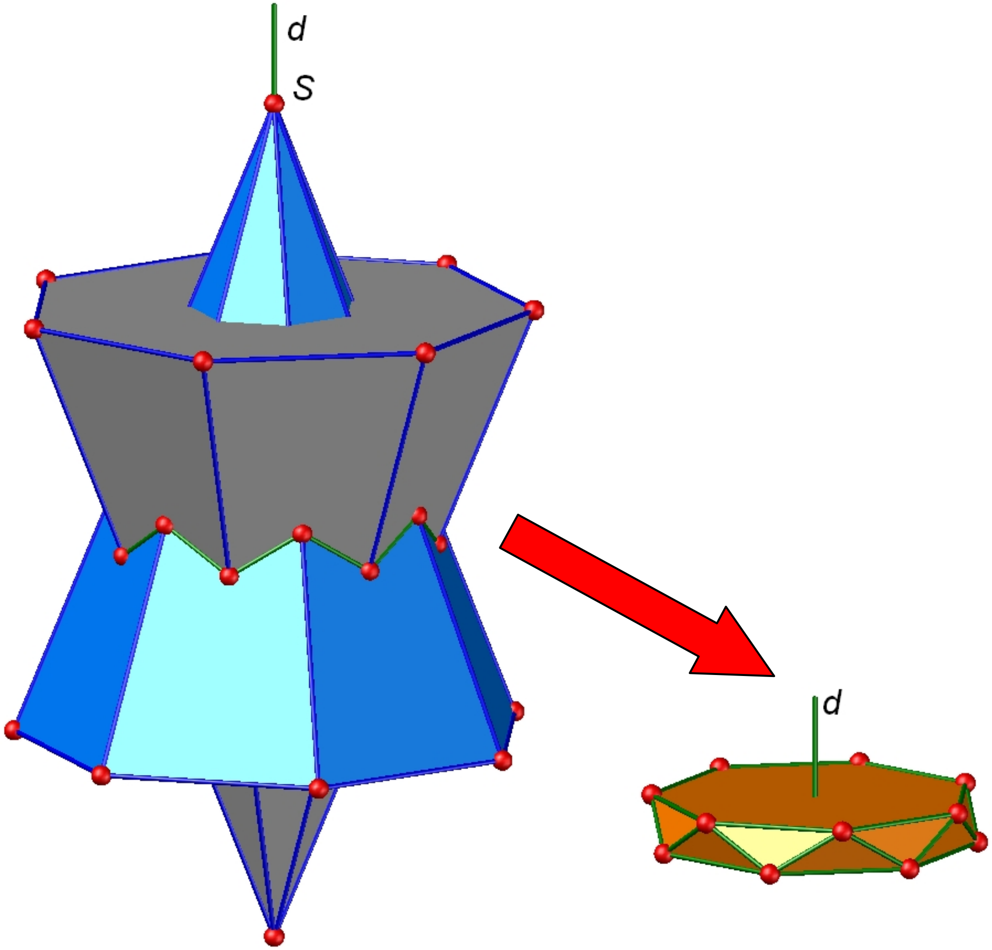


‚Antiprisma'

Reguläres n-Eck mit
Drehachse d

Schraubung um Achse d,
Drehwinkel α := 180°/n

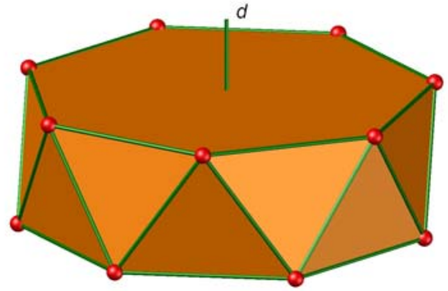
Schieblänge > 0

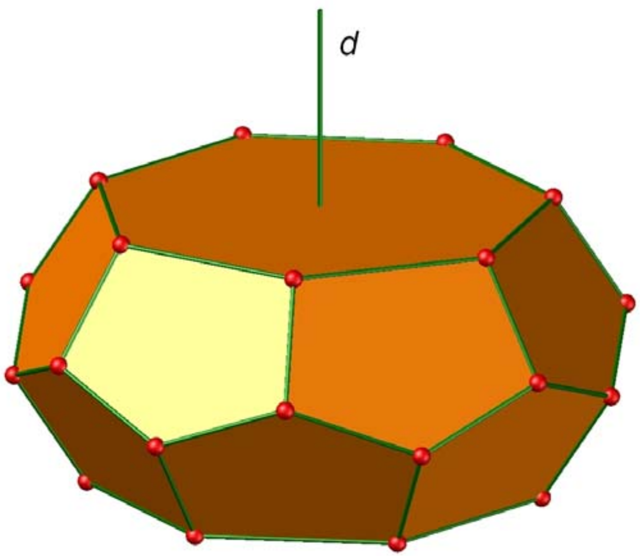


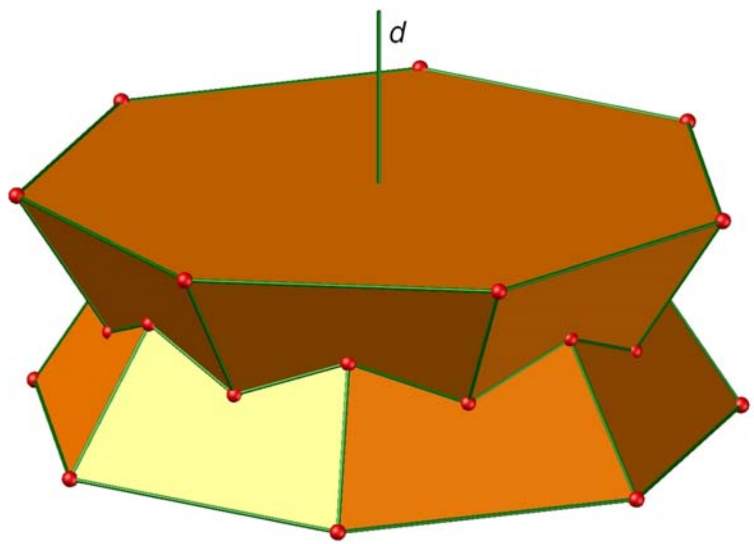
Erzeugung als Volumsmodell

Ohne Zurechtstutzen

→ **,Verallgemeinerte Antiprismen‘**



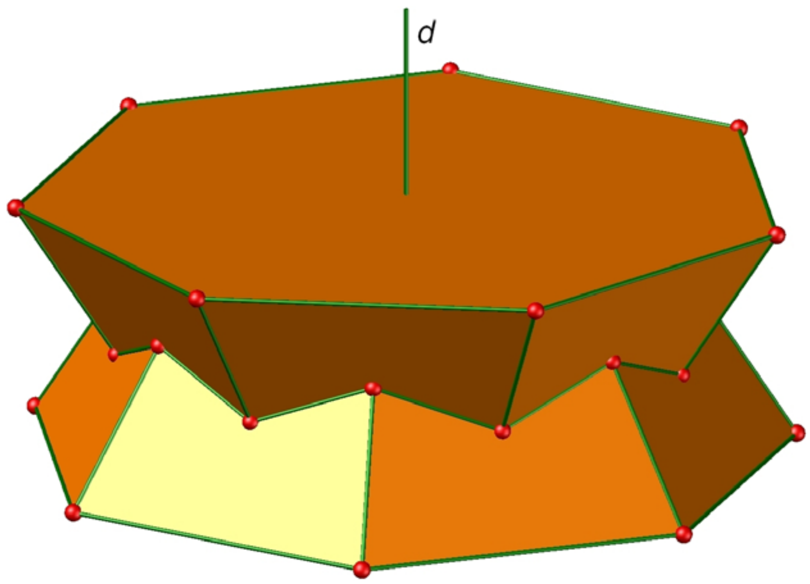


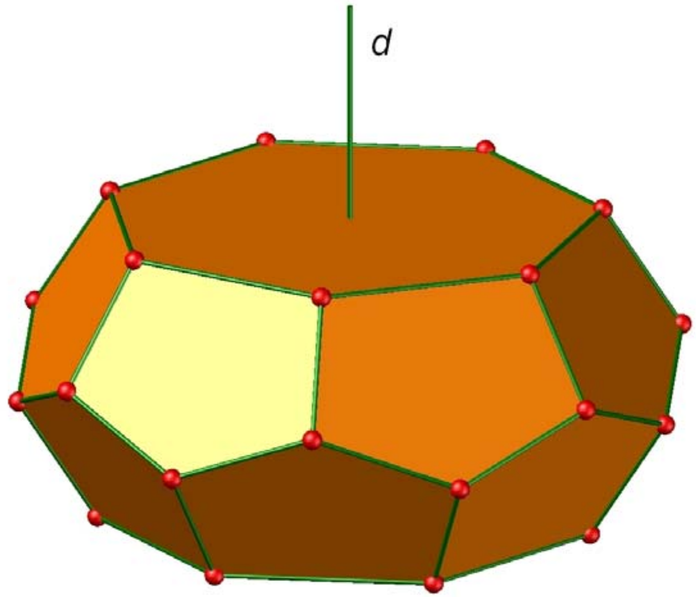


Es existieren konvexe und nicht konvenxe Varianten

II. Modellierung als Volumsmodell

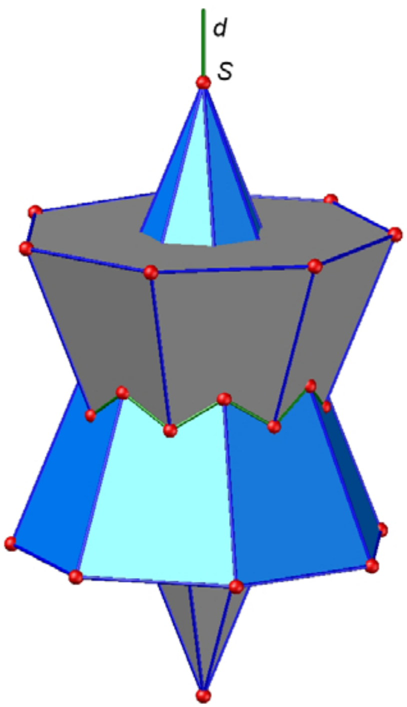
Modellierung?

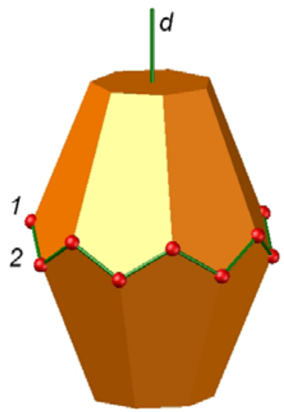


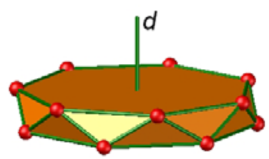


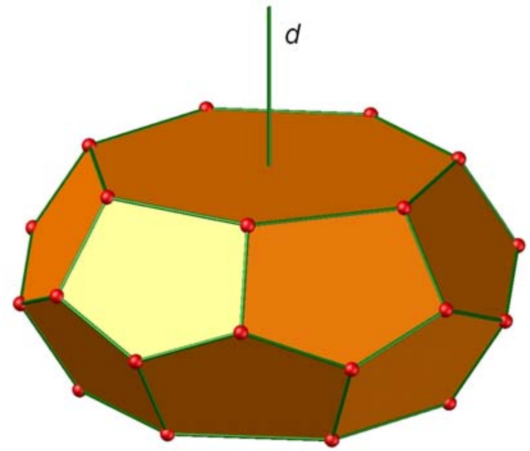
Volumsmodell:

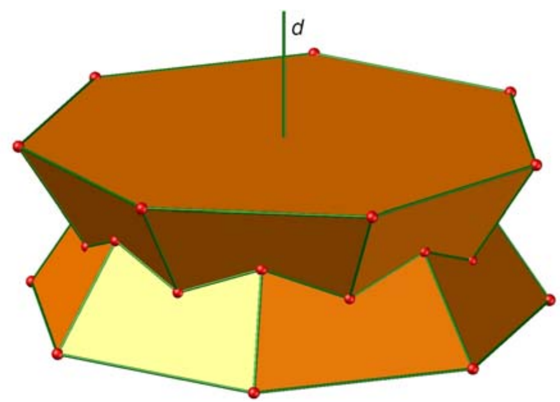
- Durchschnitt oder
- Vereinigung (wieder ev. Zurechtstutzen)









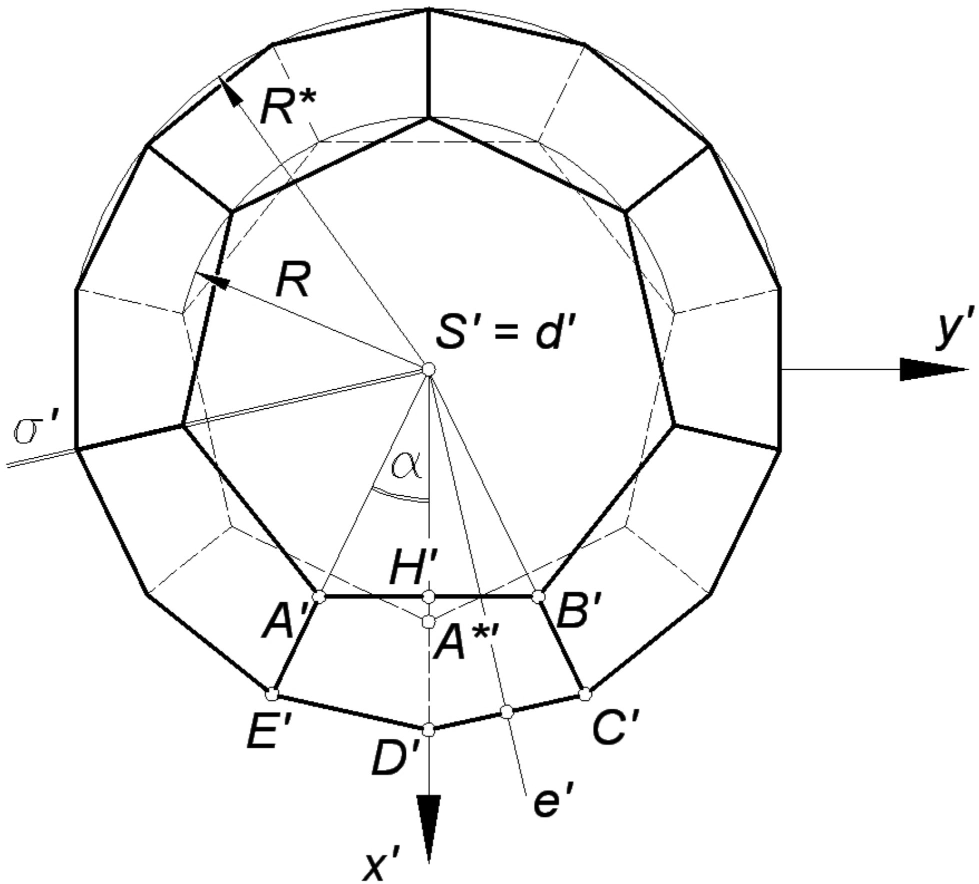


III. Symmetrie

Drehachsen (d, e, …)

Spiegelebenen

Drehspiegelungen

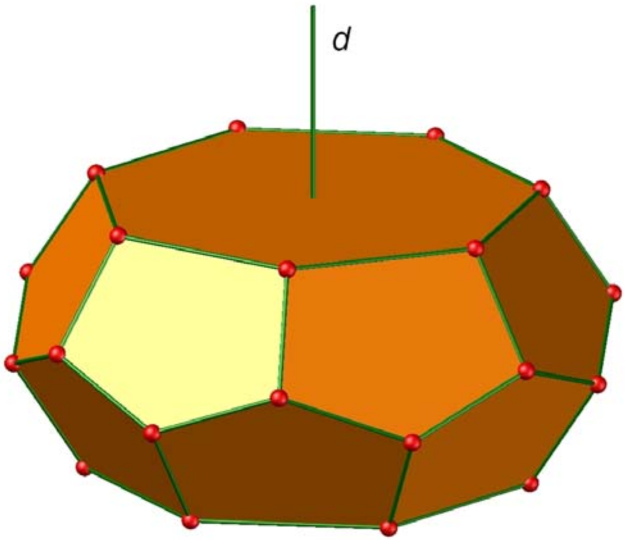


Kartesische Koordinaten für ‚Normalaufstellung'

IV. Verallgemeinerte Antiprismen mit Kantenkugel

Fragestellung: Existieren verallgemeinerte Antiprismen, bei denen alle Kanten eine gemeinsame Kugel berühren?

Antwort: Ja, aber da ist zu konstruieren oder zu rechnen!



Eine konstruktive Lösung:

Vorgabe: Das ‚Zick-Zack-Band' C, D, E, … (GR in Richtung von d ist reg. 2n-Eck)

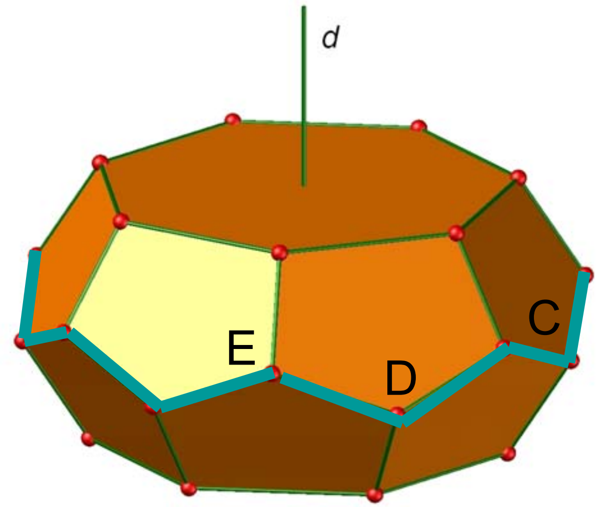
→ Die Kanten dieses Bandes berühren die Kantenkugel

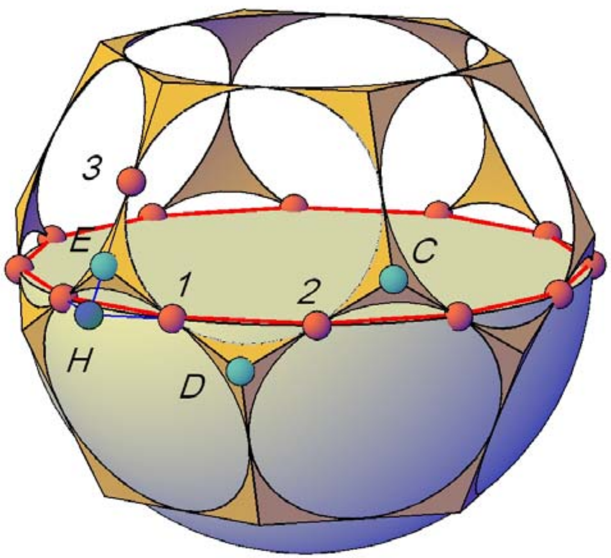
Mitte auf Drehachse d

Berührpunkte 1, 2, … sind Kantenmitten

→ reg. 2n-Eck in der Symmetrieebene normal zu d

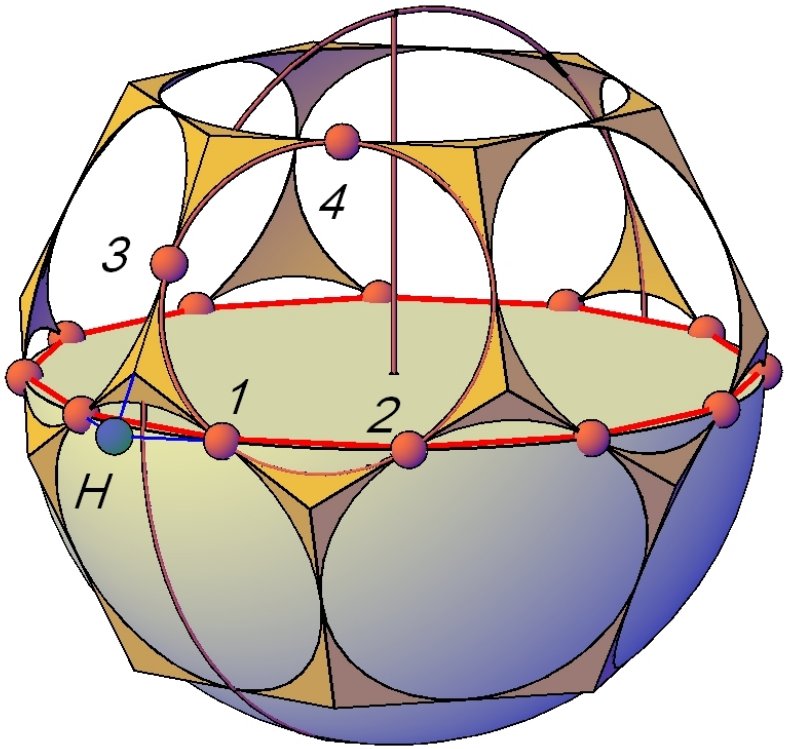
Ges.: Restliche Kanten des Objektes!





Die vom ‚Zick-Zack-Band' nach oben bzw. unten weisenden Polyederkanten treffen die Symmetrieebene in den Verlängerungen der Kanten des 2n-Ecks 1, 2, …

→ **Punkt H**



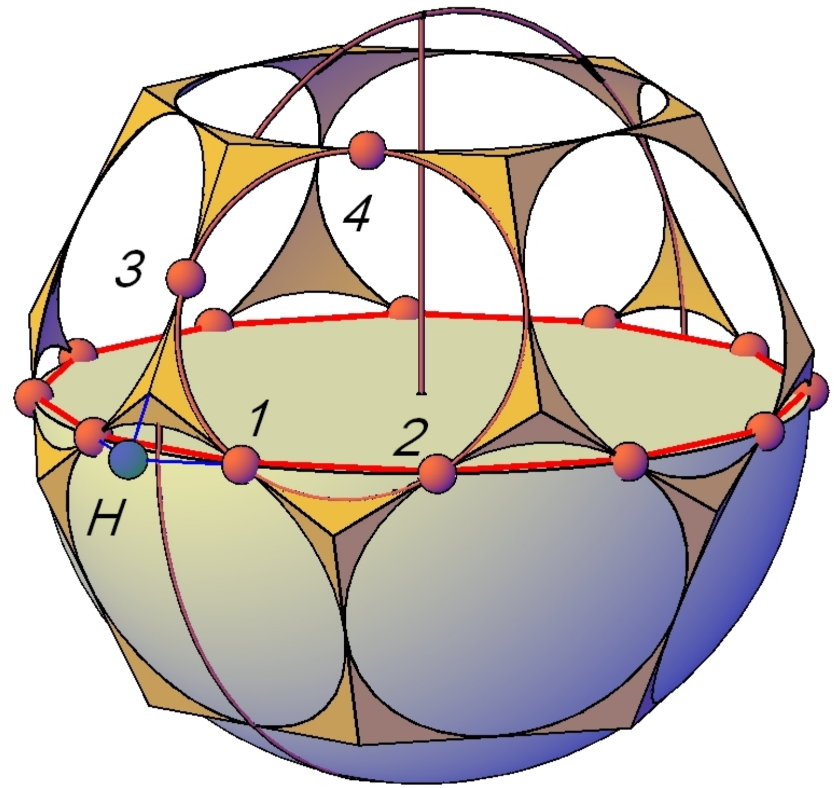
Aus H ist Tangente an den Schnittkreis der Kantenkugel mit Symmetrieebene [H,d] zu legen. Diese Tangente trägt eine der **Polyederkanten**.

→ Berührpunkt (z. B. 3)

Nun Ermittlung des regulären
Deckel- bzw. Bodenpolygons:

Die Fünfecks-Seitenfassetten besitzen Inkreise auf der Kantenkugel.

Der durch die Punkte 1, 2 und 3 fixierte Kreis berührt in seinem höchsten Punkt die Deckelkante



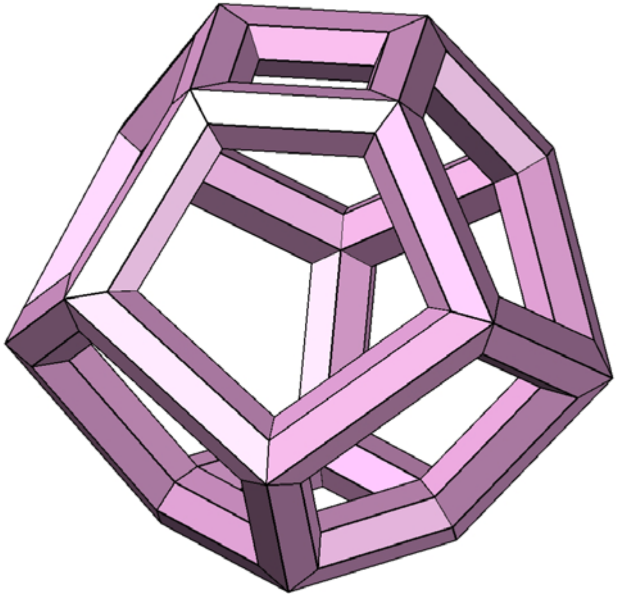
→ nach Symmetrieoperationen fertig!

→ Resultat

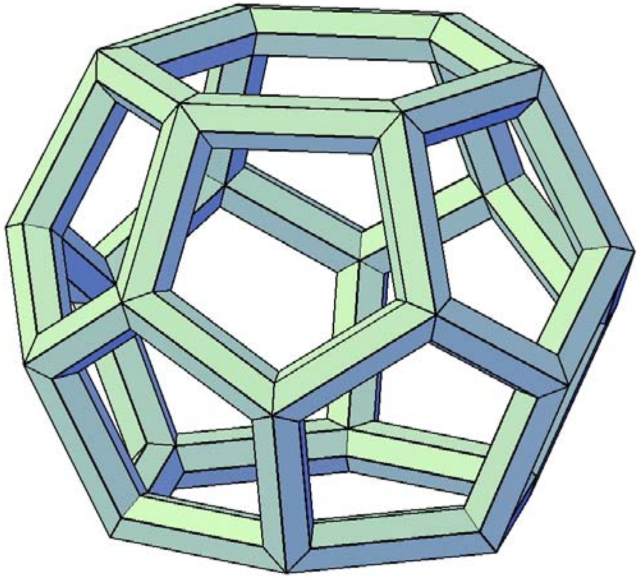
Zu jedem n>2 existiert bis auf Ähnlichkeiten ein eindeutig bestimmtes verallgemeinertes Antiprisma, bei dem alle Kanten eine feste Kugel berühren.

Beispiele von **Kantenmodellen** dieser Polyeder mit Kantenkugel

n = 4



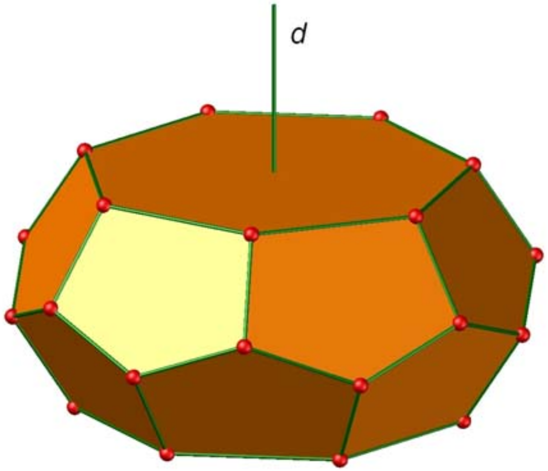
n = 6



V. Verallgemeinerte Antiprismen mit fester gemeinsamer Kantenlänge

Fragestellung: Existieren verallgemeinerte Antiprismen, bei denen alle Kanten gleich lang sind?

Antwort: Ja, aber da ist zu rechnen!

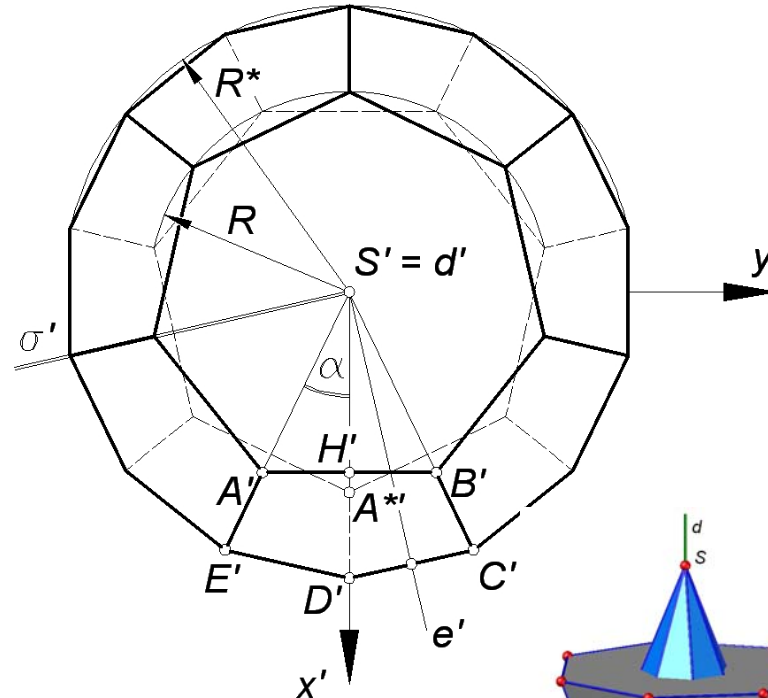


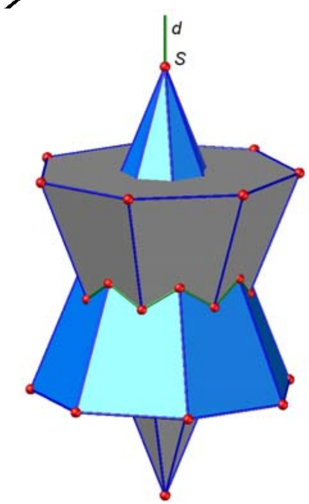
Analytische Beschreibung in kartesischen Normalkoordinaten ($\alpha := 180°/n$) :

$$A(R\cos\alpha, -R\sin\alpha,\ 0),$$
$$B(R\cos\alpha, R\sin\alpha,\ 0),$$
$$H(R\cos\alpha, 0, 0).$$

$$C(R^*\cos\alpha, R^*\sin\alpha,\ s(R-R^*)/R),$$
$$D(R^*, 0, s - sR^*/(R\cos\alpha)),$$
$$E(R^*\cos\alpha,\ -R^*\sin\alpha,\ s(R-R^*)/R).$$

$$A^*(R, 0, 2s - sR^*(1+\cos\alpha)/(R\cos\alpha)).$$





R:=1, R* …. Umkreisradien

s > 0 … Höhe des Pyramidenscheitels S über [x,y]

Gleiche Kantenlängen: *n* fest vorgegeben → α = 180°/n

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = (R^* - 1)\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ -s \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} R^*(1-\cos\alpha) \\ -R^*\sin\alpha \\ -R^* s(1-\cos\alpha)/\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BC}^2 \quad \rightarrow \quad (1+s^2)(R^*-1)^2 = 4\sin^2\alpha,$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CD}^2 \quad \rightarrow \quad 4(1+\cos\alpha)\cos^2\alpha = R^{*2}[2\cos^2\alpha + s^2(1-\cos\alpha)]$$

Das sind 2 Gleichungen zur Ermittlung von *s* und *R**.

Bemerkungen: *n* fest vorgegeben → α = 180°/n

1. Aus dem Radius *R** könnte *s* berechnet werden:

$$s = \pm \frac{\sqrt{4\sin^2\alpha - (R^* - 1)^2}}{R^* - 1}.$$

2. *s* reell → *R** > 0, sonst keine reellen Objekte!

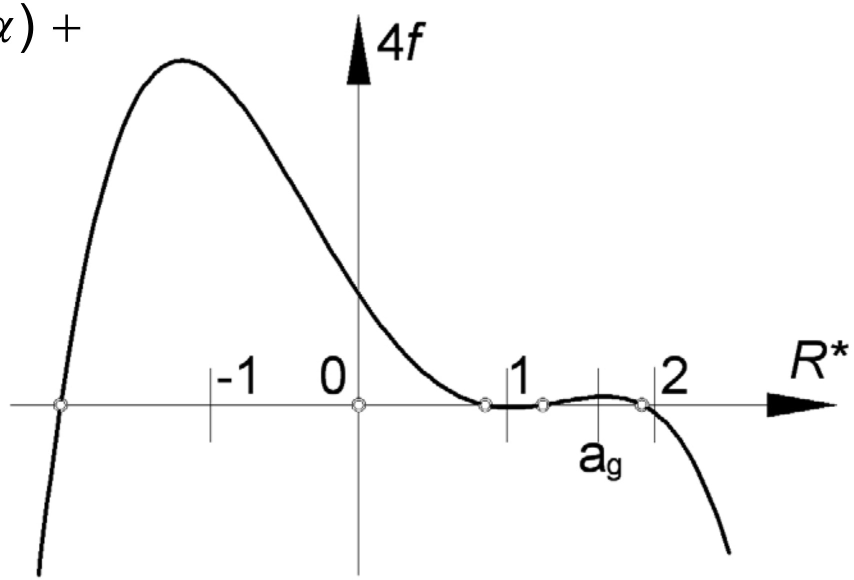
3. Wir eliminieren daher *s* → Einzige Bedingung für *R**:

$$f(R^*) := R^{*2}(R^*+1)(R^*-3)(1-2\cos\alpha) + \\ +4\cos^2\alpha\,(1-2R^*) = 0.$$

Auswertung der Bedingungen der Längengleichheit:

$$f(R^*) := R^{*2}(R^*+1)(R^*-3)(1-2\cos\alpha) +$$
$$+4\cos^2\alpha\,(1-2R^*) = 0.$$

→ $f(R^*)$ ist i.A. eine Gleichung 4. Grades für den Umkreisradius R*.



Graph von $f(R^*)$ für n = 6

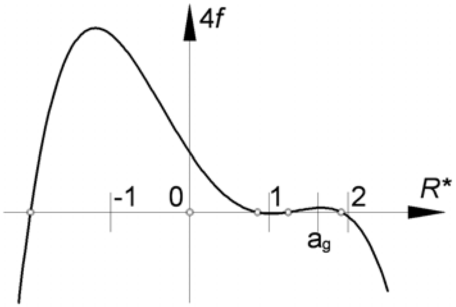
Suche geeignete reelle Nullstellen!

Zusatz: Gibt es die für jedes n>2?

Nullstellen < 0 → keine reellen Polyeder

Nullstellen zwischen 0 und 1 → ‚eingedrückte Lösungen'

Nullstellen > 1 → konvexe Lösungspolyeder

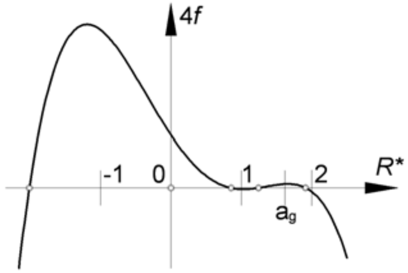


Kurvendiskussion (Vorzeichenwechsel untersuchen) →

Zu jedem n>2 existieren reelle verallgemeinerte Antiprismen, bei denen alle Kanten eine feste Länge besitzen. Eingedrückte Versionen existieren für alle n>2, konvexe für jedes n>4.

Zusatz: *Das einzige konvexe Polyeder dieser Klasse mit n=5 ist das reguläre Pentagondodekaeder. Für n>5 existieren stets 2 konvexe verallgemeinerte Antiprismen dieser Klasse.*

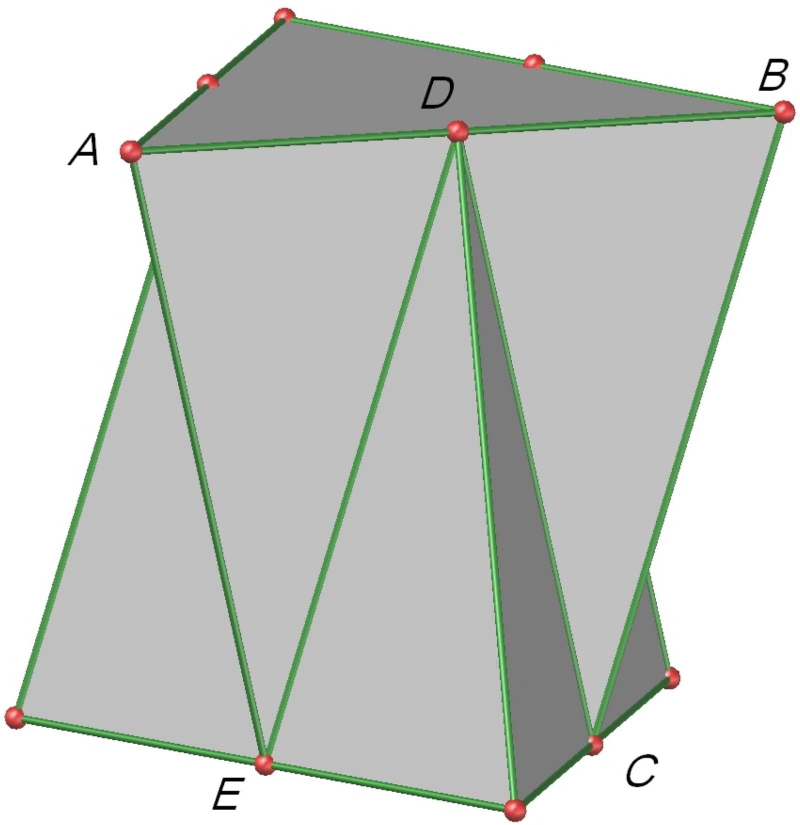
Einige numerische Werte der Nullstellen von *f(R*)*



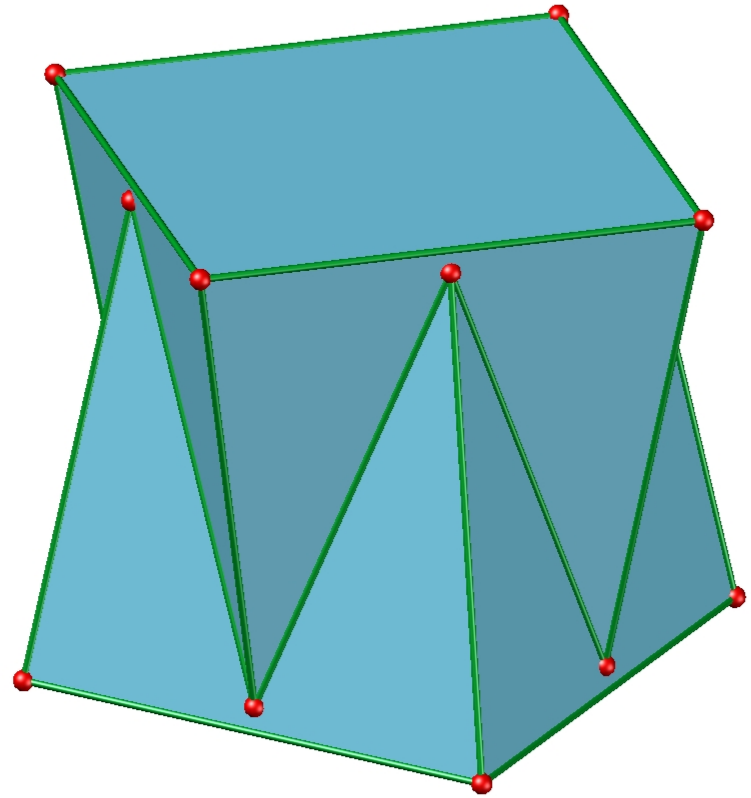
n	Nullstellen (gerundet):
5	-2.03225, 0.79618, 1.61803 (doppelt)
6	-2.01353, 0.854236, 1.24391, 1.91538
7	-2.00677, 0.890803, 1.15505, 1.96092
8	-2.00379, 0.915263, 1.10974, 1.97879
9	-2.00229, 0.932399, 1.08256, 1.98734
10	-2.00147, 0.944852, 1.06469, 1.99193
11	-2.00099, 0.954177, 1.05222, 1.9946
12	-2.00069, 0.961335, 1.04312, 1.99624

Das einzige verallgemeinerte Antiprisma mit fester Kantenlänge

für n = 3

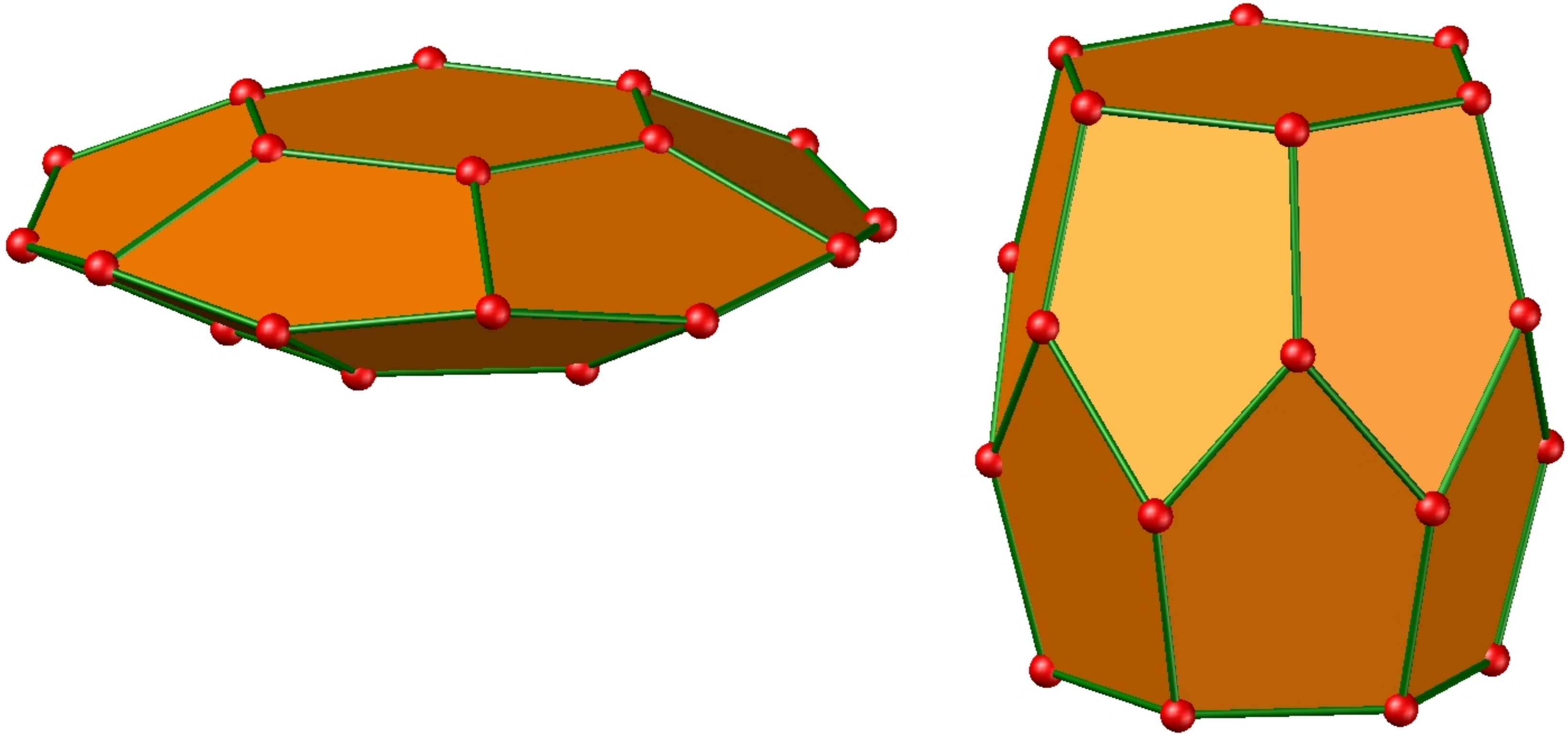


für n = 4



Die beiden verallgemeinerten Antiprismen mit fester Kantenlänge

für n = 6:



ZUSAMMENFASSUNG

- Antiprismen, Verallgemeinerung
- Modellierung
- Aufgabe 1: Verallgemeinerte Antiprismen mit Kantenkugel!
- Aufgabe 2: Verallgemeinerte Antiprismen mit gleichen Kantenlängen
- Anregungen für Kombination konstruktiver und analytischer Methoden beim Modellieren