

Geometrie und Stochastik im Mathematikunterricht

Marco Hamann

Institut für Geometrie, TU Dresden, Deutschland

8.-10. November 2011

Fortbildungstagung für Geometrie, Strobl, Österreich

Überblick

Motivation

Geometrische Form

Schwerpunktbehandlungen

Motivation

Empirische versus deduktive Wahrscheinlichkeiten

Ergebnismenge: $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Relative Häufigkeiten: $(h(e_1), h(e_2), \dots, h(e_n))$ mit

$$\sum_{i=1}^n h(e_i) = 1.$$

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Stabilisierung der relativen Häufigkeiten für (unbegrenzt) viele Wiederholungen

$$h(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(e_i) \quad \forall e_i \in \Omega.$$

mit Elementarwahrscheinlichkeiten $p_i := p(e_i)$.

Laplace-Versuch

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Nicht-Laplace-Versuch

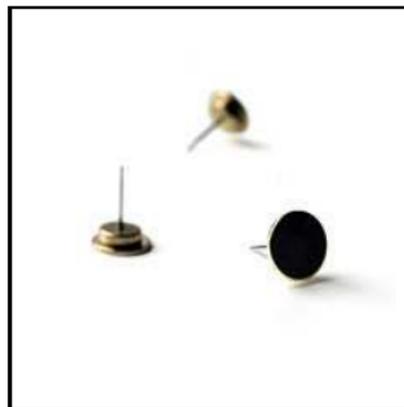
$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$p_i \stackrel{i. A.}{\neq} p_j \quad i \neq j$$

Motivation

Empirische versus deduktive Wahrscheinlichkeiten

Riemer-Würfel¹ und andere Wurfgeräte



U-Profile, L-Profile, Drehzylinder, Parallelepiped, Reisszwecke u.a.

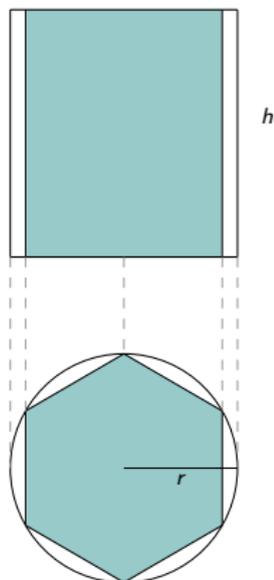
Geometrische Eigenschaften $\xrightarrow{?}$ **Elementarwahrscheinlichkeiten p_i**

¹Riemer-Würfel, Klett Verlag, Stuttgart, 1988

Modellierung

Wahrscheinlichkeit versus Oberflächeninhalt

Regelmäßiges Prisma und Drehzylinder



Prisma und Drehzylinder

Annahme: Oberflächenmodell, geringe Masse

1. Geometrische Wahrscheinlichkeit mit

$$P(G) = \frac{2 \cdot A_G}{2 \cdot A_G + A_M}$$

$$P(M) = 1 - P(G)$$

(G auf Grundfläche, M - Mantelfläche)

2. Sechseitiges Prisma

$$\left. \begin{array}{l} A_M = 6 \cdot rh \\ A_G = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P(G)}{P(M)} = \frac{\sqrt{3}r}{2h}$$

Modellierung

Wahrscheinlichkeit versus Oberflächeninhalt

Regelmäßiges Prisma und Drehzylinder

- ▶ Beispiel: Drehzylinder, $d = 1.5$, $h = 1$

n	50	100	200	300	400	500
$h(G)$	0.44	0.46	0.44	0.45	0.46	0.45
$h(M)$	0.56	0.54	0.56	0.55	0.54	0.55

$h(M) : h(G) \approx 11 : 9$, theoretischer Wert $h : r = 4 : 3$

- ▶ Simulation mit Pseudo-Zufallszahlen: Zerlegung von $(0, 1)$ in $0 < t < 1$

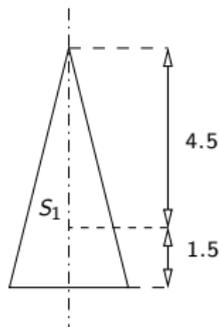
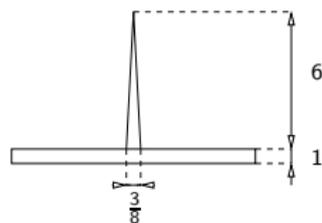
$$\frac{t}{1-t} = \frac{h}{r}$$

(r Seitenlänge der Grundfläche, h Höhe des Zylinders) \Rightarrow TR-Programm

Schwerpunkt

Superpositionsprinzip

Reißzwecke als zusammengesetzter Körper



Reißzwecke, modelliert als
Drehzylinder und Drehkegel
(Maße in mm)

1. Volumen von Drehkegel und -zylinder

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} h_1 \pi r_1^2 = \pi \frac{9}{32} \\ V_2 &= h_2 \pi r_2^2 = \pi \frac{121}{4} \end{aligned} \right\} \frac{V_1}{V_2} = \frac{3^2}{11^2 \cdot 2^3}$$

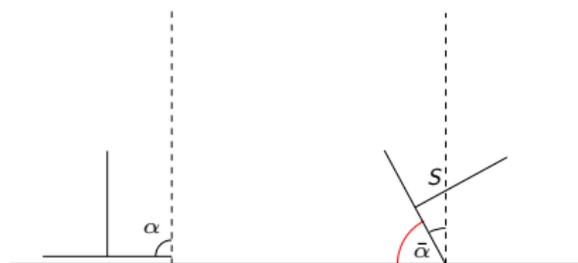
2. Superposition (angepasstes KS)

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \left(0, 0, \frac{1}{2} \right)^T, \quad \mathbf{s}_2 = \left(0, 0, \frac{5}{2} \right)^T \\ \mathbf{s} &= \frac{1}{11^2 \cdot 2^3 + 3^2} \left(\mathbf{s}_1 \cdot 3^2 + \mathbf{s}_2 \cdot 11^2 \cdot 2^3 \right) \\ &\approx \left(0, 0, \frac{248}{100} \right) \end{aligned}$$

Schwerpunkt

Superpositionsprinzip

Reisszwecke als zusammengesetzter Körper



Kippmoment und Kippwinkel, links $\alpha = 90^\circ$, rechts $\alpha < 90^\circ$

Kippmoment und Kippwinkel

$$\tan(\alpha) \approx \frac{248 \cdot 10}{100 \cdot 55} = \frac{124}{275}$$

$$\alpha \approx 24.27^\circ$$

$$\bar{\alpha} = 65,73^\circ$$

Prognostizierte Häufigkeiten

$$h(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}}{180^\circ} \approx 0.37$$

$$\overline{h(\bar{\alpha})} = 1 - p(\bar{\alpha}) = 0.63$$

Reisszweckenwurf²

relative Häufigkeit von "liegt auf Kopf"

n	50	100	200	300	400	500
$h(\bar{\alpha})$	0.42	0.46	0.44	0.42	0.42	0.42

²Filzunterlage, aus 0.3m fallen lassen

Schwerpunkt

Reisszwecke als zusammengesetzter Körper

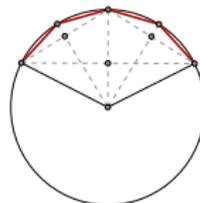
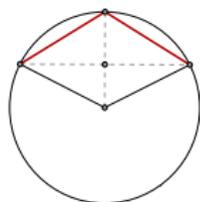
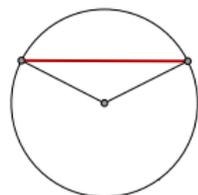
Auswertung der Ergebnisse

- ▶ Abhängigkeit vom Wurfverhalten (Unterlage, Fallhöhe, mit/ohne Würfelbecher, ...)
- ▶ Modellierung versus geometrische Eigenschaften

Schwerpunkt

Schwerpunkt als Grenzlage

Konstruktion von Polygonen zur Approximation eines Kreisbogens



Kreisbogen und Polygone

Gegeben: Kreisbogen $k = \widehat{AB}$, Folge von Polygonen

$$(\mathcal{P}_n : n = 2^m, m \in \mathbb{N}_0)$$

Gesucht: Grenzlage der Eckenschwerpunkte S_n

1. Bestimme iterativ S_1 , S_2 und S_4 (in KS).

$$y_1 = \frac{r}{2} (2 \cos(\varphi))$$

$$y_2 = \frac{r}{3} (2 \cos(\varphi) + 1)$$

$$y_4 = \frac{r}{5} \left(2 \cos(\varphi) + 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right)$$

(in angepassten Koordinatensystem $x_n = 0$.)

Schwerpunkt

Schwerpunkt als Grenzlage

2. Bestimme den Schwerpunkt S_n und ermittle seine Lage für verschiedene n .

$$y_n = \frac{r}{n+1} \left(2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos \left(i \cdot \frac{2\varphi}{n} \right) + 1 \right)$$

Beispiel: $\varphi = 80^\circ$, $r = 1$

n	1	2	4	8	16	...
y_n	0.17364	0.44910	0.57588	0.63986	0.67236	...

CAS: Eingabe, Zuweisung $\rightarrow Y$

```
substitute(Y, r = 1, phi = 80, n = 16)
```

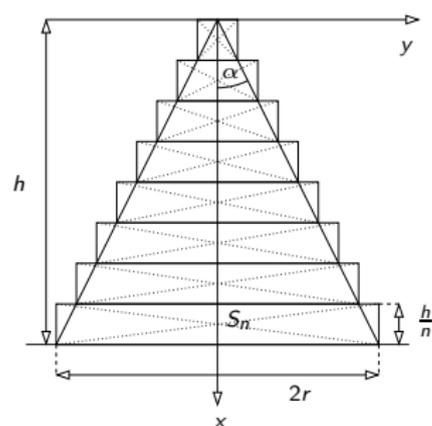
```
approx Ans
```

```
0.6723560178
```

Schwerpunkt

Prinzip von Cavalieri

Approximation eines Drehkegels



Drehzylinderstapel zur Approximation eines Drehkegels

1. Volumen Drehzylinderstapel

$$V_i = \pi r_i^2 h_i = \pi i^2 \frac{r^2 h}{n^3}$$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \pi \frac{r^2 h}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

2. Zeige mit CAS, dass gilt:

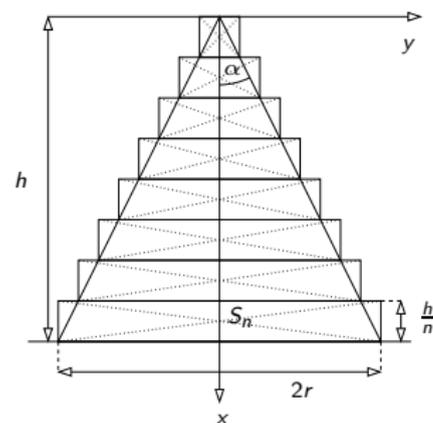
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n i^2}{n^3} \right) = \frac{1}{3}$$

" \sum " und "lim" \Rightarrow CAS

Schwerpunkt

Prinzip von Cavalieri

Approximation eines Drehkegels



Drehzylinderstapel zur Approximation eines Drehkegels

3. Schwerpunkt (nur x-Koordinate)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_{s,i} V_i &= \pi \frac{h}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{h}{n} \left(i \frac{r}{n} \right)^2 \right) \\ &= \pi \frac{h^2 r^2}{n^4} \sum_{i=1}^n \left(i^3 - \frac{1}{2} i^2 \right)\end{aligned}$$

4. Zeige mit CAS, dass gilt:

$$\lim \left(\frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \left(i^3 - \frac{1}{2} i^2 \right), n, \infty \right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Schwerpunkt: } x_s = \frac{3}{4} h$$