

# Konchoiden

David Gruber

TU - Wien,  
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Strobl, 08. November 2011

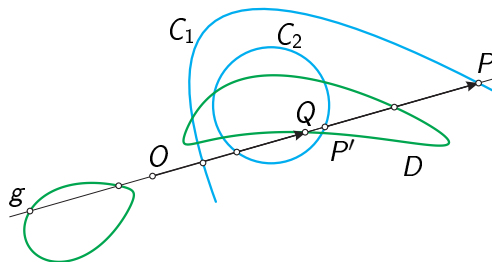
# Überblick

- 1 Einleitung
- 2 Ebene Konchoiden
- 3 Räumliche Konchoiden

# Kissoide

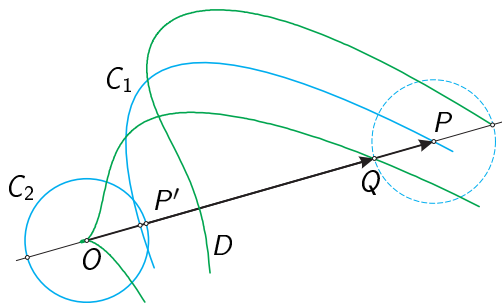
## Definition (Kissoide)

Die Kissoide  $D$  von  $C_1$  und  $C_2$  bezüglich  $O$  ist die Menge aller Punkte  $Q$ , für die gilt  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P'P}$ , mit  $P = C_1 \cap g$  und  $P' = C_2 \cap g$ .



# Konchoide

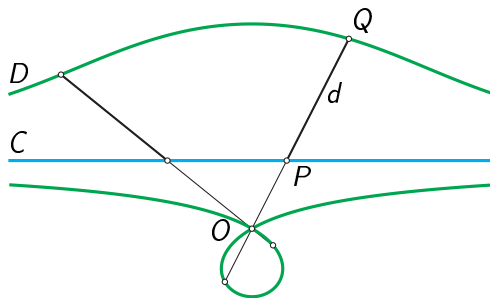
Sei nun speziell  $C_2$  ein Kreis um  $O$  mit Radius  $d$ .



# Konchoide

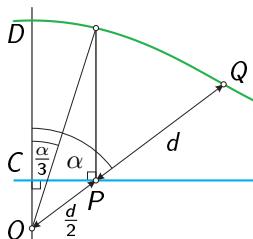
## Definition (Konchoide)

Die Konchoide  $D$  zur Kurve  $C$  mit Brennpunkt  $O$  und Distanz  $d$ , ist die Menge aller Punkte  $Q$ , die auf den Geraden  $g$  durch  $O$  den Abstand  $d$  von  $P = C \cap g$  haben.



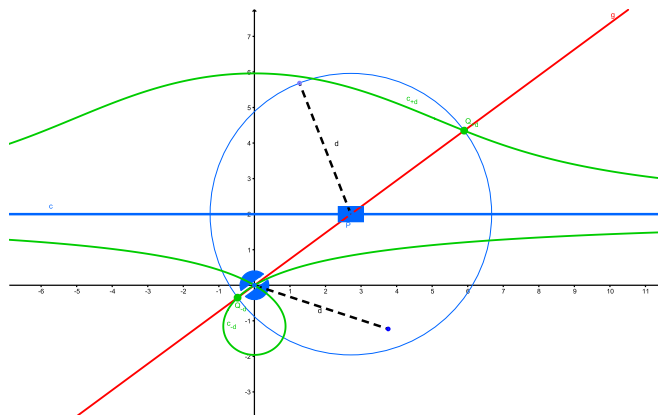
# Historisches

- Namensgebend war der griechische Mathematiker Nikomedes (\*280 b.c.; †210 b.c.)
- Konchoide (griech.: Muschel) des Nikomedes -  $C$  ist eine Gerade
- Verwendet zur Dreiteilung des Winkels



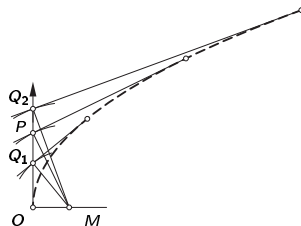
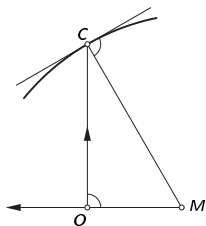
- Pascalsche Schnecke -  $C$  ist ein Kreis durch  $O$

# Kinematische Erzeugung



kin\_erz.ggb

# Eigenschaften



- Die Kurve und ihre Konchoiden haben denselben Momentanpol  $M$ . `mom_pol.ggb`
- Die Tangenten an die Konchoiden für einen festen Punkt  $P \in C$  und variablen Abstand  $d$  hüllen eine Parabel ein.



# Polarkoordinaten

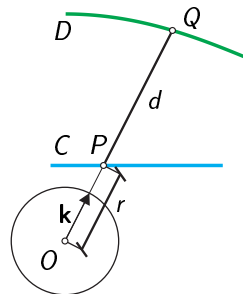
O.B.d.A.  $O$  sei der Ursprung des Koordinatensystems.

Die Kurve  $C$  hat die Polardarstellung

$$\mathbf{c}(u) = r(u)\mathbf{k}(u),$$

mit  $\|\mathbf{k}\| = 1$ . Dann hat die Konchoide  $D$  die Parametrisierung

$$\mathbf{d}(u) = (r(u) \pm d)\mathbf{k}(u).$$



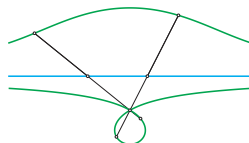
# Eigenschaften

- Drehungen um den Ursprung und zentrische Ähnlichkeiten um  $O$  ändern die algebraischen Eigenschaften der Konchoide nicht.
- Besitzt die Kurve  $C$  eine rationale Polardarstellung so auch ihre Konchiden.
- Konchoiden der Gerade sind rational.
- Konchoiden von Kegelschnitten sind rational für  $O \in C$  oder  $O$  ist ein Brennpunkt von  $C$ .

# Konchoide der Gerade

- Gerade  $C : y = 1$ :

$$\mathbf{c}(u) = \frac{1}{\sin(u)} (\cos(u), \sin(u))$$



- Konchoide  $D$ :

$$\mathbf{d}(u) = \frac{1 \pm d \sin(u)}{\sin(u)} (\cos(u), \sin(u))$$

- $D$  ist algebraische Kurve vom Grad 4

$$D : y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^2 + y^2) + x^2 + y^2(1 - d^2) = 0.$$

- $d = 0$ :

$$D : (y - 1)^2(x^2 + y^2) = 0.$$

# Konchoide des Kreises - Pascalsche Schnecke

- Kreis  $[M = (m, 0), r = m]$ :

$$\mathbf{c}(u) = (m(1 + \cos(2u)), m \sin(2u)) = 2m \cos(u)(\cos(u), \sin(u))$$

- Konchoide D:

$$\mathbf{d}(u) = (2m \cos(u) \pm d)(\cos(u), \sin(u))$$

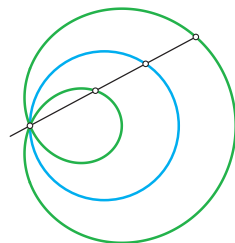
- D ist algebraische Kurve vom Grad 4

$$D : -(x^2 + y^2)^2 + (d^2 + 4mx)(x^2 + y^2) - 4m^2x^2 = 0.$$

- Für  $d = 0$

$$D : (x^2 + y^2 - 2mx)^2 = 0.$$

- [kreis.ggb](#)



# Konchoide einer Ellipse

- Ellipse  $F_1 = O$ :

$$\mathbf{c}(u) = \frac{b^2}{a - \cos(u)} (\cos(u), \sin(u))$$

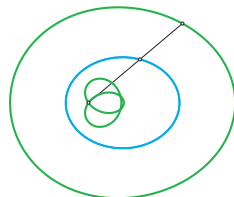
- Konchoide D:

$$\mathbf{d}(u) = \frac{b^2 \pm d(a - \cos(u))}{a - \cos(u)} (\cos(u), \sin(u))$$

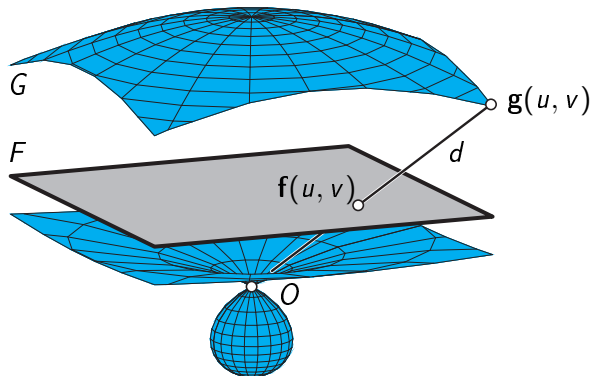
- D ist algebraische Kurve vom Grad 4

$$D : -a^2(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + 2b^2x + (da + b^2)^2)(x^2 + y^2) - d^2x^2 = 0.$$

- ell.ggb



# Definition



Konchoide  $G$  einer Ebene  $F$  zur **Distanz**  $d$  im Bezug auf  $O$ .

# Polarkoordinaten

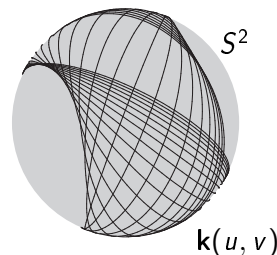
Analog zur Ebene wählen wir o.B.d.A.  $O$  als Ursprung des Koordinatensystems.

Die Fläche  $F$  hat die Polardarstellung

$$\mathbf{f}(u, v) = r(u, v)\mathbf{k}(u, v),$$

mit  $\|\mathbf{k}\| = 1$ . Dann hat die Konchoide  $G$  die Parametrisierung

$$\mathbf{g}(u, v) = (r(u, v) \pm d)\mathbf{k}(u, v).$$



# Beispiele

- Ebene  $F : z = 1$ :

$$\mathbf{f}(u, v) = \frac{1}{\sin(u)} (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u))$$

- Konchoide  $G$ :

$$\mathbf{g}(u) = \frac{1 \pm d \sin(u)}{\sin(u)} (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u))$$

- algebraische Fläche vom Grad 4

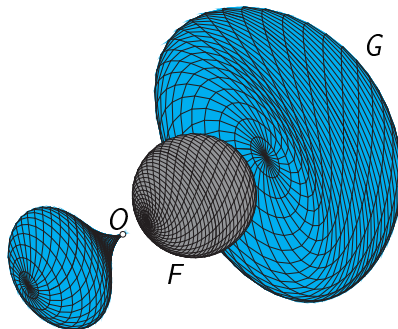
$$G : z^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 + y^2 + z^2(1 - d^2) = 0$$

- $d = 0$

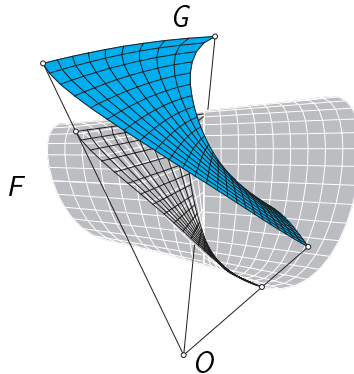
$$G : (x^2 + y^2 + z^2)(z - 1)^2 = 0$$



# Beispiele



# Beispiele



# Zusammenfassung

- Konchoiden als Spezialfall der Kissoiden
- Kinematische Erzeugung
- Analytische Beschreibung
- Beispiele

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!