

Zur Beweglichkeit eines Modells nach H. Harborth und M. Möller

Peter Fazekas

4. November 2011

Übersicht

- 1 Einleitung - Gesättigte Packungen
 - 2-dimensionaler Fall
 - 3-dimensionaler Fall
 - Zeolithe - vom Standpunkt der Chemie
- 2 Das Modell von H. Harborth and M. Möller
 - Beweglichkeit
- 3 Degenerierter Fall
 - Einführung
 - Beweglichkeit
 - Besondere Positionen
- 4 Ausblick

Übersicht

- 1 Einleitung - Gesättigte Packungen
 - 2-dimensionaler Fall
 - 3-dimensionaler Fall
 - Zeolithe - vom Standpunkt der Chemie
- 2 Das Modell von H. Harborth and M. Möller
 - Beweglichkeit
- 3 Degenerierter Fall
 - Einführung
 - Beweglichkeit
 - Besondere Positionen
- 4 Ausblick

Übersicht

- 1 Einleitung - Gesättigte Packungen
 - 2-dimensionaler Fall
 - 3-dimensionaler Fall
 - Zeolithe - vom Standpunkt der Chemie
- 2 Das Modell von H. Harborth and M. Möller
 - Beweglichkeit
- 3 Degenerierter Fall
 - Einführung
 - Beweglichkeit
 - Besondere Positionen
- 4 Ausblick

Übersicht

- 1 Einleitung - Gesättigte Packungen
 - 2-dimensionaler Fall
 - 3-dimensionaler Fall
 - Zeolithe - vom Standpunkt der Chemie
- 2 Das Modell von H. Harborth and M. Möller
 - Beweglichkeit
- 3 Degenerierter Fall
 - Einführung
 - Beweglichkeit
 - Besondere Positionen
- 4 Ausblick

Gesättigte Packung

Definition

Dreiecke (Tetraeder) bilden eine **gesättigte Packung**, wenn jeder Eckpunkt mit genau einem Eckpunkt eines anderen Dreiecks (Tetraeder) verbunden ist. Zudem dürfen sich die Dreiecke (Tetraeder) nicht überschneiden.

Gesättigte Packung

Definition

Dreiecke (Tetraeder) bilden eine **gesättigte Packung**, wenn jeder Eckpunkt mit genau einem Eckpunkt eines anderen Dreiecks (Tetraeder) verbunden ist. Zudem dürfen sich die Dreiecke (Tetraeder) nicht überschneiden.



Gesättigte Packung von 42 Dreiecken

Beispiele in 2D

Unendliche gesättigte Dreieckspackungen:



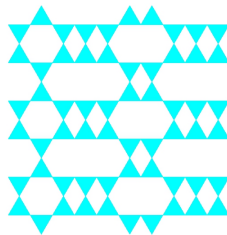
Beispiele in 2D

Unendliche gesättigte Dreieckspackungen:

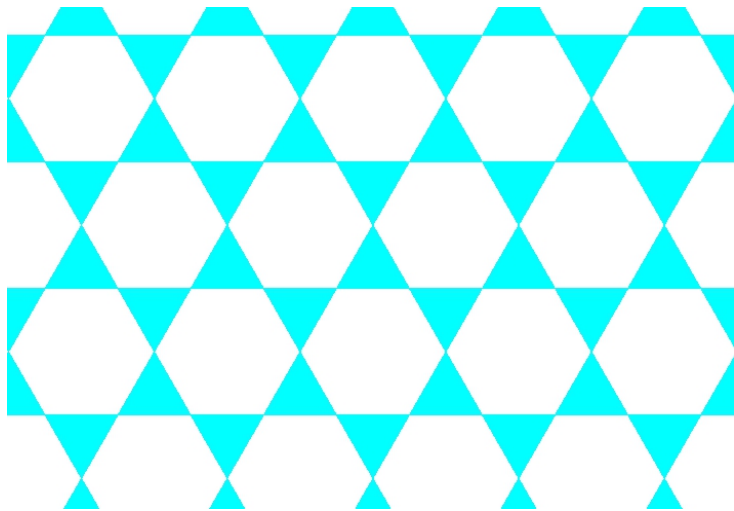


Beispiele in 2D

Unendliche gesättigte Dreieckspackungen:



Beispiele in 2D



Beispiele in 2D

Endliche gesättigte Dreieckspackungen:
(mit **nicht**-gleichseitigen Dreiecken)



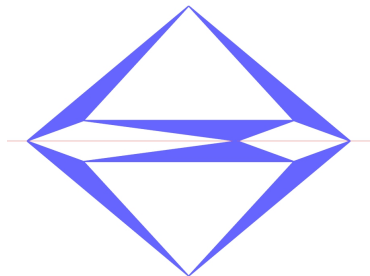
12 gleichschenklige Dreiecke

Beispiele in 2D

Endliche gesättigte Dreieckspackungen:
(mit **nicht**-gleichseitigen Dreiecken)

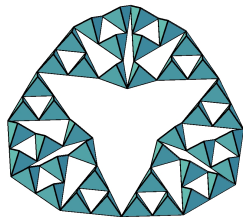


12 gleichschenklige Dreiecke

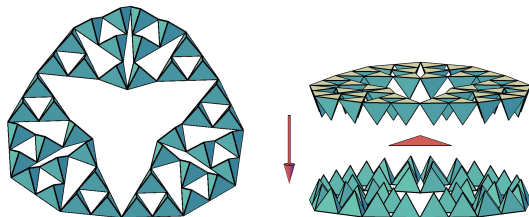


6 „allgemeine“ Dreiecke

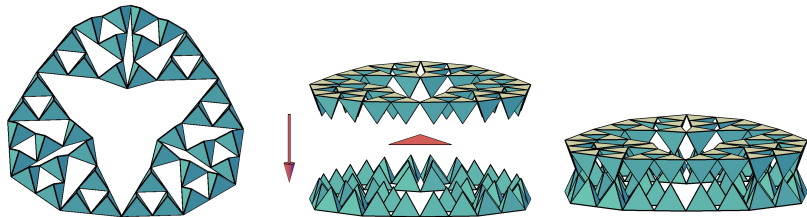
Erweiterung von 2D zu 3D



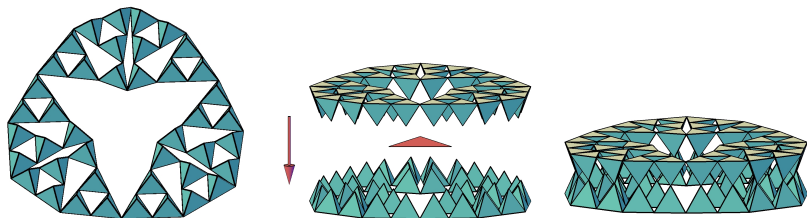
Erweiterung von 2D zu 3D



Erweiterung von 2D zu 3D

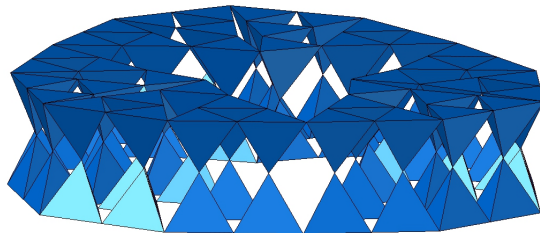


Erweiterung von 2D zu 3D

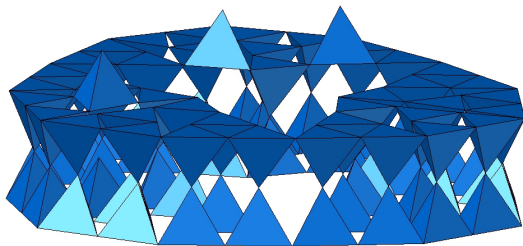


- einfache Konstruktion aus 2D Modellen
- symmetrisch
- ermöglicht „Layer-Konstruktion“ für unendliche Modelle

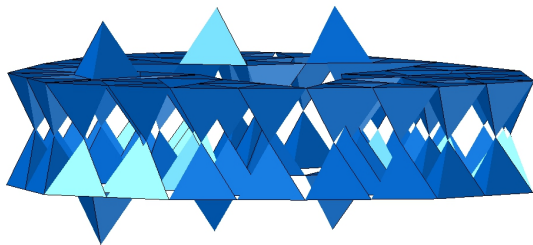
Layer-Konstruktion



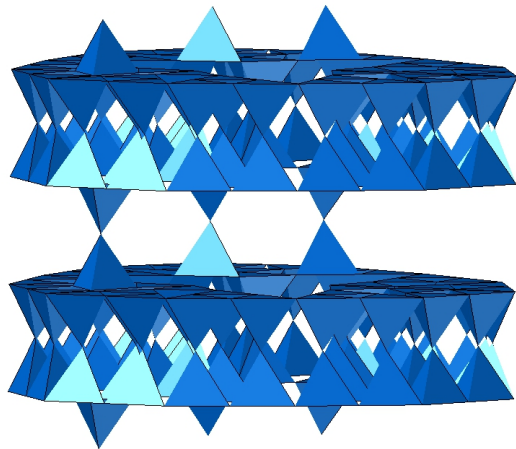
Layer-Konstruktion



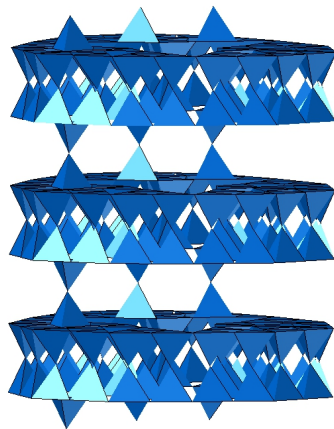
Layer-Konstruktion



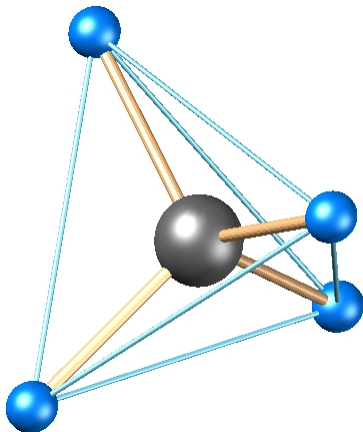
Layer-Konstruktion

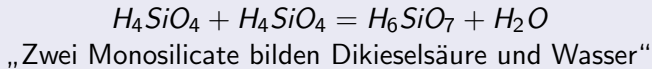
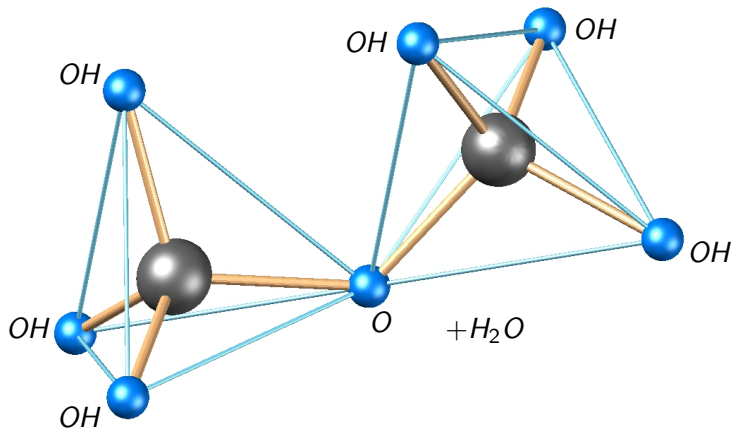


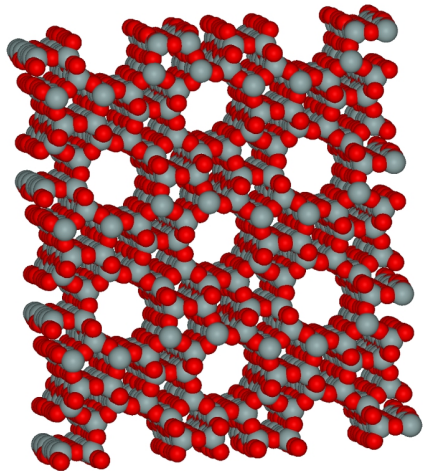
Layer-Konstruktion



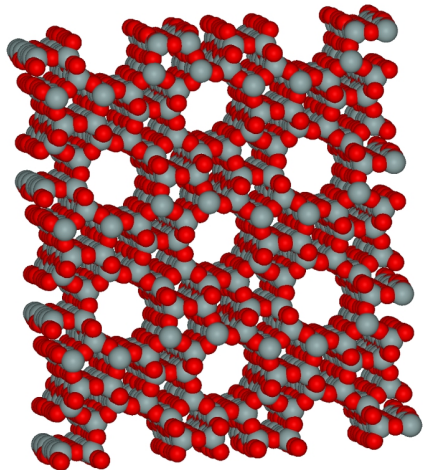
Zeolithe bestehen aus Tetraederförmigen SiO_4 oder AlO_4 Strukturen, welche über gemeinsame Sauerstoff-Atome verbunden sind und so kristalline Strukturen formen.







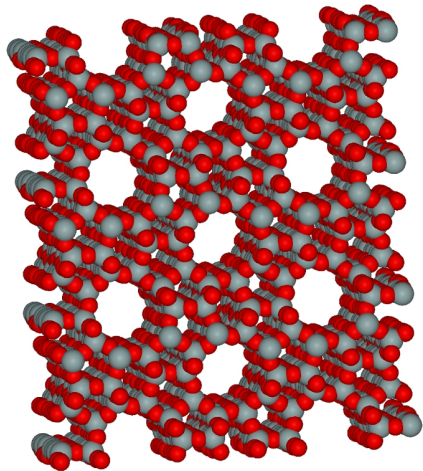
Quelle: Wikipedia



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

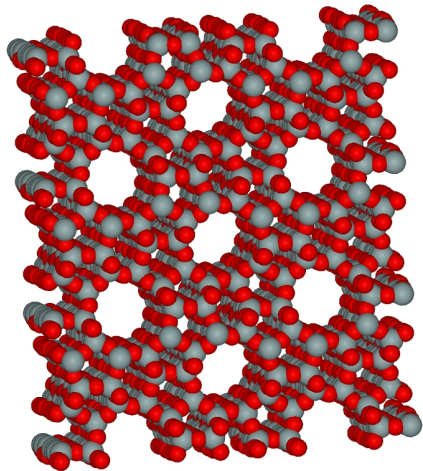
- Nahrungsergänzungsmittel



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

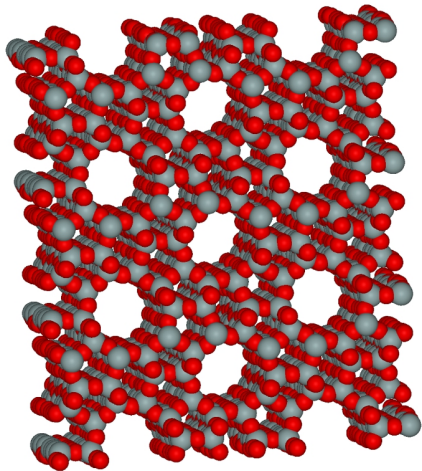
- Nahrungsergänzungsmittel
- Selbstkühlendes Bierfass



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

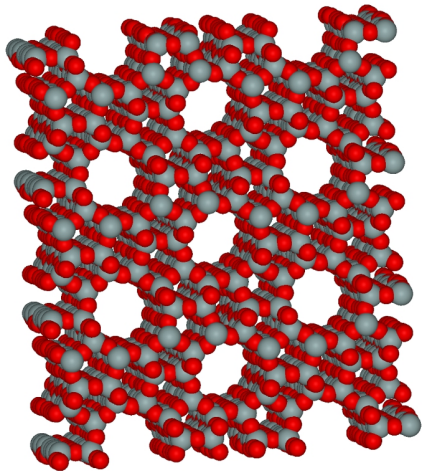
- Nahrungsergänzungsmittel
- Selbstkühlendes Bierfass
- Wasserenthärtung



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

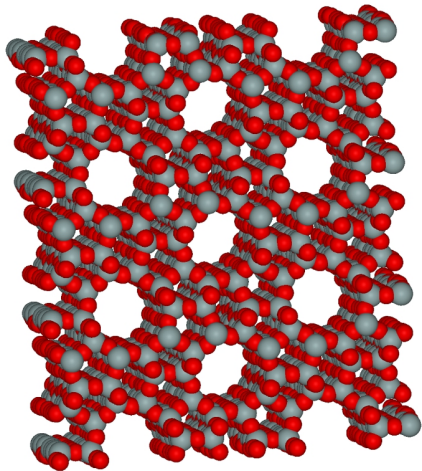
- Nahrungsergänzungsmittel
- Selbstkühlendes Bierfass
- Wasserenthärtung
- Waschmittel



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

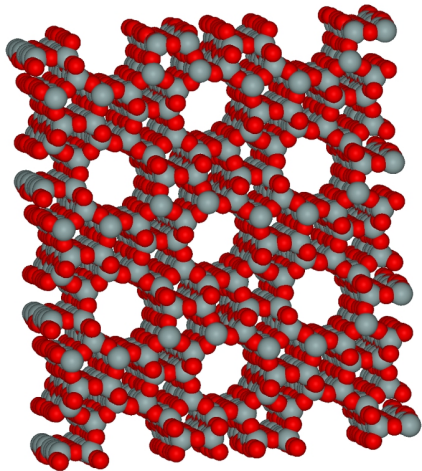
- Nahrungsergänzungsmittel
- Selbstkühlendes Bierfass
- Wasserenthärtung
- Waschmittel
- Industrielle Katalysatoren



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

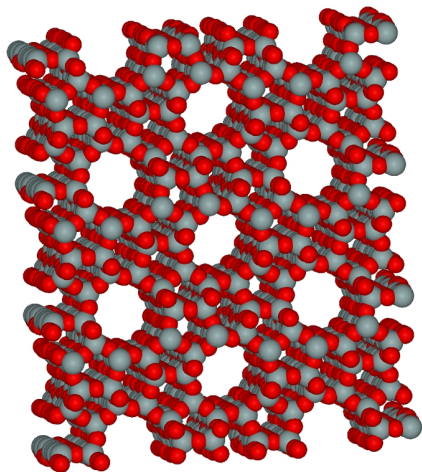
- Nahrungsergänzungsmittel
- Selbstkühlendes Bierfass
- Wasserenthärtung
- Waschmittel
- Industrielle Katalysatoren
- Dekontamination von Wasser



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

- Nahrungsergänzungsmittel
- Selbstkühlendes Bierfass
- Wasserenthärtung
- Waschmittel
- Industrielle Katalysatoren
- Dekontamination von Wasser
- Niedrigtemperatur-Asphalt



Quelle: Wikipedia

Anwendungen:

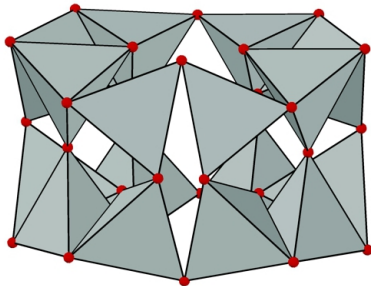
- Nahrungsergänzungsmittel
- Selbstkühlendes Bierfass
- Wasserenthärtung
- Waschmittel
- Industrielle Katalysatoren
- Dekontamination von Wasser
- Niedrigtemperatur-Asphalt
- Fluid Catalytic Cracking in Ölraffinerien zur Herstellung von Benzin, Diesel, leichtem Heizöl, ...

Gesättigte Packung von 16 Tetraedern

Das Modell von Harborth und Möller ist das kleinste bislang bekannte und besteht aus:

- 16 Tetraedern verbunden durch
- 32 Kugelgelenke

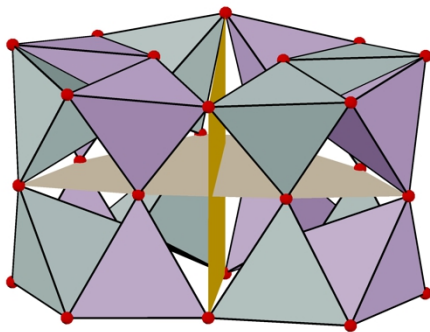
Dies liefert nach der klassischen Grübler-Kutzbach-Chebyshev Formel einen theoretischen Freiheitsgrad $F=-6$. Demnach sollte das Modell starr sein.



Modell von Harborth und Möller

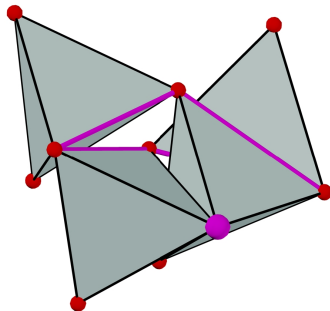
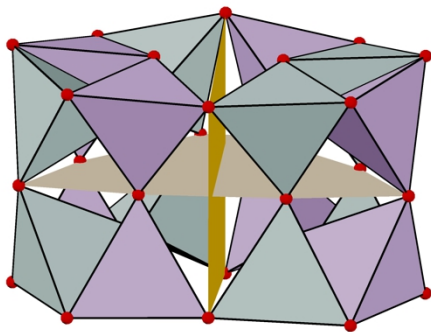
Symmetrie

Aufgrund der Spiegelsymmetrien des Objektes genügt es, ein Viertel zu betrachten.

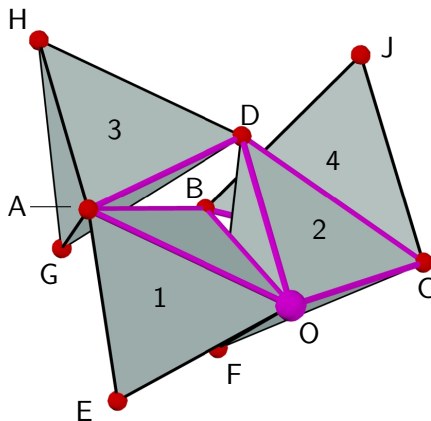


Symmetrie

Aufgrund der Spiegelsymmetrien des Objektes genügt es, ein Viertel zu betrachten.

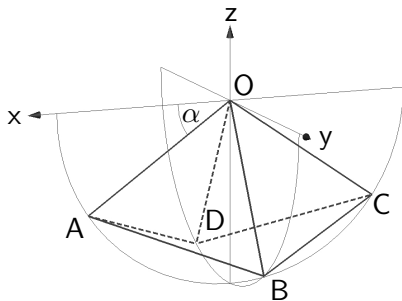
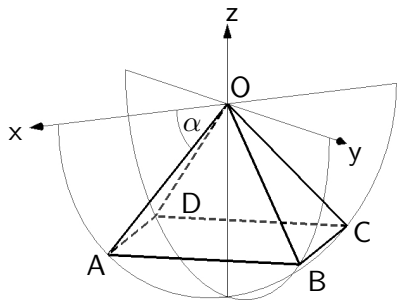


Viertel-Modell

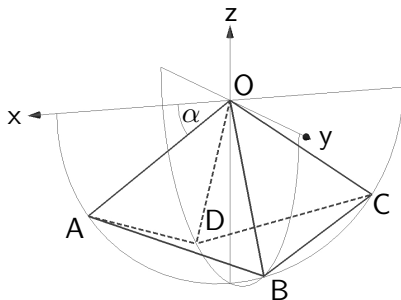
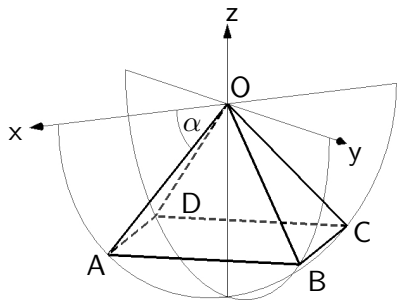


Halbes Oktaeder in einem Viertel des Modells

Erster Parameter

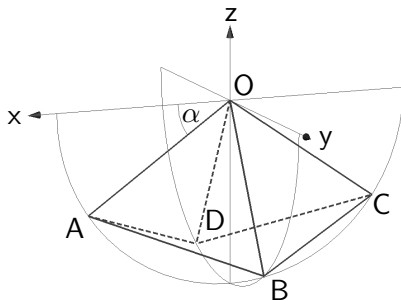
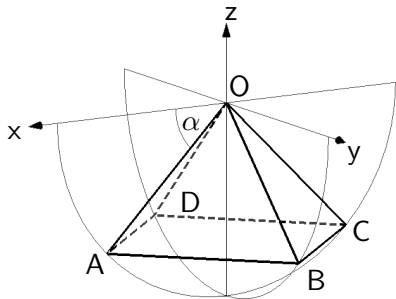


Erster Parameter



Der Parameter der Bewegung des halben Oktaeders kann aus Symmetriegründen beschränkt werden: $\alpha \in [\pi/6, \pi/2]$

Erster Parameter



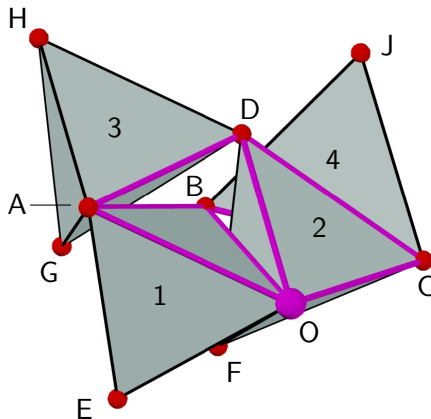
Der Parameter der Bewegung des halben Oktaeders kann aus Symmetriegründen beschränkt werden: $\alpha \in [\pi/6, \pi/2]$

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\beta) \\ -\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Zweiter Parameter

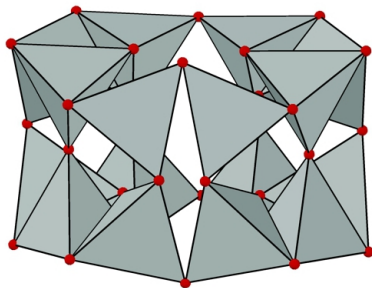
Die Tetraeder 3 und 4 können noch um ihre gemeinsame Kante mit dem halben Oktaeder rotiert werden. Einzige Bedingung: E, F, G, I müssen in einer Ebene liegen. Dies liefert den zweiten Parameter.



Resultat

Satz

In allgemeiner Lage ist das Modell von Harborth und Möller mindestens zweiparametrig beweglich.



Definition

Es soll weiterhin jede Tetraederecke mit einer weiteren Tetraederecke verbunden bleiben. Die weiteren Bedingungen werden abgeschwächt:

Definition

Es soll weiterhin jede Tetraederecke mit einer weiteren Tetraederecke verbunden bleiben. Die weiteren Bedingungen werden abgeschwächt:

- Es dürfen auch mehr als zwei Ecken zusammenfallen

Definition

Es soll weiterhin jede Tetraederecke mit einer weiteren Tetraederecke verbunden bleiben. Die weiteren Bedingungen werden abgeschwächt:

- Es dürfen auch mehr als zwei Ecken zusammenfallen
- Zwei Tetraeder dürfen sich eine Kante teilen

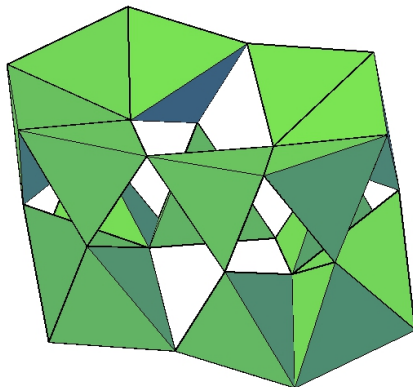
Definition

Es soll weiterhin jede Tetraederecke mit einer weiteren Tetraederecke verbunden bleiben. Die weiteren Bedingungen werden abgeschwächt:

- Es dürfen auch mehr als zwei Ecken zusammenfallen
- Zwei Tetraeder dürfen sich eine Kante teilen
- Weitere Überschneidungen werden ausgeschlossen

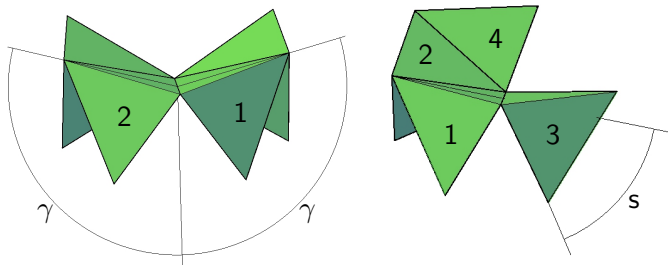
Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Wählt man im Modell von Harborth und Möller $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (das halbe Oktaeder wird zusammengeklappt), so erfüllt es obige Bedingungen.



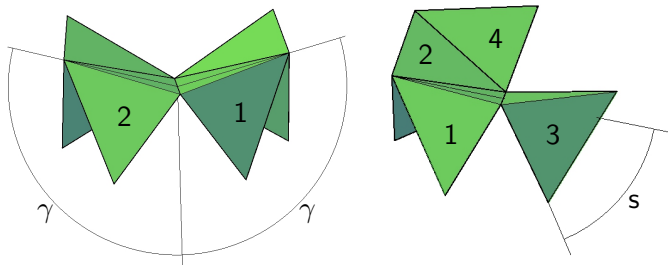
Die zwei Parameter

Wenn das halbe Oktaeder zusammenfällt teilen sich einige Tetraeder eine Kante und ermöglichen deshalb eine Rotation um diese.



Die zwei Parameter

Wenn das halbe Oktaeder zusammenfällt teilen sich einige Tetraeder eine Kante und ermöglichen deshalb eine Rotation um diese.



Satz

Das degenerierte Modell erlaubt eine weitere zweiparametrische Bewegung.

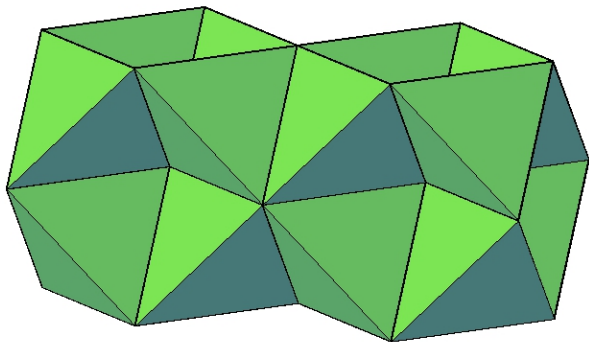
Prismatische Kanäle

Wir betrachten die Tetraeder im Folgenden als Volumskörper und interessieren uns insbesondere für prismatische Kanäle durch das Objekt.

Positionen mit minimalen bzw. maximalen Kanal-Querschnitten sind geometrisch und chemisch gesehen interessant, da eine „gute“ Adsorptionsfähigkeit die wichtigste Eigenschaft von Zeolithen ist.

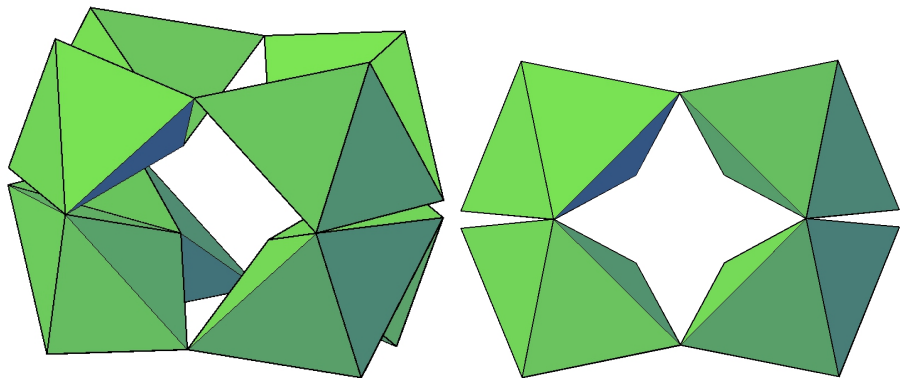
Position ohne Kanäle

Es lässt sich zeigen, dass das degenerierte Modell im Zuge seiner Beweglichkeit Positionen ohne Kanäle einnehmen kann.



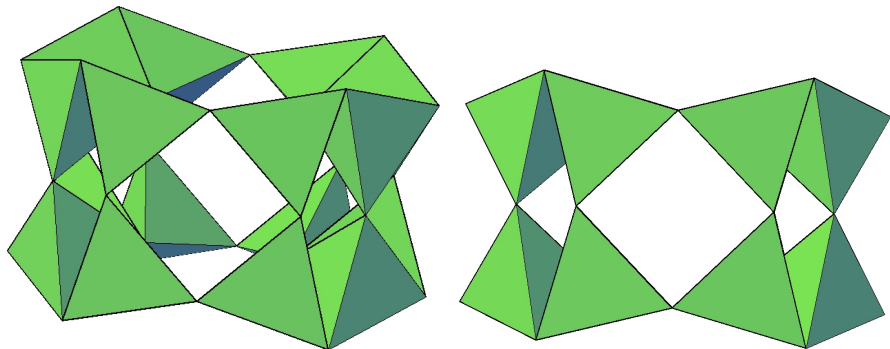
Kanäle maximalen Querschnitts

Es existieren auch Positionen mit Löchern maximalen Flächeninhalts, bei denen der prismatische Kanal aber im Inneren gestört wird.



Kanäle maximalen Querschnitts

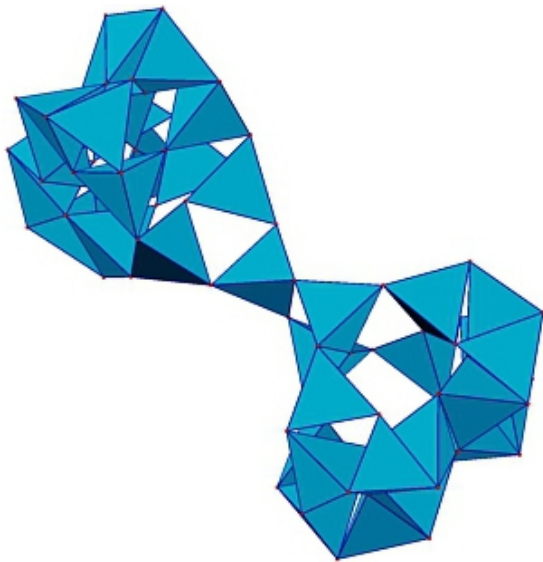
Hier beträgt der Querschnitt des prismatischen Kanals a^2 , wenn die Seitenlänge mit a angenommen wird, und ist damit maximal.



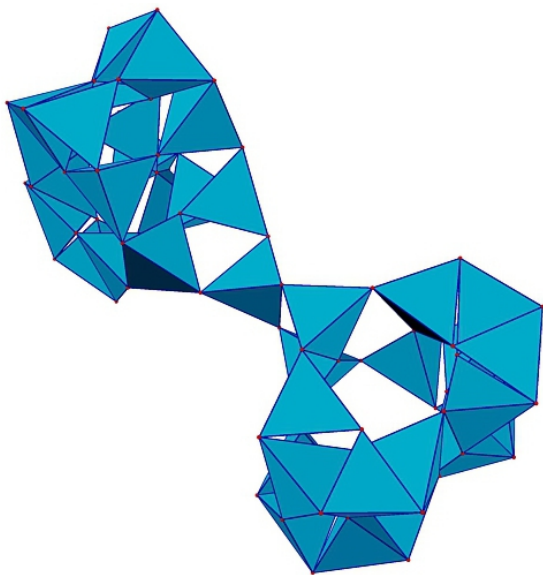
Weiters stellen sich folgende Fragen:

- Gibt es gesättigte Packungen mit einer ungeraden Anzahl an regulären Tetraedern?
- Was ist das kleinste solche Modell?
- Ist es beweglich?

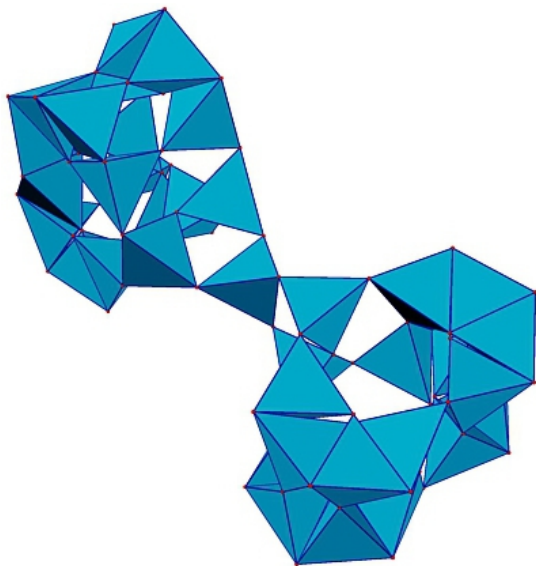
37 Tetraeder



37 Tetraeder



37 Tetraeder



37 Tetraeder

