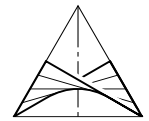


# Algorithmische Geometrie

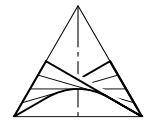
**Martin Peternell**

**TU Wien**



## Themen der Algorithmische Geometrie

- Entwurf von Algorithmen für geometrische Fragestellungen betreffend Punkte, Geraden, Segmente, etc. in der Ebene und analoge Fragestellungen im Raum.
- Beurteilung von Algorithmen hinsichtlich Effizienz (Laufzeit, Speicherbedarf, etc.).
  
- Konvexe Hülle ( $2d+3d$ )
- Voronoi Diagramme
- Polygonzerlegung, Triangulierungen, ...
- Punkt-in-Polygon Test, etc.

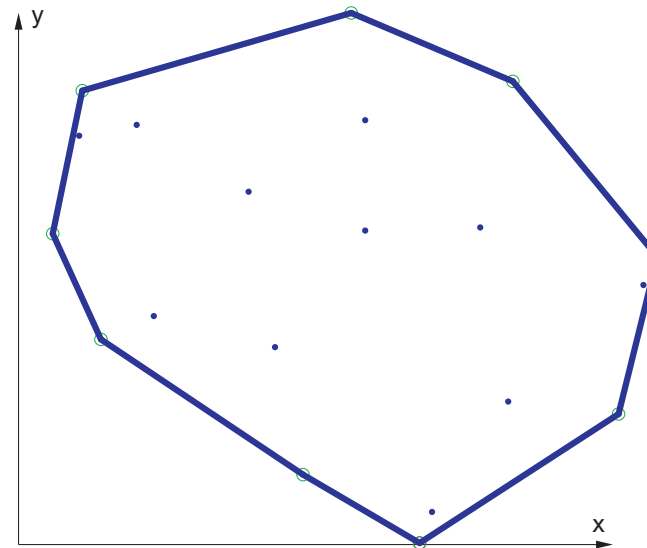


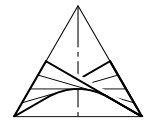
## Konvexe Hülle 2D

- Gegeben: Punkte  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ .
- Gesucht: konvexe Hülle, d.h. das kleinste konvexe Polygon, welches alle Punkte enthält.

Algorithmen:

- Gift Wrapping
- Graham Scan (1972)
- Quickhull
- Inkrementeller Algorithmus





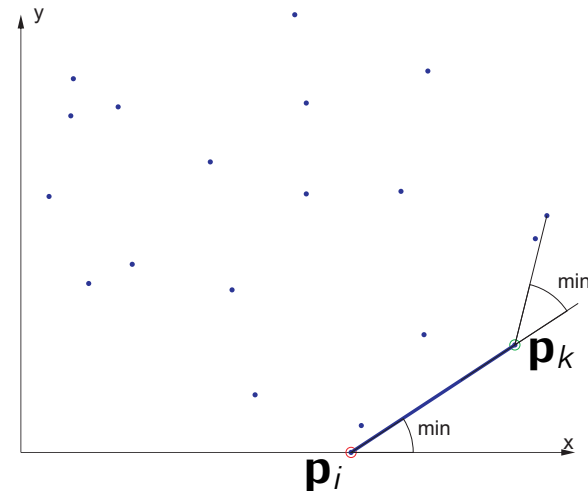
# Gift Wrapping

**Eingabe** Liste von Punkten  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ .

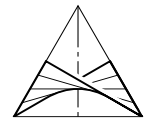
**Ausgabe** Sortierte Indizes der Punkte der konvexen Hülle.

## Methode

- Punkt mit min. y-Koordinate  $\Rightarrow \mathbf{p}_i$ .
- Bezugsrichtung  $\mathbf{e} = (1, 0)$ .
- Min. Winkel zwischen  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ ,  $i \neq j$ .
- $\Rightarrow \mathbf{p}_k$ . Neue Bezugsrichtung  $\mathbf{e} = \mathbf{p}_i\mathbf{p}_k$ .
- Wiederholung der letzten beiden Schritte.



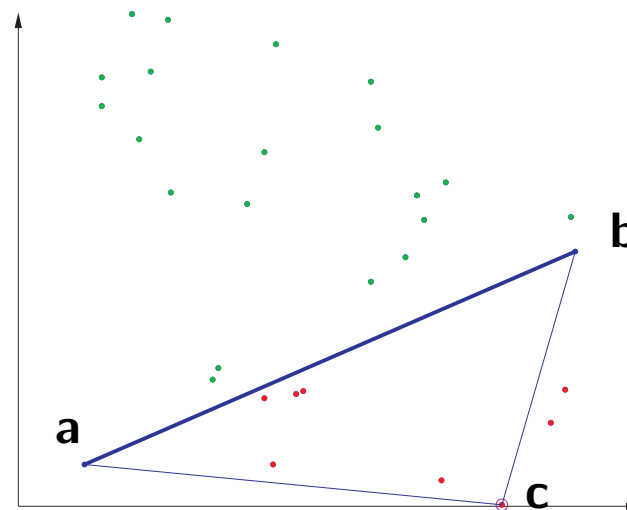
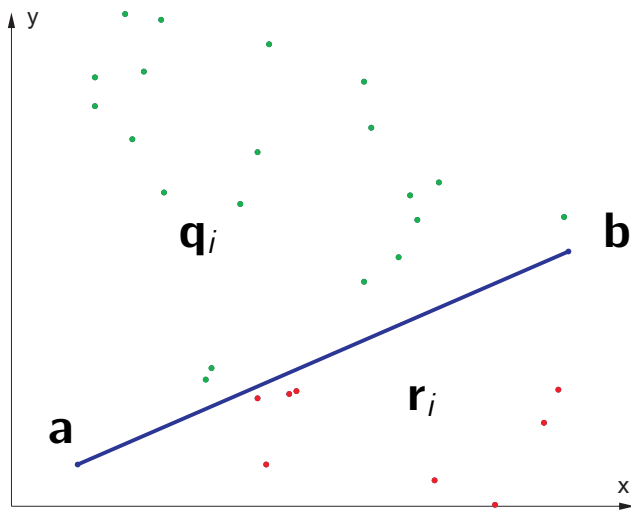
Algorithmus auf 3d erweiterbar.

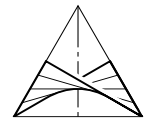


# Quickhull

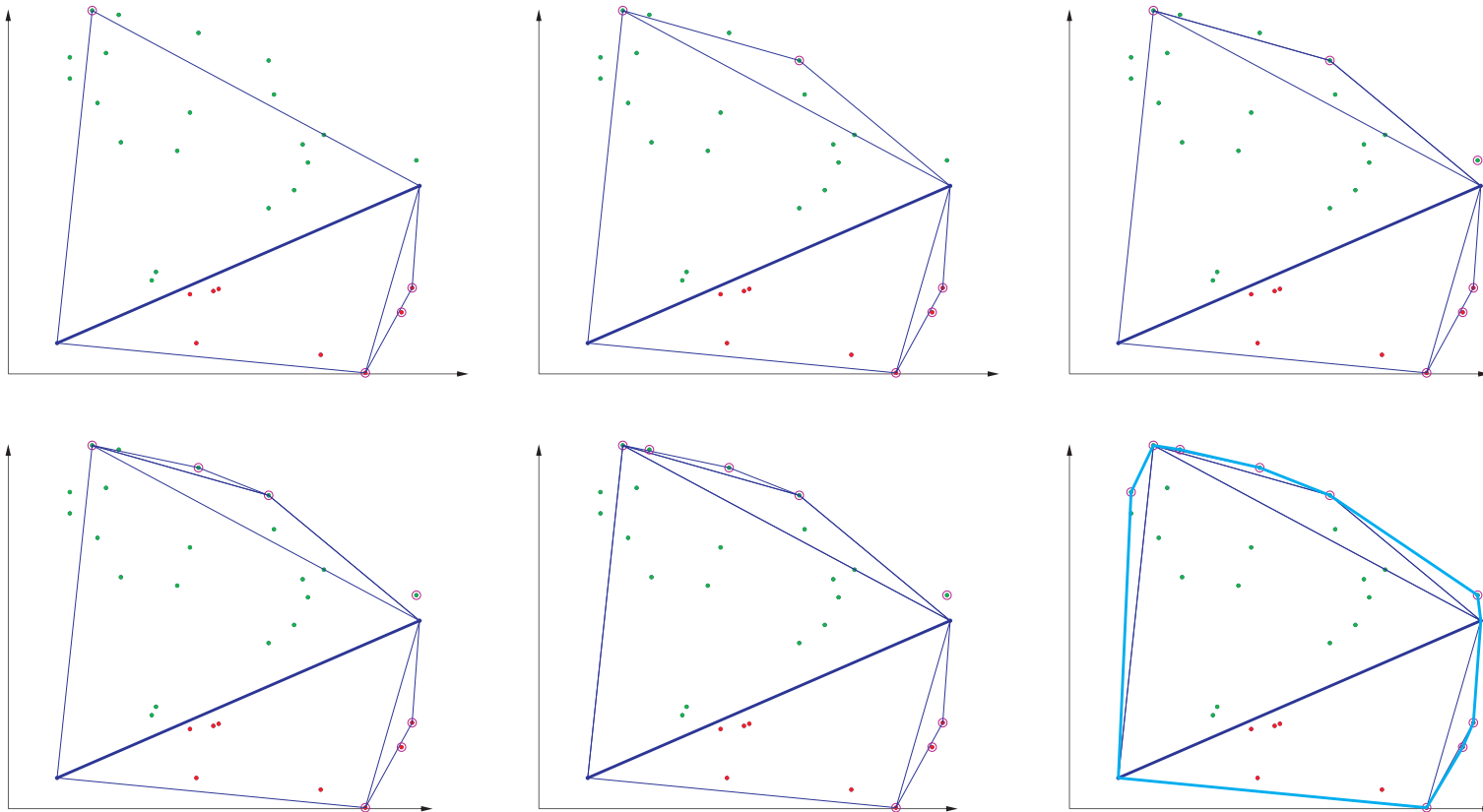
## Methode

- Punkte mit min. und max. y-Koordinate  $\rightarrow$  **a**, **b**. Punkte  $q_i$  links und  $r_i$  rechts von **ab**.
- Punkt **c**  $\in \{r_i\}$  mit max. Distanz von **ab** gehört der konvexen Hülle an.
- Elimination der Punkte im Dreieck **abc**.
- Wiederhole: Extremale Punkte bzgl. **ac** und **cb**.

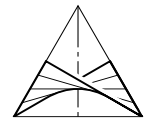




## Quickhull 2



Algorithmus auf 3D erweiterbar.



## Gift Wrapping 3d

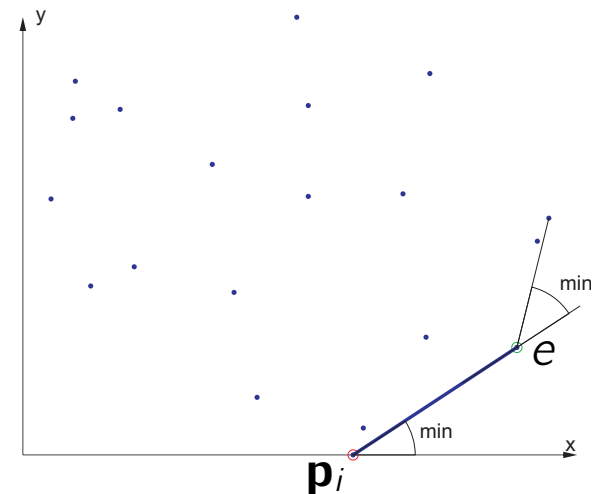
**Eingabe** Liste von Punkten  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ .

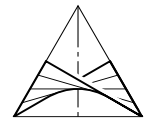
**Annahme** Keine vier Punkte (der konvexen Hülle) koplanar.

**Ausgabe** Indexliste der Dreiecke, welche die konvexen Hülle bilden.

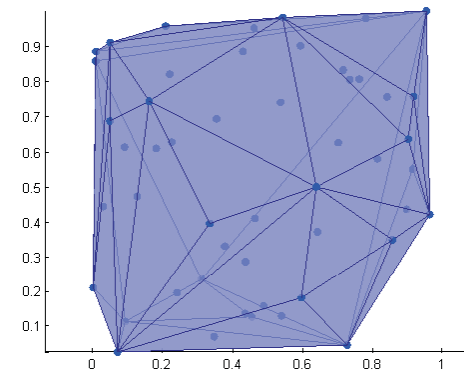
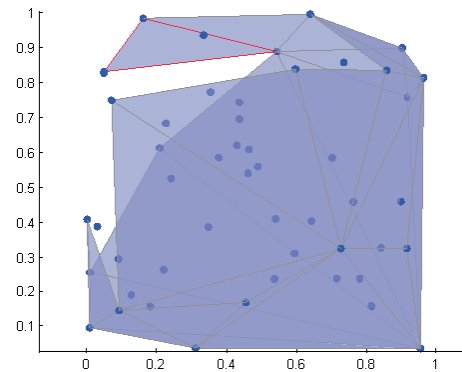
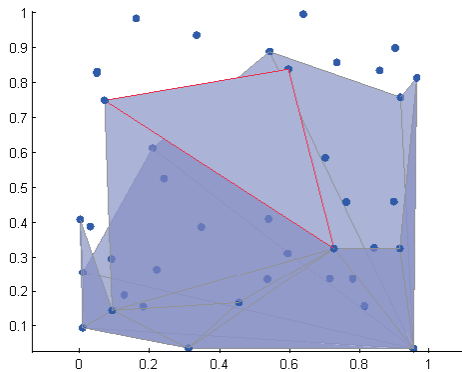
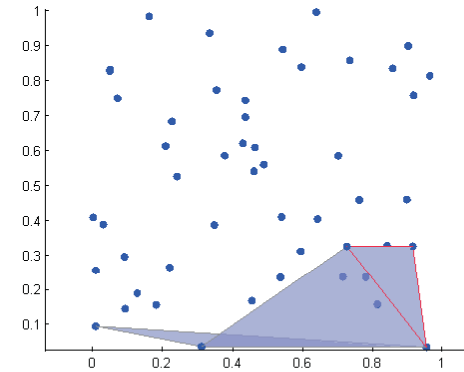
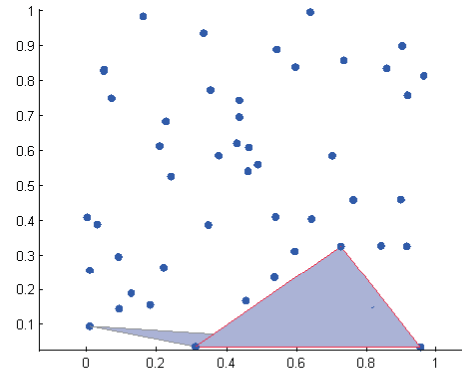
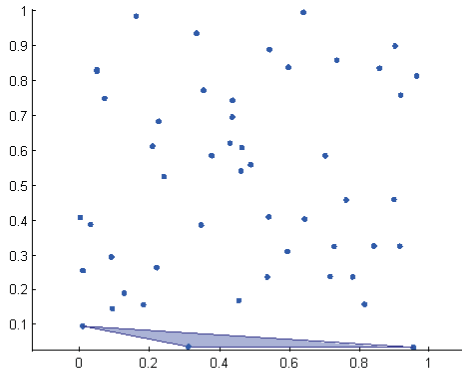
### Methode

- Startdreieck  $D$  (unterstes Dreieck), mit kanten  $e, f$  und  $g$ .
- Für jede Kante von  $D$  bestimmen angrenzendes Dreieck der konvexen Hülle durch Berechnung des *minimalen* Winkels.
- Rekursive Fortsetzung.

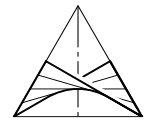




## Gift Wrapping 3d 2

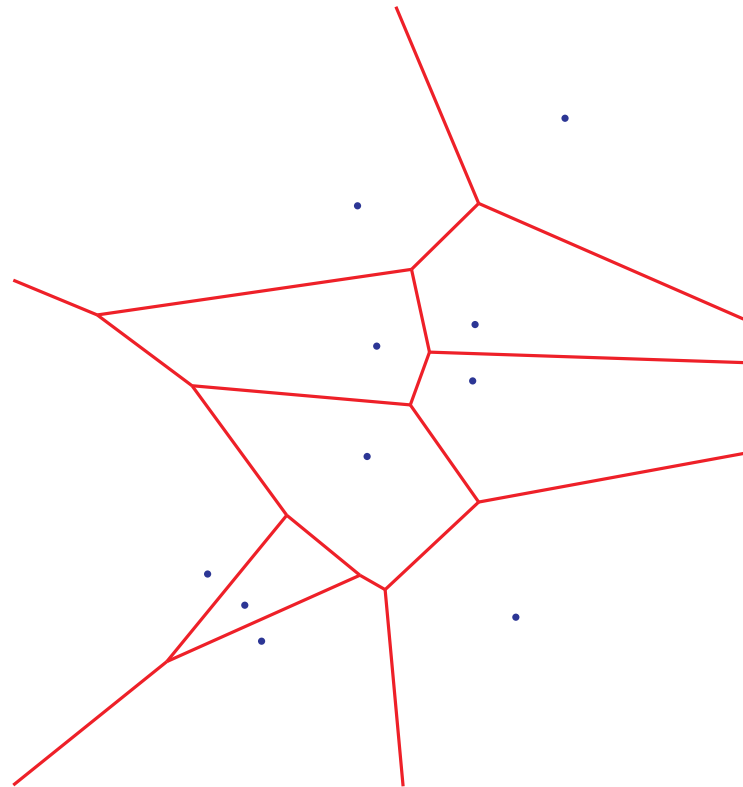


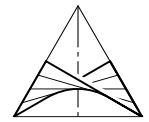




# Voronoi-Diagramm

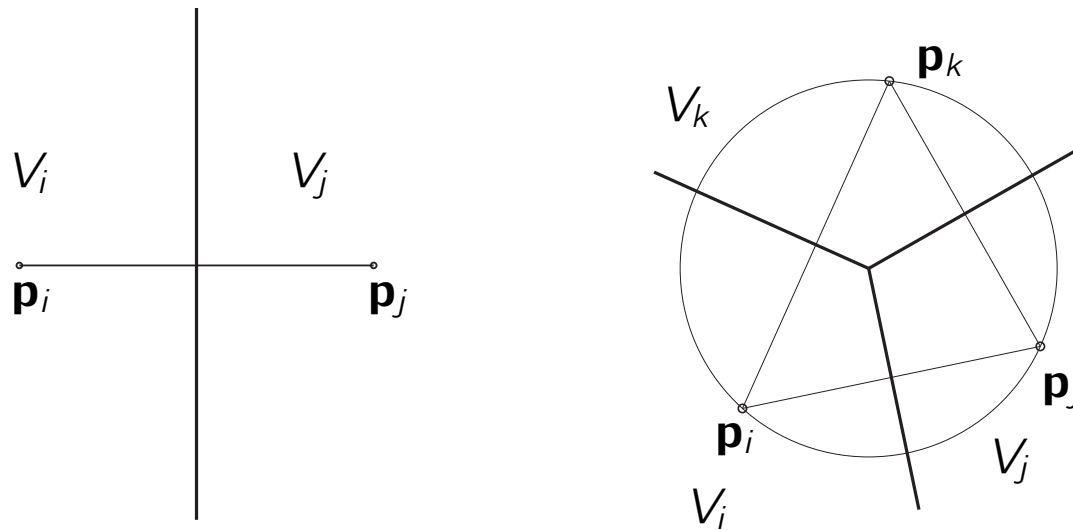
- Gegeben: Punkte  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ .
- Gesucht: Gebietszerlegung von  $\mathbb{R}^2$  so, dass das Gebiet  $V(\mathbf{p}_i)$  all jene Punkte  $\in \mathbb{R}^2$  enthält, die  $\mathbf{p}_i$  als nächsten Nachbarn haben.

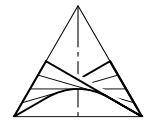




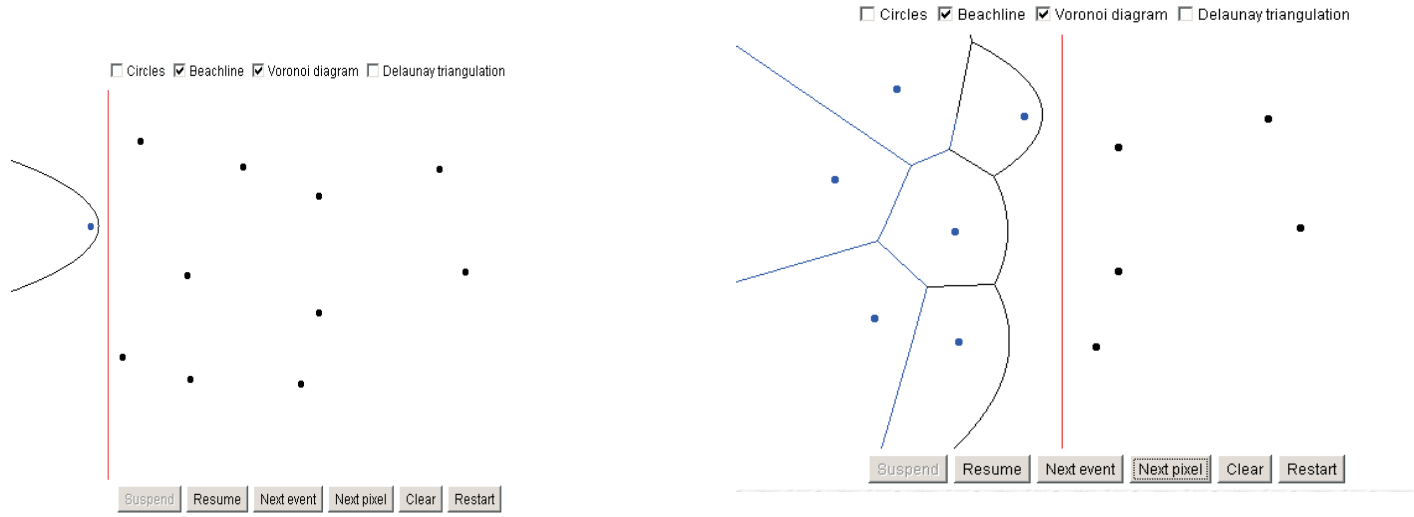
## Voronoi-Diagramm

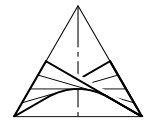
- $V_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{p}_i - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{p}_j - \mathbf{x}\|, j \neq i\}$  heißt *Voronozelle*.
- $V_i = \bigcap_{j \neq i} H_{ij}$  ist Durchschnitt von Halbebenen  $H_{ij}$ .





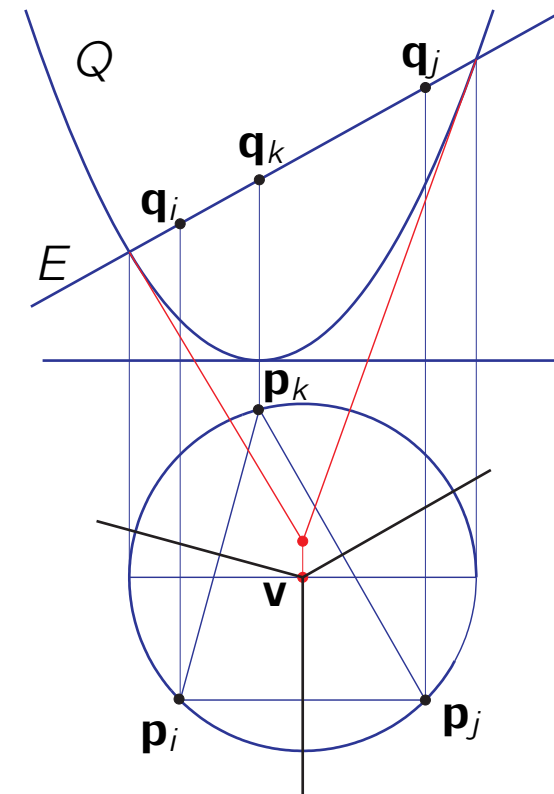
# Fortune's Sweep Algorithmus



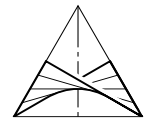


## Delaunay Triangulierung und Voronoi Diagramm

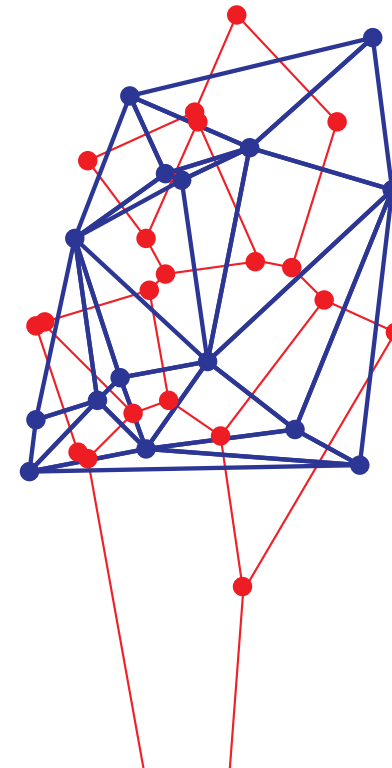
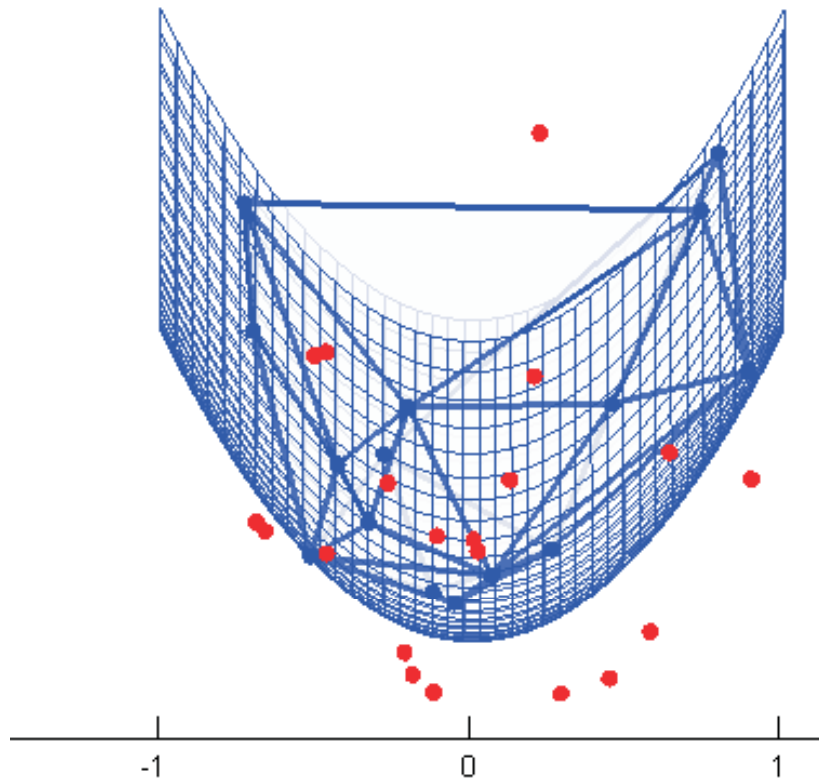
- Punkte  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ .
- Paraboloid  $Q : z = x^2 + y^2$ .
- Projizieren  $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{q}_i = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$ .
- Berechnen *untere konvexe Hülle* der  $\mathbf{q}_i$ 's.
- Delaunay Triangulierung der  $\mathbf{p}_i$ 's: Grundriss der unteren konvexen Hülle der  $\mathbf{q}_i$ 's.
- Voronoi Ecken: Grundrisse der Pole der Dreiecksebenen der unteren konvexen Hülle der  $\mathbf{q}_i$ 's.

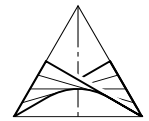


Projektion auf  $Q$  kann durch stereographische Projektion auf Einheitskugel ersetzt werden (winkeltreu).



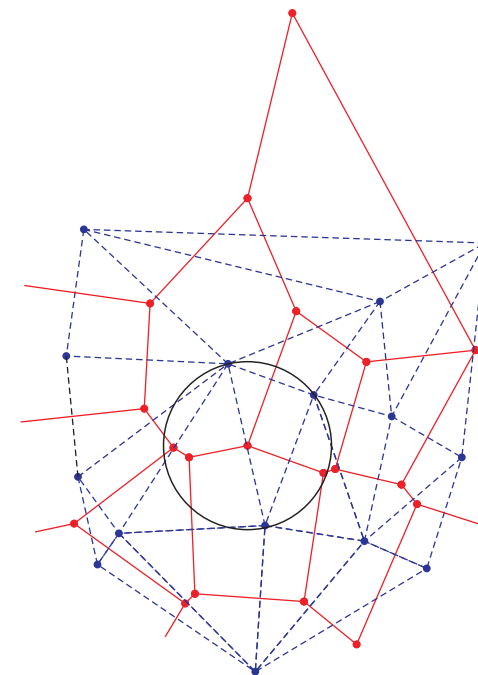
# Delaunay Triangulierung und Voronoi Diagramm

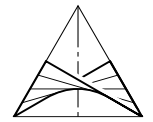




## Eigenschaften der Delaunay Triangulierung

- Voronoi-Punkte sind die Umkreismitten der Delaunay-Dreiecke.
- Jeder Voronoi-Kante entspricht eine Kante der Delaunay Triangulierung. Korrespondierende Kanten sind orthogonal.
- Die Umkreise der Dreiecke enthalten keine Datenpunkte im Inneren.
- Die Delaunay Triangulierung maximiert die minimalen Dreieckswinkel.





## Berechnung der Mittelachse eines Gebiets

Die Mittelachse eines Gebiets  $G$  ist der Ort der Mittelpunkte  $m$  maximaler Kreise  $k$ , die ganz in  $G$  liegen.

- Approximation der Kurve durch eine Polylinie  $\rightarrow$  Punkte  $p_i$ .
- Berechnung der Voronoi-Zellen der Punkte  $p_i$ .
- Voronoi-Punkte innerhalb von  $G$  liegen nahe an der Mittelachse.

