

Georg Glaeser

# Wie aus der Zahl ein Zebra wird

Ein mathematisches Fotoshooting

## **Autor**

Prof. Dr. Georg Glaeser  
Institut für Kunst und Technologie/Geometrie  
Universität für angewandte Kunst Wien  
georg.glaeser@uni-ak.ac.at

## **Wichtiger Hinweis für den Benutzer**

Der Verlag und der Autor haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechteinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media  
[springer.de](http://springer.de)

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2011  
Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15

5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton  
Herstellung und Satz: Autorensatz  
Umschlaggestaltung: wsp design Werbeagentur GmbH, Heidelberg  
Titelfotografie: Zebra © Georg Glaeser

ISBN 978-3-8274-2502-7

Ich bin Mathematiker (mit Spezialgebiet Computergeometrie) und leidenschaftlicher Naturfotograf. Gibt es da einen echten Zusammenhang, oder muss man ihn an den Haaren herbeiziehen? Nun, wenn Sie dieses Buch durchgeblättert haben, werden Sie die Antwort, die ich hier gebe, nachvollziehen können: Es wimmelt in der Natur nur so vor Beispielen, die irgendwie mit Mathematik zu tun haben. Die Fotografie spielt eine wesentliche Rolle, dies zu erkennen.

In der Mathematik werden oft Formen der Natur modelliert, die eindeutig zuzuordnen sind. Das Kristallgitter eines Diamanten ist z. B. perfekt tetraedrisch. Allerdings ist das schwer fotografisch nachzuweisen. Einigermassen geometrische Kristalle gibt's auch zuhauf, aber die sind, wenn zu sehen, nicht mehr so perfekt (Foto: Calcit-Kristalle, unter denen sich viele vierseitige Doppelpyramiden befinden).

In einem Vortrag habe ich einmal vereinfachend gesagt: Die Natur ist niemals perfekt, denn sonst gäbe es uns Menschen nicht. Das war eine Anspielung auf die Evolution und nicht etwa als Scherz gemeint (das Publikum sah es damals so).

Die Natur ist vielmehr pragmatisch und akzeptiert Lösungen, die sich durch Selektion oder zufällige Konstellation ergeben, wenn diese Lösung besser ist als eine vorher vorhandene. Sie ist gleichzeitig ununterbrochen bereit, neue Formen zu akzeptieren, die unter geänderten Umständen ein neues Optimum darstellen. Das gilt für die Entwicklung von Lebewesen genauso wie für die Ausbildung von Formen oder Mustern.

Das Computerzeitalter hat den Mathematikern ungeahnte Möglichkeiten eröffnet. Heute kann man Dinge visualisieren, die früher als unerreichbar galten. Insbe-





sondere kann man auch gezielt Vorgänge, die in der Natur stattfinden, simulieren. Hier erlaubt die computergestützte Mathematik das Experimentieren mit Parametern, und dies ist eine legitime, ja oft schlicht notwendige Methode geworden, schneller zu Ergebnissen zu gelangen.

Lösung eines Problems kann im konkreten Fall bedeuten: Begreifen, wie manche Vorgänge in der Natur vor sich gehen, welche Mechanismen ineinandergreifen und zusammenspielen. Bemerkenswert ist, dass einzelne Vorgänge lokal betrachtet eigentlich ganz einfach zu erklären sind, während sich die Komplexität und Vielfalt der Gesamterscheinung oft einer sofortigen Erklärung verschließt.

Dies mag bereits ein Teil des Erfolgsrezepts der Mathematik beim Versuch, die Natur zu verstehen, sein. In der Infinitesimalrechnung betrachtet man ja auch beliebig

kleine Umgebungen, in denen diese oder jene Eigenschaft gilt. Durch „Integrieren“ wird dann versucht, aufs Ganze zu schließen. Bei der Modellierung von dynamischen Prozessen kann jede auch noch so kleine Änderung im Kleinen das Gesamtergebnis maßgeblich beeinflussen. Niemand wird z. B. abstreiten, dass Wetterprognosen heute schon um ein Vielfaches besser geworden sind als noch vor wenigen Jahrzehnten. Dennoch sind zugegebenermaßen so viele Parameter im Spiel, dass es eben immer noch Ungenauigkeiten gibt.

Der Blitz oben hat wohl noch viel mehr Spielraum als Wolkenfelder, sich zu verästeln. Aber selbst hier arbeitet die Wissenschaft intensiv daran, das Phänomen zu verstehen. Ein erster Schritt dazu muss das präzise Erfassen des Phänomens sein, etwa mit Hochgeschwindigkeitskameras. Womit wir spätestens jetzt bei der Fotografie gelandet sind.







Dieses Bild eines 6 mm kleinen Prachtkäfers *Anthaxia nitidula* passt gleich zu mehreren Themen: „Schillerfarben“ (s. S. 150), „Einfach Wegblenden“ (s. S. 242), „Phänomen Komplexauge“ (s. S. 42), „Zehnerpotenzen im Tierreich“ (s. S. 224) – man betrachte die zufällig mit aufgenommene 0,1 mm große weiße Milbe im roten Kreis, die, weil 50 Mal so klein, weniger als 1/100 000 des Käfers wiegt.

**Vorwort** ..... V



Dieses Buch bietet eine fotografisch-mathematische Reise in das Reich der Natur mit ihren Phänomenen und den faszinierenden Resultaten der Evolution. Selbst ohne höhere Mathematik, aber mit geschärftem mathematischem Hausverstand und einem fantasievollen Herangehen an die Dinge kann man viele Dinge, die zunächst „einfach nur da sind“, besser verstehen und u. U. Schlüsse daraus ziehen. Den Einleitungstext zu den Kapiteln finden Sie hier im Inhaltsverzeichnis. Das Bild links stellt Zellstrukturen in einem Blatt dar, die man mathematisch gut modellieren kann.

Die positive Spirale .....	VI	Mathematik und Naturfotografie .....	VIII
----------------------------	----	--------------------------------------	------

**1 Das Wechselspiel mit der Mathematik** ..... 1



Mathematik ist mehr als nur „Rechnen“. Sie ist ein vom Menschen künstlich geschaffenes Konstrukt mit strengen Regeln, in der es nur „Schwarz oder Weiß“ bzw. „wahr oder falsch“ gibt. Die Natur scheint da ganz anders zu sein, und dennoch hat die Mathematik wie keine andere Wissenschaft die Fähigkeit, natürliche Prozesse zu modellieren und dabei zu tieferen Einsichten in diese Prozesse zu gelangen. Das Titelbild zeigt eine stehende Welle beim Abfluss eines Teichs. Sogar die Interferenzen der Wellen änderten sich dabei kaum, das Bild war „wiederholbar“ und könnte bei bekannten Parametern vom Computer „nachvollzogen“ werden.

Zebraestreifen und Zahlencodes .....	2	Das Schildkröten-Paradoxon .....	8	Seerosen-Vermehrung .....	14
Wie aus der Zahl ein Zebra wird .....	4	Herauslesen aus Fotos .....	10		
Die Henne und das Ei .....	6	Wiederholbarkeit von Versuchen .....	12		

**2 Der mathematische Blick** ..... 17



Die womöglich Jahrtausende alte Felszeichnung wurde von den San (Ureinwohner des südlichen Afrikas) angefertigt und illustriert eine Jagd mit Pfeil und Bogen. Die beim Pfeilflug auftretenden Wurfparabeln wurden (und werden) von den San mit unglaublicher Präzision einkalkuliert, ohne jemals eine Berechnung durchgeführt zu haben. In diesem Kapitel sollen exemplarisch Themen angeschnitten werden, bei denen sich ein Mathematiker vielleicht mehr denkt als ein Nicht-Mathematiker. So geht es z. B. um vermeintliche, aber auch erklärbare Ähnlichkeiten.

Verblüffend ähnlich .....	18	Zonen mit lauter Rauten .....	26	Verschiedene Skalen .....	34
Assoziationen .....	20	Netze mit windschiefen Rauten .....	28	Die Kepler'sche Fassregel .....	36
Nicht nur zufällig ähnlich .....	22	Schiefe Parallelprojektionen .....	30		
Iterative Formfindung .....	24	Fibonacci und Wachstum .....	32		



### 3 Räumliches Sehen ..... 39



In der Nahaufnahme eines hübschen Schmetterlings sind dunkle Punkte in den Komplexaugen zu sehen (Pseudopupillen), die von den Kristallprismen, die in jeder Facette eingebaut sind, erzeugt werden. Das Tier sieht auf kurze Distanzen ausgezeichnet dreidimensional. Warum das so ist, wie Stereo-Sehen und Vergleichbares funktioniert, aber auch sonst einige Regeln über perspektivisches und dreidimensionales Erfassen sind Thema dieses Kapitels. Man erkennt auch, dass wir recht leicht optisch verwirrt werden können, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind.

Tiefenwahrnehmung .....	40	Phänomen Linsenauge .....	46	Natürlicher Eindruck beim Foto .....	52
Phänomen Komplexauge .....	42	Zielgenauigkeit durch Antennen .....	48	Quader oder Pyramidenstumpf? .....	54
Entfernungstabellen .....	44	Im Schnitt der Sehstrahlen .....	50	Impossibles .....	56

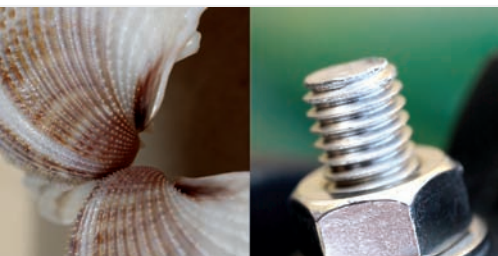
### 4 Astronomisches Sehen ..... 59



Der Blick ins Weltall war immer schon ein menschlicher Traum. Wir müssen uns hier auf unsere Sonne, unseren Mond und das eine oder andere markante Sternbild begrenzen. Viele Phänomene, die mit den Gestirnen zusammenhängen, erwecken das Interesse des Mathematikers. Ein recht einfacher geometrischer Satz über den rechten Winkel gibt uns z. B. Auskunft über durchaus nicht-triviale Fragen zum exakten Frühlingsbeginn bzw. der vermeintlich falschen Mondneigung. Letztere ist auch in dem abgebildeten mittelalterlichen Fresco der St. Laurentzkirche in Požega (Kroatien) „verewigt“.

Phänomen Sonnenuntergang .....	60	Der Skarabäus und die Sonne .....	68	Die Sonne im Zenit .....	76
Phänomen Sonnenfinsternis .....	62	Satz vom rechten Winkel .....	70	Der südliche Sternenhimmel .....	78
Wenn die Sonne tief steht .....	64	Wann beginnt der Frühling? .....	72		
Fata Morgana .....	66	Die „falsche“ Mondneigung .....	74		

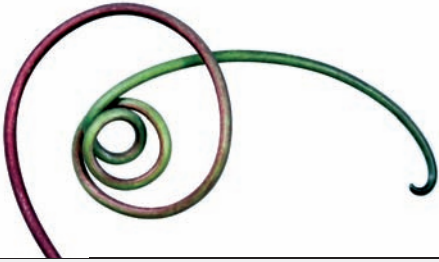
### 5 Schraubung und Spiralisierung ..... 81



Noch bevor wir verschiedene Typen von Kurven und Flächen betrachten, wollen wir die Schraubung und Spiralisierung unter die Lupe nehmen. Erstere spielt in vielen technischen Anwendungen eine zentrale Rolle (als Symbol dafür ist ein Schraubengewinde samt Schraubenmutter abgebildet). Die Spiralisierung ist in der Kunst, vor allem aber in der Natur omnipräsent und besonders schön bei Schneckenhäusern, Muscheln (Foto links) und Tierhörnern manifestiert. Hier spielen exponentielles oder lineares Wachstum und Rotation zusammen.

Wendelflächen .....	82	Faszination Spirale .....	86	Helispiralen .....	90
Schub oder Hub? .....	84	Durch Spiegelung zum König .....	88		

## 6 Spezielle Kurven ..... 93



Kurven wie z. B. die Kettenlinie können in einer Ebene liegen oder auch „echte Raumkurven“ sein, wie der abgebildete Trieb einer Kletterpflanze, welche – ganz untypisch für unsere Vorstellung von Pflanzen – durch Drehen und Wippen versucht, ihre räumliche Umgebung zu erfassen und irgendwo Halt zu finden. Die Kegelschnitte sind zu Recht die berühmtesten Kurven: Sie finden sich in der Natur zuhauf (die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, die Wurfbahnen von Objekten sind Parabeln, Schatten und perspektivische Bilder von Kreisen sind oft Hyperbeln).

Die Kettenlinie .....	94	Faszination Parabel .....	98	Umriss-Spitzen .....	102
Invarianz bei Zentralprojektion .....	96	Knoten .....	100	Geodätische Geschenke .....	104

## 7 Besondere Flächen ..... 107



Noch viel größer als die Vielfalt der Kurven ist jene der gekrümmten Flächen. Die Kugel übt wegen ihrer unendlichfachen Symmetrie große Faszination auf uns aus. Ihre Oberfläche ist doppelt gekrümmt und damit nicht ohne Dehnungen und Stauchungen in die Ebene auszubreiten. Jene Flächenteile, welche bei der abgebildeten Lampe in Summe eine Kugel annähern, entstehen durch Verbiegen von ebenen rautenförmigen Streifen und sind damit nur einfach gekrümmt. Oberflächen, die sich in einem Spannungsgleichgewicht befinden, sind (doppelt gekrümmte) Minimalflächen.

Faszination Kugel .....	108	Biegsam und vielseitig .....	114	Minimierte Oberflächenspannung ....	120
Der Umriss einer Kugel .....	110	Aufwicklungen .....	116	Minimalflächen .....	122
Krumme Flächen annähern .....	112	Stabil und einfach zu bauen .....	118	Seifenblasen .....	124

## 8 Spiegelung und Brechung ..... 127



Spiegelung und Brechung gehören eng zusammen: Wenn z. B. die Sonne an der Wasseroberfläche reflektiert, gelangt – je nach Einfallswinkel – ein Teil des Lichts in das Wasser. Die Umkehrung ist nicht mehr so selbstverständlich: Flach von unten auf die Wasseroberfläche treffendes Licht wird zur Gänze reflektiert. Der winzige Gecko auf der Glasscheibe erscheint doppelt reflektiert: einmal an der Oberseite der Scheibe, das andere Mal auf der Rückseite. Die dazwischen stattgefundenene doppelte Brechung an der Vorderseite „hebt sich auf“.

Kugel-Spiegelung .....	128	Das optische Prisma .....	140	Fischaugenperspektive .....	152
Spiegelsymmetrie .....	130	Die Theorie zum Regenbogen .....	142	Die Bildanhebung .....	154
Spiegelung .....	132	Am Fuß des Regenbogens .....	144	Totalreflexion und Bildanhebung .....	156
Das Pentaprisma .....	134	Über den Wolken .....	146	Einmal Fischaugen und zurück! .....	158
Der Billard - Effekt .....	136	Spektralfarben unter Wasser .....	148		
Schalldämmende Pyramiden .....	138	Farbpigmente oder Schillerfarben? ..	150		



## 9 Verteilungsprobleme ..... 161



Sehr oft tritt das Problem auf, möglichst viele Elemente auf möglichst kleinem Raum sinnvoll so zu verteilen. Die jungen Nilkrokodile am Bild sollen symbolisch dieses Problem veranschaulichen. Da ist etwa die vermeintlich einfache Frage, wie man eine vorgegebene Anzahl von Punkten auf einer Kugel verteilt. In der Natur will z. B. ein Seeigel seine Stacheln optimal auf seiner Kalkhülle verteilen. Hier gibt es mathematisch-physikalische Algorithmen, die das Problem durch Simulation von Abstoßung der einzelnen Teilchen hervorragend bewältigen.

Gleichverteilung auf Flächen .....	162	Stachelige Gleichverteilung .....	170	Artefakte am Bildschirm .....	178
Tautropfenverteilung .....	164	Oberflächen unter Zugzwang .....	172	Gewichtsschwankungen .....	180
Berührungsprobleme .....	166	Nicht ungefährlich .....	174		
Eine platonische Lösung .....	168	Druckverteilung .....	176		

## 10 Einfache physikalische Phänomene ..... 183



Mathematik und Physik haben in vielen Teilen Überlappungen. Die Fragen, auf welchem Anlauf ein Schispringer zum besten Sprung ansetzt oder wie weit sich ein Motorrad in die Kurve legen muss, gehören zweifellos in so eine Nische. Schon deutlich physikalischer ist die Frage, warum Tiere wie die abgebildeten Enten oder aber Flugzeuge fliegen können oder welche Wellenformationen bei bewegten Erregerquellen entstehen.

Die Newton'schen Axiome .....	184	Das aerodynamische Paradoxon .....	192	Interferenzen .....	200
Rückstoß und Saugwirkung .....	186	Der schnellste Weg .....	194	Doppler-Effekt und Mach-Kegel .....	202
Selektive Farbauslöschung .....	188	Extreme Kurvenlage .....	196	Schallwellen auf seltsamen Wegen ...	204
Relativgeschwindigkeiten .....	190	Mathematisches über Bienen .....	198		

## 11 Zellenanordnungen ..... 207



Wenn ein Mathematiker die Anordnung der Schuppen auf einem Reptil wie dem abgebildeten jungen Nilkrokodil betrachtet, assoziiert er damit sofort sogenannte Voronoi-Diagramme. Inwieweit hier ein Zusammenhang besteht und ob womöglich auch das Stützgerüst in Libellenflügeln oder Blättern von Grünpflanzen oder gar die Risse in trocknendem Schlamm solche Strukturen enthalten, sind Themen dieses Kapitels, ebenso warum man auf Gänseblümchen, Sonnenblumen oder Pinienzapfen Spiralen zu erkennen glaubt.

Vermehrung der Gänseblümchen .....	208	Voronoi-Diagramme .....	214	Fraktale Kugelpackungen .....	220
Spiralen oder keine Spiralen? .....	210	Iterierte Voronoi-Strukturen .....	216		
Berechnende Rotation .....	212	Wickelkurven .....	218		

## 12 Wie im Kleinen, so nicht im Großen ..... 223



Dieses Kapitel widmet sich der spannenden Frage, warum Dinge, die man im Großen beobachtet, in der Welt der Kleinstlebewesen ganz anders sind (die beiden Fotos eines Elefanten und einer Ameise sind stellvertretend dafür zu sehen). So scheint bei den Insekten die Schwerkraft kaum eine Rolle zu spielen, die Tiere scheinen verhältnismäßig viel mehr Kraft zu besitzen und können fast alle fliegen. Dafür gibt es eine ganz einleuchtende mathematische Erklärung: Bei ähnlichen Objekten ist das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen von der absoluten Größe abhängig.

Zehnerpotenzen im Tierreich .....	224
150 Millionen Jahre unverändert .....	226
Legendäre Kraft .....	228
Wo bleibt die Erdanziehung? .....	230
Fäden aus Eiweiß .....	232

Riesige Elefantenohren .....	234
Schwimmende Münzen .....	236
Modell und Realität .....	238
Skalenunabhängige Schärfentiefe .....	240
Einfach wegblenden .....	242

Fluide .....	244
Bruchteile einer Millisekunde .....	246
Biegsame Strohhalme .....	248

## 13 Baumstrukturen und Fraktale ..... 251



Verästelungen wie bei Bäumen (im Bild eine Schirmakazie) und Flüssen treten auch bei kleinen Gebilden wie Korallen oder Wurzeln kleiner Pflanzen auf. Oft ist die Auflösung eines klaren Umrisses so weit fortgeschritten, dass wir von einem Fraktal sprechen. Wolkenfelder, Farne, Schichtenlinien von Landschaften (insbesondere auch Umrisse von Inseln) sind typische Beispiele. Weil sich die Computergrafik naturgemäß viel mit Baumstrukturen und rekursiven Algorithmen beschäftigt, gibt es hier eine besonders schöne Überschneidung mit Strukturen aus der Natur.

Die Summe der Querschnitte .....	252
Wirrwarr mit System? .....	254
Verästelungen .....	256

Fraktale Konturen .....	258
Fraktale Pyramiden .....	260
Mathematische Farne .....	262

Fraktale Ausbreitung .....	264
Schichtenlinien .....	266
Vom Oktaeder zur Schneeflocke .....	268

## 14 Gezielte Bewegungen ..... 271



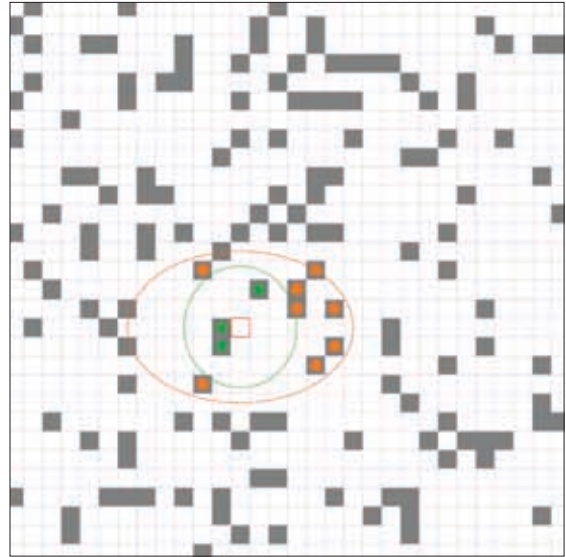
Wie können und sollen sich die winzigen Raupen auf einem Blatt bewegen, damit sie in möglichst großer Anzahl möglichst rationell ein Blatt in ihren Mägen verschwinden lassen können? Kann ein Affe seinen Sprung von einem Baum auf den anderen nach dem Absprung noch beeinflussen? Solchen Überlegungen stehen viele schöne Anwendungen aus der sogenannten Kinematik (Geometrie der Bewegung) gegenüber, von denen einige in diesem Kapitel erörtert werden.

Unrunde Zahnräder .....	272
Die Übersetzung ist entscheidend .....	274
Robust und effizient .....	276

Lissajous-Figuren .....	278
Leichtfüßigkeit und Reaktionszeit .....	280
Die Wurfparabel .....	282

Mit Keule und Kavitation .....	284
Flugakrobatik .....	286

Lassen wir uns einmal auf folgendes mathematisches Modell ein: Wir wählen ein Raster von meinetwegen 500 x 500 Punkten und malen willkürlich eine Anzahl von Pixeln schwarz („Pixel“ steht für Picture-Element, also ein kleines Quadrat im Raster). Jetzt wandern wir unser Raster systematisch, also Pixel für Pixel, ab (im Bild rechts ist jeweils ein solches Testpixel rot markiert). Um das Testpixel denken wir uns zwei (ellipsen- oder kreisförmige) Ringe, wobei der äußere (orange) in etwa doppelt so groß sein soll wie der innere (grüne). Nun beginnt ein simpler Zählvorgang: Wir zählen jene schwarzen Pixel, die sich in jener Fläche befinden, die von innerem und äußerem Ring begrenzt wird (orange markiert, Anzahl  $n$ ) und jene schwarzen, die in der kleineren Fläche liegen (grün markiert, Anzahl  $m$ ). Ist nun z. B.  $n > 3 \cdot m$  (oder  $n - 3 \cdot m > 0$ ), wird das Testpixel temporär schwarz. Nachdem man alle Pixel durchtestet, hat sich das Muster verändert. Wiederholt man den Vorgang, entsteht ein neues Bild, aber siehe da: Das



Muster nähert sich rasch einem endgültigen Aussehen, das schon nach 5 bis 10 Iterationen erkennbar wird. Die Gewichtung (Multiplikation) mit dem Faktor 3 kommt daher, dass es maximal etwa dreimal so viele orange Pixel („Inhibitoren“) wie grüne Pixel („Aktivatoren“) geben kann. Überwiegen die gewichteten Aktivatoren, wird das Testpixel schwarz. Die vier computergenerierten „Zebra-Muster“, die auf der rechten Seite zu sehen sind, entstanden auf die beschriebene Art. Über die Form der Muster entscheiden überraschenderweise nicht Anzahl oder Position der Ausgangspunkte, sondern vielmehr die Gestalt der beiden Ringe (um Zebra-Muster zu erhalten, wählt man zwei Ellipsen so wie in der Skizze oben links: die Hauptachsen sind um 90° verdreht).

Im großen Foto rechts sieht man eine Zebramutter mit Baby. Vergleicht man die Muster am Kopf, erkennt man aufgrund der nahen Verwandtschaft starke Ähnlichkeiten. Vergleichbare Muster findet man nicht nur bei Tierfellen oder Tierhäuten (Tiger, Tigerhai), sondern auch bei Sandrippen im Flachwasser, was das Foto links illustrieren soll.



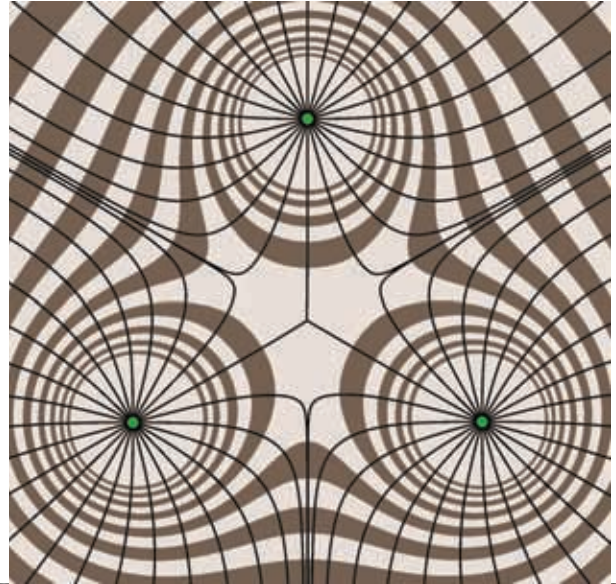


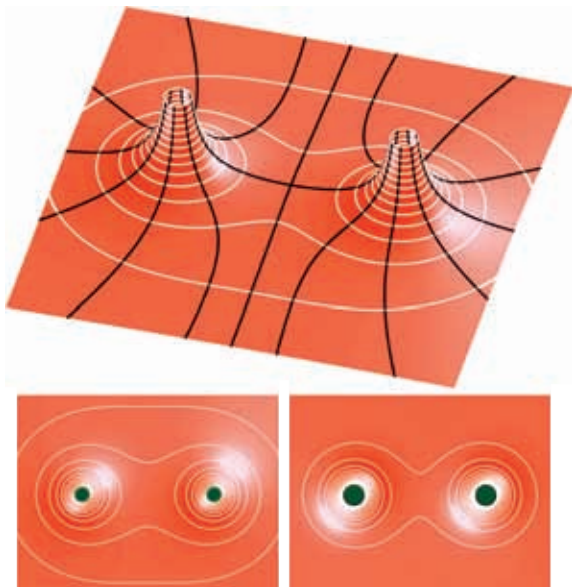




Manchmal scheint es zufällig Ähnlichkeiten zwischen Computergrafiken und natürlichen Phänomenen zu geben. Betrachten wir das Computerbild rechts, wo Äquipotentiallinien bzw. Feldlinien (Orthogonaltrajektorien) eines elektrischen Feldes von – drei symmetrisch angeordneten – Linienladungen illustriert sind. Auf der anderen Seite ist das Ganze für zwei Ladungen räumlich interpretiert dargestellt.

Nun blicken wir auf das Foto eines speziellen Baumstammquerschnitts (unten), wo offensichtlich zwei Stämme zusammengewachsen sind, mit seinen Jahresringen bzw. den dazu orthogonalen Rissen längs der transversalen, wenig ausgestärkten Markstrahlen. Auch wenn gar nicht versucht wurde, identische Bilder zu erzeugen: Die Ähnlichkeit scheint gegeben.





Weniger verblüffend ist die Ähnlichkeit mit Äquipotentiallinien bei Kerzen mit mehreren Flammen (Foto unten), wo statt der elektrischen Linienladung die heiße Luftsäule der Flamme auftritt, welche das Wachs zum Schmelzen bringt. Die Äquipotentiallinien sind bei den elektrischen Ladungen sog. Cassini-Kurven (4. Ordnung, kleines Computerbild unten links). Für solche Kurven ist das Produkt der Abstände von den festen Punkten konstant.

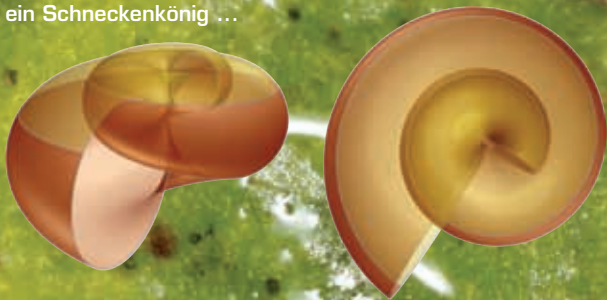
Kaum davon zu unterscheiden sind jene Ortslinien, für welche die Summe der Reziprokwerte der Abstandsquadrate von zwei festen Punkten konstant ist (kleines Computerbild unten rechts) – und das sind wohl die „Isothermen“, entlang derer es gleich heiß ist.







Nur in der Simulation  
ein Schneckenkönig ...



Betrachtet man ein Schneckenhaus von oben, dann windet es sich vom Ausgang her gegen den Uhrzeigersinn (also im mathematisch positiven Sinn) immer kleiner werdend bis zu einem „Ausgangspunkt“. Bei 1 von 10000 oder gar von 1 Million Schnecken ist die Drehrichtung umgekehrt: Der stolze Finder bezeichnet dann eine solche Schnecke als „Schneckenkönig“.

Schneckenhäuser lassen sich recht einfach mit dem Computer zeichnen: Sie wachsen exponentiell zum Drehwinkel. Für Interessierte folgt die Parameterdarstellung einer Bahnkurve. Dabei bezeichnet  $u$  den Drehwinkel,  $a$  ist ein Maß für die Vergrößerung und  $b$  ein Maß für die Öffnung des umschriebenen Kegels:

$$x = a^u \cdot \cos u, \quad y = a^u \cdot \sin u, \quad z = b \cdot a^u$$

Betrachten wir nun die beiden „Weihnachtsbäumchen“ (*Spirobranchus giganteus*, kleine Röhrenwürmer auf einem Korallenstock): Die Computersimulation darunter zeigt, dass es sich bei beiden Bäumchen recht genau um eine Spiralfläche handelt. Das linke Würmchen ist allerdings spiegelsymmetrisch zum rechten und damit ein „Wurmking“.

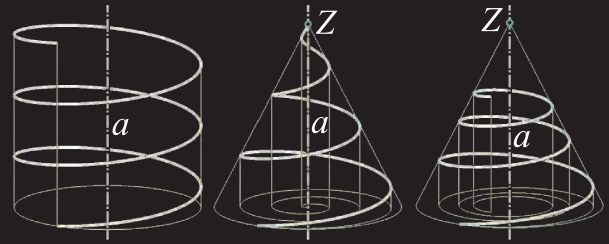




Was haben die drei Fotos auf dieser Doppelseite miteinander zu tun? Die „Schnecke“ am Cello und die Hörner des Mufflon bzw. der Schraubenziege gehorchen ein und derselben Vorschrift: „Verschraube dich um eine Achse und vergrößere dich dabei proportional zum Drehwinkel“.

So eine Transformation nennt man Helispiralung – eine Mischung aus Schraubung und klassischer Spiralisierung. Dementsprechend können alle drei Gebilde leicht mit dem Computer simuliert werden.





Die Computerzeichnung illustriert, inwiefern die Helispirale in der Mitte diese Mischform aus Schraublinie (links) und klassischer Spirale (rechts) darstellt. Ihr Grundriss ist eine archimedische Spirale (jener der klassischen Spirale eine logarithmische Spirale). Helispiralen haben keine konstante Neigung zur Achse  $a$  und durchsetzen das Zentrum  $Z$  in einem regulären Punkt.





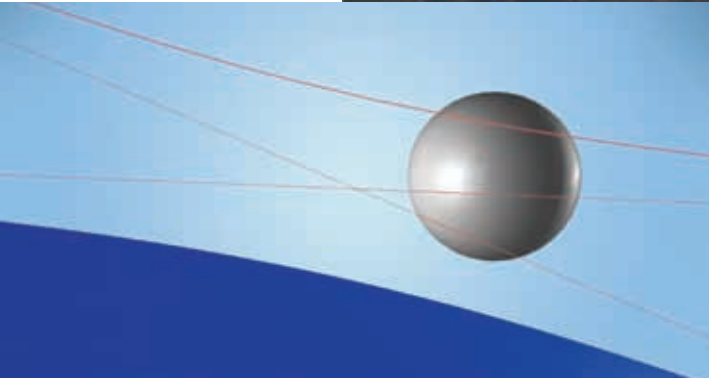
Um den Umriss einer Kugel zu bestimmen, legen wir aus dem Augpunkt (= Linsenzentrum) einen berührenden Drehkegel an die Kugel und schneiden diesen mit der Bildebene (= Sensorebene). Der Umriss ist also ein Kegelschnitt. In den allermeisten Fällen wird dieser ellipsenförmig ausfallen, denn es ist gar nicht leicht, die Bedingung zu erfüllen, damit eine Hyperbel entsteht: Dazu muss nämlich die durch das Zentrum verschobene Bildebene die Kugel schneiden. Man muss sich also unmittelbar an der Kugel befinden und irgendetwas anvisieren, das jenseits des Kugelumrisses liegt.

Die beiden Computersimulationen auf der rechten Seite zeigen zwei Kugeln. Die graue hat den „üblichen“ elliptischen Umriss, die blaue einen hyperbelförmigen. Die Asymptoten der Umrisshyperbel sind eingezeichnet. Die Farbgebung der Kugeln suggeriert bereits, dass so ein Fall eintritt, wenn wir Dinge am Horizont fotografieren, z. B. den auf- oder untergehenden Mond.

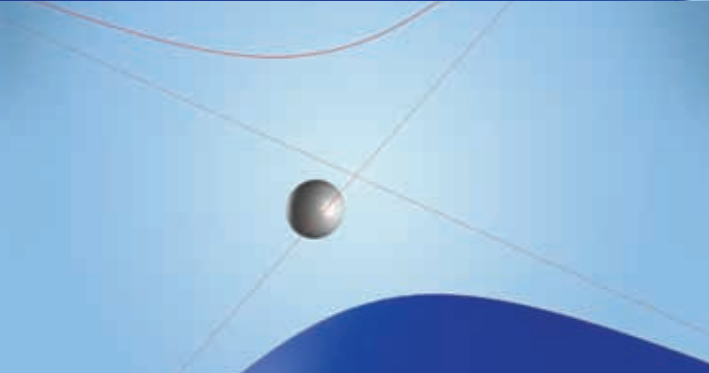
Das untere Foto täuscht etwas vor, was wir zu wissen glauben: Die Erde ist kugelförmig, hat also einen gekrümmten Umriss. Allerdings wurde hier mit einem Fischaugenobjektiv fotografiert (das Originalfoto ist kleiner mit abgebildet). Die vermeintlich starke Krümmung ist also ein Linseneffekt, der übrigens nur dann auftritt, wenn der Horizont nicht durch den Bildmittelpunkt geht.

Dennoch sind wir überzeugt, die Erdkrümmung sehen zu können, wenn wir z. B. aus dem Flugzeug fotografieren. Das stimmt zwar, aber das Meiste bilden wir uns ein. Zunächst ist als Umriss ein Teil einer Hyperbel zu erwarten. Weiter brauchen wir ein Weitwinkelobjektiv. Solche Objektive neigen aber zum „Kisseneffekt“ (so wie Fischaugenobjektive, nur ist der Effekt dort viel stärker ausgeprägt). Wenn wir aber wie im unteren Bild auf der rechten Seite möglichst genau über die Diagonale fotografieren, schalten wir den Kisseneffekt aus und nützen gleichzeitig den Weitwinkelleffekt optimal aus. Jetzt ist das Ergebnis allerdings ernüchternd, denn selbst aus 10 km Höhe ist die Erdkrümmung nur mit gutem Willen feststellbar!





Geringe Flughöhe. Die vermeintlich gut erkennbare Krümmung ist zum größten Teil eine Folge des Kisseneffekts.



Klassische Flughöhe von 10 km. Der Kisseneffekt wird ausgeschaltet, indem der Horizont entlang einer Diagonale geführt wird. Trotz 28 mm Weitwinkellinse ist die Erdkrümmung kaum erkennbar.

