

# Hyperbolisierung von Ornamenten

Martin von Gagern (TU München)

## Zusammenfassung

Der Beitrag untersucht die Fragestellung, wie sich ein gegebenes Ornament, basierend auf einer der 17 kristallographischen Gruppen der euklidischen Ebene, in ein „entsprechendes“ hyperbolisches Ornament umformen lässt. Dazu wird die Symmetriegruppe eines Ornaments automatisch erkannt, die Zähligkeit der Drehzentren angepasst, die Fundamentalzelle entsprechend der geänderten Eckwinkel deformiert und abschließend das Endergebnis mit einem *Reverse Pixel Lookup* berechnet, gegebenenfalls unter Benutzung der Grafikkarte.

Die Deformation der Fundamentalzelle sollte mit Ausnahme der Drehzentren konform sein, um Winkel zu erhalten und somit Verzerrungen des Ornaments zu minimieren. Dazu wird der Ansatz diskret konformer Dreiecksnetze verwendet. Für Gruppen mit hoher Symmetrie, also mit mindestens dreizähligen Drehzentren, ist die Form der hyperbolischen Fundamentalzelle allein durch die Kombinatorik bestimmt. Sie kann durch ein Dreiecksnetz approximiert werden, welches anschließend konform abgebildet wird. Für Gruppen mit nur zweizähligen Drehzentren wird die euklidische Orbifold trianguliert und ins Hyperbolische abgebildet, da die Form der hyperbolischen Fundamentalzelle zusätzliche reelle Freiheitsgrade aufweist und somit a priori nicht bekannt ist.

## 1 Ornamente

### 1.1 Euklidische Ornamente

Längenerhaltende Abbildungen werden als *Isometrien* bezeichnet. Diese gliedern sich in die Verschiebungen (Translationen), die Drehungen (Rotationen), die (Achsen-)Spiegelungen sowie die Gleitspiegelungen. Die Menge aller Isometrien, die ein Ornament als ganzes unverändert lassen, wird die *Symmetriegruppe* des Ornaments genannt. Wenn eine diskrete Symmetriegruppe Translationen in mindestens zwei linear unabhängige Richtungen enthält, dann gibt es im entsprechenden Ornament eine kompakte *Fundamentalzelle*, deren Kopien die gesamte Ebene pflastern. Eine solche Symmetriegruppe wird als *kristallographische Gruppe* bezeichnet.

In der euklidischen Ebene gibt es genau 17 strukturell unterschiedliche kristallographische Gruppen. Mit dem vom Autor entwickelten und im Vortrag demonstrierten Programm „morenaments euc“ können Ornamente auf Grundlage dieser Symmetriegruppen gezeichnet und deren Eigenschaften spielerisch und intuitiv erfahren werden. [2] Dieses Programm ist mittlerweile auch in einigen Museen und anderen Ausstellungen vertreten.

### 1.2 Hyperbolische Ornamente



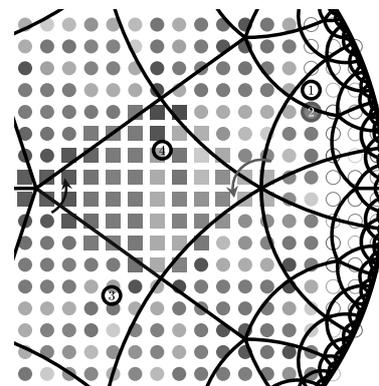
Ein hyperbolisches Ornament

In der hyperbolischen Ebene hingegen gibt es unendlich viele strukturell unterschiedliche diskrete Symmetriegruppen. Eschers Kreislimit-Drucke stellen Beispiele dar für Ornamente in dieser hyperbolischen Geometrie. Es gibt mehrere Modelle, wie eine hyperbolische Ebene dargestellt werden kann. Für Ornamente ist das Kreisscheibenmodell von Poincaré das ästhetischste.

Beim Zeichnen hyperbolischer Ornamente am Computer sind einige technische Probleme zu lösen. So ist es nicht ratsam, einzelne Objekte (z.B. Linienzüge) entsprechend der Symmetriegruppe immer wieder zu kopieren, um so die ganze Ebene zu füllen. Das kommt daher, dass die gesamte hyperbolische Ebene mit theoretisch unendlich vielen Kopien

der Fundamentalzelle im inneren eines endlich großen Kreises dargestellt wird. Selbst mit einer Abbruchbedingung zur Vermeidung der Unendlichkeit wird die meiste Zeit mit der Berechnung winzig kleiner Objekte verbracht.

Besser geeignet ist ein *Reverse Pixel Lookup*. Dabei wird einmal über alle Pixel des Ergebnisses iteriert, und jeweils der zugehörige Farbwert aus einer zentralen Fundamentalzelle mit bekanntem Inhalt kopiert. Die Position des Pixels (1 in der nebenstehenden Abbildung) wird dabei durch Anwendung von Generatoren der Symmetriegruppe schrittweise immer näher an die zentrale Fundamentalzelle abgebildet (3), bis sie innerhalb dieser zu liegen kommt (4). [3]



Schritte des Reverse Pixel Lookup

Die Darstellung derartiger Ornamente lässt sich durch einige Tricks verbessern. Beispielsweise kann man als Start diejenige Abbildung verwenden, die ein benachbartes und bereits bearbeitetes Pixel (2) in die Fundamentalzelle abgebildet hatte. Mit „Supersampling“, also der Berechnung von Farbwerten zu mehreren Positionen innerhalb eines Pixels, kann eine Kantenglättung erzielt werden. Eine selektive Aktualisierung der betroffenen Bereiche beim Zeichnen in Echtzeit kann man erreichen, wenn man zu jedem Pixel der zentralen Fundamentalzelle die von diesem abhängigen Pixel des Gesamtbildes speichert. Alternativ kann die Berechnung des kompletten Ornaments auch auf der Grafikkarte erfolgen, wo diese für mehrere Pixel parallel ausgeführt wird.

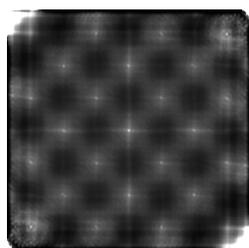
Ein Programm „moreornaments hyp“ zum Zeichnen hyperbolischer Ornamente wird vom Autor entwickelt, ist aber zum derzeitigen Zeitpunkt noch in einem Stadium, in dem sich die Bedienung für die meisten Anwender als zu schwierig erweisen dürfte.

### 1.3 Mustererkennung

Um bei der Transformation von einem euklidischen Ornament – beispielsweise von einer gescannten oder fotografierten Vorlage – zu einem hyperbolischen die Entstehung von Kanten zu vermeiden, ist es wichtig, dass das Ausgangsbild exakt symmetrisch und diese Symmetrie dem Computer auch bekannt ist. Zu diesem Zweck wird eine automatische Mustererkennung eingesetzt, die die Symmetriegruppe des Ornaments erkennt und aus der Eingabe eine repräsentative Fundamentalzelle erzeugt, deren Kopien eine exakt symmetrische Variante des ursprünglichen Ornaments bilden.

Erster Schritt bei der Erkennung der Symmetriegruppe ist die Identifizierung der Translationen. Dazu muss das Ornament mit verschobenen Kopien seiner selbst verglichen werden. Als Maß für die Übereinstimmung dient die Autokorrelation:

$$a(x,y) = \sum_j \sum_k b(j,k) \cdot b(j+x,k+y) \quad (1)$$



Ergebnis der Autokorrelation

In dieser Formel wird jeweils die Bildinformation an der Position  $(j,k)$  mit der an der um  $(x,y)$  verschobenen Position multipliziert. Die Produkte werden für den gesamten Überlappungsbereich aufsummiert. Diese Berechnung kann für jeden Farbkanal einzeln ausgeführt und die Ergebnisse zusammengezählt werden. Ein Maximum zeigt eine gute Übereinstimmung an, weil große Werte mit großen Werten zur Deckung kommen. Das Ergebnis ist in der nebenstehenden Abbildung illustriert. Die Identität findet sich als heller Punkt im Ursprung in der Mitte der Grafik. Weitere helle Punkte kennzeichnen weitere Verschiebungen, die zu hoher Übereinstimmung führen, und damit den Translationen der Symmetriegruppe entsprechen.

In der Praxis empfiehlt es sich, die Autokorrelation nicht direkt entsprechend der oben beschriebenen Formel zu berechnen, sondern sich dazu der schnellen Fourier-Transformation zu bedienen:

$$B = \text{DFT } b \quad (2)$$

$$A(x, y) = \overline{B(x, y)} \cdot B(x, y) \quad (3)$$

$$a = \text{iDFT } A \quad (4)$$

Mit diesem Verfahren kann die Autokorrelation mit einer Zeitkomplexität von nur  $O(n^2 \log n)$  berechnet werden.

Zur Erkennung der Peaks wird ein als „Area of Dominance“ bezeichneter Ansatz verwendet.[4] Anschließend werden mit einer Heuristik die Basisvektoren eines Gitters ermittelt, dem die gefundenen Peaks möglichst gut entsprechen. Damit sind zwei minimale linear unabhängige Translationen gefunden und durch diese wird eine translative Zelle bestimmt, deren verschobene Kopien das gesamte Ornament bilden.

Innerhalb dieser translativen Zellen kann jetzt nach weiteren Symmetrieeigenschaften wie Drehungen und Spiegelachsen gesucht werden. Dabei muss man nur nach Drehungen um bestimmte Winkel sowie nach Spiegelachsen in bestimmten Richtungen relativ zu den Basisvektoren suchen. Außerdem kann man die translative Zelle als Torus auffassen und sich die periodische Natur von Fourier-Transformationen zunutze machen, um mit weiteren Korrelationsberechnungen die Stärke und Position der möglichen weiteren Symmetrieeigenschaften zu ermitteln.

Wenn nach der Ermittlung aller Symmetrien die Symmetriegruppe fertig bestimmt ist, kann damit eine repräsentative Fundamentalzelle ermittelt werden. Dazu wird zu jedem Pixel der Ergebniszelle der entsprechende Orbit bestimmt, also alle dazu symmetrisch gelegenen Positionen im ursprünglichen Ornament. Aus diesen wird mit einer Kombination aus Median und Mittelwert ein repräsentativer Farbwert gewählt.

## 2 Hyperbolisierung

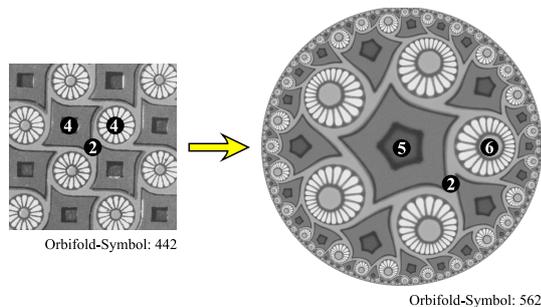
### 2.1 Grundlagen

Bei der Hyperbolisierung eines Ornaments gilt es zunächst, eine geeignete hyperbolische Symmetriegruppe zu finden, die der euklidischen Symmetriegruppe entspricht.

Konkret muss die topologische Struktur des Ornaments erhalten bleiben, während die Winkel, die sich aus den Zähligkeiten der Drehzentren ergeben, an die Bedingungen der hyperbolischen Geometrie angepasst werden. Statt der Innenwinkelsumme  $\pi$  für Dreiecke im Euklidischen gilt in der hyperbolischen Geometrie eine Ungleichung für die Innenwinkelsumme:

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} < \pi \quad (5)$$

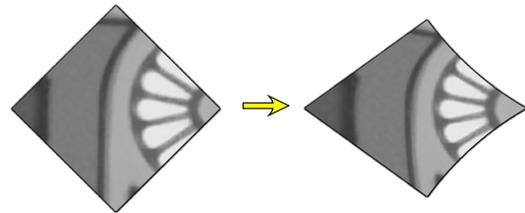
Aus dieser Ungleichung folgt, dass die Zähligkeiten der Drehzentren im Allgemeinen erhöht werden müssen. In manchen Fällen kann die Zähligkeit eines Drehzentrums auch reduziert werden, wenn die Zähligkeiten der anderen Drehzentren dementsprechend um so stärker erhöht werden. Jede Wahl ganzzahliger Zähligkeiten, die die Winkelungleichung erfüllt, stellt eine mögliche hyperbolische Entsprechung zu der euklidischen Symmetriegruppe dar.



Veränderung der Zähligkeiten

Eine Möglichkeit, um Symmetriegruppen sowohl in der euklidischen als auch in der hyperbolischen Geometrie zu benennen, ist das sogenannte Orbifold-Symbol.[1] In dieser Notation werden Drehzentren durch Zahlen und andere Symmetrieelemente durch andere Symbole dargestellt. Eine Hyperbolisierung einer euklidischen Gruppe ändert dabei einfach nur die Zahlen, unter den Randbedingungen der Winkelsumme, und lässt die anderen Teile des Orbifold-Symbols unverändert.

Nachdem die Kombinatorik der gewünschten hyperbolischen Symmetriegruppe festgelegt wurde, muss der Bildinhalt des Ornaments transformiert werden. Dazu wird eine einzelne Fundamentalzelle entsprechend so deformiert, dass sich die vorgegebenen neuen Innenwinkel ergeben. Wird die hyperbolische Fundamentalzelle durch hyperbolische Geraden (d.h. Geodäten) begrenzt, erscheinen diese im Modell als Kreisbögen.



Transformation einer Zelle

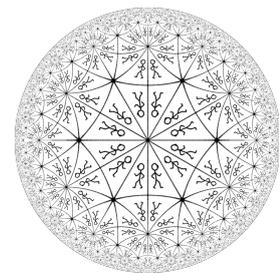
Das Innere der Fundamentalzelle sollte so abgebildet werden, dass der Gesamteindruck des Ornaments weitgehend erhalten bleibt. Ein wesentlicher Aspekt, der diesen Gesamteindruck entscheidend mitbestimmt, sind die im Ornament auftretenden Winkel. Daher ist eine konforme – also winkeltreue – Abbildung erstrebenswert. In den Ecken, bei denen sich die Zähligkeit eines Drehzentrums ändert, kann diese Bedingung natürlich nicht erfüllt werden. Im Inneren der Fundamentalzelle hingegen schon.

Ein weiterer Vorteil bei der Konformität als Kriterium für die Abbildung ist, dass das Winkelmaß im Poincaré-Modell genau dem euklidischen Winkelmaß entspricht. Im Unterschied zu Längen stellen Winkel also eine gemeinsame Grundlage beider Geometrien dar, und es macht an dieser Stelle keinen Unterschied, ob man beispielsweise von einem hyperbolischen Dreieck oder einem Kreisbogendreieck spricht.

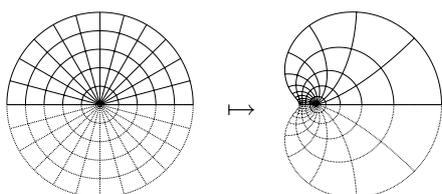
## 2.2 Hochsymmetrische Gruppen

Der einfachste Fall einer Hyperbolisierung behandelt die sogenannten Dreiecksspiegelungsgruppen, auch Kaleidoskopgruppen genannt. Die Fundamentalzelle einer solchen Gruppe besteht aus einem Dreieck, dessen Kanten mit Spiegelachsen zusammenfallen. Es gibt in der euklidischen Ebene drei derartige Gruppen, mit einer maximalen Zähligkeit von 3, 4 bzw. 6.

Bei diesen Dreiecksspiegelungsgruppen liegen die drei Ecken in den drei verschiedenen Transitivitätsklassen von Drehzentren des Ornaments. Ihre Innenwinkel  $\frac{\pi}{n}$  entsprechen jeweils genau der Zähligkeit  $n$  des entsprechenden Drehzentrums. Auch in der hyperbolischen Geometrie existieren derartige Dreiecksspiegelungsgruppen, mit entsprechend anderen Zähligkeiten. Es reicht also, ein euklidisches Dreieck auf ein vorgegebenes hyperbolisches Dreieck abbilden zu können, um damit das gesamte Ornament abzubilden.



Hyperbolische Dreiecksspiegelungsgruppe



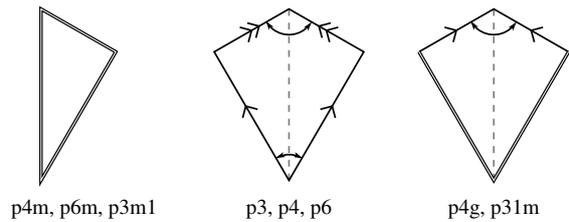
Schwarz Reflection Principle

Das sogenannte *Schwarz Reflection Principle* sagt aus, dass eine konforme Abbildung, die ein Stück der reellen Achse wieder auf ein Stück der reellen Achse abbildet, einfach auf der anderen Seite dieser Achse fortgesetzt werden kann:

$$z \mapsto f(z) \Rightarrow z \mapsto \overline{f(\bar{z})} \tag{6}$$

Die Abbildung auf der anderen Seite der reellen Achse ist also quasi ein Spiegelbild der ursprünglichen Abbildung. Dieses Prinzip kann von Abschnitten der reellen Achse auf beliebige Strecken und – mit Möbius-Transformationen – sogar auf Kreisbögen verallgemeinert werden.

Damit ist es möglich, auch Symmetriegruppen zu behandeln, deren Fundamentalzellen aus zwei Dreiecken bestehen, die zueinander achsensymmetrisch sind. Auch in diesem Fall genügt es, jeweils ein Dreieck – diesmal eine halbe Fundamentalzelle – auf ein hyperbolisches Dreieck abzubilden. Die Bedingung, dass sich die Fundamentalzelle symmetrisch in zwei Dreiecke zerlegen lässt, ist von allen Symmetriegruppen erfüllt, die Drehungen mit einer Zähligkeit von mindestens 3 aufweisen, wie rechts dargestellt. Dieser „hochsymmetrische Fall“ ist damit verhältnismäßig einfach.

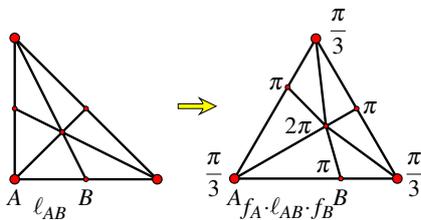


Symmetrische Fundamentalzellen

Grundsätzlich ist es immer möglich, ein beliebiges euklidisches Dreieck auf ein beliebiges Kreisbogendreieck konform abzubilden. Dies folgt aus dem Riemannschen Abbildungssatz, welche besagt, dass sich einfach zusammenhängende Gebiete (wie diese Dreiecke) konform auf das Innere des Einheitskreises abbilden lassen. Durch Umkehrung der entsprechenden Abbildung kann dann von der Kreisscheibe auf das Zieldreieck abgebildet werden. Diese Abbildung von der Kreisscheibe auf ein (Kreisbogen-)Dreieck lässt sich als Schwarz-Christoffel-Abbildung sogar geschlossen aufschreiben.

Die Berechnung derartiger Schwarz-Christoffel-Abbildungen ist jedoch zeitaufwändig und numerisch recht instabil. Noch dazu bräuchte man, um ein Dreieck auf die Kreisscheibe abbilden zu können, eigentlich eine inverse Schwarz-Christoffel-Abbildung, die noch schwerer zu berechnen ist. Alternativ könnte man von der Kreisscheibe ausgehend einander entsprechende Positionen in beiden Dreiecken bestimmen und zwischen diesen anschließend interpolieren. Eine geeignete Menge von Punkten auf der Kreisscheibe ist jedoch nicht ganz einfach zu finden, da die Schwarz-Christoffel-Abbildung stark flächenverzerrend ist.

Aufgrund dieser Probleme ist die Berechnung einer „echten“ konformen Abbildung nicht praktikabel. Besser zu berechnen ist eine diskret konforme Abbildung. Dabei wird ein Ausgangs-Dreiecksgitter vorgegeben sowie Ziel-Winkelsummen für alle Knoten des Gitters. Insbesondere kann man im Inneren des Gitters  $2\pi$  als Winkelsumme vorgegeben, um ein flaches Gitter zu erhalten, und am Rand  $\pi$ , um gerade Kanten zu erhalten. Die Eckwinkel lassen sich entsprechend der gewünschten Zähligkeiten vorgeben.

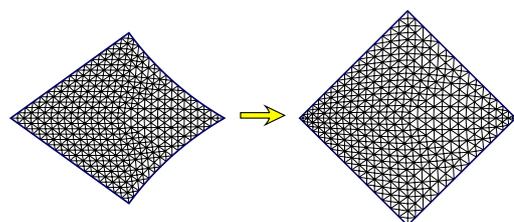


Diskret konforme Abbildung

Durch eine konvexe Optimierung wird anschließend für jeden Knoten ein Skalierungsfaktor berechnet. Alle Längen werden mit den Skalierungsfaktoren ihrer beiden Endpunkte multipliziert.[5] Das so erhaltene Gitter hat die gleiche Kombinatorik wie das Ausgangsgitter, aber die vorgegebenen Winkelsummen. Bei einer hinreichend feinen Triangulierung bietet dieses Verfahren eine gute Approximation einer kontinuierlichen konformen Abbildung.

Das Innere der Dreiecke wird durch projektive Interpolation abgebildet. Diese wird für jedes Dreieck so gewählt, dass sie nicht nur einander entsprechende Dreiecke aufeinander abbildet, sondern auch deren Umkreise. Die sich so ergebenden Abbildungen passen an den Dreieckskanten zusammen, wenn die Dreiecke durch diesen Prozess entstanden und somit zueinander diskret konform äquivalent sind.[5]

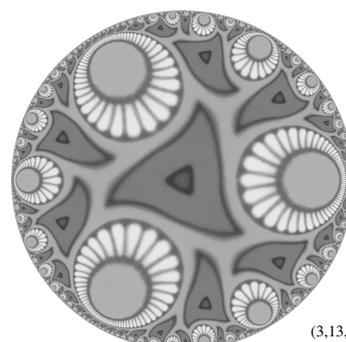
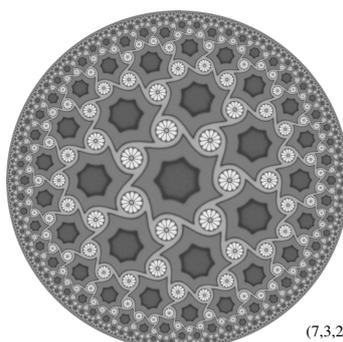
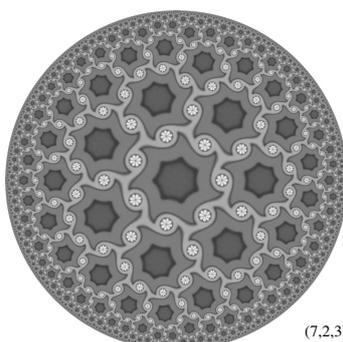
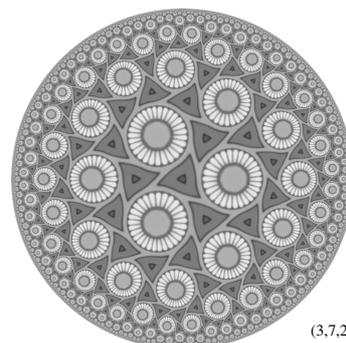
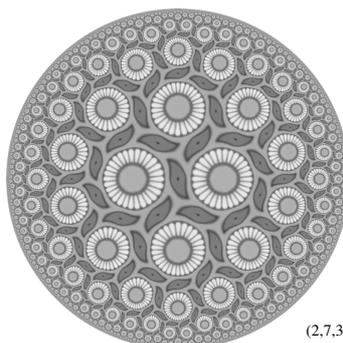
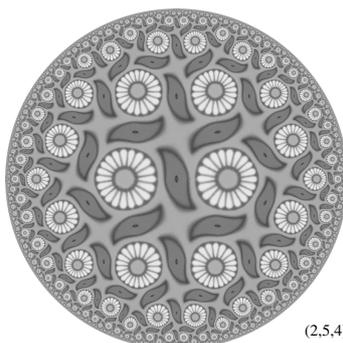
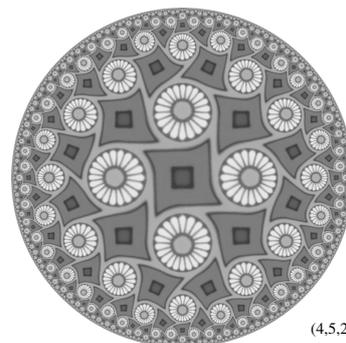
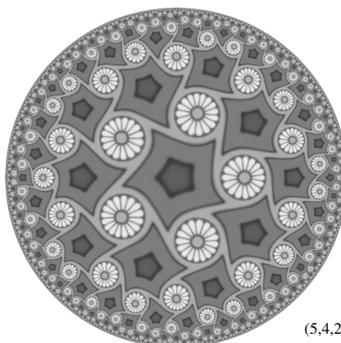
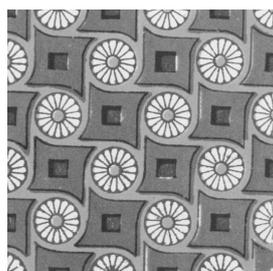
Da es einfach ist, Winkelsummen von  $\pi$  vorzugeben, um einen geraden Rand zu erhalten, aber ungleich schwieriger ist, durch obigen Prozess einen exakten Kreisbogen zu erhalten, wird die Transformation von der hyperbolischen Fundamentalzelle hin zur eukli-



Transformation des Dreiecksgitters

schen Fundamentalzelle berechnet. Dazu wird die hyperbolische Zelle hinreichend fein trianguliert, dieses Gitter dann diskret konform abgebildet, und das Innere der Dreiecke anschließend wie oben beschrieben projektiv interpoliert. Das Ergebnis ist eine bijektive Abbildung zwischen euklidischer und hyperbolischer Fundamentalzelle, mit deren Hilfe Farbwerte pixelweise kopiert werden können.

Abschließend kann die Bildinformation in der berechneten hyperbolischen Fundamentalzelle verwendet werden, um die gesamte hyperbolische Ebene durch *Reverse Pixel Lookup* zu füllen. Das Verfahren ist ganz analog zu dem bei direkt in hyperbolischer Geometrie gezeichneten Ornamenten.



Beispiele für verschiedene Hyperbolisierungen eines Ornaments

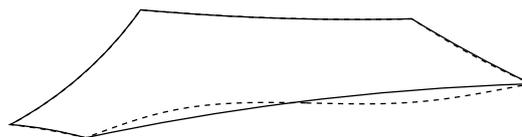
### 2.3 Niedersymmetrischer Fall

Das eben beschriebene Verfahren geht davon aus, dass die Form der hyperbolischen Fundamentalzelle bekannt ist, so dass eine Triangulierung derselben angefertigt werden kann. Für die hochsymmetrischen

Gruppen, die mindestens eine dreizählige Drehung enthalten, ist dies der Fall. Bei diesen wird die Form der Fundamentalzelle allein durch die Kombinatorik bestimmt, und lässt sich direkt aus der zugrundeliegenden Dreiecksspiegelungsgruppe ableiten.

Bei „niedersymmetrischen Gruppen“, die im Euklidischen nur zweizählige Drehzentren enthalten, ist die Situation komplizierter. Die Form der Fundamentalzellen dieser Gruppen ist im Hyperbolischen nicht allein durch die Zähligkeiten festgelegt, sondern wird erst über zusätzliche reelle Freiheitsgrade vollständig definiert. Diese Freiheitsgrade müssen auf eine ganz bestimmte Weise gewählt werden, um eine diskret konforme Abbildung zu erlauben. Daher ist die Form der hyperbolischen Fundamentalzelle zunächst unbekannt.

Die Situation wird weiter verkompliziert durch die Tatsache, dass geradlinige Kanten der Fundamentalzelle bei einer konformen Abbildung im Allgemeinen nicht auf hyperbolische Geradenstücke abgebildet werden. Wo also im hochsymmetrischen Fall die Fundamentalzellen sowohl in der euklidischen als auch in der hyperbolischen Geometrie geradlinig begrenzt gewählt werden konnten, ist dies im niedersymmetrischen Fall im Allgemeinen nur in einer von zwei Welten möglich. Um mit dem *Reverse Pixel Lookup* effizient arbeiten zu können, ist eine hyperbolisch geradlinige Begrenzung erforderlich.



Hyperbolische geradlinige Begrenzung (gestrichelt) und Bild einer euklidischen geradlinigen Begrenzung (durchgezogen)

Das Konzept der diskret konformen Abbildungen ist jedoch – mit einigen Modifikationen – weiterhin anwendbar. Als Ausgangspunkt dient jetzt nicht mehr die hyperbolische Fundamentalzelle, sondern die euklidische Fundamentalzelle. Bei dieser werden einander entsprechende Kanten identifiziert („zusammengeklebt“), und somit eine sogenannte *Orbifold* gebildet. Auch wenn diese nicht immer in die Ebene eingebettet werden kann, lässt sich ihre Triangulierung dennoch gut genug beschreiben, da es genügt, die Kombinatorik sowie die Kantenlängen der Triangulierung zu kennen, und die Knotenkoordinaten nicht erforderlich sind. Durch die Identifizierung einander entsprechender Kanten entfällt das Problem, Begrenzungslinien der euklidischen Fundamentalzelle festlegen zu müssen. Diese sonst willkürlich gewählten Linien verlieren ihre besondere Rolle.

Die triangulierte euklidische Orbifold wird anschließend mit einer diskret konformen Abbildung transformiert. Diese Transformation wird bereits in hyperbolischer Geometrie durchgeführt, so dass das Ergebnis eine hyperbolische Triangulierung ist.[6] Anschließend wird diese hyperbolische Orbifold „abgerollt“, um Dreiecke in der hyperbolischen Ebene zu erhalten. Es müssen ausreichend viele Dreiecke abgerollt werden, um eine hyperbolische Fundamentalzelle vollständig zu überdecken. Dazu können einige Dreiecke im Randbereich mehrfach abgerollt werden.

Da die Berechnungen in hyperbolischer Geometrie deutlich aufwändiger sind als in euklidischer Geometrie, wird für den hochsymmetrischen Fall das einfachere Verfahren beibehalten.

Grundlage auch der niedersymmetrischen Hyperbolisierung ist weiterhin die Veränderung der Zähligkeit existierender Drehzentren. Mit diesem Ansatz lassen sich euklidische Symmetriegruppen, die gar keine Drehsymmetrien enthalten, nicht hyperbolisieren. Es wäre denkbar, einen beliebigen Punkt in der Fundamentalzelle eines solchen Ornaments als „einzähliges Drehzentrum“ auszuzeichnen und zu einem mehrzähligen Drehzentrum zu transformieren. In diesem Zusammenhang ist jedoch noch eine Reihe von Fragen zu klären. So erscheint es ratsam, derartige künstliche Drehzentren eher im Hintergrund des Ornaments einzuführen, wo dessen Charakter weniger stark verändert wird. Es stellt sich auch die Frage, ob andere Symmetriegruppen, die bereits Drehzentren enthalten, durch die Auszeichnung willkürlich gewählter einzähliger Drehzentren auf noch weitere Arten hyperbolisiert werden könnten. All diese Fragen sollen in der weiteren Arbeit noch geklärt werden.

## Literatur

- [1] Conway, J.; Huson, D.: The Orbifold Notation for Two-Dimensional Groups. *Structural Chemistry* 13 (2002), Nr. 3/4, 247–257
- [2] von Gagern, M.: Computergestütztes Zeichnen in den Symmetriegruppen der euklidischen Ebene. Diplomarbeit, TU München, 2007
- [3] von Gagern, M.; Richter-Gebert, J.: Hyperbolization of Euclidean Ornaments. *The Electronic Journal of Combinatorics* 16 (2009), Nr. 2, R12
- [4] Liu, Y.; Collins, R. T.; Tsin, Y.: A computational model for periodic patterns. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 26 (2004), Nr. 3, 354–371
- [5] Springborn, B.; Schröder, P.; Pinkall, U.: Conformal equivalence of triangle meshes. *ACM Transactions on Graphics* 27 (2008), Nr. 3, Artikel 77
- [6] Springborn, B.: persönliche Notiz

## Anschrift des Autors:

Martin von Gagern  
Zentrum Mathematik, M10  
Lehrstuhl für Geometrie und Visualisierung  
Technische Universität München  
Boltzmannstraße 3  
85747 Garching

E-Mail: [gagern@in.tum.de](mailto:gagern@in.tum.de)  
URL: <http://www-m10.ma.tum.de/~MartinGagern>  
URL: <http://martin.von-gagern.net/>