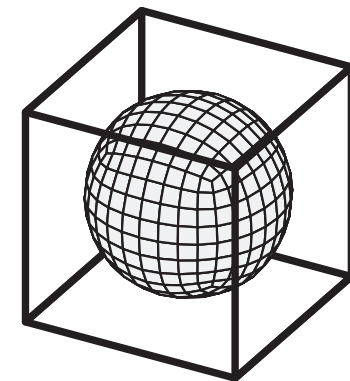
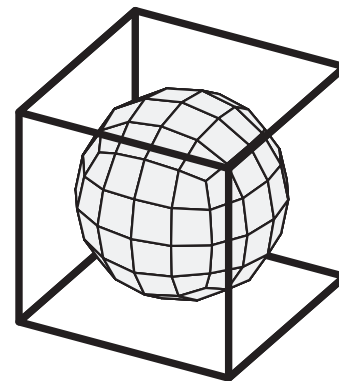
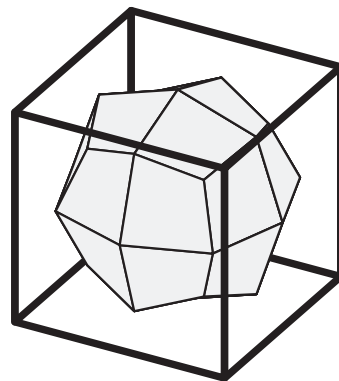
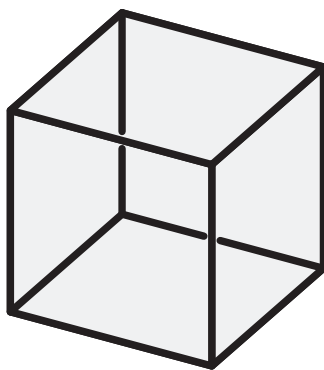


# Unterteilungskurven und -flächen

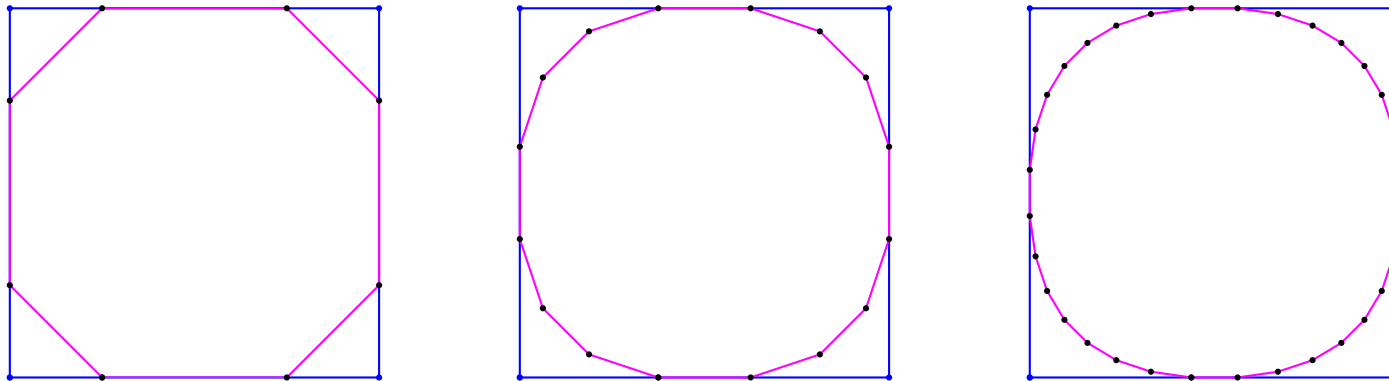
Martin Peternell

TU Wien



## Unterteilungskurven – Allgemein

- Das wiederholte Unterteilen eines Polygons erzeugt in der Grenze eine glatte Kurve.
- Das Unterteilen entspricht dem **Abschneiden von Ecken**.



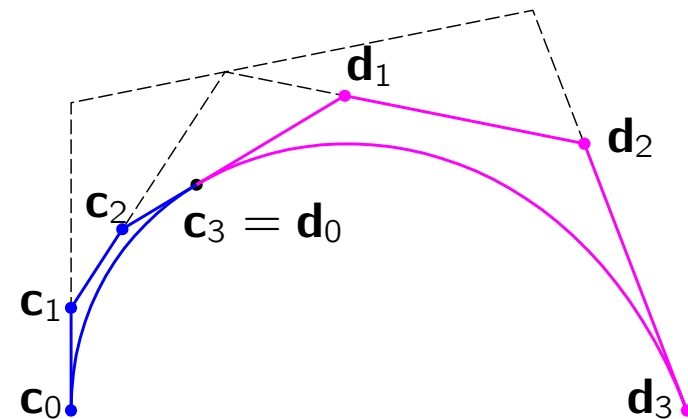
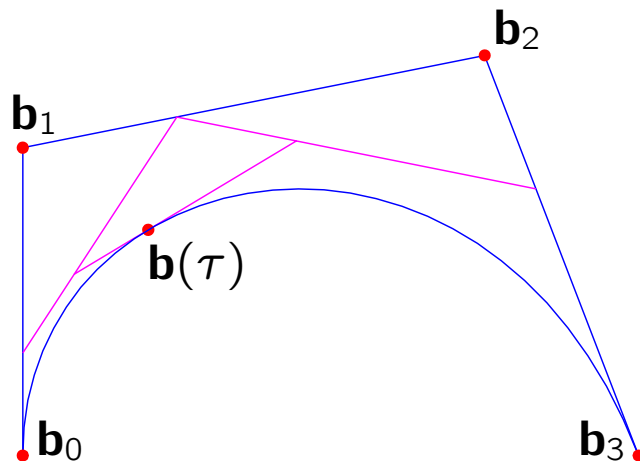
- Stationäres Unterteilungsschema: in jedem Iterationsschritt wird dieselbe Unterteilungsregel angewendet.
- CAD, geometrischen Modellierung, Computergraphik, Computeranimationen in der Filmindustrie (Pixar ... Geri's Game).

## Unterteilung von Bézier-Kurven

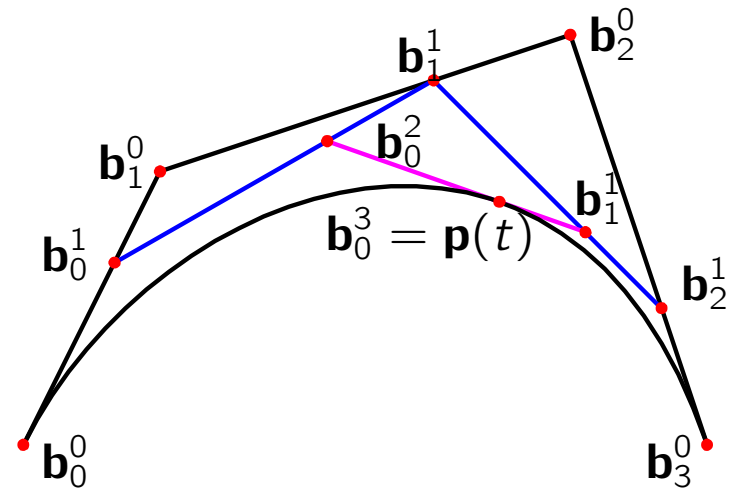
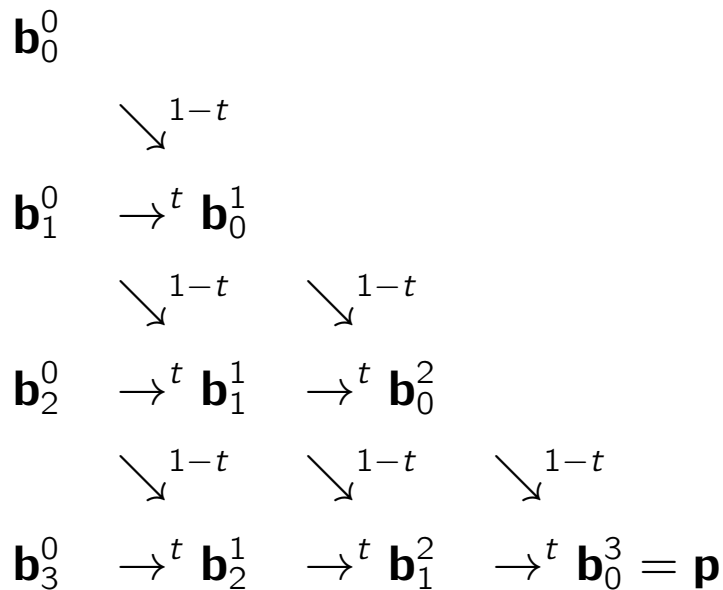
- Bézier-Kurve  $\mathbf{b}(t) : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$
- Der Algorithmus von de Casteljau für  $0 < \tau < 1$  liefert die Kontrollpunkte  $\mathbf{c}_i = \mathbf{b}_0^i$  und  $\mathbf{d}_i = \mathbf{b}_i^{n-i}$ , für  $i = 0, \dots, n$  der Teilkurven

$$\mathbf{c}(t) : [0, \tau] \mapsto \mathbb{R}^n, \text{ und } \mathbf{d}(t) : [\tau, 1] \mapsto \mathbb{R}^n.$$

- Es gilt:  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{b}(0)$ ,  $\mathbf{c}(1) = \mathbf{b}(\tau)$ ,  $\mathbf{d}(0) = \mathbf{b}(\tau)$ ,  $\mathbf{d}(1) = \mathbf{b}(1)$ ,

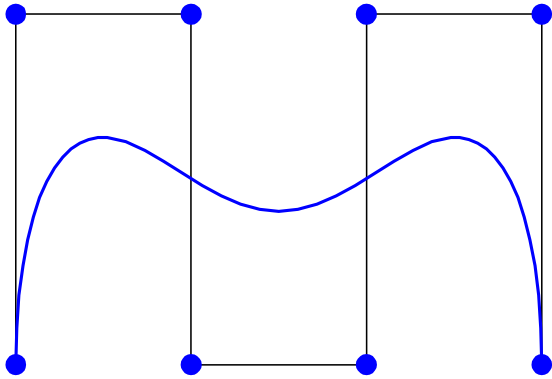


## Algorithmus von de Casteljau

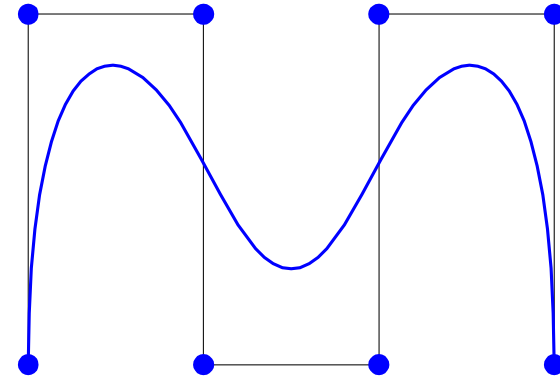


$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i, \text{ mit } B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i.$$

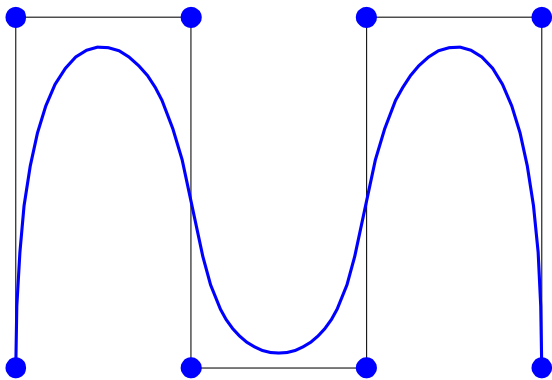
# Spline-Kurven



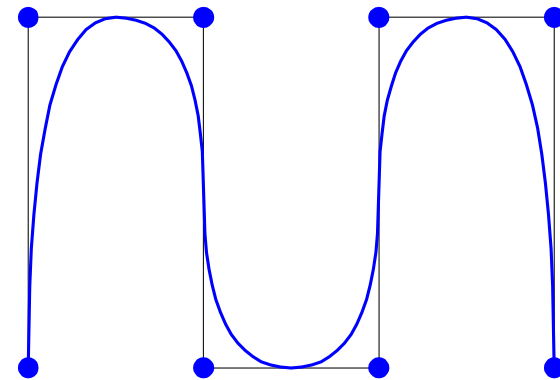
Grad 7 (Bézier)



Grad 5



Grad 3



Grad 2

B-Spline-Kurven unterschiedlicher Grade zum selben Kontrollpolygon.

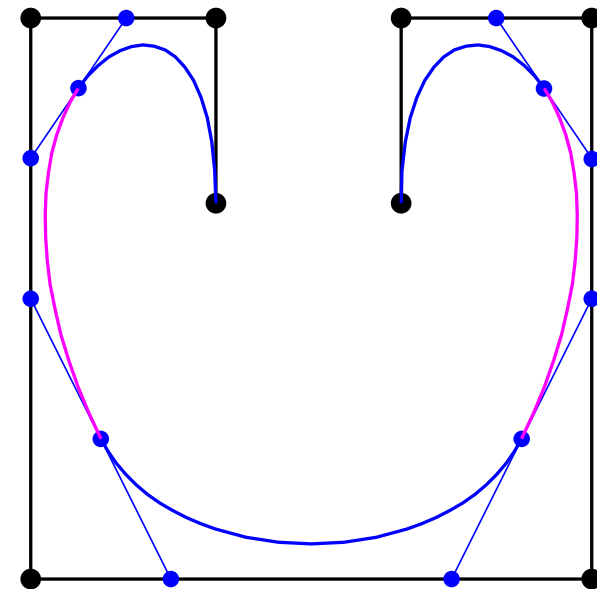
## B-Spline-Kurven

- B-Spline-Kurven wurden ins Computer Aided Design von J. Ferguson (1964) bei Boeing eingeführt.
- Eine B-Spline-Kurve vom Grad  $n$  besteht aus Bezier-Kurven vom Grad  $n$ , welche mit optimaler Glattheit zusammengesetzt sind.

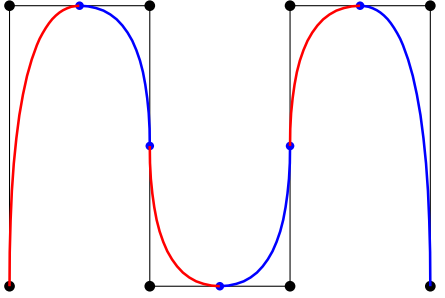
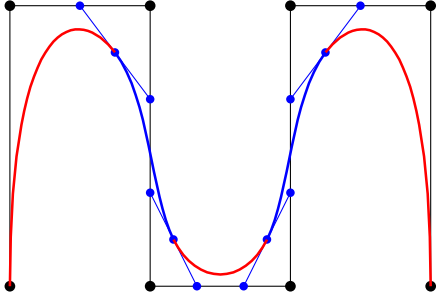
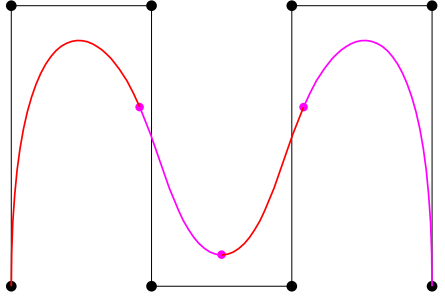
Angabe einer B-Spline-Kurve:

1. **Kontrollpunkte**
2. **Grad**
3. **Knoten**

Die Knoten unterteilen das zur Parametrisierung verwendete Parameterintervall. Sie sind in CAD-Systemen für den Benutzer meist nicht manipulierbar sondern automatisch festgelegt.



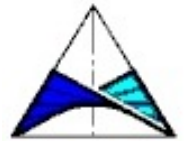
## B-Spline-Kurven – Béziersegmente

B-Spline Grad 2	B-Spline Grad 3	B-Spline Grad 4
		
parametrisiert über den Intervallen		
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]	[0, 1, 2, 3, 4, 5]	[0, 1, 2, 3, 4]

Im Regelfall (einfache Knoten) gilt:

Anzahl der Kontrollpunkte = Grad + Anzahl der Segmente

Die Parameterdarstellung der B-Splines vom Grad  $k$  sind stückweise Polynome, jeweils über den angegebenen Intervallen.



## Polarform eines Polynoms

Jedem Polynom  $f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  ist seine Polarform

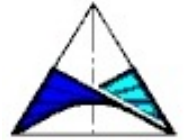
$$F(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n a_i S_i(t_1, \dots, t_n)$$

zugeordnet.  $S_i$  heißen elementarsymmetrische Funktionen.

Beispiel:  $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ ,

$S_0 = 1$ ,  $S_1(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ ,  $S_2(t_1, t_2) = t_1 t_2$

$$F(t_1, t_2) = a_0 \mathbf{1} + a_1 \frac{1}{2}(t_1 + t_2) + a_2 t_1 t_2.$$



## Polarform eines Polynoms (2)

Beispiel:  $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ ,

$$S_0 = 1, S_1(t_1, t_2) = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3),$$

$$S_2(t_1, t_2) = \frac{1}{3}(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3), S_3(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3$$

$$F(t_1, t_2, t_3) = a_0 \mathbf{1} + a_1 \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + a_2 \frac{1}{3}(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + a_3 t_1 t_2 t_3.$$

## Polarform eines Polynoms (3)

Die Polarform läßt sich auf jede Koordinate einer polynomialen Kurve anwenden.

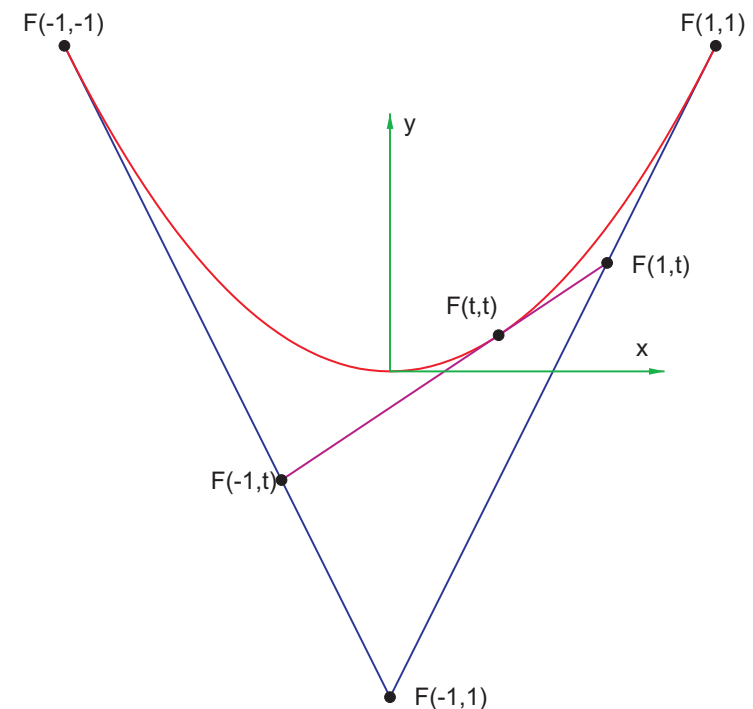
Beispiel:  $f(t) = (t, t^2)$ ,

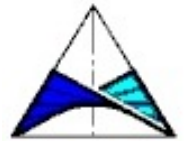
$$F(t_1, t_2) = \left( \frac{1}{2}(t_1 + t_2), t_1 t_2 \right).$$

$$F(-1, -1) = (-1, 1),$$

$$F(-1, 1) = (0, -1),$$

$$F(1, 1) = (1, 1).$$





## Eigenschaften der Polarform eines Polynoms

Sei  $f(t)$  ein Polynom vom Grad  $n$  und  $F(t_1, \dots, t_n)$  die entsprechende Polarform.

- $F(\dots)$  ist multiaffin, d.h.

$$F(\dots, \alpha x + \beta y, \dots) = \alpha F(\dots, x, \dots) + \beta F(\dots, y, \dots).$$

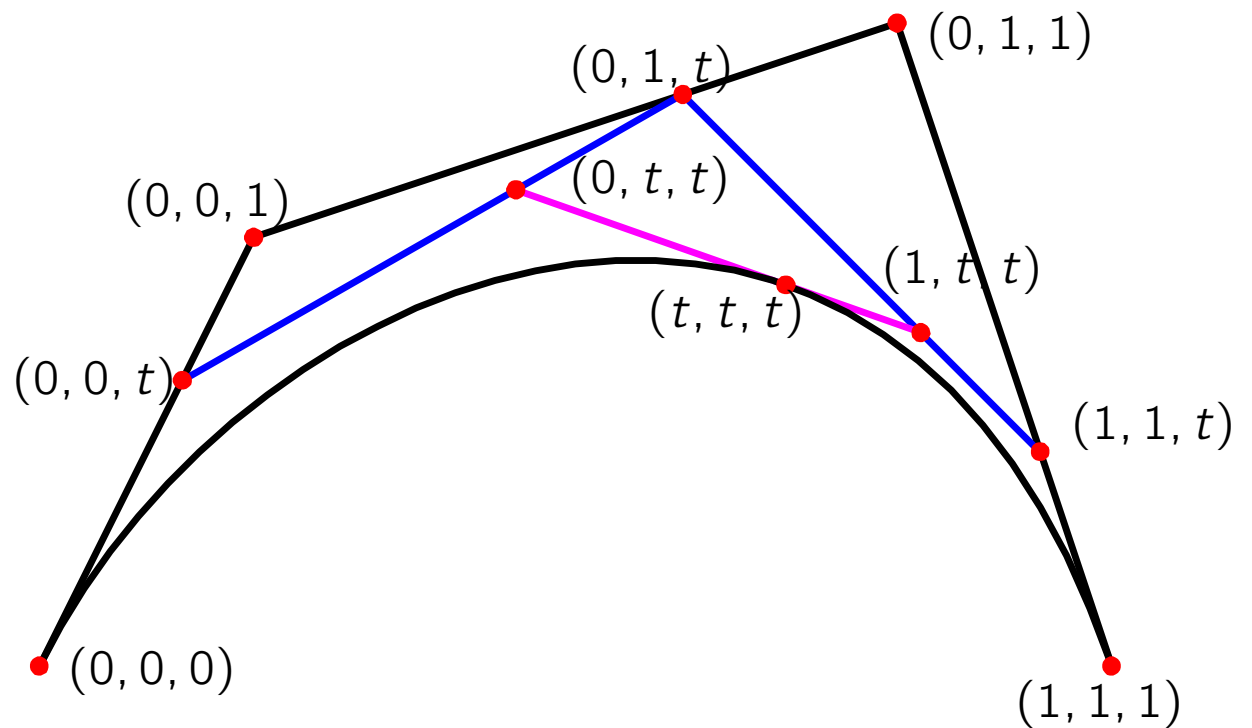
- $F(\dots)$  ist symmetrisch, d.h.

$$F(\dots, x, \dots, y, \dots) = F(\dots, y, \dots, x, \dots).$$

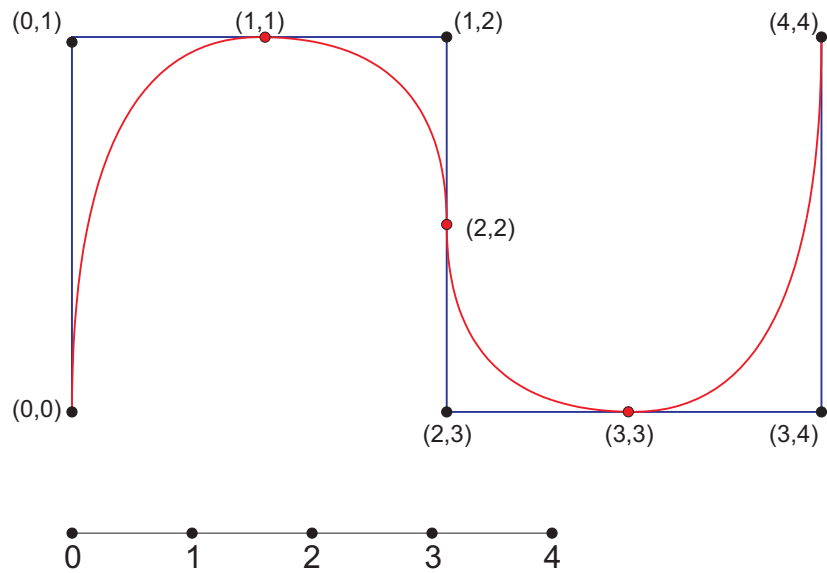
- $F(t, \dots, t) = f(t)$ .

## Polarform von Bézier-Kurven

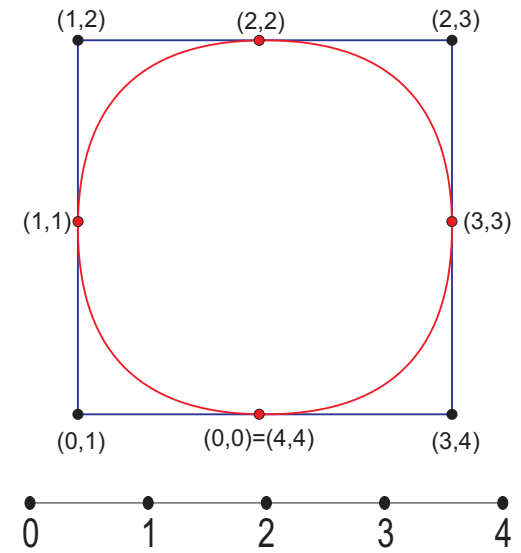
Die Auswertung der Polarform für die Werte 0, 1 liefert die Kontrollpunkte der Bézier-Kurve, dargestellt über dem Intervall  $[0, 1]$ .



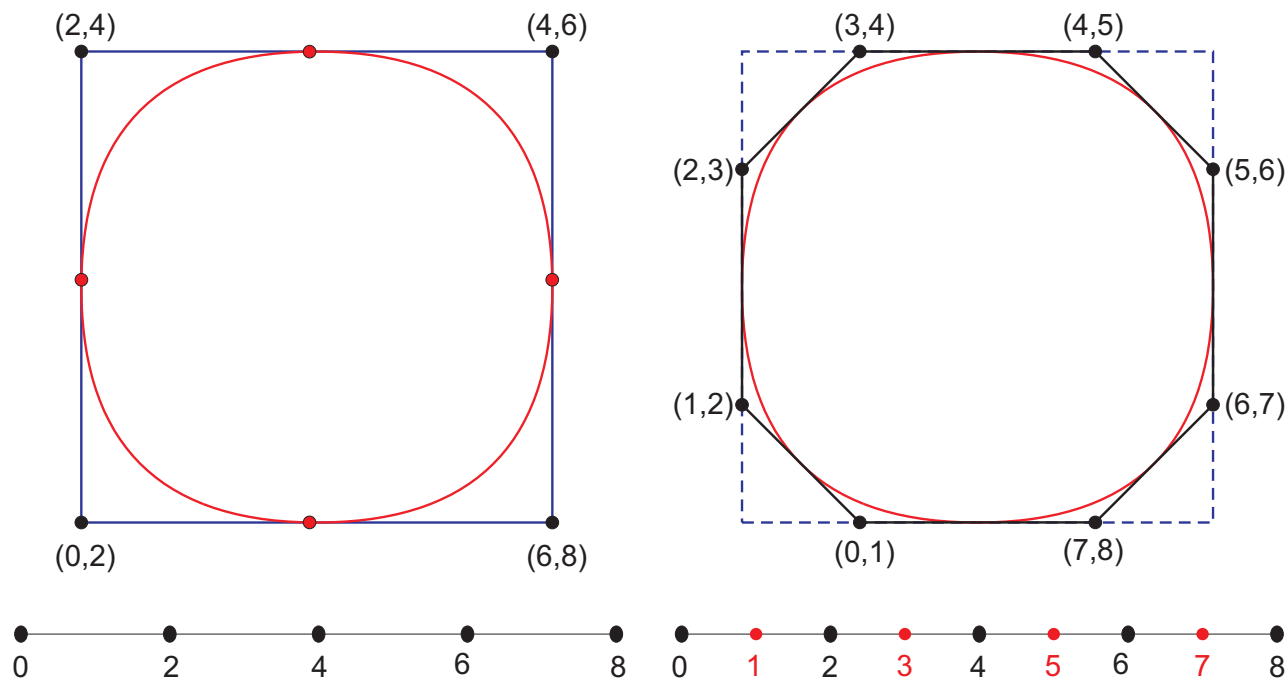
## Polarform von B-spline Kurven (Grad 2)

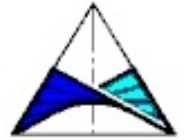


uniformer Knotenvektor



# B-spline Kurve über verfeinertem Knotenvektor



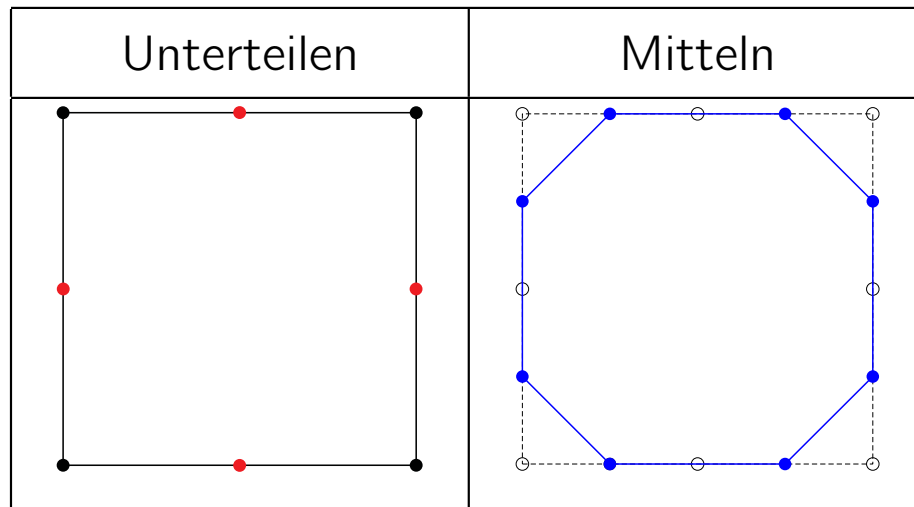


## Unterteilungsregeln

Ein Unterteilungsschritt besteht aus

- Punkte einfügen
- $k$  mal Mitteln ( $\rightarrow$  B-splines vom Grad  $k - 1$ )

# Quadratische B-spline Kurven

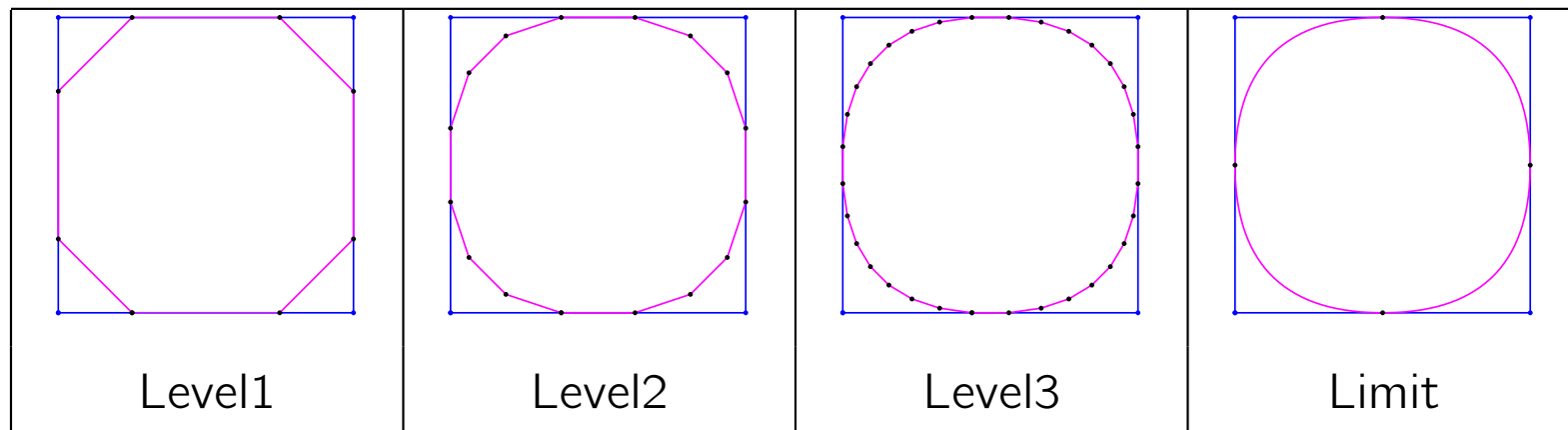


Berechnung neuer Punkte:

$$\mathbf{p}_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4}\mathbf{p}_i^k + \frac{1}{4}\mathbf{p}_{i+1}^k$$

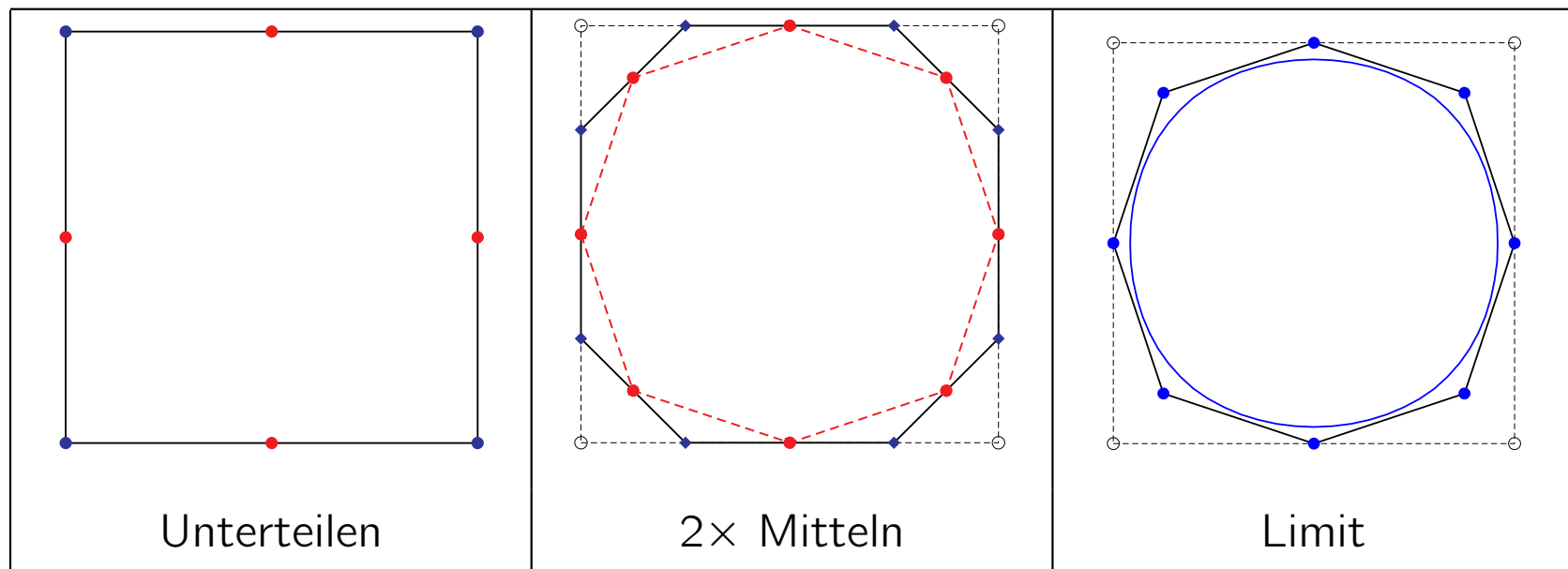
$$\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{4}\mathbf{p}_i^k + \frac{3}{4}\mathbf{p}_{i+1}^k$$

Algorithmus von Chaikin.



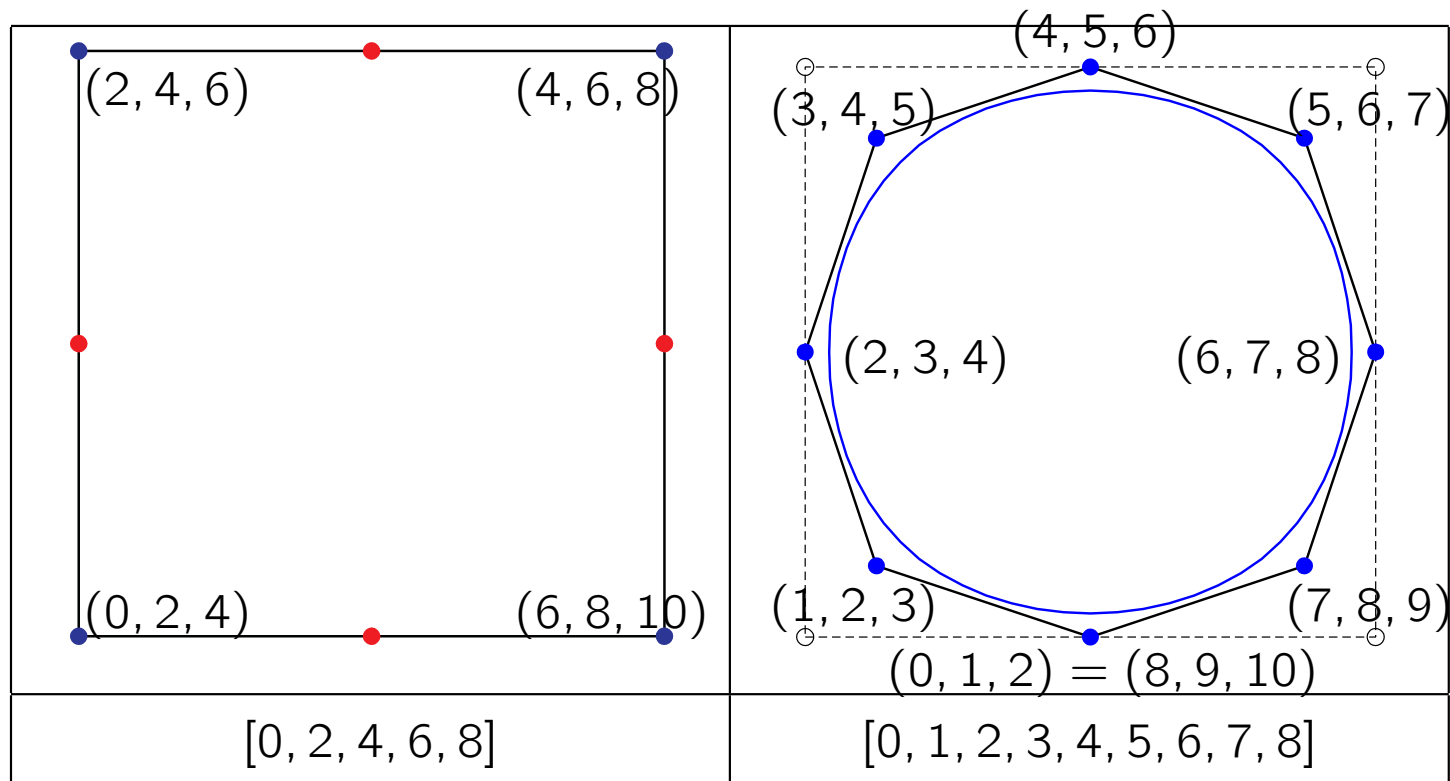
## Kubische B-Spline Kurven durch Unterteilen

Algorithmus von Lane-Riesenfeld:  $1 \times$  Unterteilen und  $k - 1 \times$  Mitteln



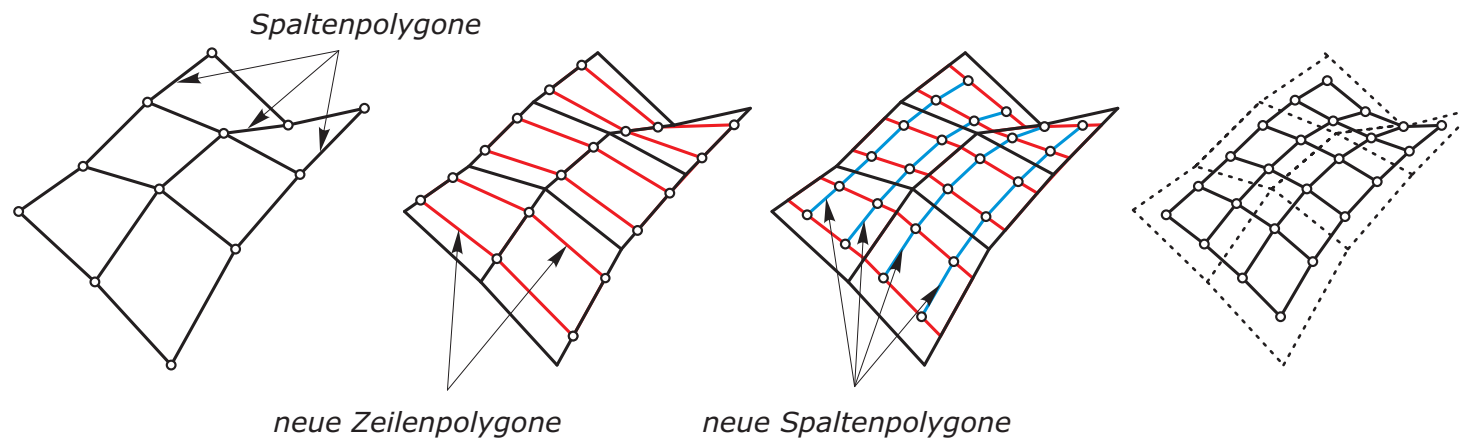
Die Grenzkurve ist eine kubische B-Spline-Kurve.

# Kubische B-Spline-Kurve: verfeinerter Knotenvektor



## Verallgemeinerung von Chaikin: Doo-Sabin

Anwendung des Algorithmus von Chaikin auf die Zeilen und Spalten liefert einen Unterteilungsschritt von Doo-Sabin:

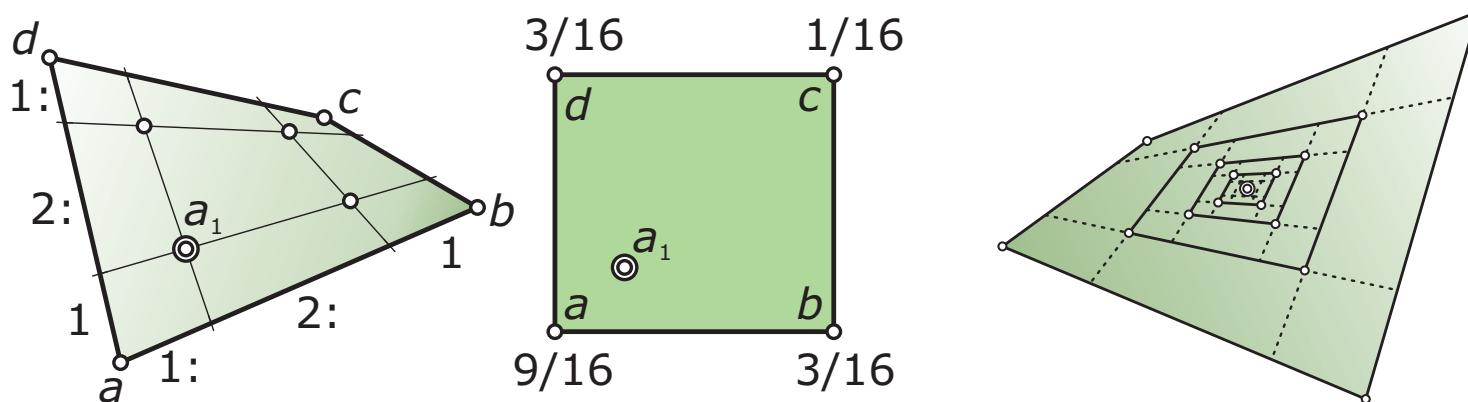


Die Grenzfläche ist B-Spline-Fläche vom Grad (2,2).

## Unterteilungsregeln für Doo-Sabin

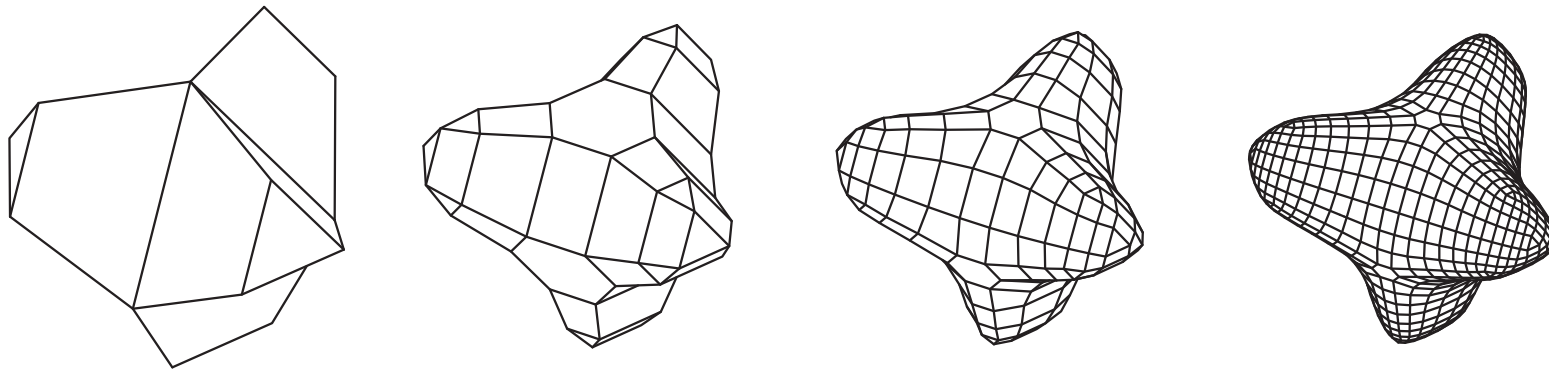
Berechnung der neuen Punkte:

$$a_1 = \frac{9}{16}a + \frac{3}{16}b + \frac{3}{16}d + \frac{1}{16}c$$



Die Grenzfläche enthält die Schwerpunkte der Vierecksmaschen.

## Beispiel für Unterteilung nach Doo-Sabin

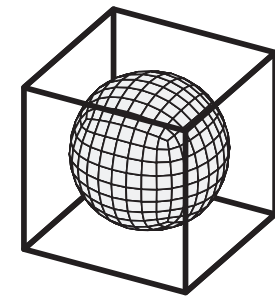
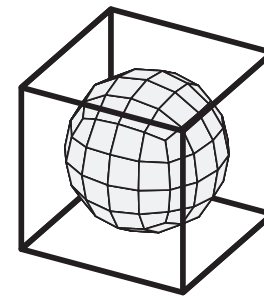
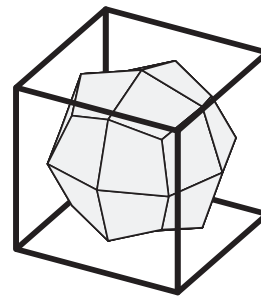


Eigene Unterteilungsregeln für nicht-viereckige Netzmaschen, → irreguläre Punkte der Grenzfläche.

## Verallgemeinerung von Lane-Riesenfeld: Catmull-Clark

Anwendung des Algorithmus von Lane-Reisenfeld auf die Zeilen und Spalten liefert einen Unterteilungsschritt von Catmull-Clark. Dies entspricht

- neuer Punkt pro Masche,
- neuer Punkt pro Kante,
- neuer Punkt pro Ecke.



Die Grenzfläche ist B-Spline-Fläche vom Grad (3,3).

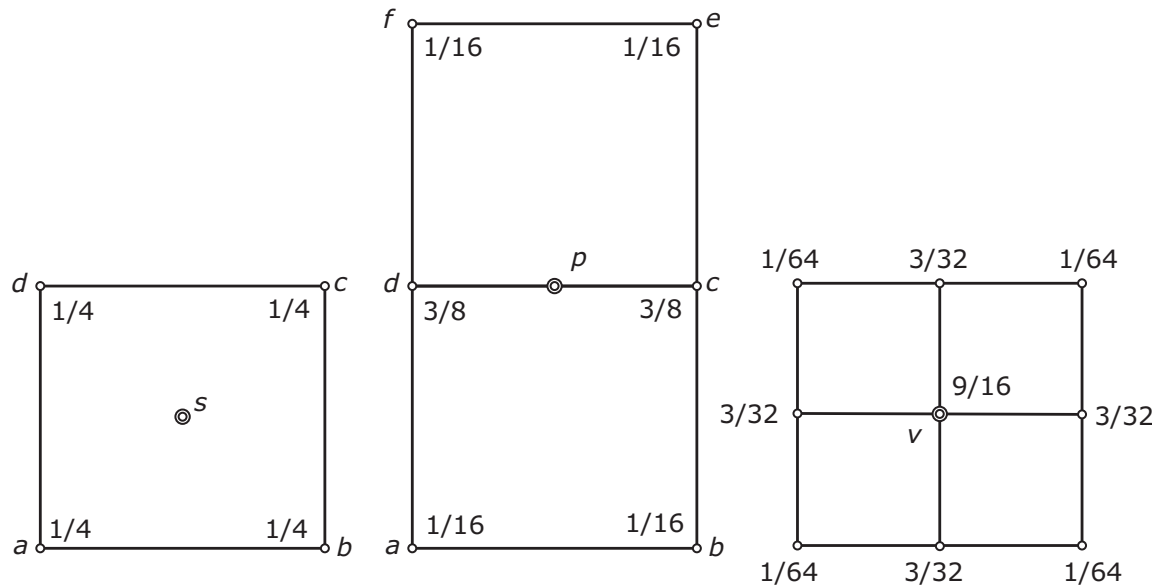
# Unterteilungsregeln für Catmull-Clark

Berechnung neuer Punkte:

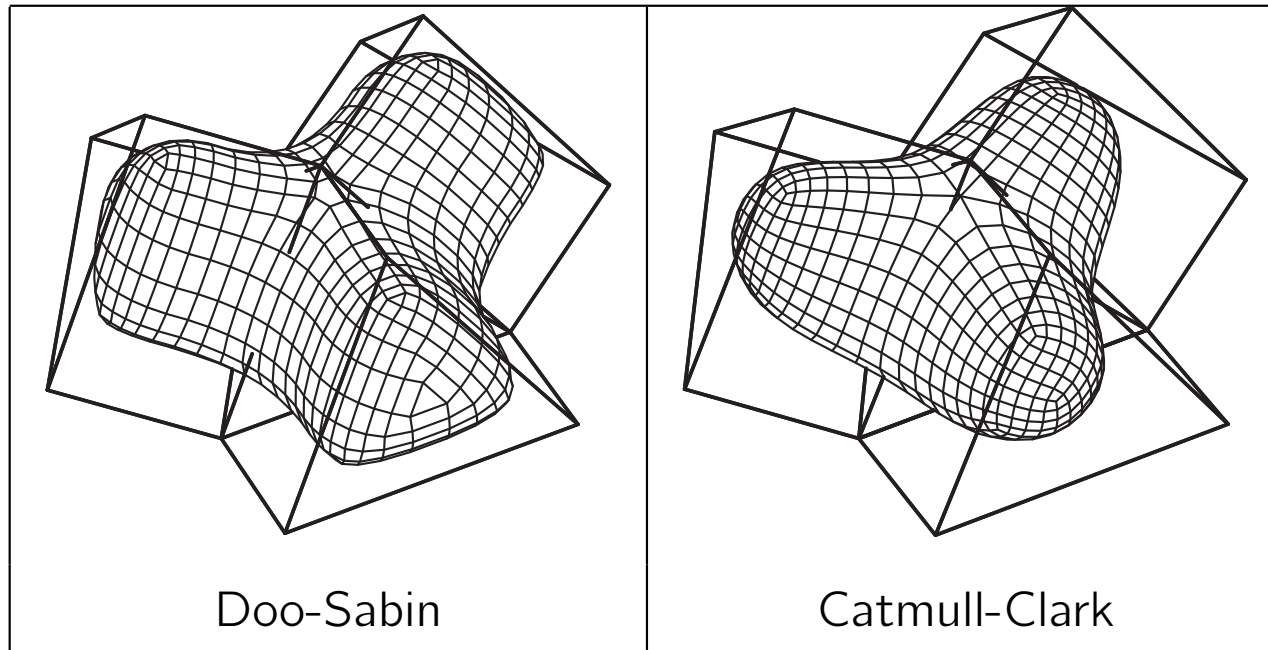
$$s = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}c,$$

$$p = \frac{1}{16}(a + b + e + f) + \frac{3}{8}(c + d),$$

$$v = \text{analog} .$$



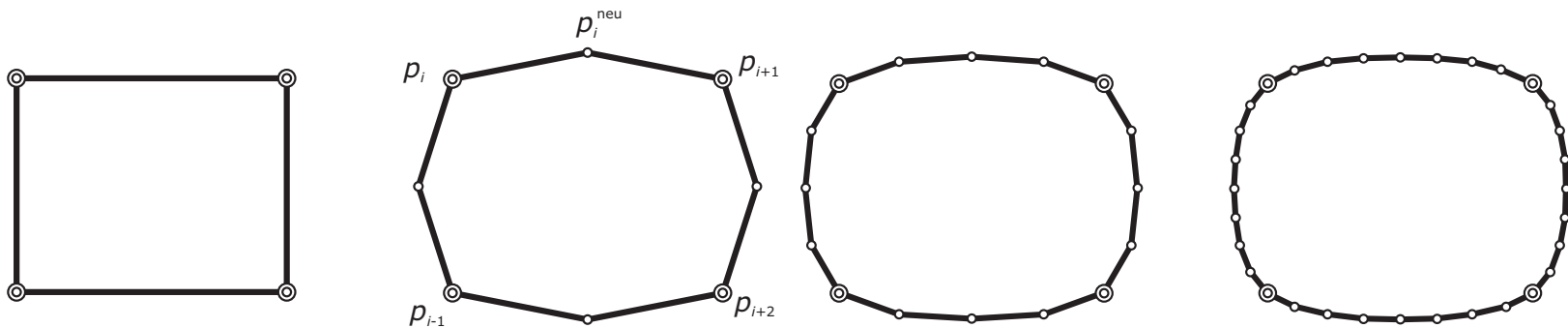
## Doo-Sabin versus Catmull-Clark



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

## Das 4-Punkt-Schema

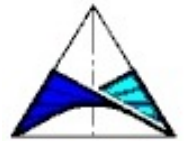
- Datenpunkte  $p_i$
- Wir konstruieren eine Folge von Polygonen, welche die Punkte  $p_i$  enthalten und gegen eine glatte Kurve konvergieren.



- Für je vier aufeinanderfolgende Punkte  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$  wird ein *neuer Punkt* konstruiert,

$$p_i^{neu} = -\frac{1}{16}p_{i-1} + \frac{9}{16}p_i + \frac{9}{16}p_{i+1} - \frac{1}{16}p_{i+2}.$$

$p_i^{neu}$  ist der Punkt zu  $t = \frac{1}{2}$  der kubischen Kurve durch  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$  und den Parameterwerten  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .



## Das 4-Punkt-Schema (2)

$p_i^{neu}$  ist der Punkt zu  $t = \frac{1}{2}$  der kubischen Kurve durch  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, p_{i+1}$  und den Parameterwerten  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .

- Das 4-Punkt-Schema kann verallgemeinert werden zu

$$p_i^{neu} = -wp_{i-1} + \left(\frac{1}{2} + w\right)p_i + \left(\frac{1}{2} + w\right)p_{i+1} - wp_{i+1}.$$

- 1986: Kurve ist glatt ( $C^1$ ) für  $w = 1/16 = 0.0625$ .
- 1987: Kurve ist glatt ( $C^1$ ) für  $0 < w < 1/8 = 0.125$ .
- 1991: Kurve ist glatt ( $C^1$ ) für  $w < (\sqrt{5} - 1)/8 \approx 0.154$ .
- ...
- 2009: Kurve ist glatt ( $C^1$ ) für  $w < w^*$ , mit  $w^* \approx 0.19273$  als Nullstelle des Polynoms  $32w^3 + 4w - 1$ .