Ich kann freilich nicht sagen, ob es besser werden wird, wenn es anders wird; aber so viel kann ich sagen, es muss anders werden, wenn es gut werden soll.
Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799)

Ein Weg zur Raumgeometrie: *Interaktives Analogisieren ebener Geometrie*

Prof. Dr. Heinz Schumann

PH Weingarten

Fak. II, Mathematik

schumann@ph-weingarten.de

29. Fortbildungstagung für Geometrie
3. bis 6. November 2008
Bundesinstitut für Erwachsenenbildung
St. Wolfgang

Inhalt

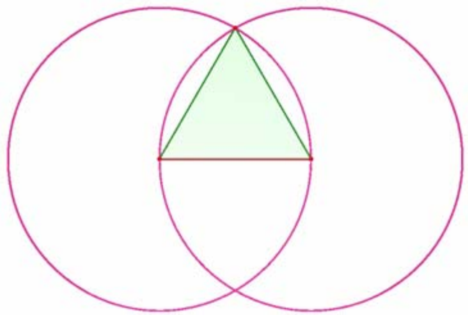
1. Einführung

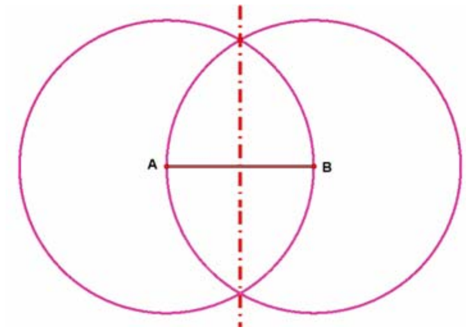
2. Interaktives Analogisieren
   ebener Elementargeometrie mit Cabri 3D

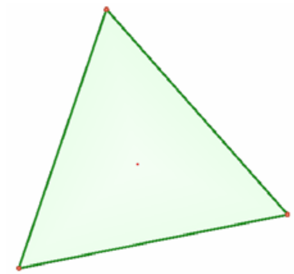
3. Schlussbemerkungen

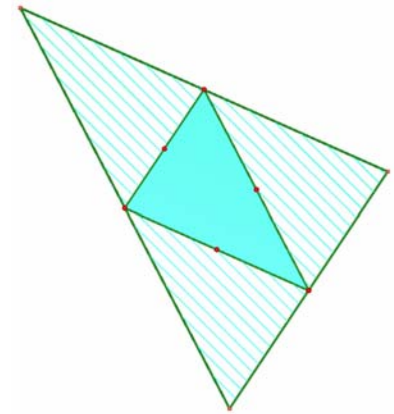
1. Einführung

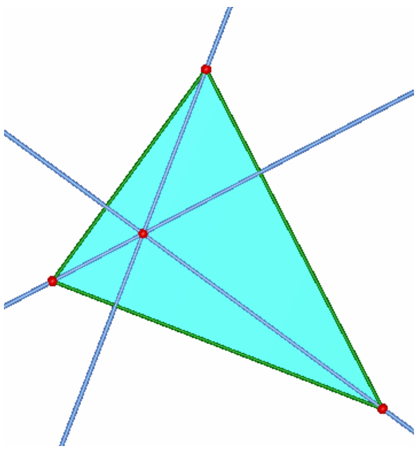
Die erste Konstruktion Euklids analogisierend verräumlichen.

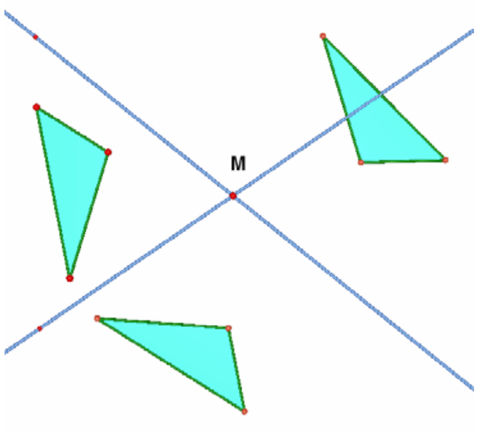


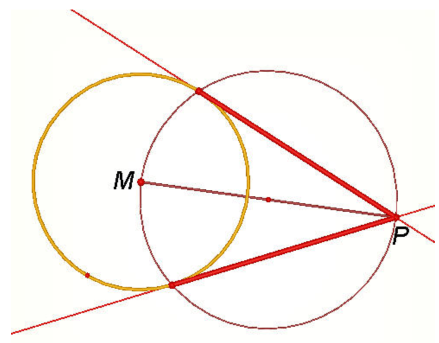

A
B

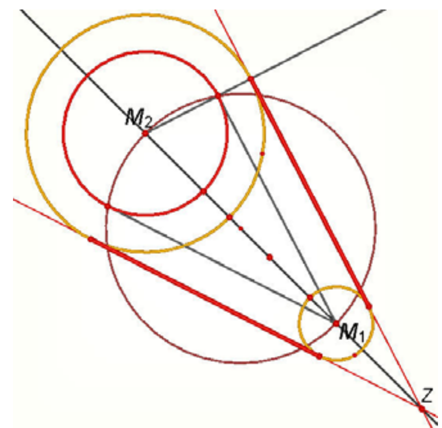


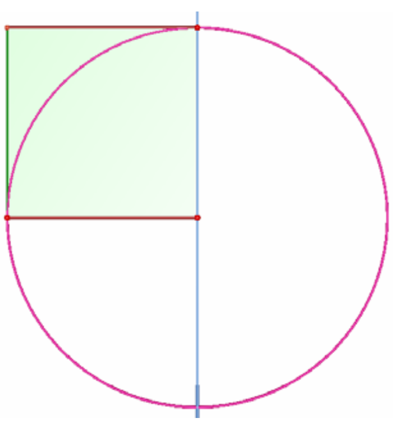


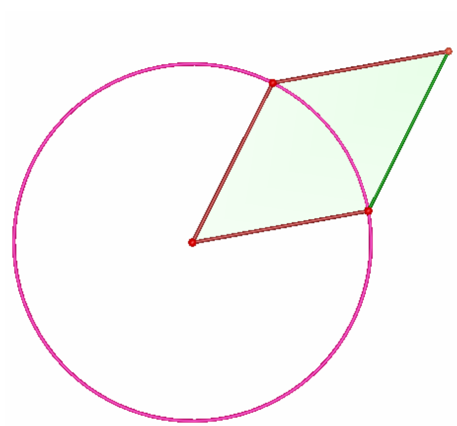


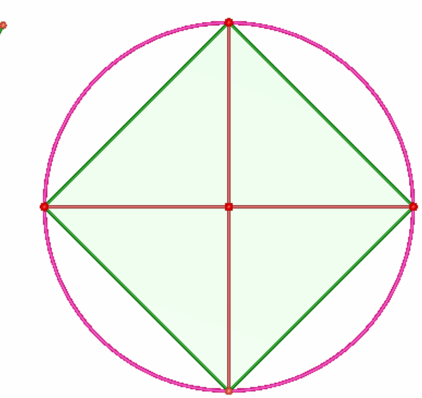

M

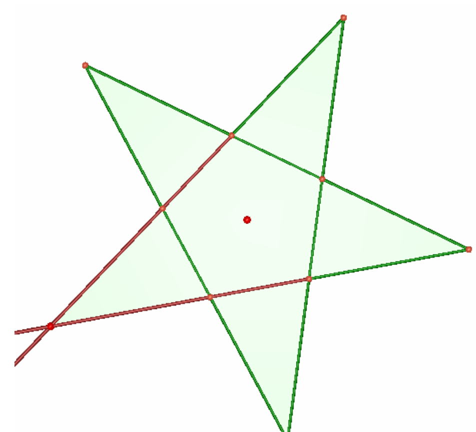

M
P


M_2
M_1
Z









Was kann man alles an einem orthozentrischen Tetraeder entdecken?

In einem orthozentrischen Tetraeder gelten im Wesentlichen die analogen Eigenschaften wie in einem beliebigen Dreieck (1/2 durch 1/3 ersetzen).
Insbesondere liegen M, H, S und F auf der Eulerschen Geraden.
Der Schnittpunkt der Lote gegenüberliegender Kanten ist H.

Der Feuerbachkugel 1. Art geht durch die Schwerpunkte der Seitenflächen, die Lotfußpunkte der Tetraederhöhen, und die Mitten zwischen H und den Eckpunkte (12 Punkte).
Der Feuerbachkugel 2. Art geht durch die Mittelpunkte der Kanten und die Fußpunkte der gemeinsamen Lote gegenüberliegender Kanten (12 Punkte).
Die Feuerbachkreise der Seitenflächen liegen auf dieser Kugel.
(Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten sind gleich und gleich dem Durchmesser der Feuerbachkugel 2. Art.)

Usw.

Zwei metrische Eigenschaften:
Die Produkte aus den Höhenabschnitten Höhenschnittpunkt-Eckpunkt und Höhenschnittpunkt-Höhenfußpunkt sind stets gleich.
Die Summen aus den Quadraten der Gegenkanten sind einander gleich und gleich dem Vierfachen Quadrat des Durchmessers der Feuerbachkugel 2. Art.

Usw.

Ebene Elementargeometrie

Analogisierendes Verräumlichen

Analogisierendes Verebnen

Räumliche Elementargeometrie

Generalisieren

Spezialisieren

n-dimensionaler Euklidischer Raum

Theorie-Ebene: raumgeometrische Begriffe, Sätze, …

Konkretisieren
Visualisieren

Abstrahieren
Generalisieren

Modell-Ebene: interaktive Figurenmodelle bzw. Figuren-realisate, die raumgeometrische Begriffe, Sätze usw. repräsentieren;
Figurenmodelle als Beweisfiguren;
raumgeometrische Phänomene als induktive Basis raumgeometrischer Erkenntnis

Analogisierungsthemen

Räumliches Analogisieren **von**

- **Begriffen**
- **Konstruktionen**
- **Berechnungen**
- **Sätzen**
- **Beweisen**

der ebenen Geometrie.

Vieles, aber – Gott sei Dank – nicht alles, ist analog!

Neue Medien und räumliches Analogisieren ebener Geometrie

Medienspezifische Repräsentationsformen von gegenständlicher Raumgeometrie

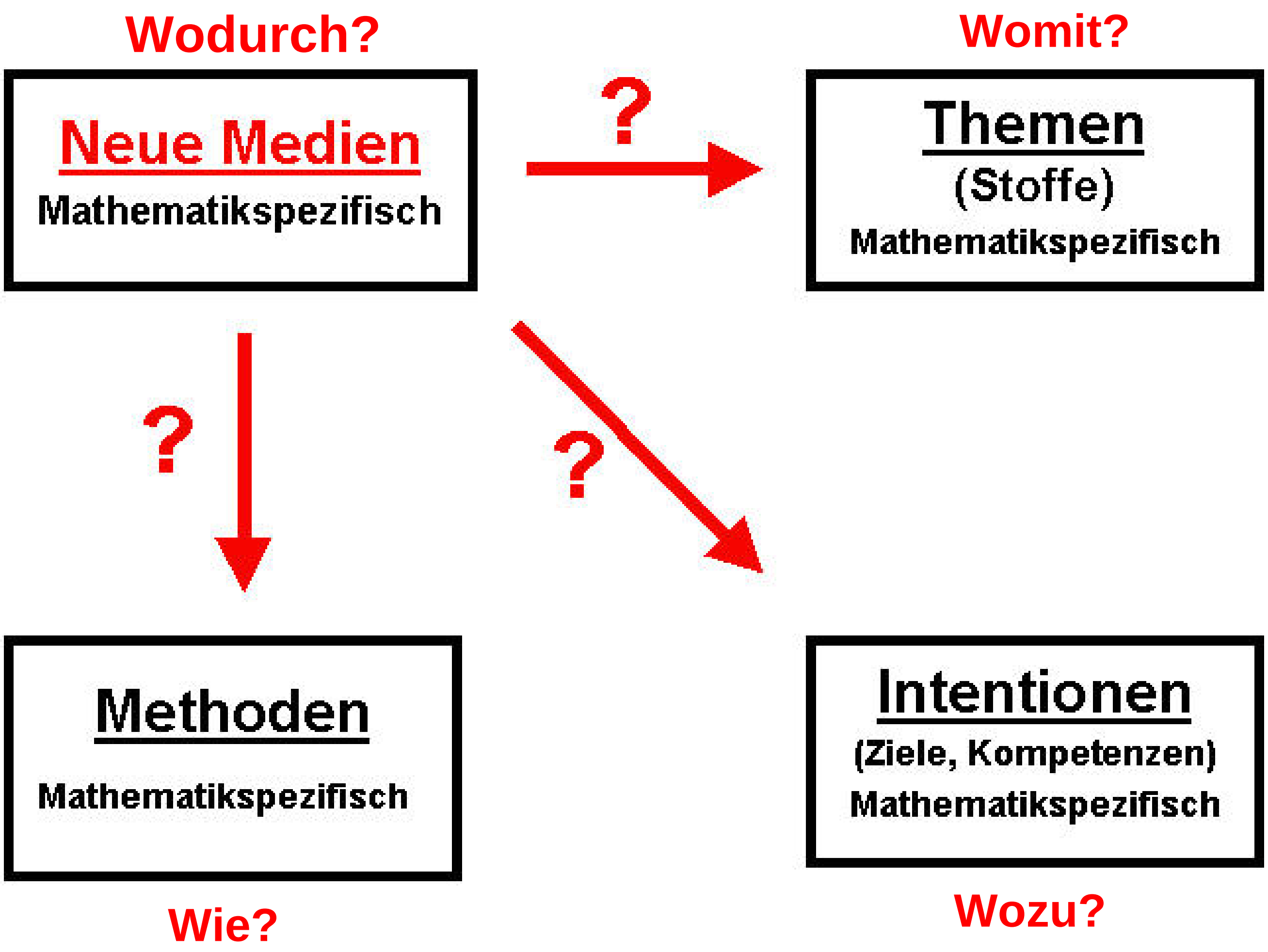
Raumgeometrie
„Papier-Bleistift“-
Print-Medien-
repräsentiert

Raumgeometrie
physisch
repräsentiert

Raumgeometrie
Computer-
repräsentiert

Dynamische Raumgeometrie
- interaktiv

Welchen Einfluss können Neue Medien, speziell ein Dynamisches Raumgeometrie-System wie Cabri 3D, auf Intentionen, Methoden und Themen des Mathematikunterrichts nehmen?



Allgemeine geometrische Lehrziele beim Einsatz von Tools wie Cabri 3D **für das interaktiven Konstruieren im virtuellen Raum**:

- **Geometrisches Sehen** bzw. das “geometrische Auge” schulen und den **virtuellen Raum als Handlungsraum** erfahren. (*Wahrnehmungsphänomenologische Lehrziele*)

- Die **Nützlichkeit der Raumgeometrie** schätzen. (*Affektives Lehrziel*)

- **Raumgeometrisches Wissen** (Begriffe, Aussagen und Verfahren) erwerben, anwenden und erweitern; die **Raumvorstellung** üben (*Kognitive Lehrziele*)

- **Geometrisierbare räumliche Phänomene** experimentell explorieren und **_mittels heuristischer Strategien_** analysieren. (*Metakognitive Lehrziele*)

- Geläufigkeit in der **Nutzung eines interaktiven 3D-Grafikwerkzeugs** erlangen (*Technisches Lehrziel*).

Die Verwendung von Tools wie Cabri 3D führt zu *neuen Methoden*, räumliche Elementargeometrie zu lehren und zu lernen bei der

- **Aneignung raumgeometrischer Begriffe, Sätze und Verfahren**
- **Lösung raumgeometrischer Konstruktionsaufgaben**
- **Lösung raumgeometrischer Berechnungsaufgaben**
- **Behandlung und Anwendung der räumlichen Abbildungsgeometrie**
- **Untersuchung und Anwendung von Relationen an raumgeometrischen Figuren**
- **Verbindung von synthetischer und analytischer Raumgeometrie**
- ***<u>Verbindung von ebener und räumlicher Geometrie</u>***
- **raumgeometrischen Modellierung und Simulation von Ausschnitten der physischen Welt**
- **ästhetischen Gestaltung von und mit raumgeometrischen Figuren**
- **...**

Tools wie Cabri 3D unterstützt folgende *allgemeine Methoden der Erkenntnisfindung:*

- **die *Visualisierung*** (statischer und dynamischer raumgeometrischer Information)
- **die *induktive Methode***
- **die *Analogiemethode*** (z. B. zur Analogisierung zwischen ebener und räumliche Geometrie)
- **die *operative Methode***
- **das *Generalisieren* und *Spezialisieren***
- ***„Versuch und Irrtum“*** (Trial and Error)
- **das *experimentelle Arbeiten*** (Vive le bricoleur!)
- **die *Komplexitätsreduktion***
- **das *modulare Arbeiten***
- **das *Rückwärtsarbeiten***
- …

Klassische raumgeometrische Themen erfahren durch die Nutzung von Tools wie Cabri 3D eine *neue Behandlung und Bewertung* im Kontext des Geometrie-Unterrichts:

- **- Körpergeometrie, insbesondere die Geometrie der Polyeder** (z. B. der Platonischen Körper und ihrer Derivate)
- **- Konzept und Beziehungen geometrischer Objekte** (z. B. von Punkten, Geraden, Ebenen)
- **- Räumliche Konstruktionsaufgaben** (z. B. mit Ebenenlineal und Kugelzirkel oder mit räumlichen Kongruenzabbildungen)
- **- Räumliche Abbildungen** (z. B. die Kongruenzabbildungen)
- **- *Räumliche Analogisierung von Begriffen, Sätzen und Verfahren der ebenen Geometrie***
- **- Räumliche Behandlung der Kegelschnitte** ihrem Namen gemäß
- **- Nichteuklidische Raumgeometrien**
- **...**
- **- Darstellende Geometrie!**

Beziehung zwischen ebener und räumlicher Schulgeometrie

Felix Klein (1849 - 1925)

„Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ 2. Band, Geometrie, 1. Aufl. 1909

„Es ist nämlich von altersher auf der Schule wie auf der Universität üblich, erst die Geometrie der Ebene und dann ganz abgesondert davon die des Raumes zu behandeln; dabei kommt die Raumgeometrie aber leider oft zu kurz, und das edle Organ der Raumanschauung, das wir von Hause aus besitzen, verkümmert. Demgegenüber wollen die „Fusionisten” von vornherein **Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander behandeln**, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken.“

Aus: ‚Einleitung‘

„Jetzt erst folgen in Buch 11 (des Euklid) die Anfänge der Stereometrie. Sie sehen, **Euklid ist kein “Fusionist”. Er stellt vielmehr die Stereometrie soweit entfernt von der Planimetrie**, wie nur irgend möglich, während wir im Sinne der mehrfach erwähnten “Fusionsbestrebungen” es heute für richtig halten, die **Raumvorstellung** als Ganzes so früh wie möglich zu entwickeln und darum von vornherein den Schüler an dreidimensionale Figuren zu gewöhnen, statt ihm erst künstlich die Beschränkung auf die Ebene anzuerziehen.“

Aus: ‚Grundlagen der Geometrie‘, S. 210

Analogiebildung in der Schulmathematik

“Analoge Dinge stimmen in gewissen Beziehungen zwischen ihren entsprechenden Teilen miteinander überein.”

G. Pólya

Die Analogiebildung ist eine effektive und weitreichende Methode der Erkenntnisgewinnung. Deshalb wird ihre explizite Vermittlung im Mathematikunterricht neben der anderer heuristischer Methoden für das Problemlösen immer wieder gefordert.

Die an Analogien reiche Elementargeometrie, insbesondere die **Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie**, eignen sich besonders wegen ihrer Anschaulichkeit als **Übungsfeld für das Analogisieren**, **das Anwenden ebener Geometrie** und **die Raumvorstellung** in den Sekundarstufen.

Die Analogisierung von ebener zu räumlicher Geometrie bietet einen organischen **Weg der Verräumlichung ebener Geometrie.**

Analogisierung im Verbund mit der induktiven Methode führt zur **Bildung raumgeometrischer Begriffe, Aussagen und Verfahren**.

Mit den Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten, die **Tools wie Cabri 3D** bieten, kann man die **räumliche Analogisierung ebener Geometrie konstruktiv praktizieren**.

Ansätze einer didaktischen Theorie des Analogisierens hat Georg Pólya (1887 – 1985), den man als den „Vater“ der mathematischen Heuristik in der Schule, bezeichnen kann, in seinem Werk „Mathematik und plausibles Schließen“ (1954, in deutscher Übersetzung) enwickelt.

Im 1. Band dieses Werks, der den Untertitel *"Induktion und Analogie in der Mathematik"* trägt, ist der Analogie als einem bedeutenden heuristischen Prinzip zusammen mit der Verallgemeinerung und Spezialisierung ein eigenes Kapitel gewidmet.

Polya definiert: *"Zwei Systeme sind analog, wenn sie miteinander in bezug auf klar definierte Beziehungen zwischen ihren sich jeweils entsprechenden Teilen übereinstimmen."*

Polya unterscheidet zwei Schritte bzw. zwei Phasen bei der Analogiebildung:

1. **Das Bilden der Analogie durch Vergleichen von Objekten, Relationen und Eigenschaften und das Herausfinden von Entsprechungen und schließlich das Formulieren der durch Analogie gewonnenen Vermutung. („Phänomenlogische Phase“)**

2. **Der Nachweis der Gültigkeit der durch Analogiebetrachtung entdeckten Aussage. Dabei können eventuell wieder Analogiebildungen der Auffindung von Argumenten für die Richtigkeit der Analogie dienen. („Begründungsphase“)**

Polya spricht von einer *„geklärten“* Analogie, wenn auch der zweite Schritt ausgeführt worden ist.

2. Interaktives Analogisieren ebener Geometrie mit Cabri 3D

(Ausgewählte Beispiele)

Geometrische Methoden/Arbeitsformen im virtuellen Raum

CABRI 3D

Problemlösen

Begriffe bilden

Sätze finden

Analogisieren
Generalisieren
Spezialisieren

Modellieren

Modular arbeiten

Experimentieren
Explorieren

Abbilden

Manipulieren - Variieren

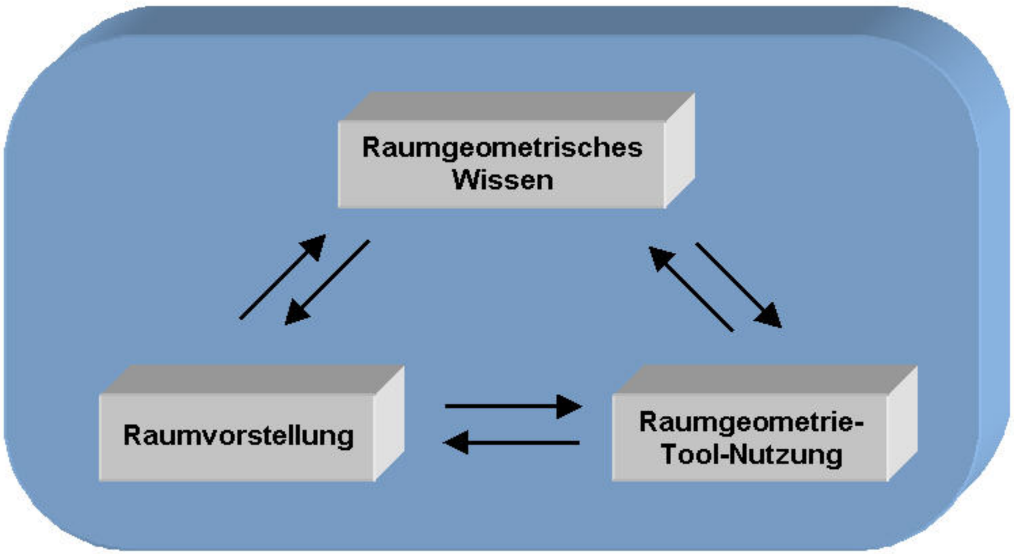
Visualisieren - Animieren

Konstruieren

Messen - Berechnen


Cabri 3D-Werkzeuge
Zeiger
Um-definieren
Punkt
Schnitt-punkt
Gerade
Strecke
Strahl
Vektor
Kreis
Kegel-schnitt
Kreis-bogen
Schnittgerade/ Schnittkurve
Ebene
Polygon
Dreieck
Halb-ebene
Winkel-feld
Zylinder-mantel
Kegel-mantel
Kugel
Lotgerade/ Lotebene
Parallele Ebene
Mittelsenk-rechte Ebene
Mittel-punkt
Vektor-summe
Maß übertragen
Spur
Punkt-spiegelung
Geraden-spiegelung
Ebenen-spiegelung
Parallel-verschiebung
Drehung
{3}
Gleichseitiges Dreieck
{4}
Quadrat
{5}
Regelmäßiges Fünfeck
{6}
Regelmäßiges Sechseck
{8}
Regelmäßiges Achteck
{10}
Regelmäßiges Zehneck
{12}
Regelmäßiges Zwölfeck
{5/2}
Pentagramm
Tetraeder
Quader
Prisma
Pyramide
Konvexes Polyeder
Polyeder-netz
Schnitt-polyeder
Regelmäßiges Tetraeder
Würfel
Regelmäßiges Oktaeder
Regelmäßiges Dodekaeder
Regelmäßiges Ikosaeder
cm
Abstand
cm
Länge
cm²
Flächen-inhalt
cm³
Volumen
(x,y,z)
Koord. & Gleichung
α
Winkel
2a+1
Rechner
F10
Animation von Objekten
F11
Konstruktions-wiederholung
F12
Koordinaten

3 interdependente Fähigkeitsbereiche
beim raumgeometrischen Arbeiten und Denken in einer interaktiven Lernumgebung für die Raumgeometrie:



Raumgeometrisches Wissen
unterstützt Raumvorstellungsfähigkeit und 3D-Computerwerkzeugnutzung

Interaktive 3D-Computerwerkzeugnutzung
unterstützt Raumgeometrisches Wissen und Raumvorstellungsfähigkeit

***Raumvorstellungsfähigkeit* (→ Meraner Beschlüsse 1905)**
unterstützt raumgeometrisches Wissen und interaktive 3D-Werkzeugnutzung

Heinz Schumann

Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum

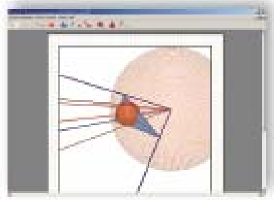
Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D

Inhalt

Anlage: CD mit pdf-Datei des Buches, Demo-Version und Handbuch von Cabri 3D

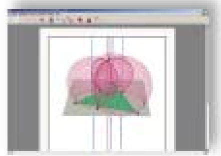
ISBN 978-3-88120-463-7, 2007, Bestellung bei: www.franzbecker.de , Preis: 32,80 €

Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D



Die Darstellungsproblematik räumlicher Geometrie war bisher ein wesentlicher Grund für die geringe Anwendung dieser Analogisierung. Mit den Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten, die Cabri 3D bietet, überwindet man diese Problematik und kann jetzt das verräumlichende Analogisieren ebener Geometrie im virtuellen Raum durch interaktives Konstruieren praktizieren.

Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D (pdf-Datei, verlinkt mit Cabri 3D-Dateien)



Gliederung:

- Zur Bedeutung des Analogisierens für den Geometrieunterricht
- Interaktives Konstruieren im virtuellen Raum
- Interaktives Analogisieren (zahlreiche Beispiele)
- Abschließende Bemerkungen und Ausblick, Literatur
- Technische Benutzungshinweise

In dieser Reihe lieferbar:

- Raumfüllungen mit Cabri 3D
- Modellieren in Cabri II Plus
- Konkrete Kunst modellieren mit Cabri 3D
- Darstellende Geometrie mit Cabri 3D
- Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D
- Zentralprojektion mit Cabri 3D - eine Einführung
- Interaktives Konstruieren im Raum mit Cabri 3D
- Interaktive Videos für die Raumgeometrie mit Cabri 3D
- Extremwertaufgaben bearbeiten mit Cabri 3D

Erschienen im:
co.Tec GmbH Verlag
Traberhofstraße 12
83026 Rosenheim
Tel.: 0 80 31 / 26 35 - 0
Fax: 0 80 31 / 26 35 49
www.cotec-verlag.de
redaktion@cotec.de

Autor und ©2007:
Prof. Dr. Heinz Schumann

Systemvoraussetzungen:
Pentium III 800 MHz, WIN 98/NT/2000/XP, 128 MB RAM, 200 MB Festplattenspeicher, CD-ROM/DVD-Laufwerk, Cabri 3D

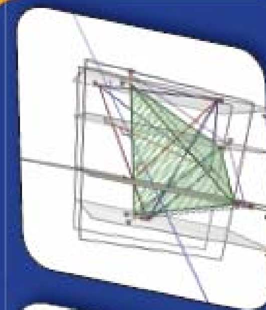
ISBN 978-3-86563-446-7
9 783865 634467

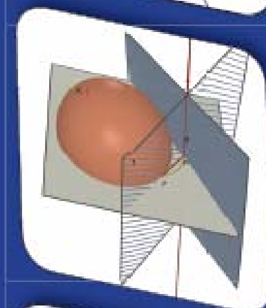
Lehr-Programm gemäß § 14 JuSchG

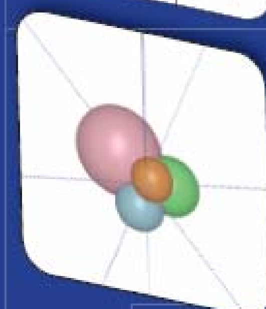
Ebene Geometrie analogisieren mit Cabri 3D

co.Tec Verlag
MEDIEN FÜR DIE BILDUNG

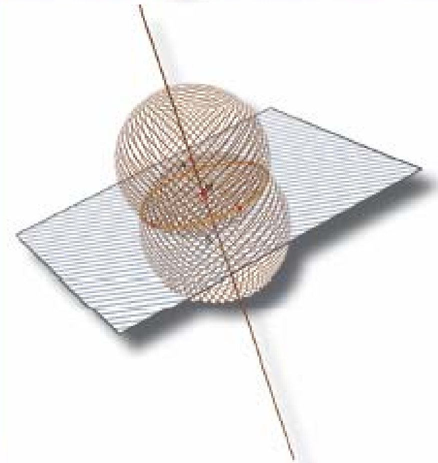
CD-ROM







Ebene Geometrie analogisieren



mit Cabri 3D

co.Tec Verlag
MEDIEN FÜR DIE BILDUNG

0. Analogisierung von Postulatkonstruktionen

- Konstruktion Verbindungsgerade mittels Geraden-Lineal

  3D-Analoga:

  Konstruktion Verbindungsgerade mittels Geraden-Lineal

  Konstruktion einer Verbindungsebene mittels Ebenen-Lineal

- Konstruktion eines Kreises mittels Kreis-Zirkel

  3D-Analoga:

  Konstruktion eines Kreises um eine Achse

  Konstruktion einer Kugel mittels Kugel-Zirkel

- Konstruktion Geradenschnittpunkt

  3D-Analoga:

  Konstruktion Schnittpunkt Gerade mit Ebene

  Konstruktion Schnittgerade Ebene mit Ebene

- Konstruktion Schnittpunkte Gerade mit Kreis

  3D-Analoga:

  Konstruktion Schnittpunkte Gerade mit Kugel

  Konstruktion Schnittkreis Ebene mit Kugel

- Konstruktion Schnittpunkte Kreis mit Kreis

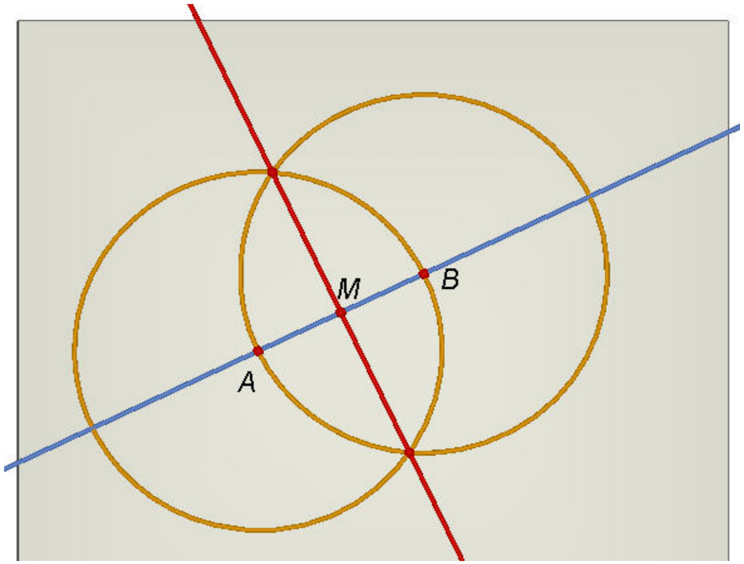
  3D-Analogon:

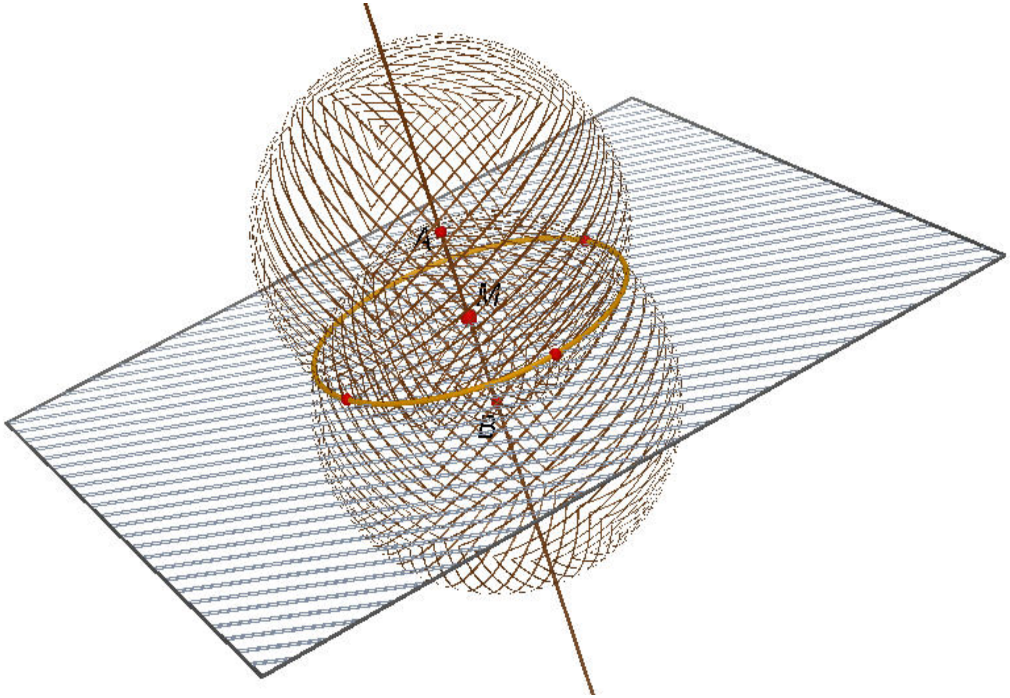
  Konstruktion Schnittpunkte Kreis mit Kugel

  Konstruktion Schnittkreis Kugel mit Kugel

1. Analogisierung ebener Grundkonstruktionen

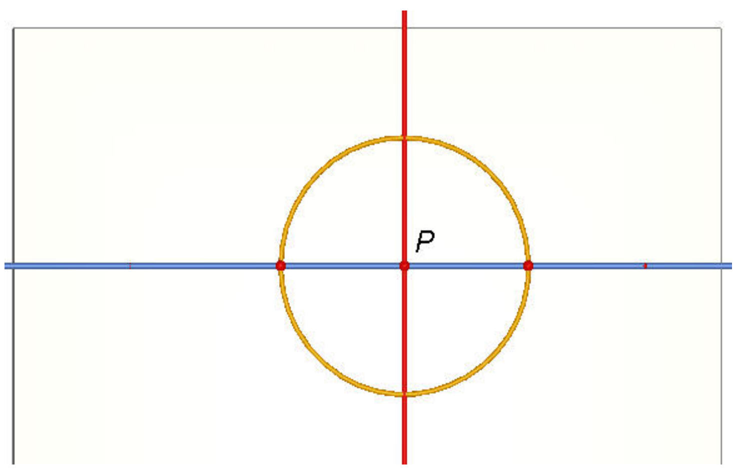
1.1 Konstruktion „Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten“:
Gegeben sind zwei Punkte. Wir konstruieren zwei Kugeln, jeweils um einen der Punkte durch den anderen. Zu den beiden Kugeln konstruieren wir den Schnittkreis, zu dem die gesuchte Ebene konstruiert werden kann. Der Schnittpunkt von Ebene und Verbindungsgerade der zwei Punkte ist ihr **Mittelpunkt.**

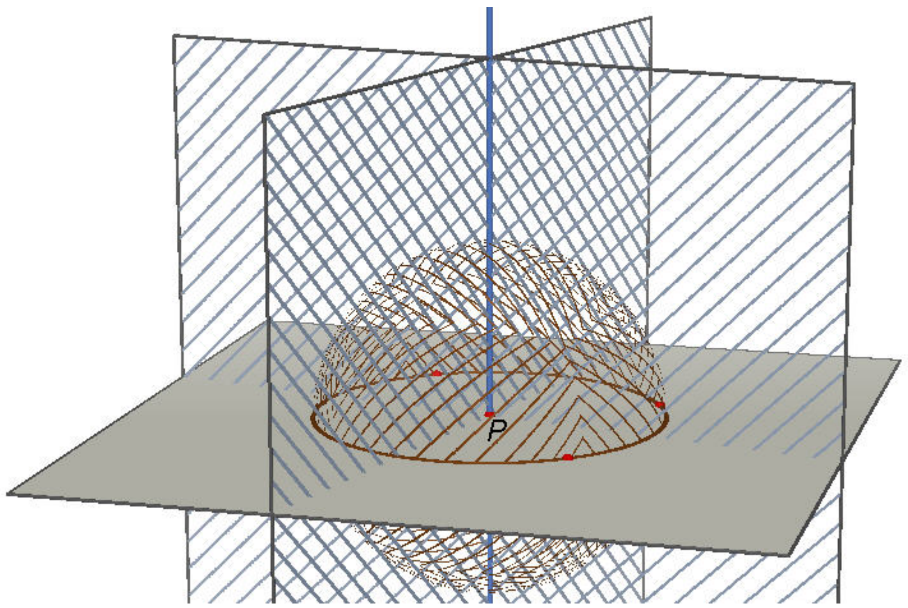




1.2 Konstruktion „Lotgerade in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene“ (Lot-Errichten):

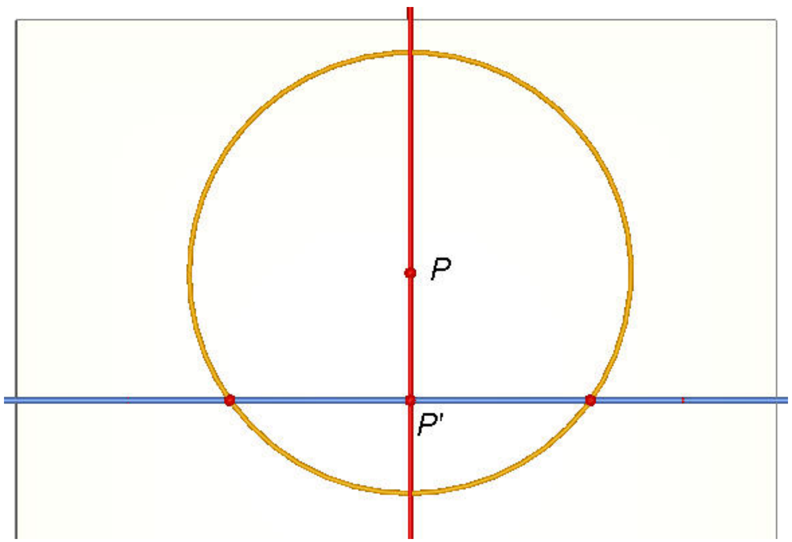
Wir konstruieren um den gegebenen Punkt durch einen weiteren beliebig gewählten Punkt eine Kugel. Der Schnittkreis dieser Kugel mit der Ebene wird konstruiert. Die Schnittgerade zweier mittelsenkrechter Ebenen zu Kreispunkten liefert das gesuchte Lot.

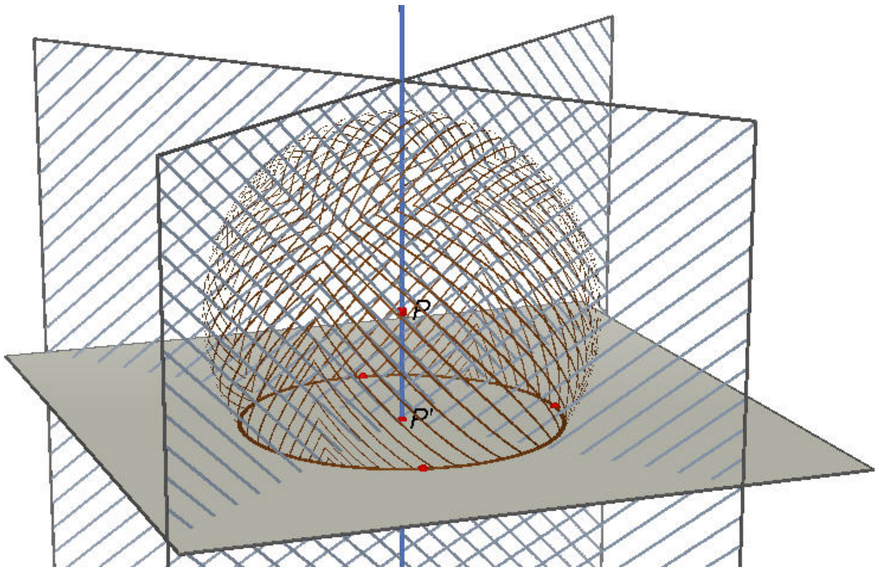




1.3 Konstruktion „Lotgerade von einem Punkt zu einer Ebene“ (Lot-Fällen):

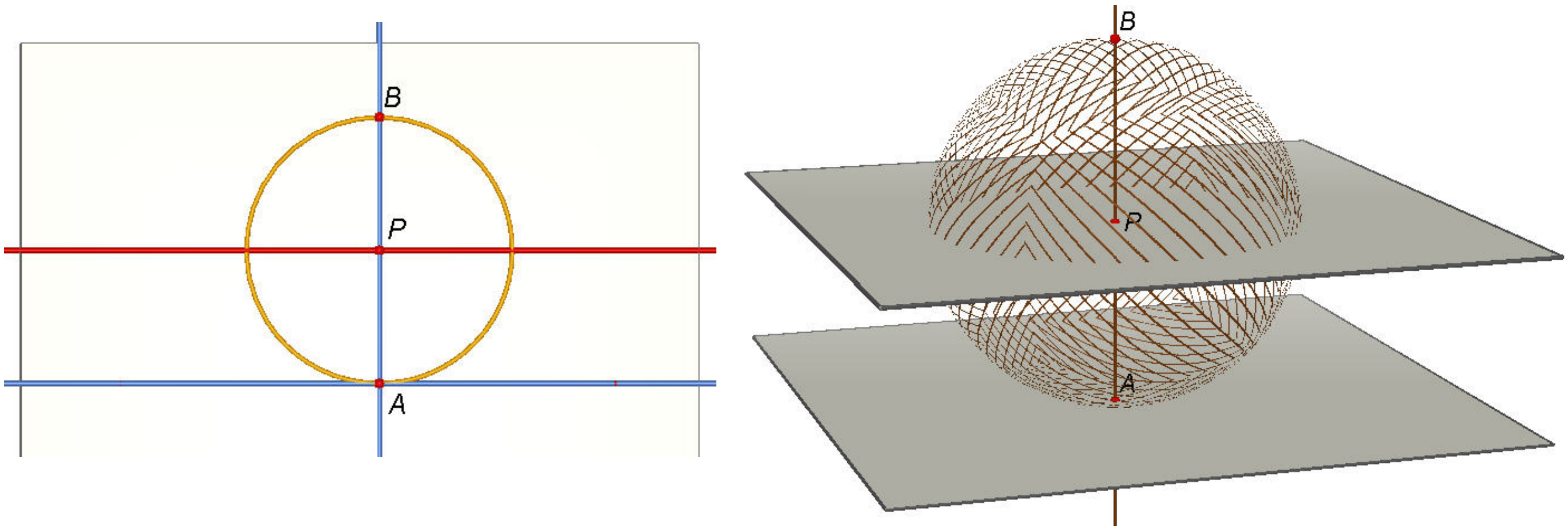
Wir konstruieren eine Kugel um den gegebenen Punkt durch einen Punkt der gegebenen Ebene. Aus Punkten auf dem konstruierten Schnittkreis werden zwei mittelsenkrechte Ebenen konstruiert, deren Schnittgerade das gesuchte Lot ist.





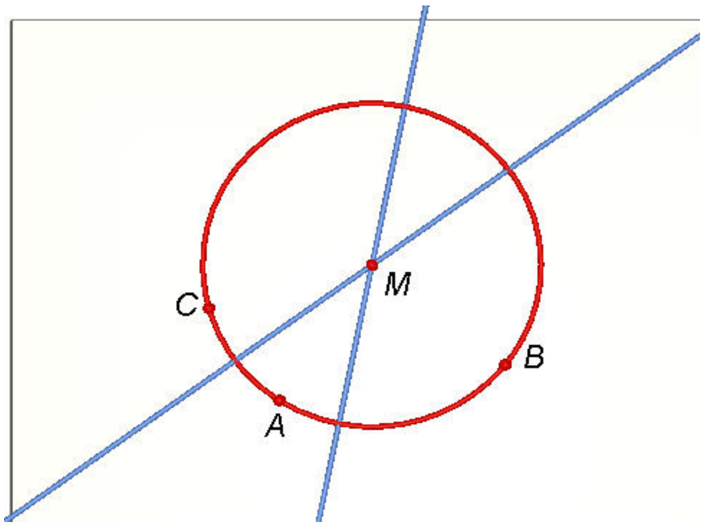
1.4 Konstruktion „Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene“:

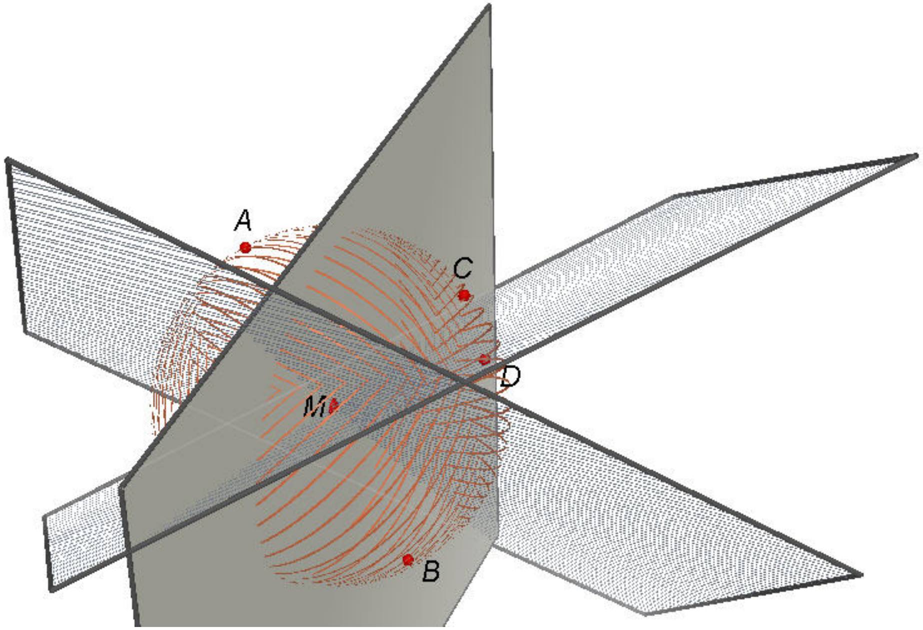
Wir fällen das Lot vom gegebenen Punkt auf die Ebene und erhalten den Lotfußpunkt. Die um den gegebenen Punkt durch den Lotfußpunkt konstruierte Kugel wird vom Lot in einem weiteren Punkt geschnitten. Die gesuchte parallele Ebene erhält man als mittelsenkrechte Ebene aus diesem Punkt und dem Lotfußpunkt.



1.5 Konstruktion „Kugel aus vier Punkten“:

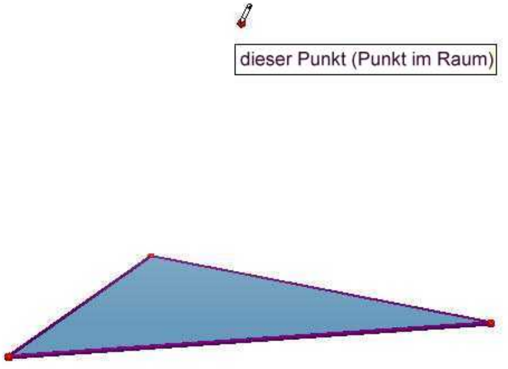
Der Schnittpunkt dreier mittelsenkrechter Ebenen, die man wahlweise aus je zwei von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten konstruiert, ist der Kugelmittelpunkt.

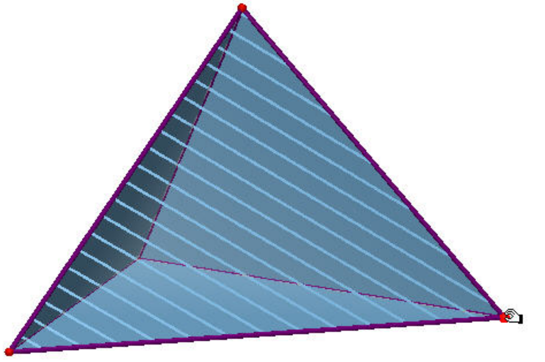




2. Analogisierung besonderer Linien und Punkte im Dreieck

Analogisierung des Dreiecks zum Tetraeder





Räumliche Analogiebildung zu:

- Mittelsenkrechten und ihr Schnittpunkt
- Umkreis
- Winkelhalbierenden und ihr Schnittpunkt
- Inkreis, Ankreise
- Seitenhalbierenden (Schwerlinien) und ihr Schnittpunkt
- Höhen und ihr Schnittpunkt
- Feuerbachkreis
- Eulersche Gerade
- …

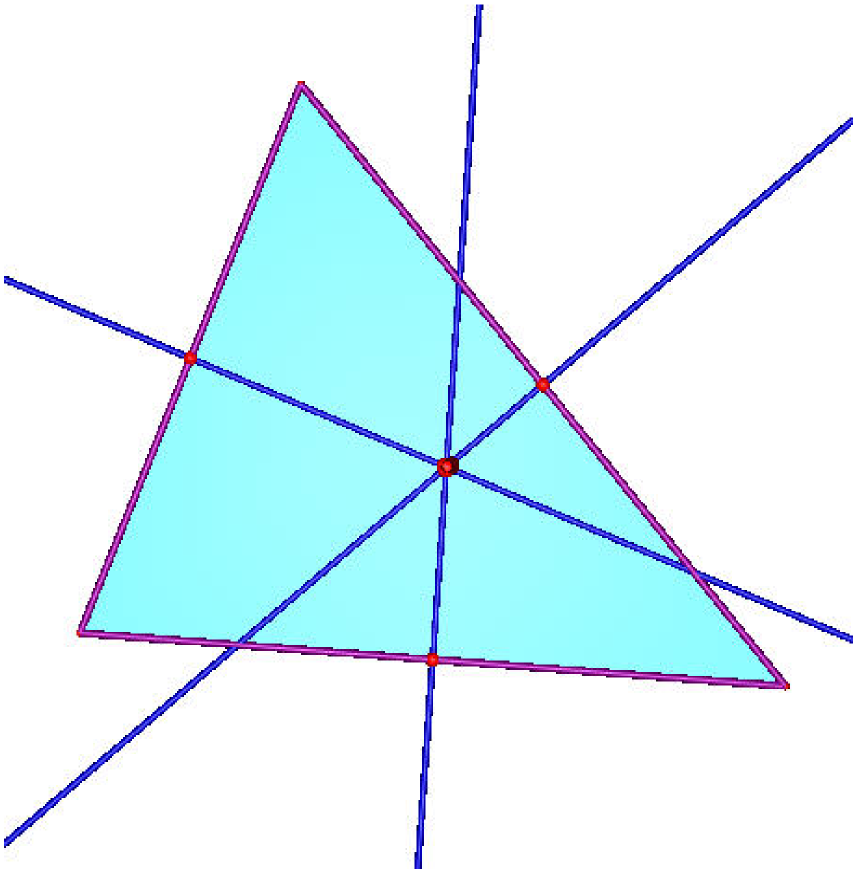
Analogiebildung: Systematisierung

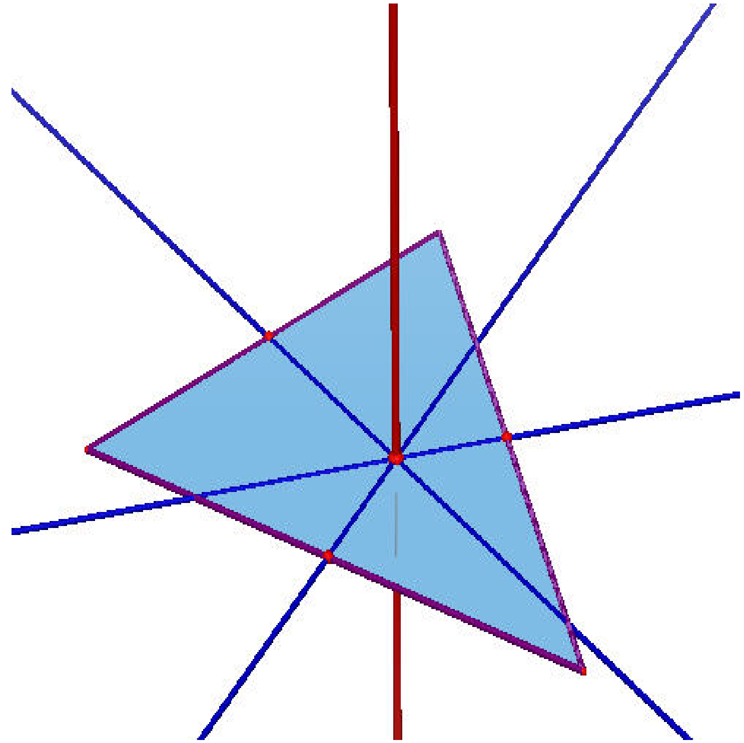
Objekte-Analogisierung unter Beibehaltung

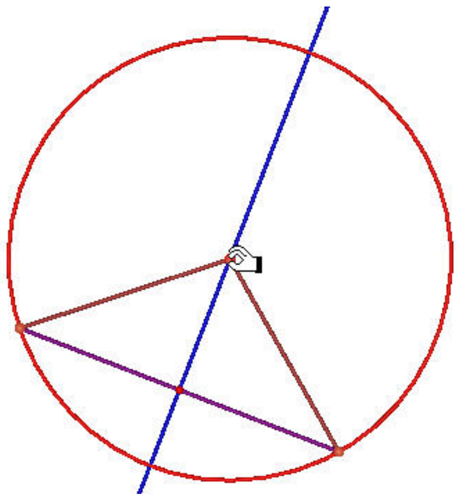
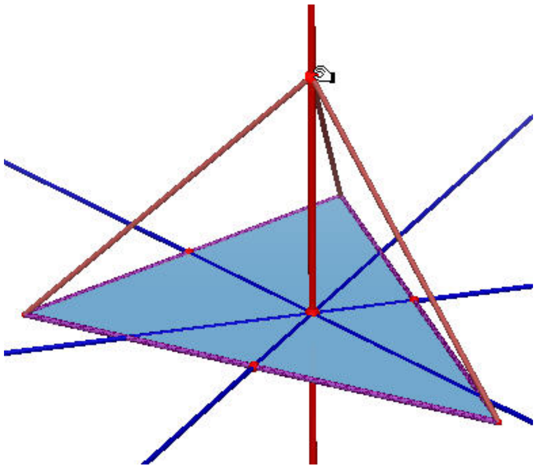
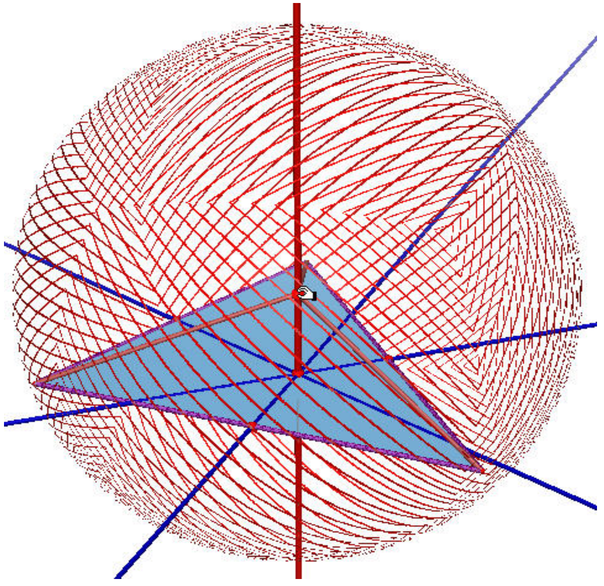
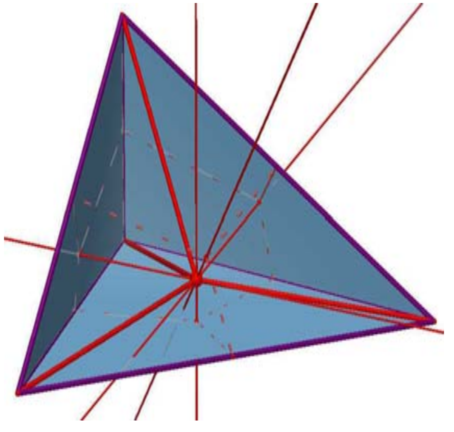
***relationale*r Begriffe wie „verbinden”, „inzidieren”, „orthogonal”, „parallel”, „berühren“, ... und *Eigenschaftsbegriffe* wie „symmetrisch“, ...**

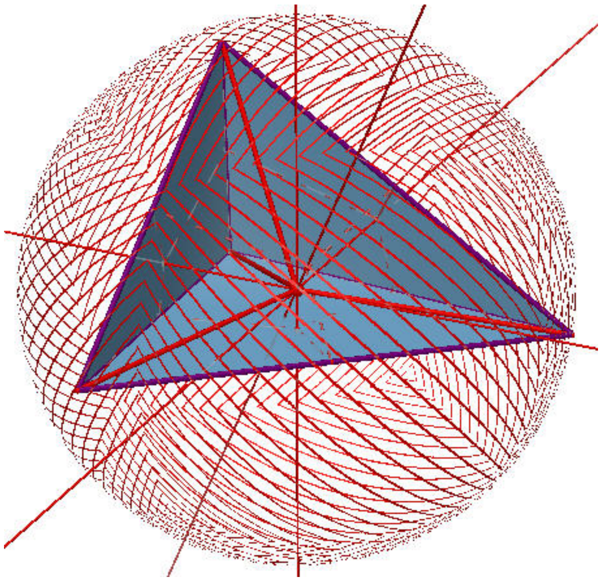
Ebene	**Raum**	**Art der Analogie**
Punkt	Punkt	1. Art
	Gerade	2. Art
Gerade	Gerade	1. Art
	Ebene	2. Art
Polygonseite	Polyederkante	1. Art
	Polyederfläche	2. Art
Dreieck	Dreiseitiges Prisma	1. Art
	Tetraeder	2. Art
Kreis	Kreiszylinder	1. Art
	Kugel	2. Art

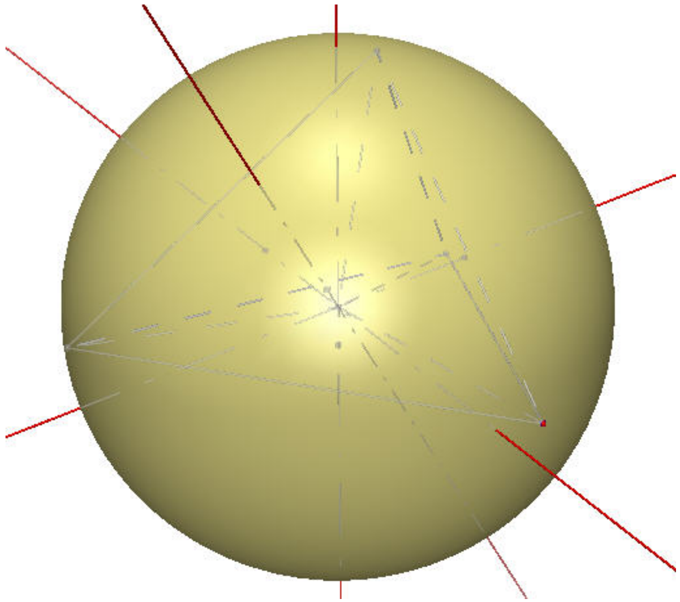
2.1 Analogisierung der Mittelsenkrechten und ihres Schnittpunkts

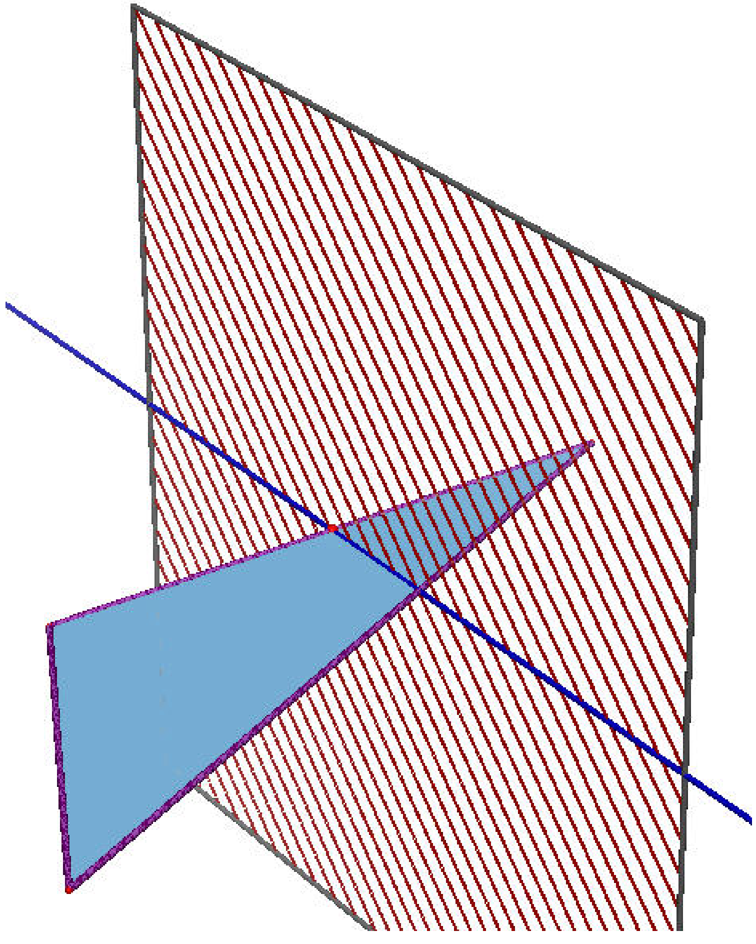


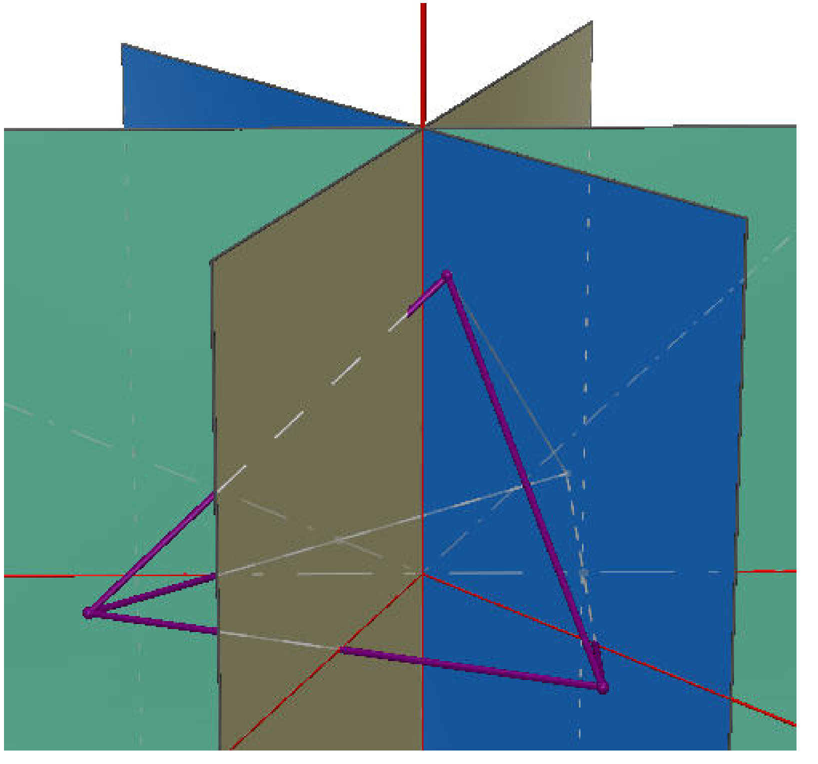


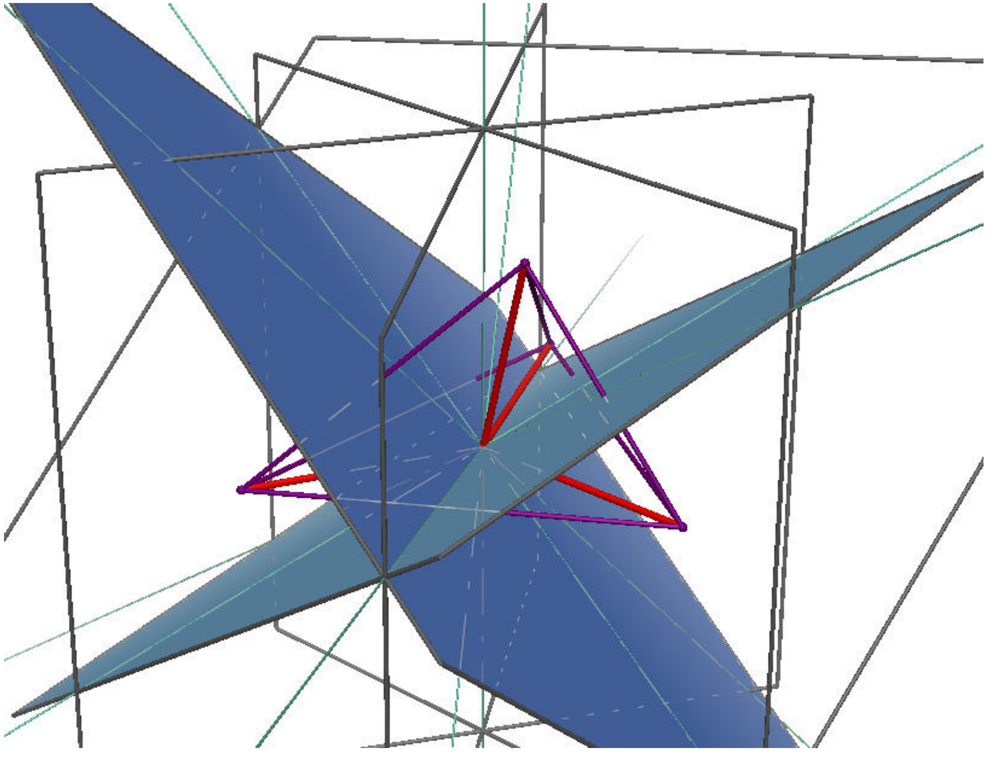







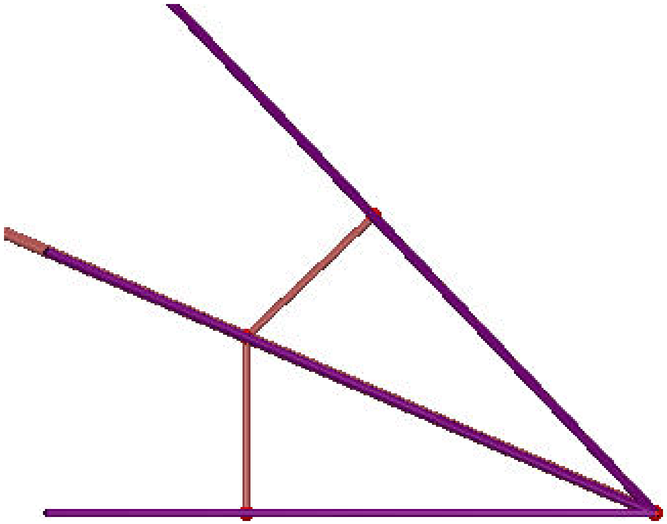


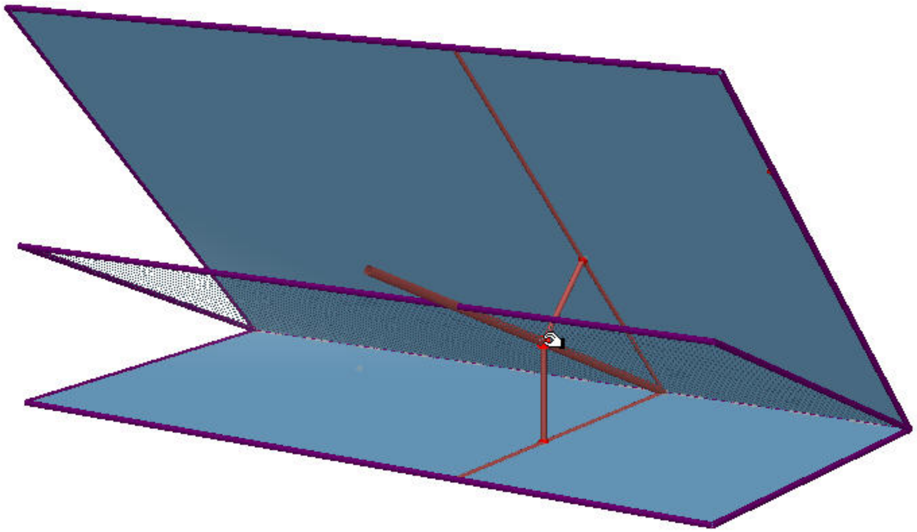


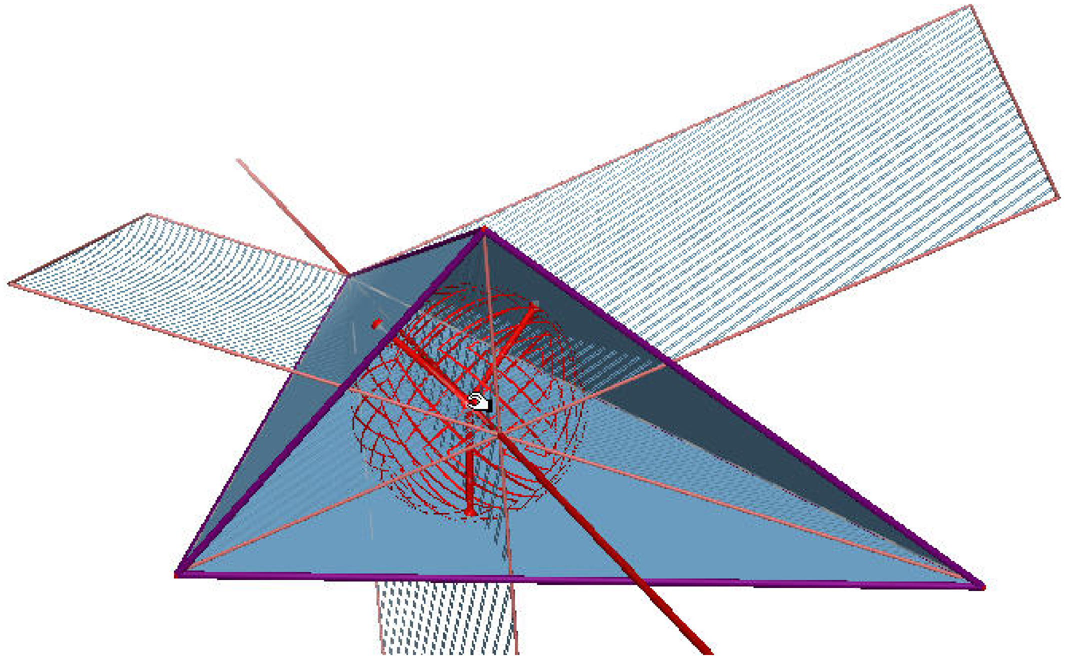


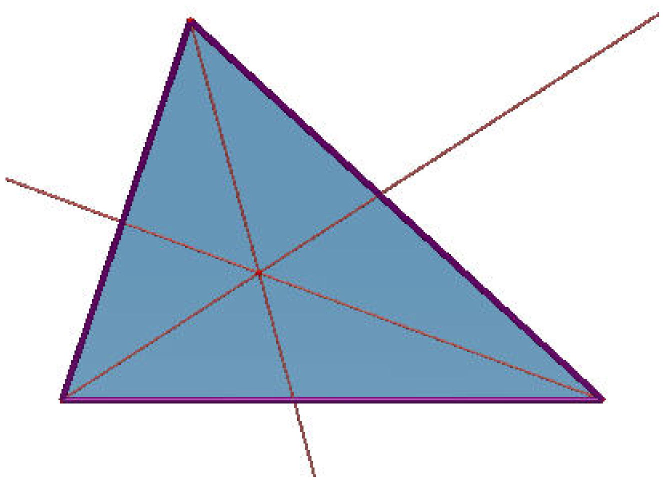


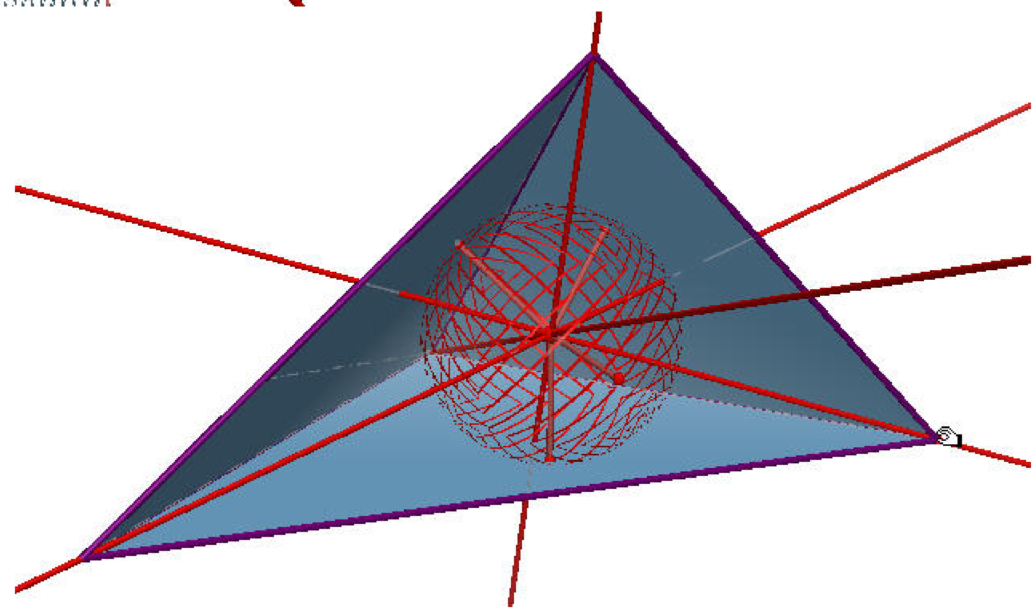
2.2 Analogisierung der Winkelhalbierenden und ihres Schnittpunkts

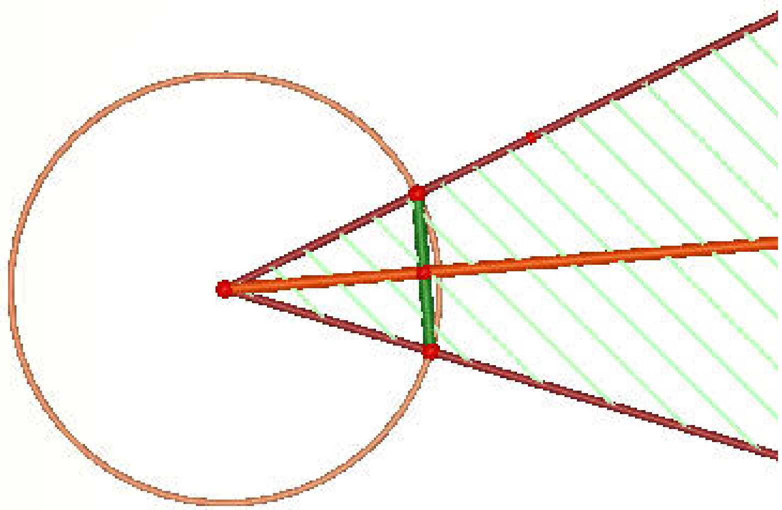


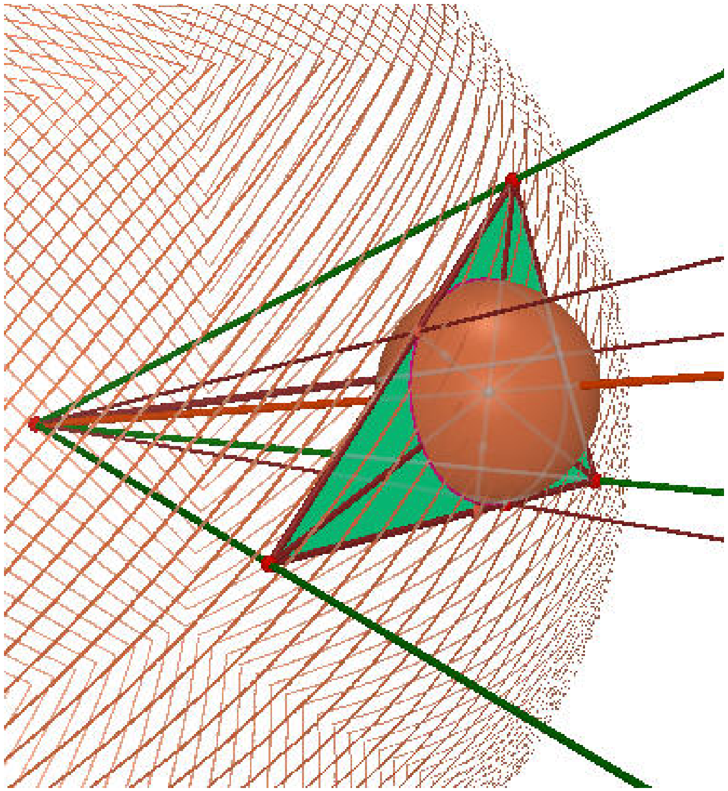


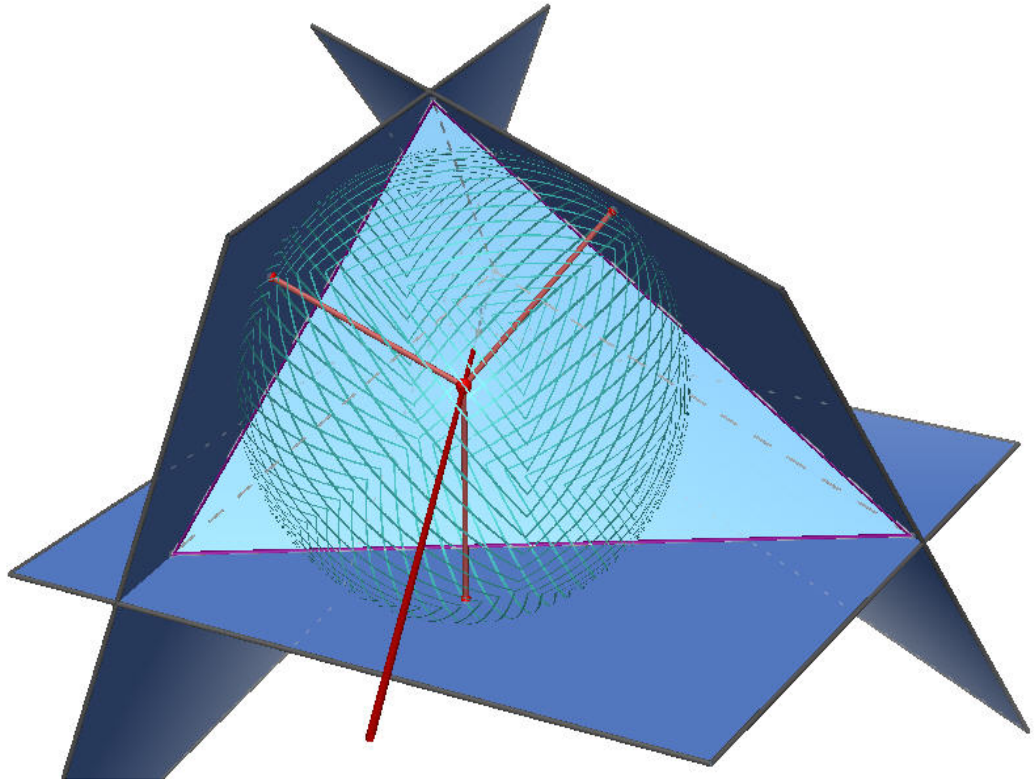


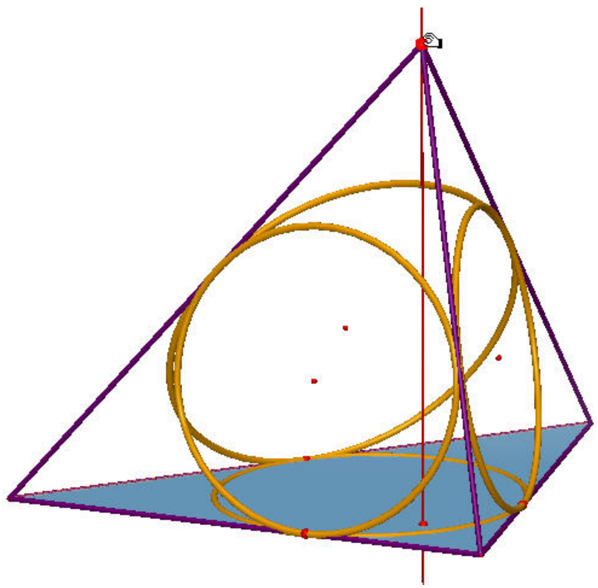


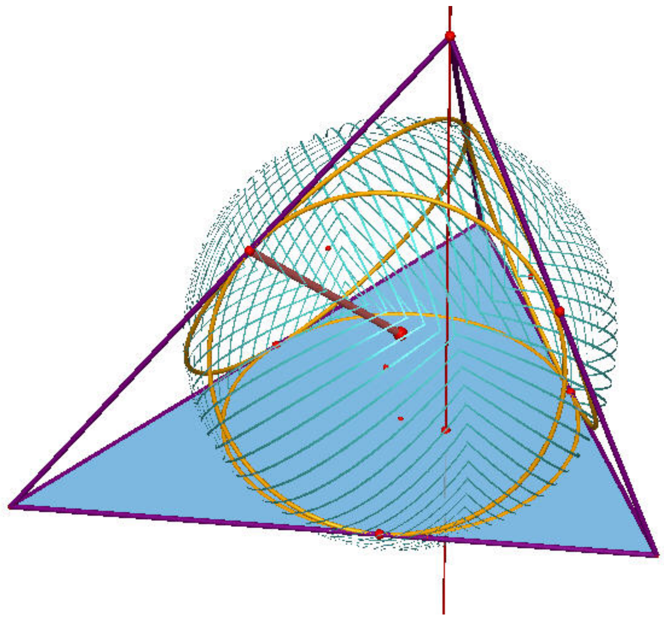




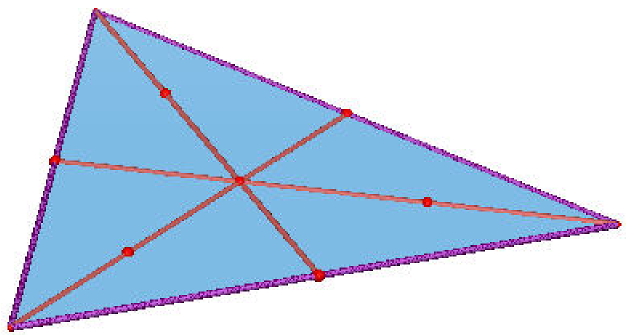


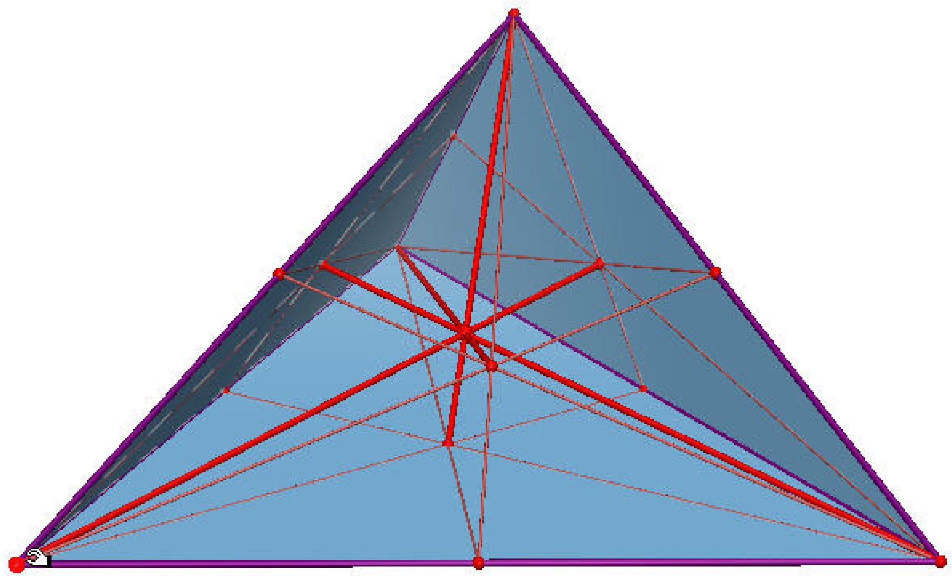


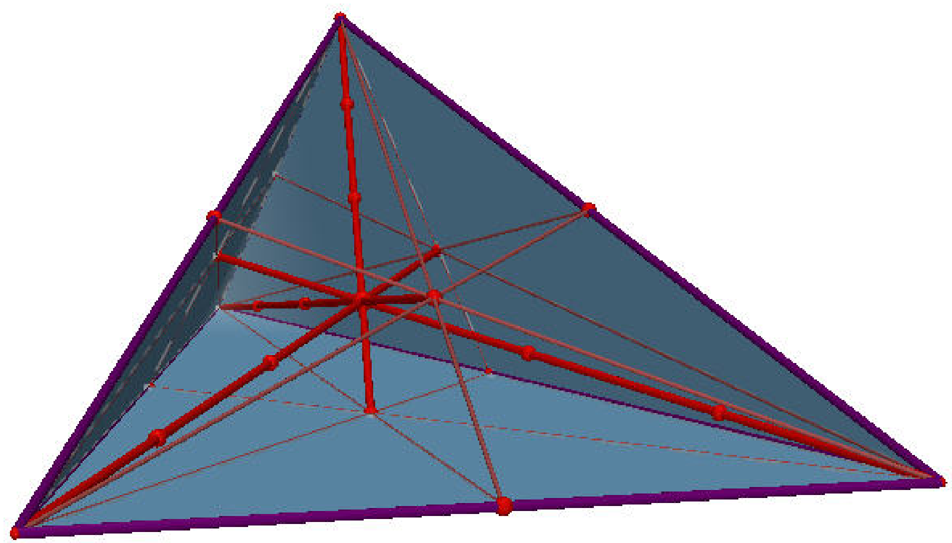


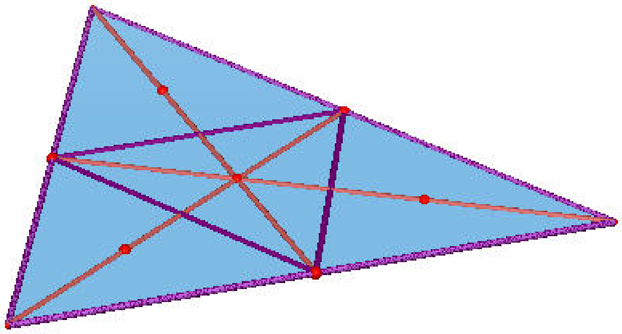


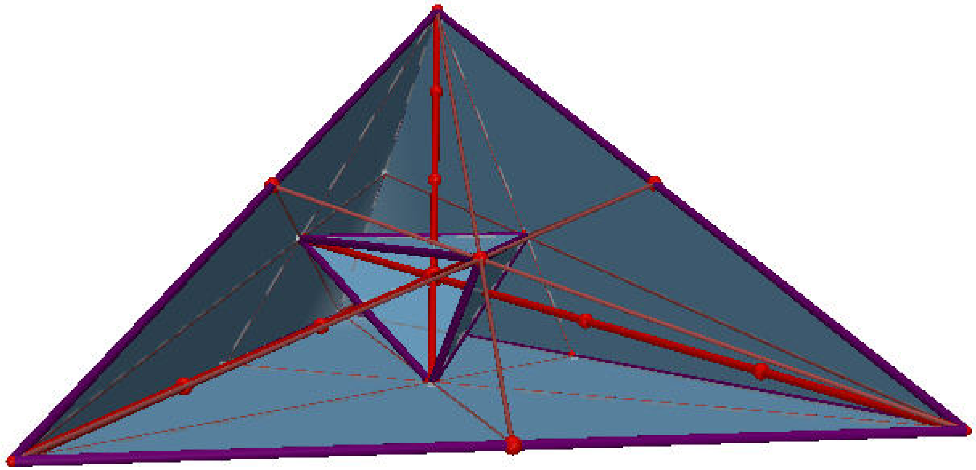
2.3 Analogisierung der Schwerlinien (Seitenhalbierenden) und ihres Schnittpunkts

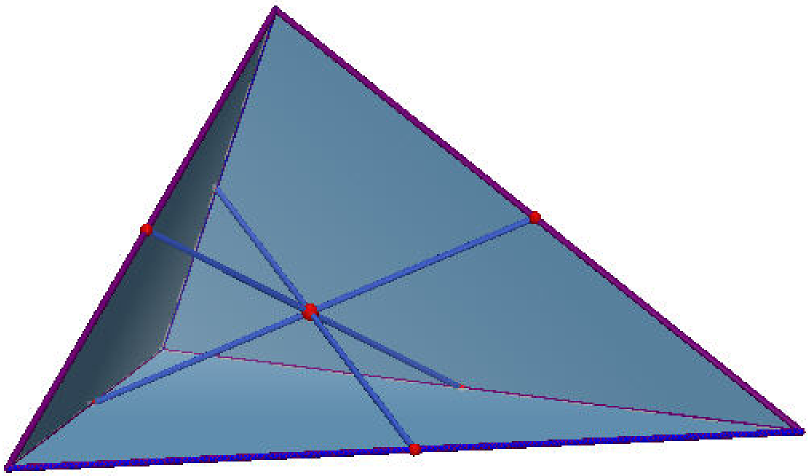


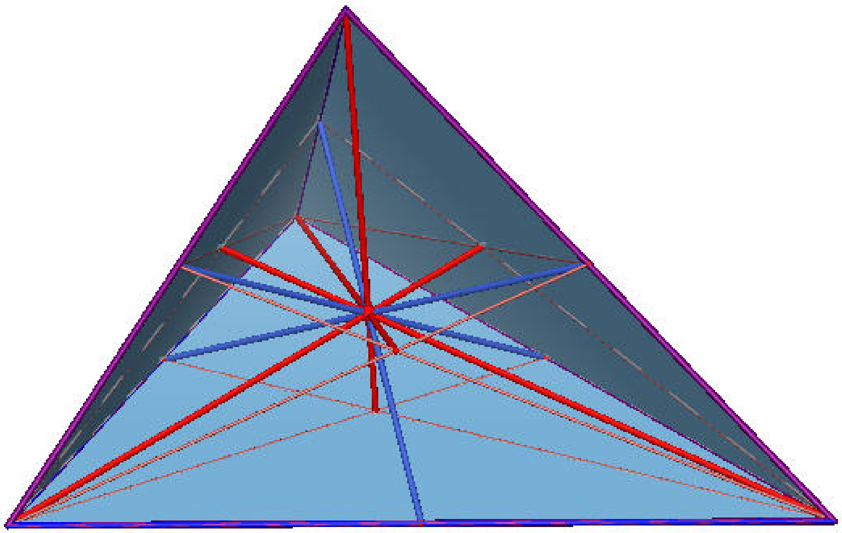


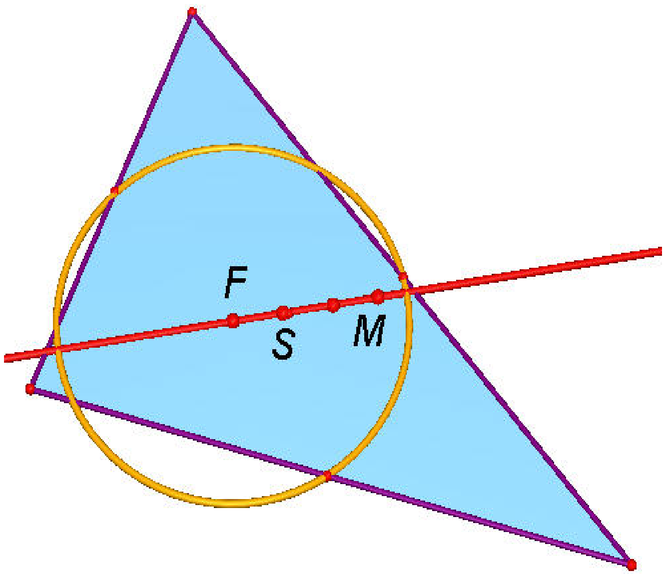


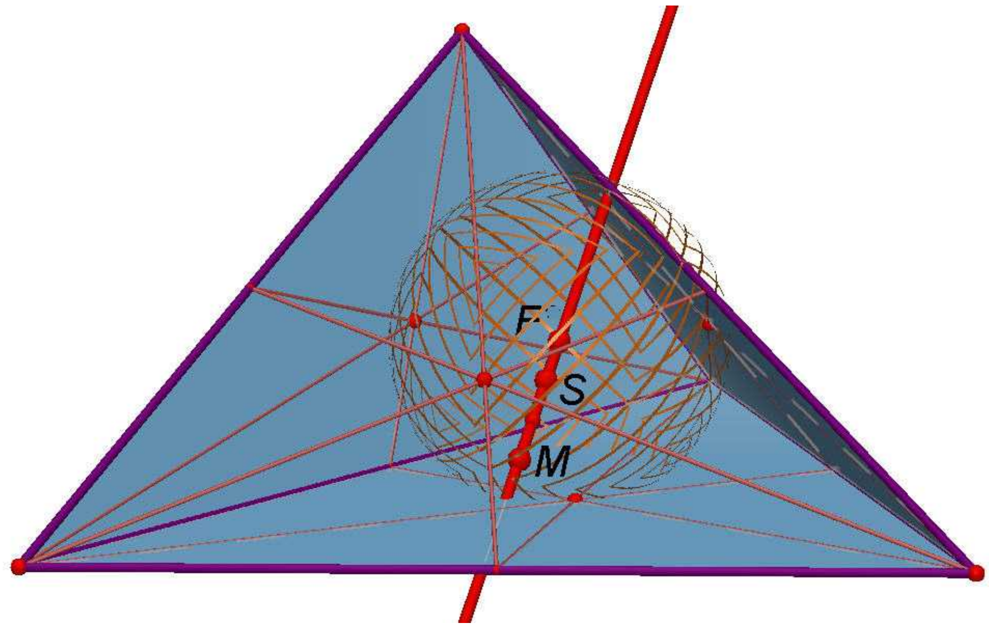




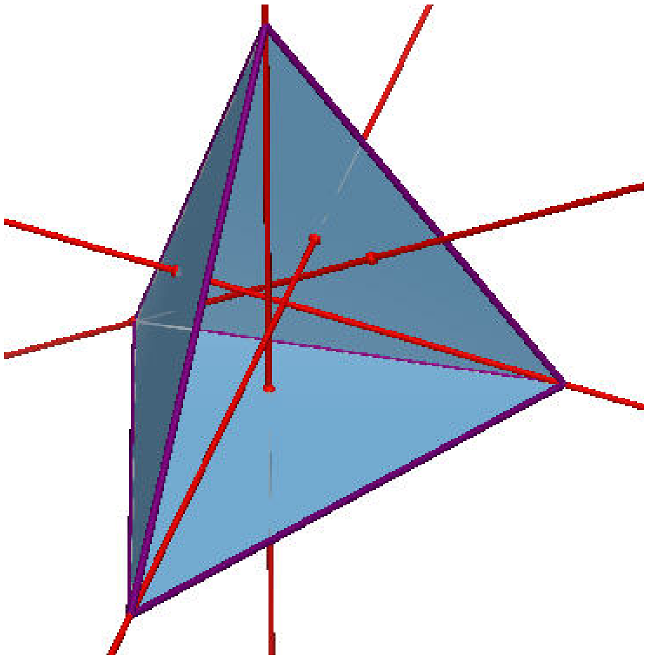


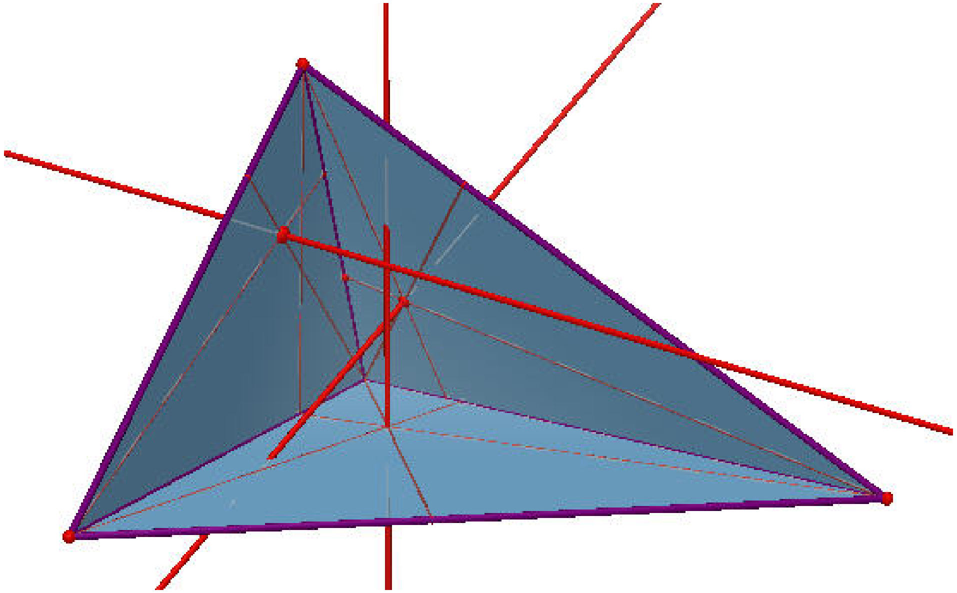


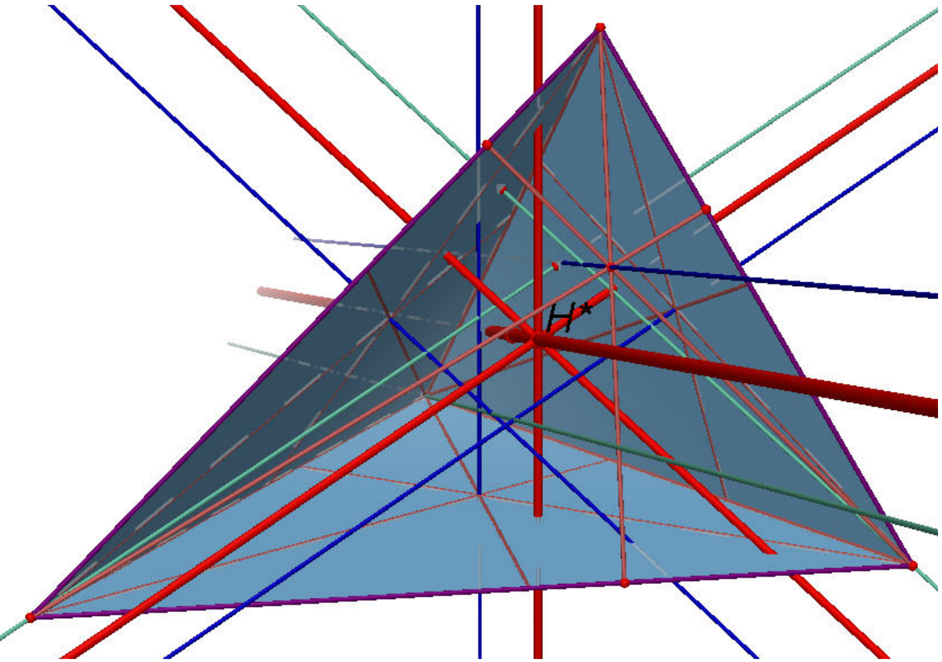

F
S
M

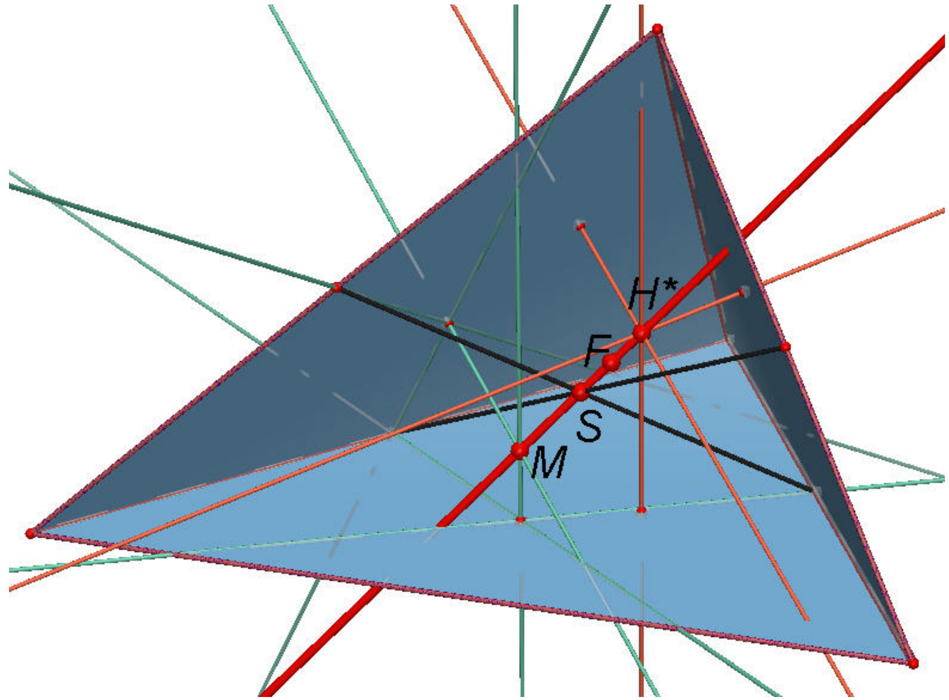

S
M

2.4 Analogisierung der Höhen und ihres Schnittpunkts

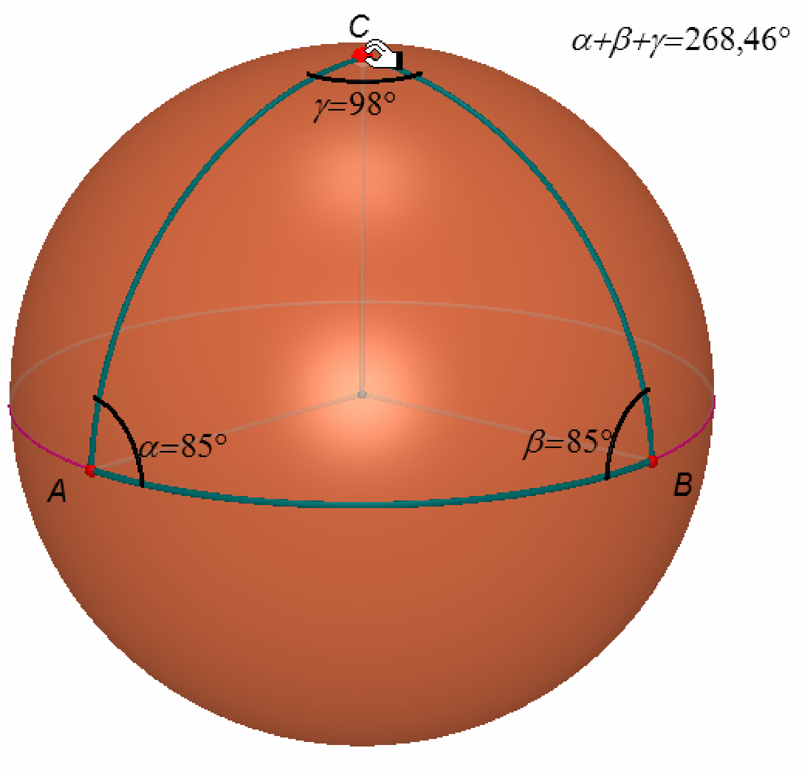


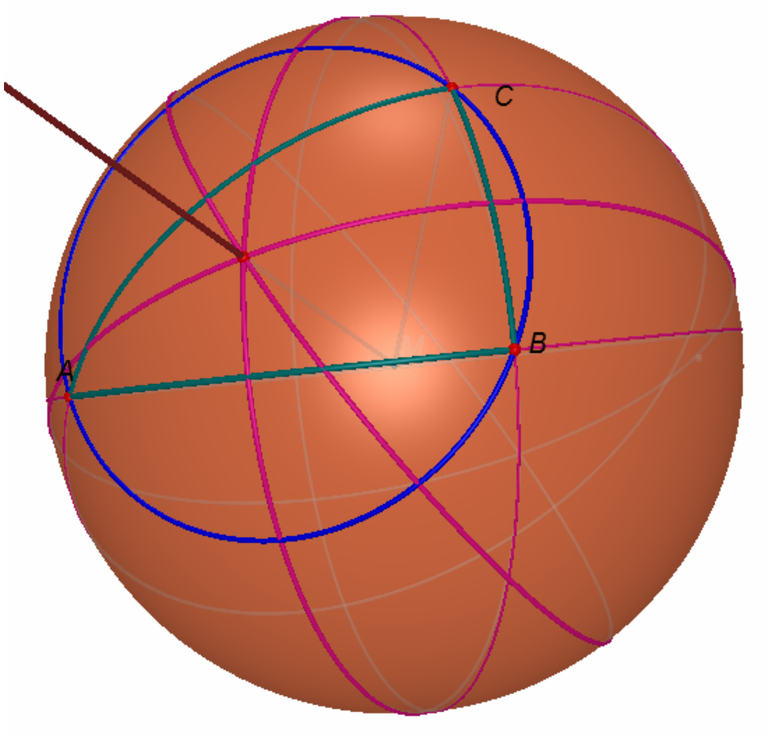



H*


H*
F
S
M

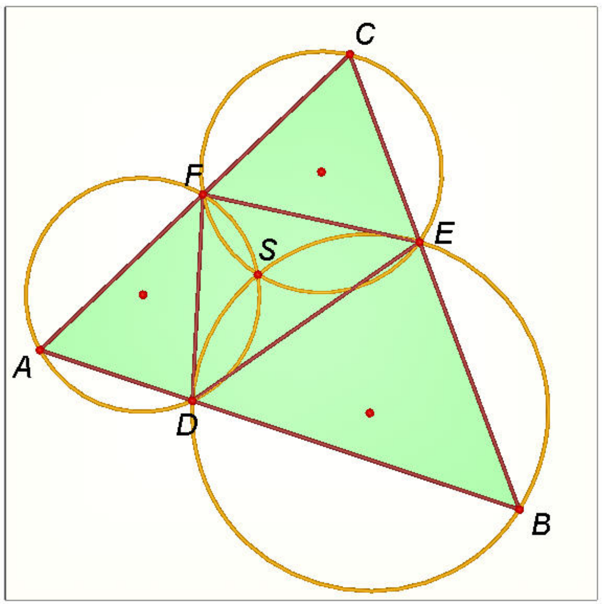
Zusatz: Euklidische Dreieckslehre zur Kugeldreieckslehre analogisieren



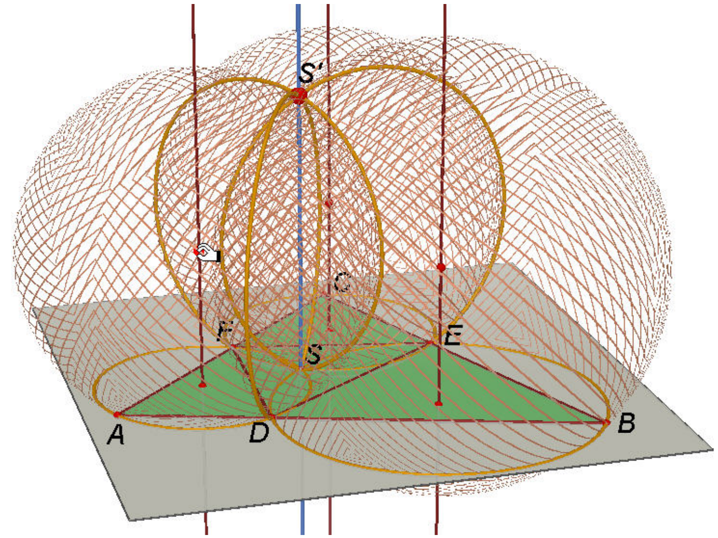


2.5 Analogisierung weiterer besonderer Punkte und Linien

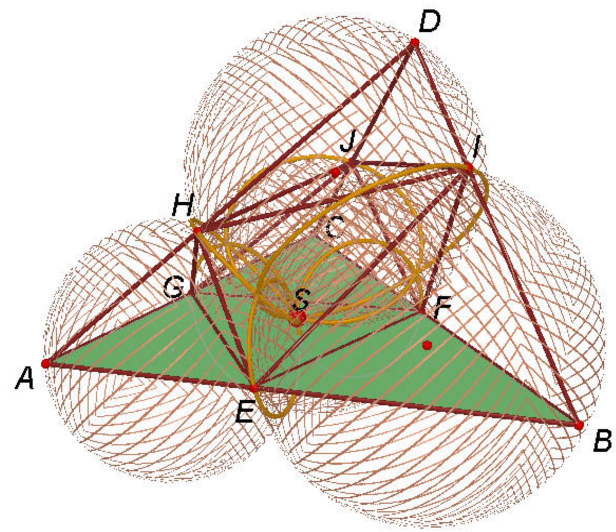
Satz von Miquel



Analogon 1. Art



Analogon 2. Art



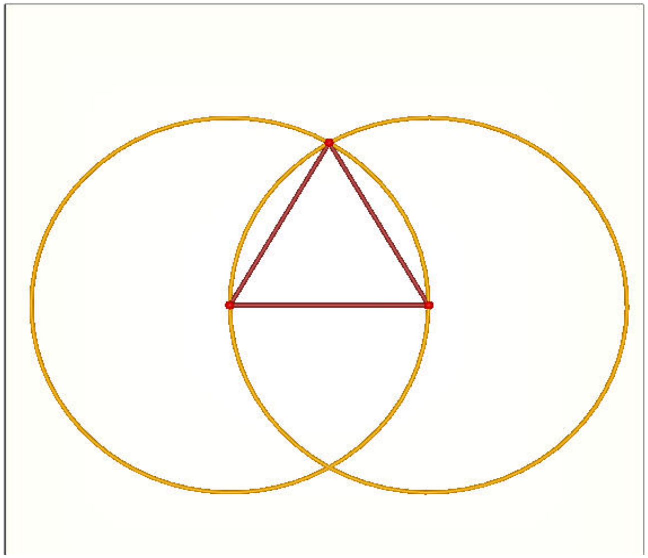
2.6 Analogisierung von besonderen Dreiecken

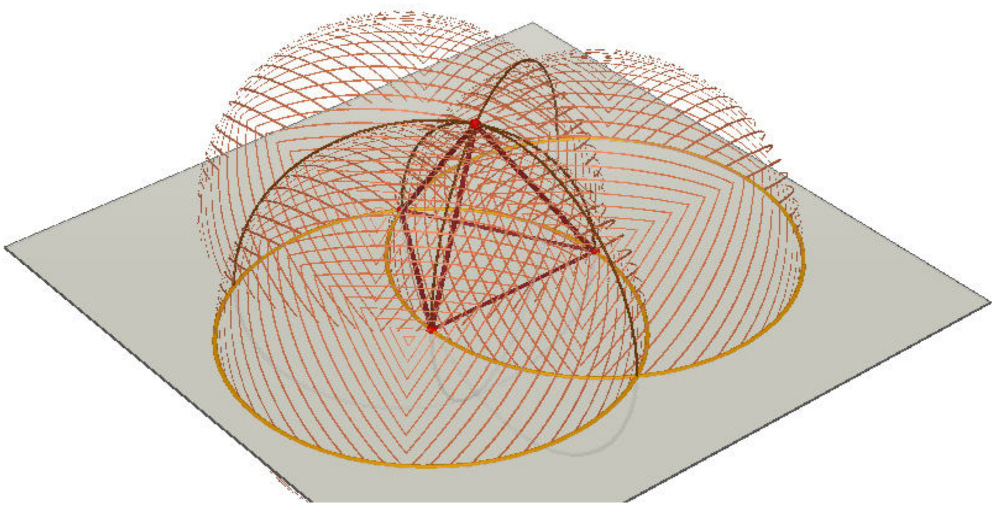
Dreieck (Vieleck mit kleinster Eckenanzahl)	**Tetraeder** (Vielflächner mit kleinster Eckenanzahl)
gleichschenklig	gleichschenklig
gleichseitig	gleichkantig (regelmäßig) seitenflächengleich
rechtwinklig	rechtwinklig
...	...

Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks:

Wir konstruieren in einer Ebene ein gleichseitiges Dreieck, indem wir um jeden von zwei Punkten einen Kreis durch den anderen legen usw. Die Ebene wird nun nach hinten gedreht. Um jeden der drei Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks konstruieren wir eine Kugel durch einen weiteren dieser Eckpunkte.

Die Schnittkreise von je zwei der drei Kugeln schneiden einander in der Spitze des regelmäßigen Tetraeders, dessen Basis das gleichseitige Dreieck bildet.





Behandlung raumgeometrischer Sätze mittels Analogiebildung

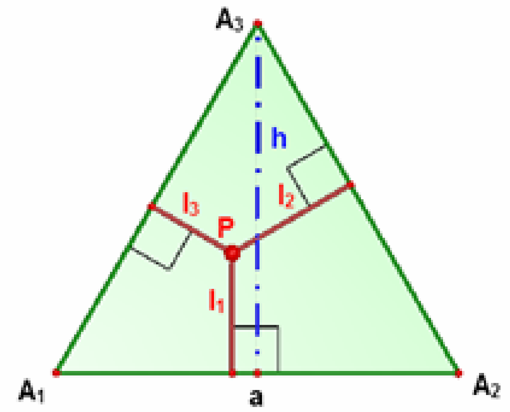
Satzfindung mittels Analogiebildung

Analogisiere einen Satz der ebenen Geometrie räumlich. Beachte dabei, dass es mehrere Möglichkeiten der Analogisierung gibt. Überprüfe die raumgeometrische Aussage anhand einer interaktiven Konstruktion/ Messung/Berechnung. Falls die Überprüfung positiv ausfällt, suche nach einer Begründung der Aussage.

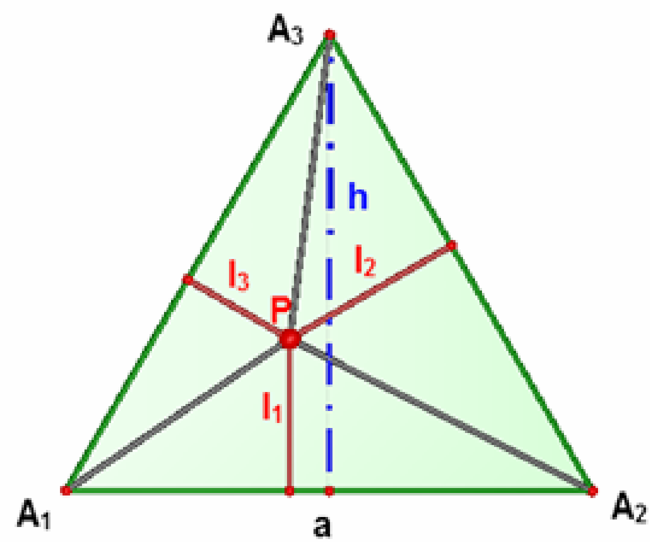
Beweisfindung mittels Analogiebildung

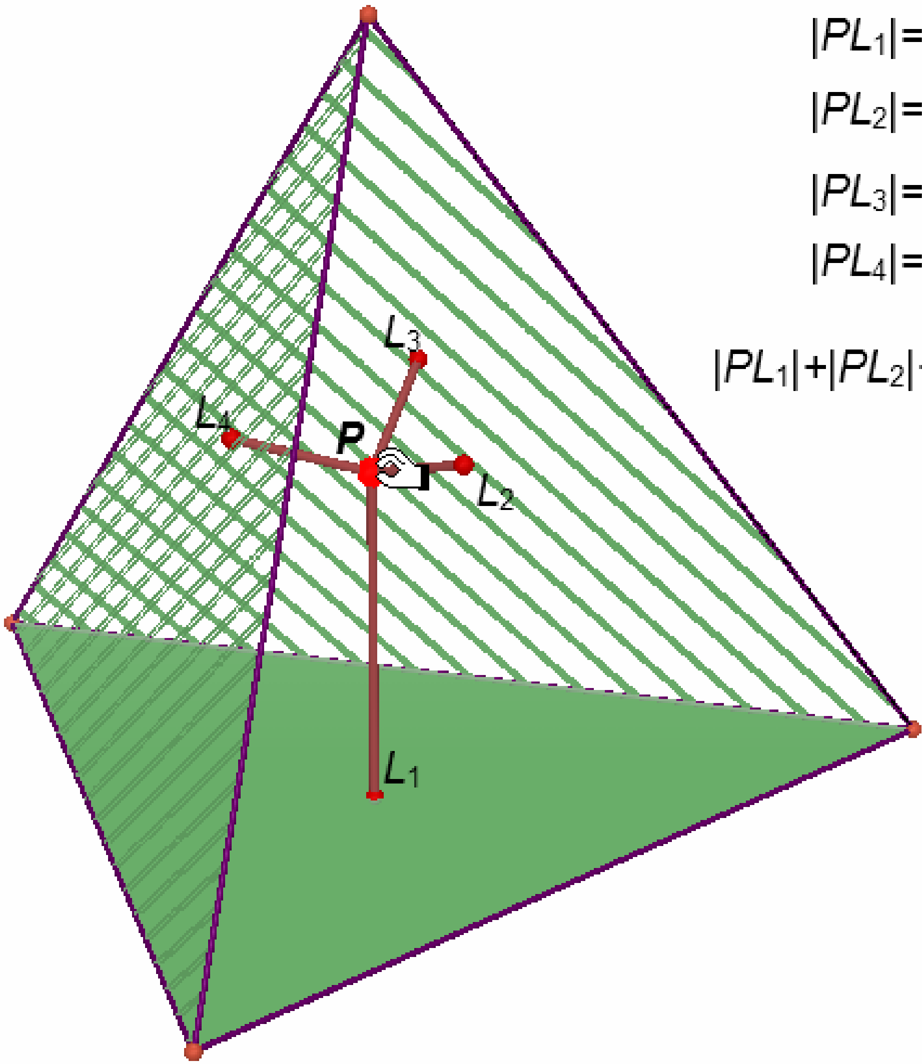
Versuche einen Beweis des entsprechenden Satzes der ebenen Geometrie räumlich zu analogisieren; verwende dabei die bei der Satzfindung erstellte Konstruktion als Beweisfigur. Oder verwende den entsprechenden Satz der ebenen Geometrie als Beweismittel, um einen Beweis für räumliche Aussage zu finden.
- Das funktioniert sehr oft, aber nicht immer!

Behauptung: Die Summe aus den Lotabständen l_i (i=1,2,3) eines Punktes P im Inneren des gleichseitigen Dreiecks $A_1A_2A_3$ zu jeweils einer der drei Seiten ist stets gleich der Dreieckshöhe h, d. h.
$l_1+l_2+l_3=h$.



Beweis: Das gleichseitige Dreieck $A_1A_2A_3$ kann von P aus in die drei Teildreiecke A_1A_2P, A_2A_3P, A_3A_1P zerlegt werden.
Der Flächeninhalt des gesamten Dreiecks ist also gleich der Summe der Flächeninhalte dieser drei Teildreiecke:
$F(A_1A_2A_3)=F(A_1A_2P)+F(A_2A_3P)+F(A_3A_1P)$
$=l_1*a/2+l_2*a/2+l_3*a/2$ (I).
Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ kann andererseits aus a und h zu
$F(A_1A_2A_3)=1/2*a*h$ bestimmt werden.
Durch Gleichsetzen mit (I) folgt $l_1+l_2+l_3=h$.





$|PL_1|$=3,38 cm

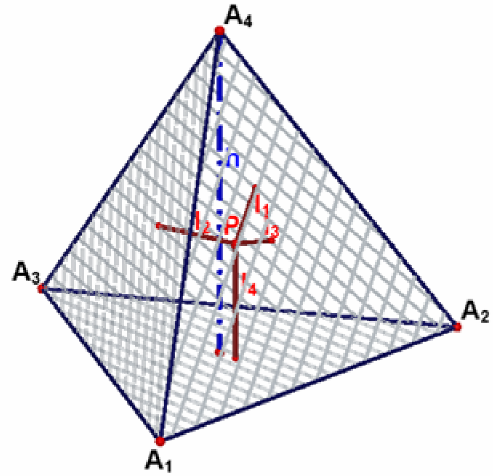
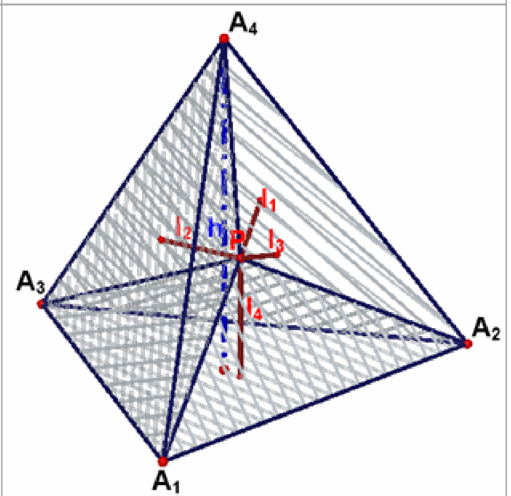
$|PL_2|$=1,30 cm

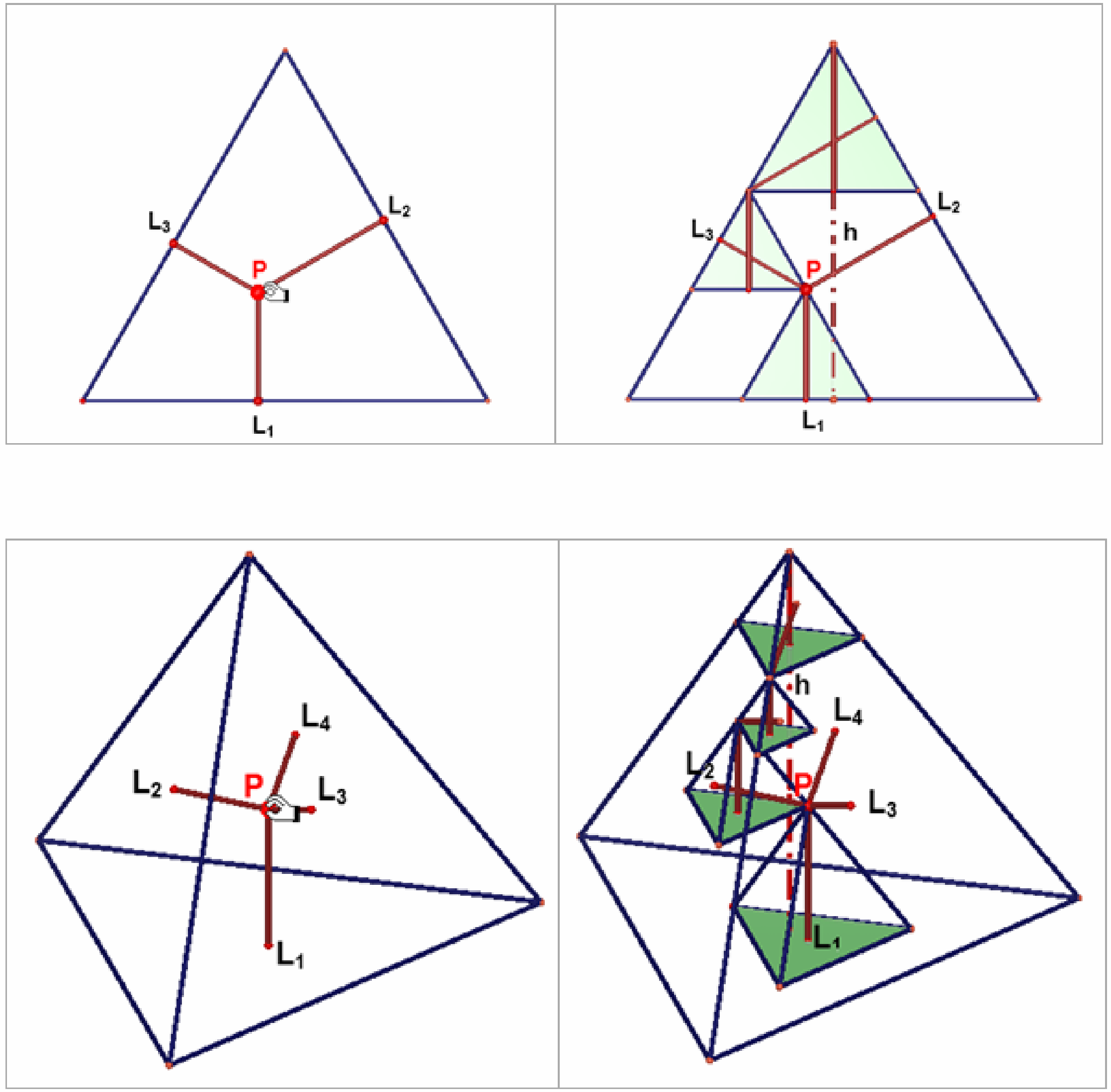
$|PL_3|$=1,64 cm

$|PL_4|$=1,40 cm

$|PL_1|+|PL_2|+|PL_3|+|PL_4|$=7,73 cm

Räumliche Analogisierung

Behauptung: Die Summe aus den Quotienten, gebildet aus dem Lotabstand l_i (i=1,2,3,4) eines Punktes P im Inneren des regelmäßigen **Tetraeder**s $A_1A_2A_3A_4$ zu jeweils einer der vier Seitenflächen, ist stets gleich der Tetraederhöhe h, d. h. $l_1+l_2+l_3+l_4=h$	
Beweis: Das regelmäßige Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ kann von P aus in die vier Teiltetraeder $A_1A_2A_4P$, $A_2A_3A_4P$, $A_3A_1A_4P$, $A_1A_2A_3P$ zerlegt werden. Das Volumen des gesamten Tetraeders ist also gleich der Summe der Volumina dieser vier Teiltetraeder: $V(A_1A_2A_3A_4)=V(A_1A_2A_4P)+V(A_2A_3A_4P)+V(A_3A_1A_4P)+V(A_1A_2A_3P)$ $=1/3*F*l_3+1/3*F*l_1+1/3*F*l_2+1/3*F*l_4$ **(I)**, wobei F der Inhalt der gleichseitigen Seitenfläche des regelmäßigen Tetraeders ist. Das Volumen des regelmäßigen Tetraeders ergibt sich andererseits mit F und h zu $V(A_1A_2A_3A_4)=1/3*F*h$. Durch Gleichsetzen mit (I) ergibt sich $l_1+l_2+l_3+l_4=h$.	

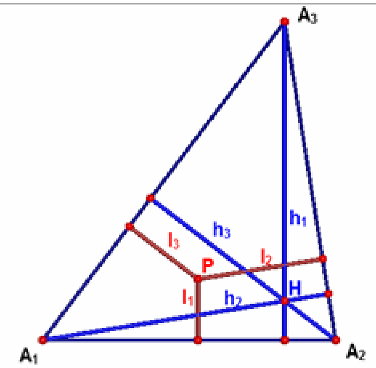


L3
L2
P
L1
h
L3
L2
P
L1
L4
L2
P
L3
L1
h
L4
L2
P
L3
L1

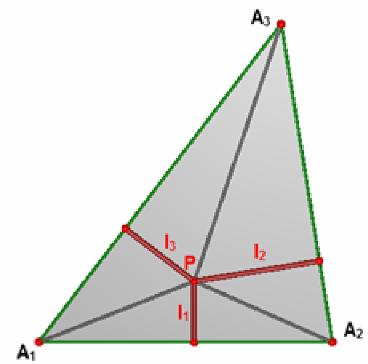
Verallgemeinerung

Behauptung: Die Summe aus den Quotienten, gebildet aus dem Lotabstand l_i (i=1,2,3) eines Punktes P im Inneren des **Dreiecks** $A_1A_2A_3$ zu jeweils einer der drei Seiten und der zugehörigen Dreieckshöhe h_i, ist stets gleich 1, d. h. $\mathbf{l_1/h_1+l_2/h_2+l_3/h_3=1}$.

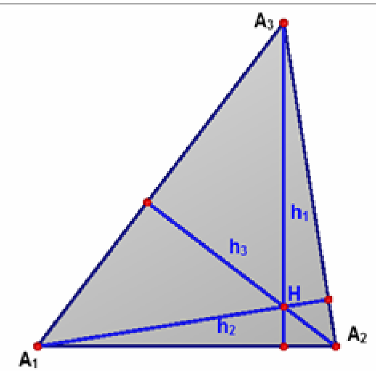
Spezialisierung: Für ein regelmäßiges, d. h. gleichseitiges Dreieck ist $h_1=h_2=h_3=h$ und somit $\mathbf{l_1+l_2+l_3=h}$.



Beweis: Das Dreieck $A_1A_2A_3$ kann von P aus in die drei Teildreiecke A_1A_2P, A_2A_3P, A_3A_1P zerlegt werden. Der Flächeninhalt des gesamten Dreiecks ist also gleich der Summe der Flächeninhalte dieser drei Teildreiecke: $F(A_1A_2A_3)$
$=V(A_1A_2P)+V(A_2A_3P)+V(A_3A_1P)$
$=1/2*|A_1A_2|*l_1+1/2*|A_2A_3|*l_2+1/2*|A_3A_1|*l_3$ **(I)**



Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ kann auf verschiedene Weise berechnet werden, je nachdem welche der Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 mit der jeweils zugehörigen Höhe gewählt wird:
$F(A_1A_2A_3)=1/2*|A_1A_2|*h_1=1/2*|A_2A_3|*h_2=1/2*|A_3A_1|*h_3$,
also $|A_1A_2|=2*F(A_1A_2A_3)/h_1$,
$|A_2A_3|=2*F(A_1A_2A_3)/h_2$,
$|A_3A_1|=2*F(A_1A_2A_3)/h_3$.



Eingesetzt in **(I)** ergibt sich: $F(A_1A_2A_3)=l_1*F(A_1A_2A_3)/h_1+l_2*F(A_1A_2A_3)/h_2+l_3*F(A_1A_2A_3)/h_3$, nach Division mit $F(A_1A_2A_3)$ also $l_1/h_1+l_2/h_2+l_3/h_3+l_4/h_4=1$.

h_1=11,83 cm

h_2=12,50 cm

h_3=8,03 cm

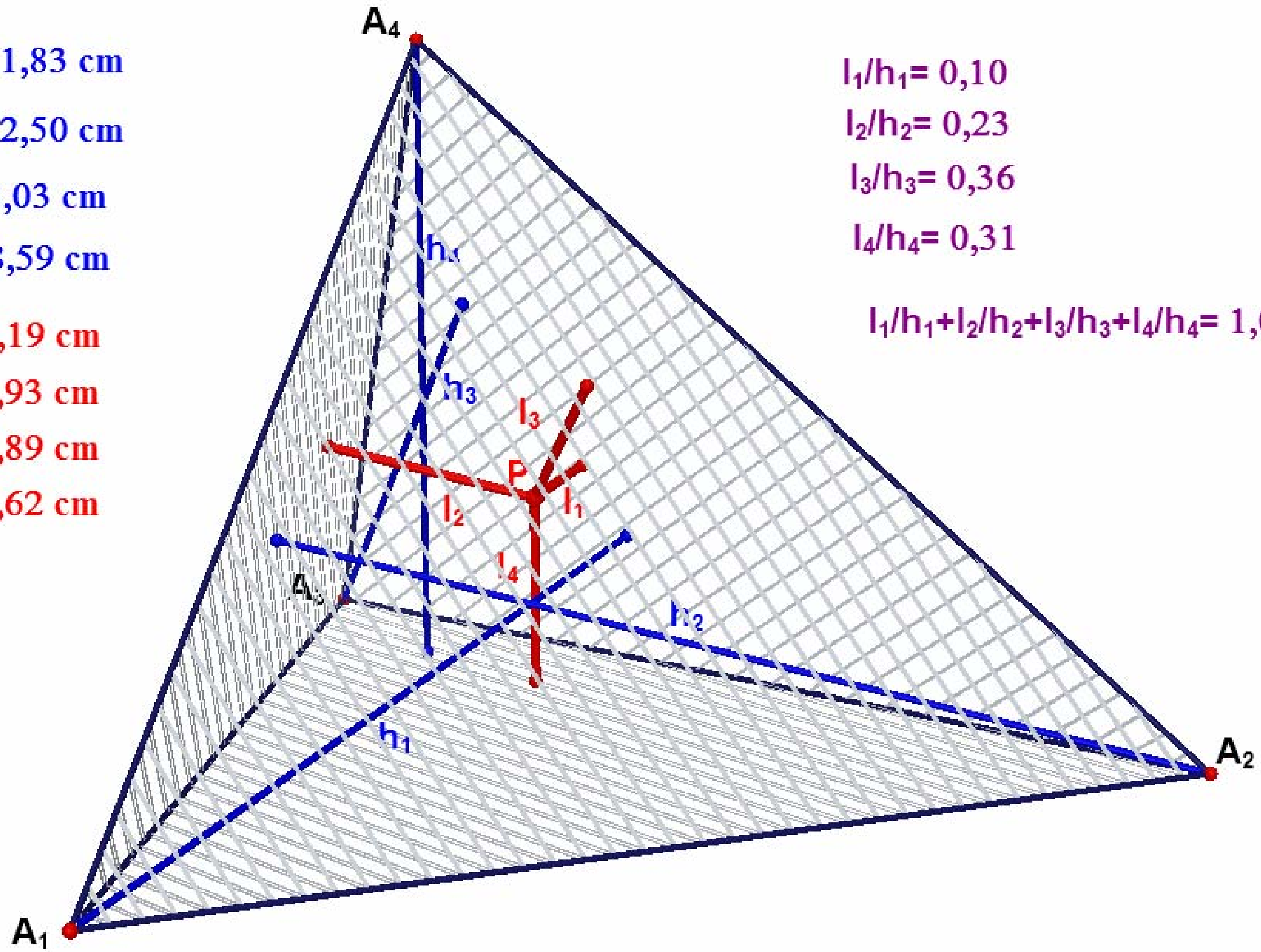
h_4=8,59 cm

l_1=1,19 cm

l_2=2,93 cm

l_3=2,89 cm

l_4=2,62 cm



l_1/h_1= 0,10

l_2/h_2= 0,23

l_3/h_3= 0,36

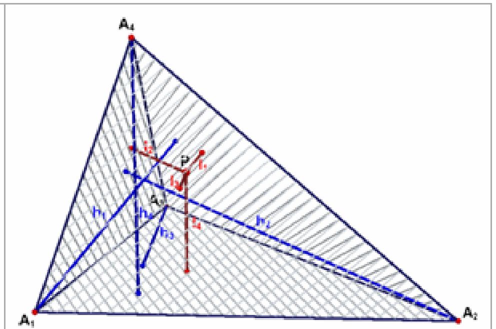
l_4/h_4= 0,31

$l_1/h_1+l_2/h_2+l_3/h_3+l_4/h_4$= 1,00

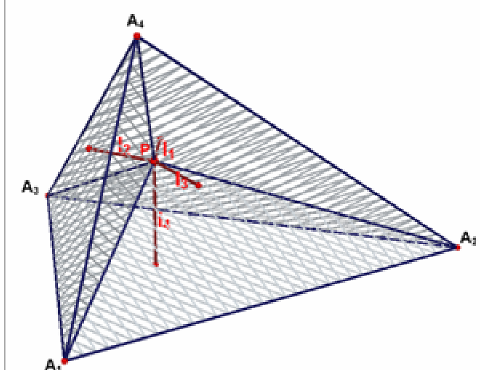
Räumliche Analogisierung

Behauptung: Die Summe aus den Quotienten, gebildet aus dem Lotabstand l_i eines Punktes P im Inneren des **Tetraeders** $A_1A_2A_3A_4$ zu jeweils einer der vier Seitenflächen und der zugehörigen Tetraederhöhe h_i (i=1,2,3,4), ist stets gleich 1, d. h. $l_1/h_1+l_2/h_2+l_3/h_3+l_4/h_4=1$.

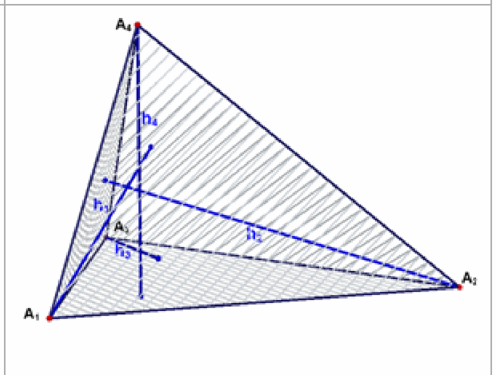
Spezialisierung: Für ein seitenflächengleiches Tetraeder ist $h_1=h_2=h_3=h_4=h$ und somit $l_1+l_2+l_3+l_4=h$.



Beweis: Das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ kann von P aus in die vier Teiltetraeder $A_1A_2A_4P$, $A_2A_3A_4P$, $A_3A_1A_4P$, $A_1A_2A_3P$ zerlegt werden.
Das Volumen des gesamten Tetraeders ist also gleich der Summe der Volumina dieser vier Teiltetraeder:
$V(A_1A_2A_3A_4)=V(A_1A_2A_4P)+V(A_2A_3A_4P)+V(A_3A_1A_4P)+V(A_1A_2A_3P)$
$=1/3*F(A_1A_2A_4)*l_3+1/3*F(A_2A_3A_4)*l_1+1/3*F(A_3A_1A_4)*l_2+1/3*F(A_1A_2A_3)*l_4$ **(I)**



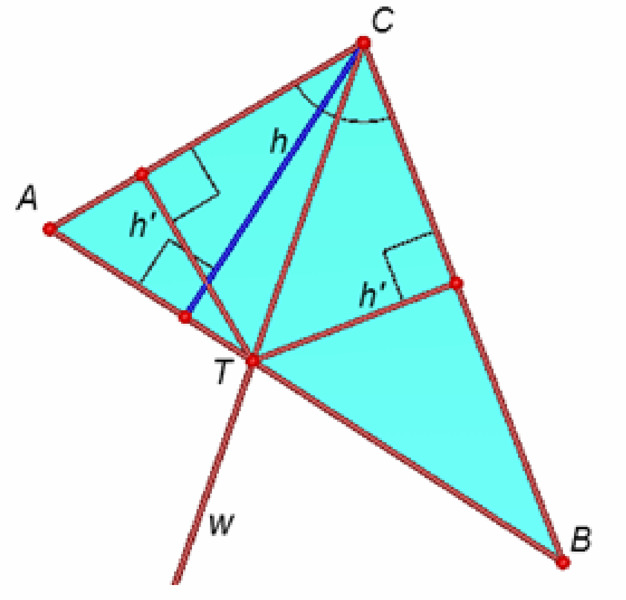
Das Volumen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ kann auf verschiedene Weise berechnet werden, je nachdem welche der Seitenflächen $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_1A_4$, $A_1A_2A_3$ mit der jeweils zugehörigen Höhe gewählt wird:
$V(A_1A_2A_3A_4)=1/3*F(A_1A_2A_4)*h_3=1/3*F(A_2A_3A_4)*h_1=1/3*F(A_3A_1A_4)*h_2=1/3*F(A_1A_2A_3)*h_4$
also $F(A_1A_2A_4)=3*V(A_1A_2A_3A_4)/h_3$,
$F(A_2A_3A_4)=3*V(A_1A_2A_3A_4)/h_1$,
$F(A_3A_1A_4)=3*V(A_1A_2A_3A_4)/h_2$,
$F(A_1A_2A_3)=3*V(A_1A_2A_3A_4)/h_4$.



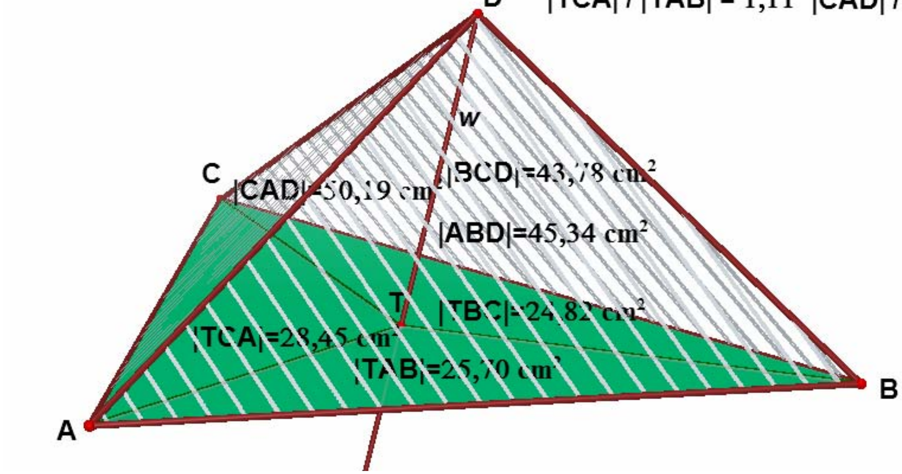
Eingesetzt in **(I)** ergibt sich:
$V(A_1A_2A_3A_4)=l_3*V(A_1A_2A_3A_4)/h_3+l_1*V(A_1A_2A_3A_4)/h_1+l_2*V(A_1A_2A_3A_4)/h_2+l_4*V(A_1A_2A_3A_4)/h_4$,
nach Division mit $V(A_1A_2A_3A_4)$ also $l_1/h_1+l_2/h_2+l_3/h_3+l_4/h_4=1$.

Behauptung: Die Winkelhalbierende eines Innenwinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der Seiten, die Schenkel des Innenwinkels sind: |TA|/|TB| = |AC|/|BC| für die Halbierende w des Winkels mit dem Scheitel C.

Beweis: Da T nach Voraussetzung abstandsgleich zu den Winkelschenkeln AC, BC, gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke BCT und ACT:
|ACT|=|AC|*h'/2=|TA|*h/2,
|BCT|=|BC|*h'/2=|TB|*h/2.
Division liefert: |TA|/|TB| = |AC|/|BC|.



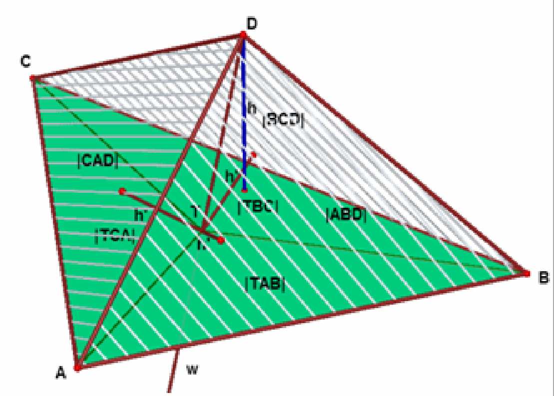
|TAB| / |TBC| = 1,04 |ABD| / |BCD| = 1,04
|TBC| / |TCA| = 0,87 |BCD| / |CAD| = 0,87
|TCA| / |TAB| = 1,11 |CAD| / |ABD| = 1,11

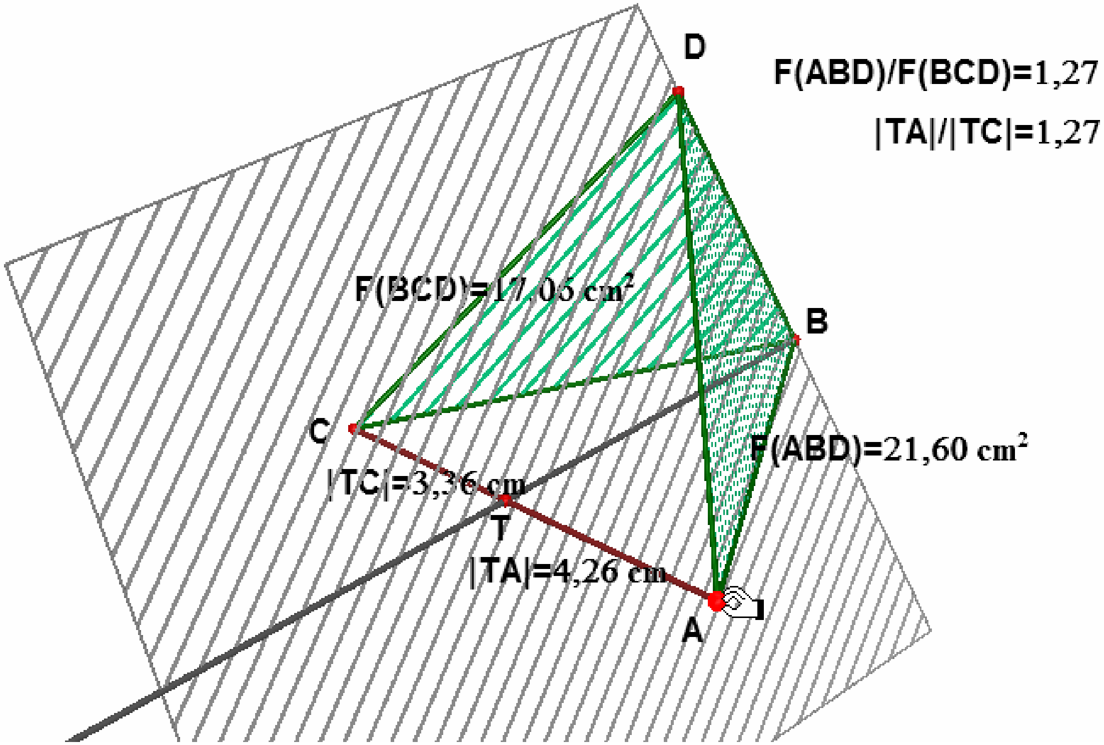


1. Räumliches Analogon

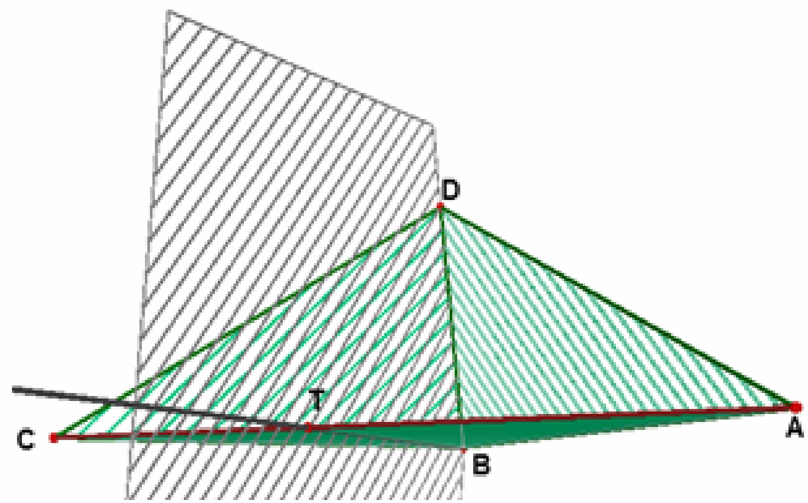
Behauptung: Die zu den Seitenflächen eines Tetraeders abstandsgleiche Gerade teilt die Gegenseitenfläche im Verhältnis dieser Seitenflächen. Für die abstandsgleiche Gerade w durch die Ecke D also: |TAB|/|TBC|/|TCA| =|ABD|/|BCD|/|CAD|.

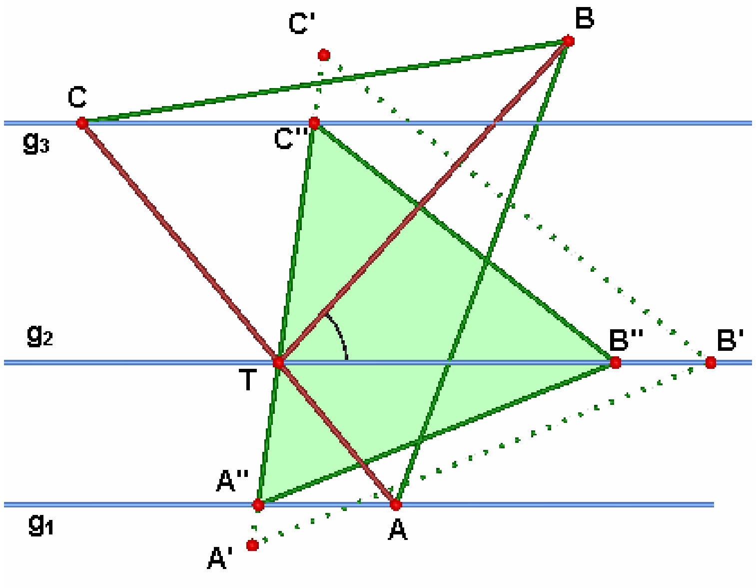
Beweis: Da T nach Voraussetzung gleichen Abstand zu den Seitenflächen ABD, BCD, CAD hat, gilt für die Rauminhalte der Teiltetraeder ABDT, BCDT, CADT:
|ABDT|=|ABD|*h'/3=|TAB|*h/3,
|BCDT|=|BCD|*h'/3=|TBC|*h/3,
|CADT|=|CAD|*h'/3=|TCA|*h/3.
mittels Division folgt daraus
|TAB|/|TBC|=|ABD|/|BCD|,
|TBC|/|TCA|=|BCD|/|CAD|,
|TCA|/|TAB|=|CAD|/|ABD|.
Kurz:|TAB|/|TBC|/|TCA|=|ABD|/|BCD|/|CAD|.

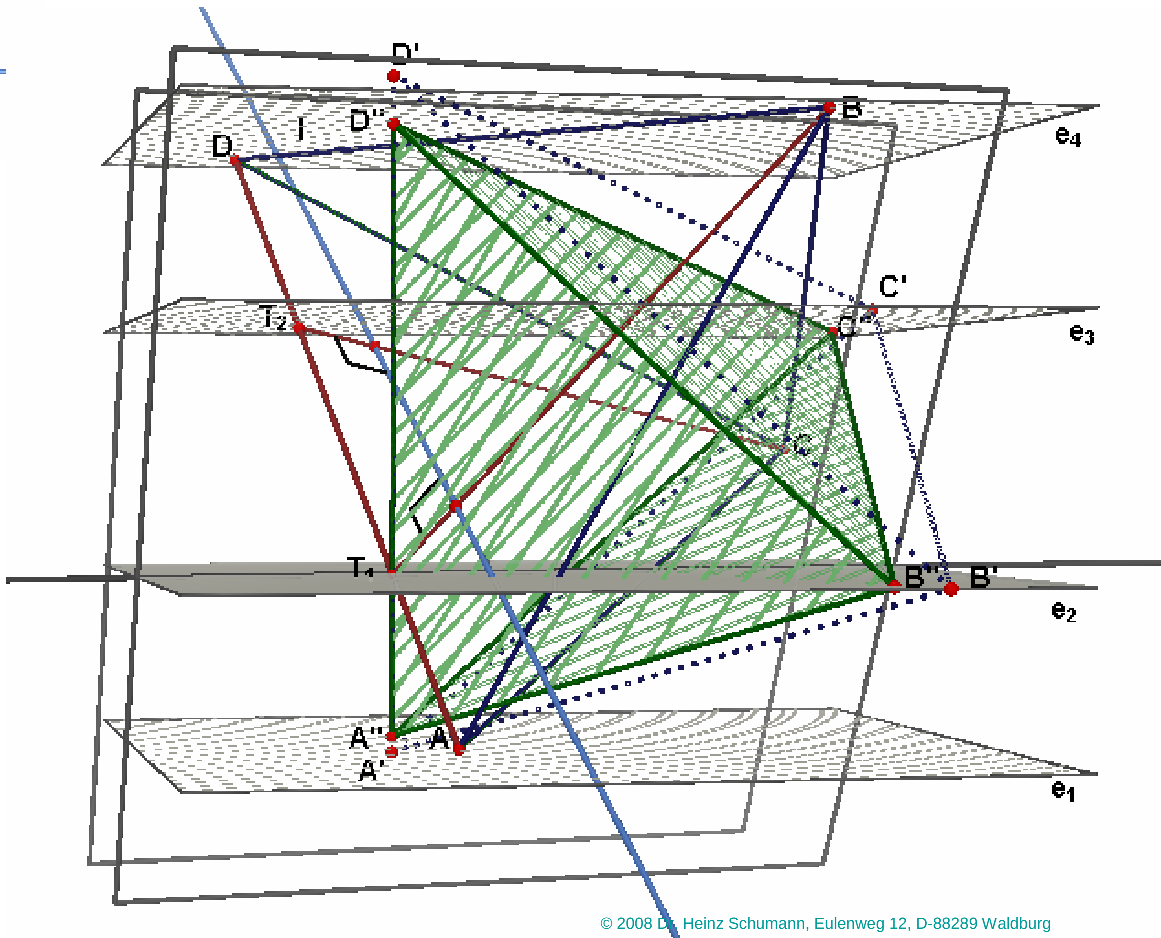




2. Räumliches Analogon

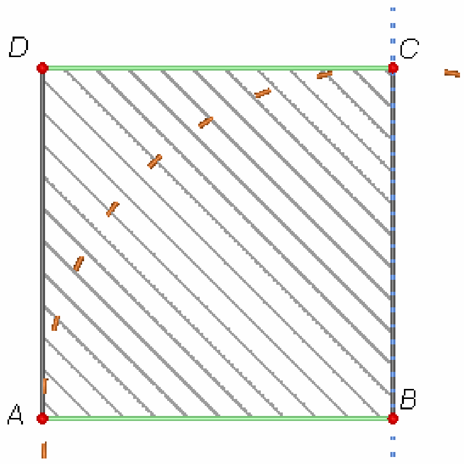
Behauptung: Die Halbierende des Winkels zwischen zwei Seitenflächen eines Tetraeders ABCD teilt die Gegenkante im Verhältnis dieser Seitenflächen. Für die Seitenflächen ABD, BCD ist also |TA|/|TC| = F(ABD)/F(BCD), wobei T Schnittpunkt der Winkelhalbierende zwischen Dreieck ABD und Dreieck BCD mit der Gegenkante AC zur Kante BD.	

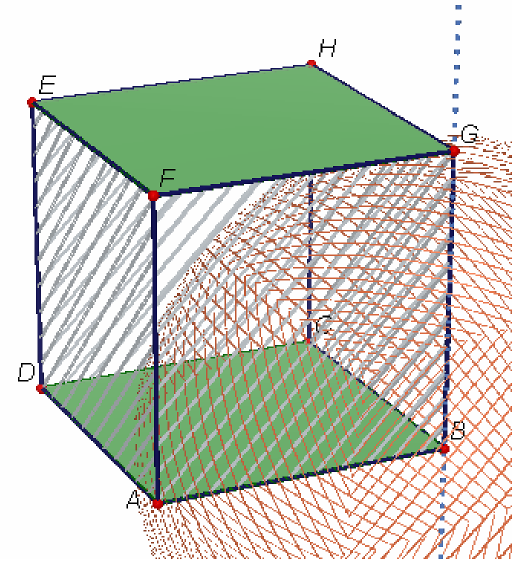

C'
B
C
g3
C''
g2
B''
B'
T
A''
g1
A
A'


D'
B
e4
D''
D
l
C'
T2
C''
e3
C
T1
B''
B'
e2
A''
A
A'
e1

3. Vieleck-Analogisierungen

Analogisierung einer Quadratkonstruktion





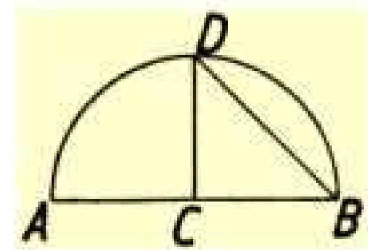
Quadratkonstruktion			Würfelkonstruktion
1.	Quadratseite AB		Würfelseite ABCD
2.	Lot auf AB in B		Lot auf ABCD in B
3.	Kreis um B mit Radius AB		Kugel um B mit Radius AB
4.	Schnittpunkt Lot mit Kreis: C		Schnittpunkt Lot mit Kugel: G
5.	Parallelverschiebung der Seite AB von B nach C: Seite CD		Parallelverschiebung der Seite ABCD von B nach G: Seite EFGH
6.	Verbindung der Ecke B mit C und A mit D: Quadrat ABCD.		Verbindung der Kante AB mit FG, BC mit GH, CD mit HE und DA mit EF: Würfel ABCDEFGH.

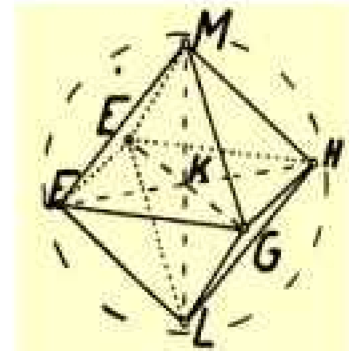
Analogisierung einer Konstruktionsbeschreibung

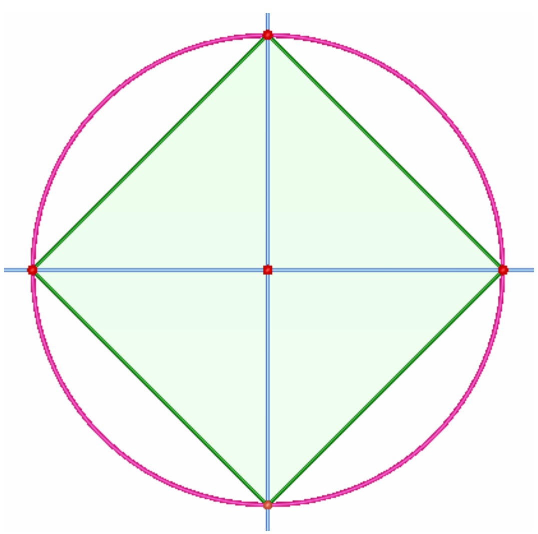
Beschreibung der Oktaeder-Konstruktion aus dem 13. Buch der *Elemente des Euklid* (nach Thaer S. 400/401):

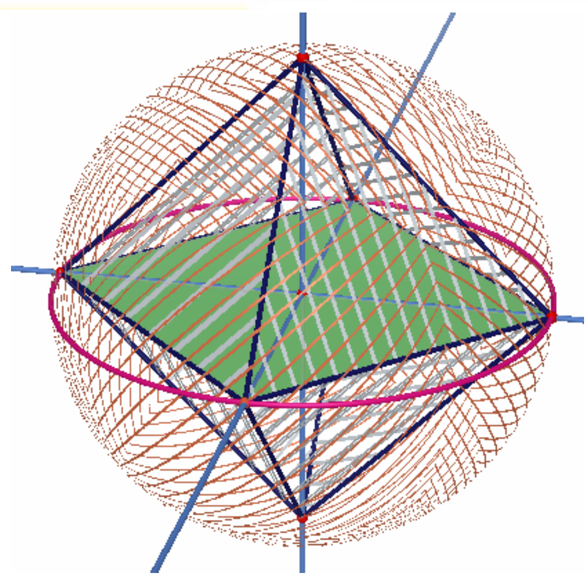
Ein Oktaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die früheren Körper zu umschließen;

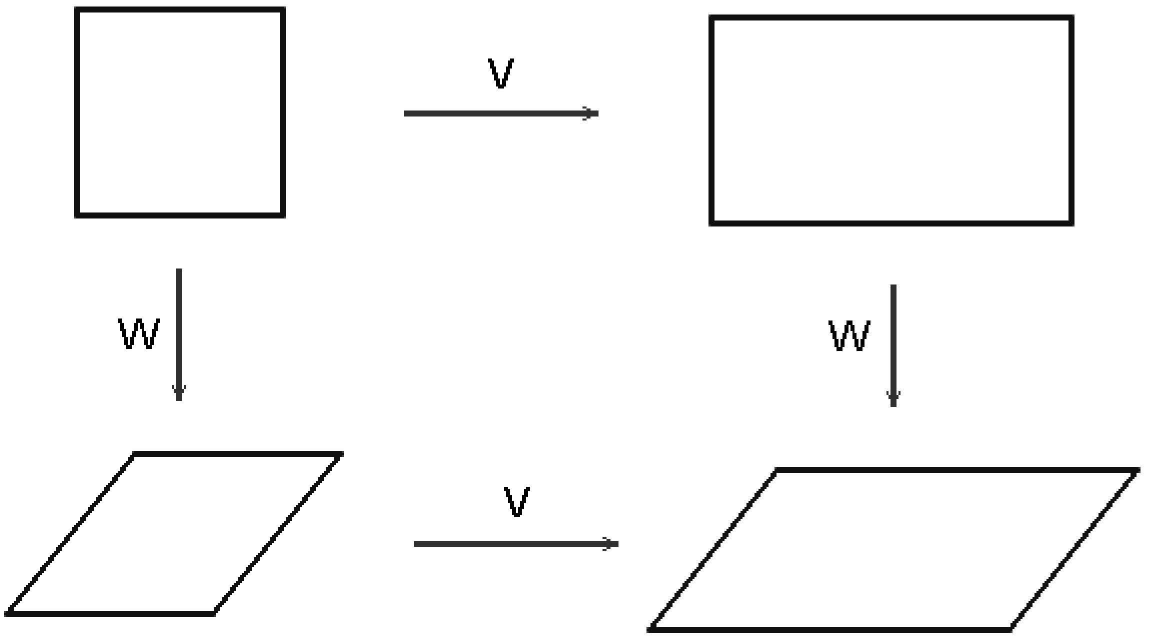
Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, halbiere ihn in C (I, 10), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man das Quadrat $EFGH$ hin, dessen Seiten alle $= DB$ (I, 46), ziehe HF, EG und errichte im (Schnitt-)Punkt K auf der Ebene des Quadrats $EFGH$ die Senkrechte KL (XI, 12), verlängere sie nach der anderen Seite als KM, trage sowohl auf KL als KM Strecken KL, KM = einer der Strecken EK, FK, GK, HK ab und ziehe LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH.



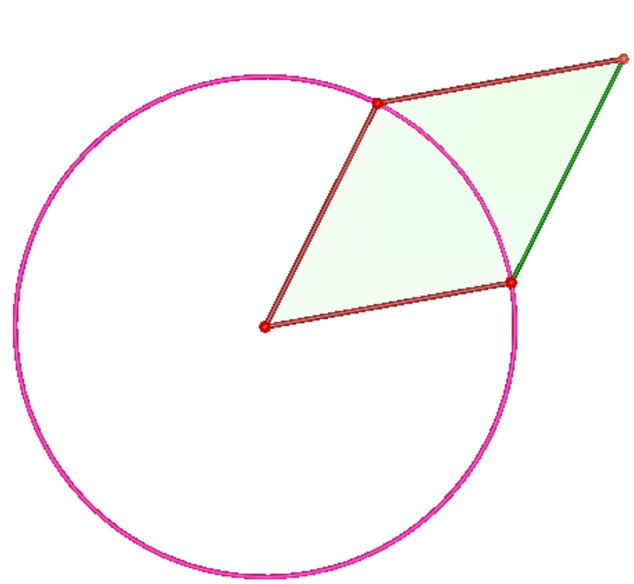


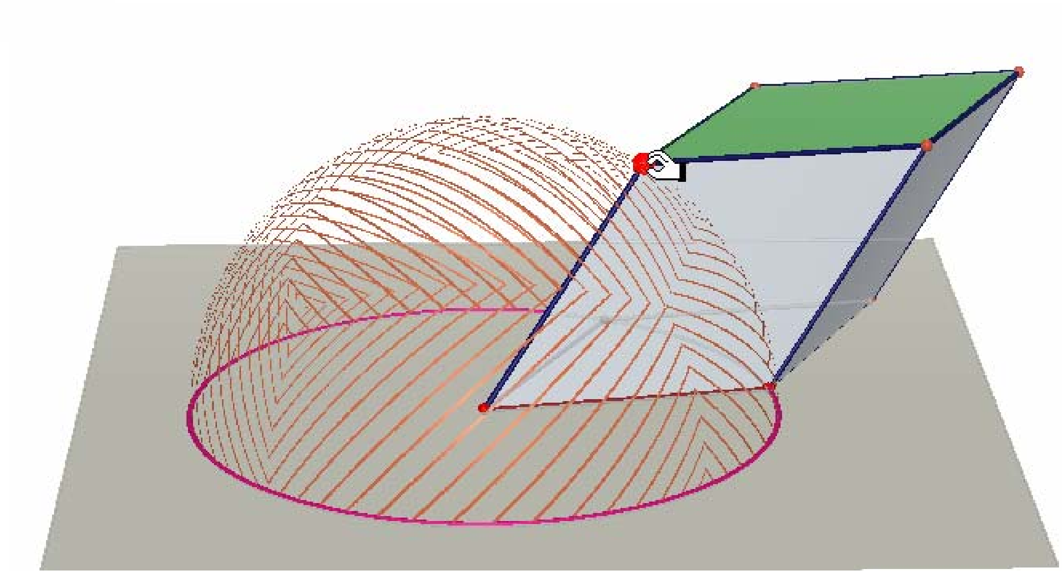


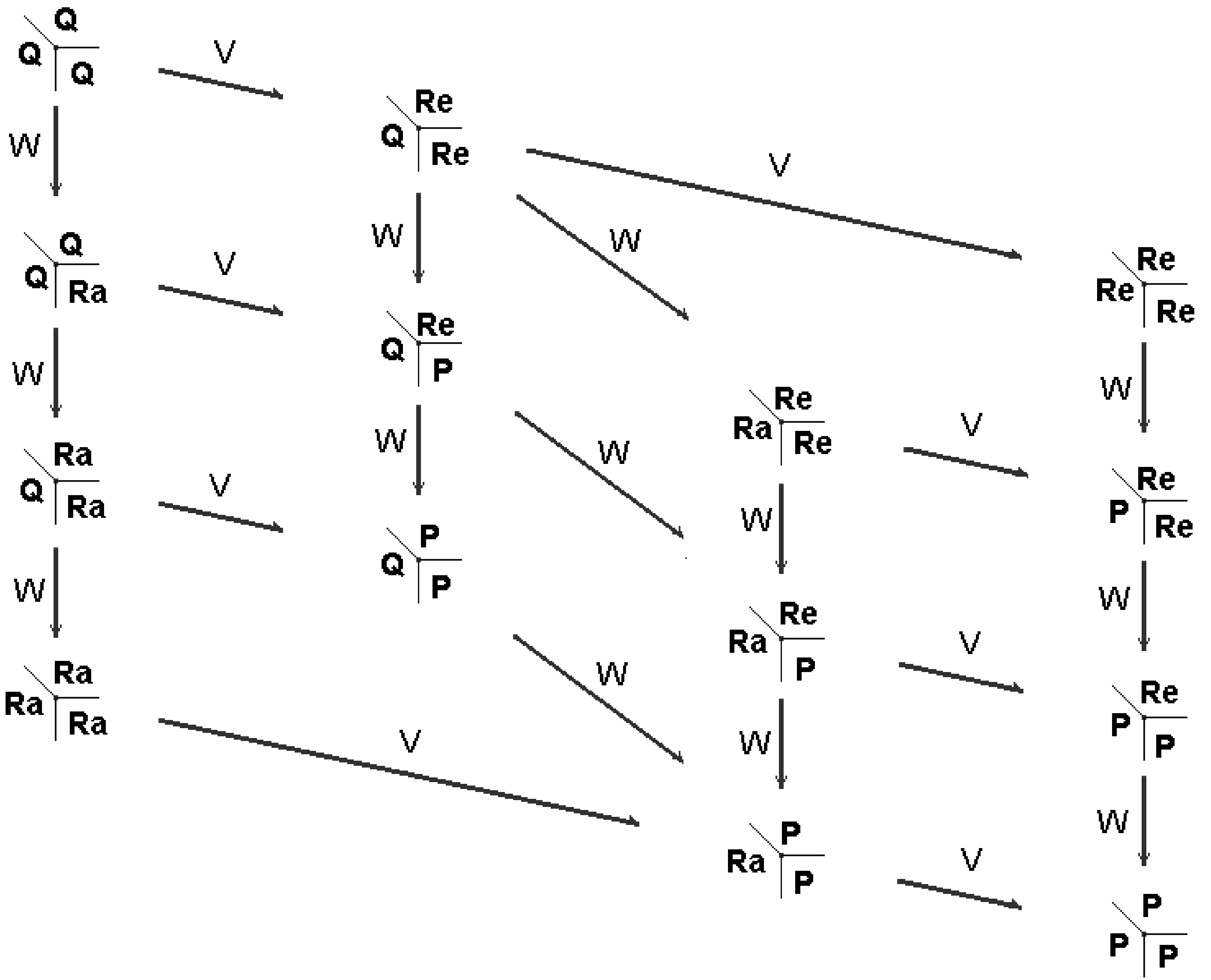




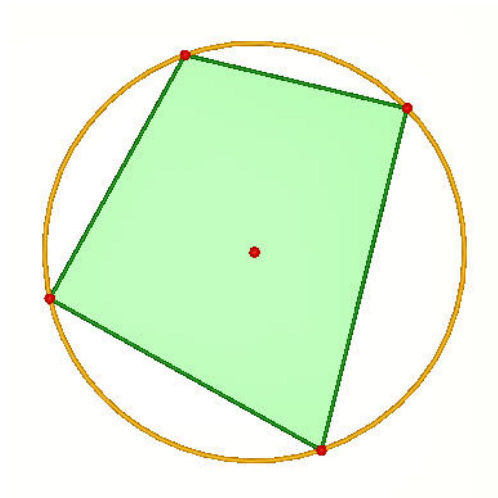
Das Haus der Parallelogramme



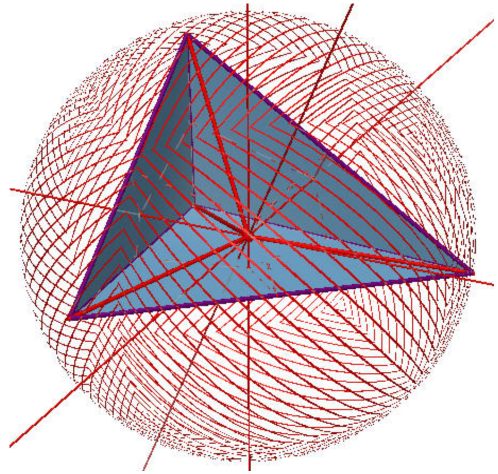




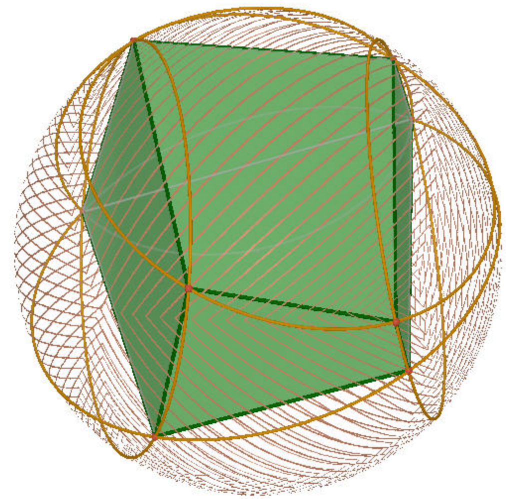
3D-Analogon: Das Haus der Parallelepipede (Spate)



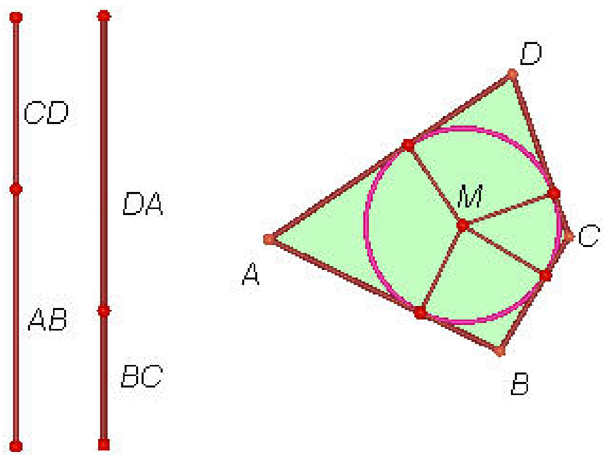
Umkreis-Viereck

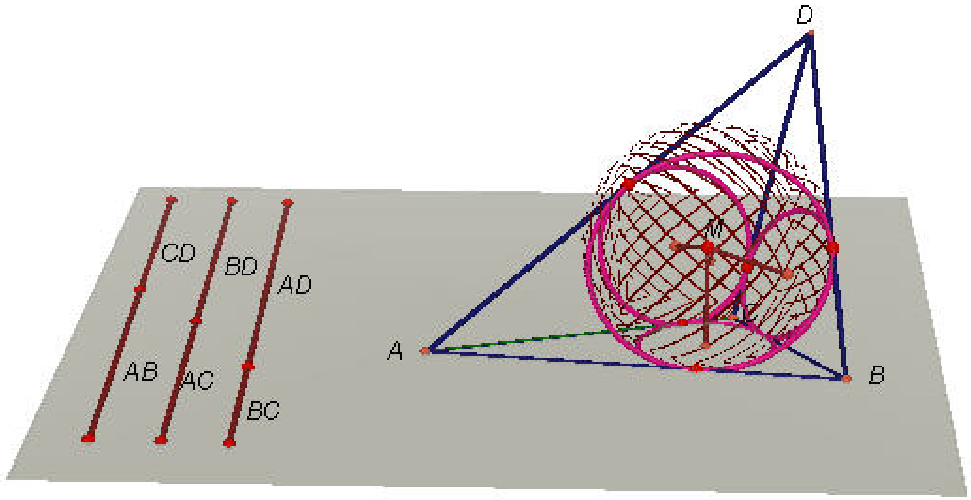


Tetreder mit Umkugel



Umkugel-Hexaeder
aus Sehnenvierecken

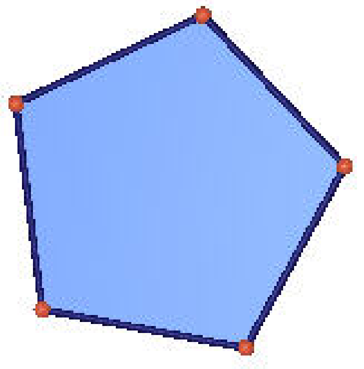


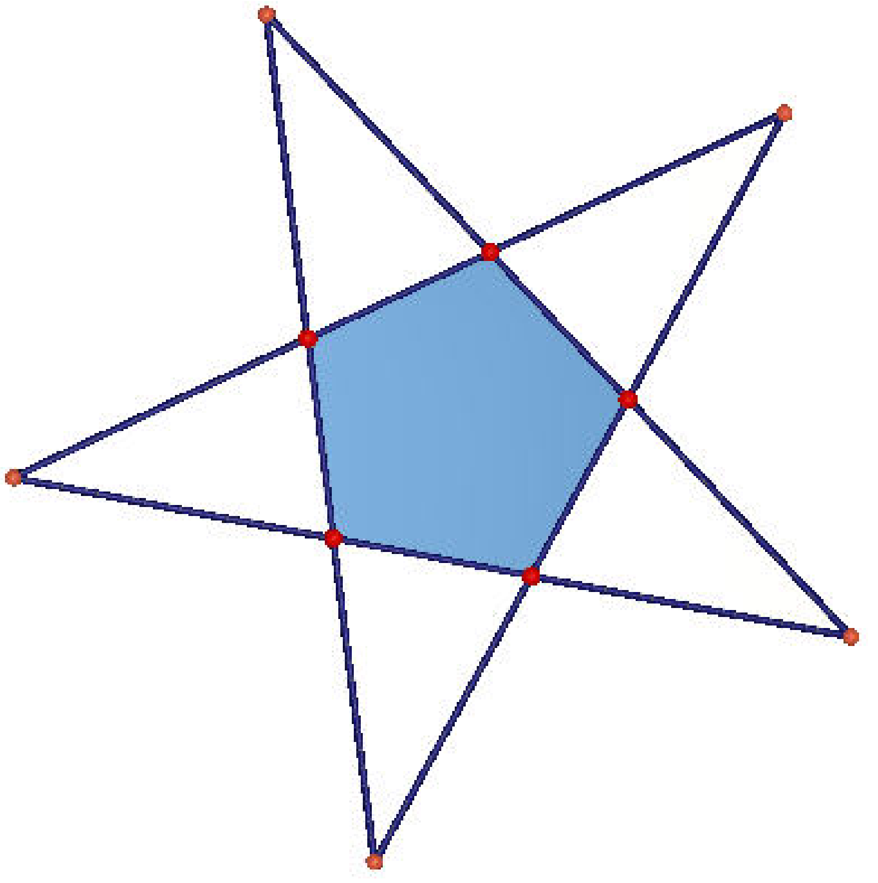


Inkreis-Viereck

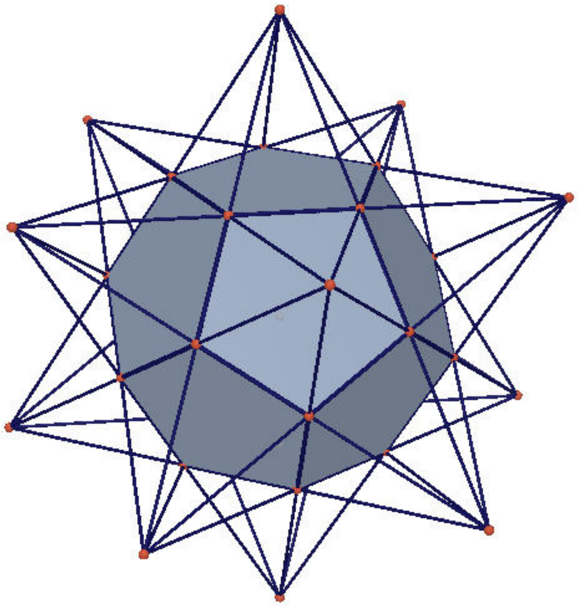
Analogisierung regelmäßiger Sternvielecken

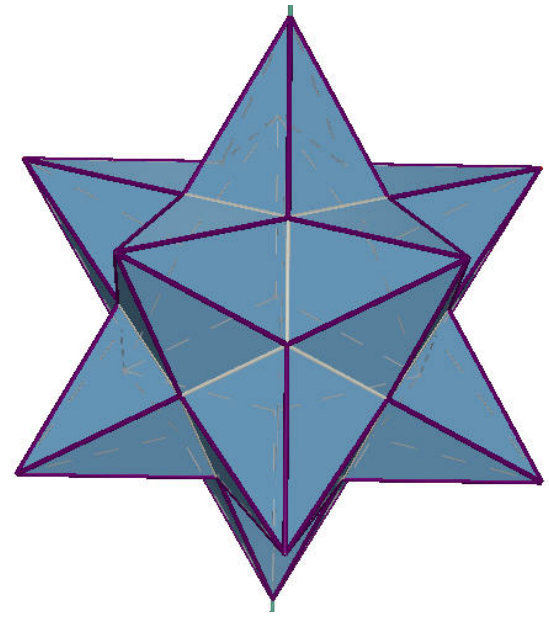
Besonders gesterntes regelmäßiges 5-Eck





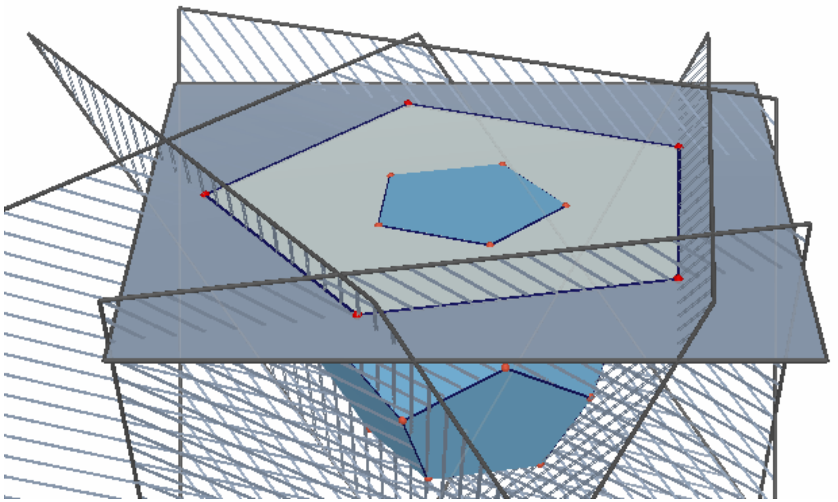
Reguläres Dodekaeder:
Besondere Sternung 1. Art

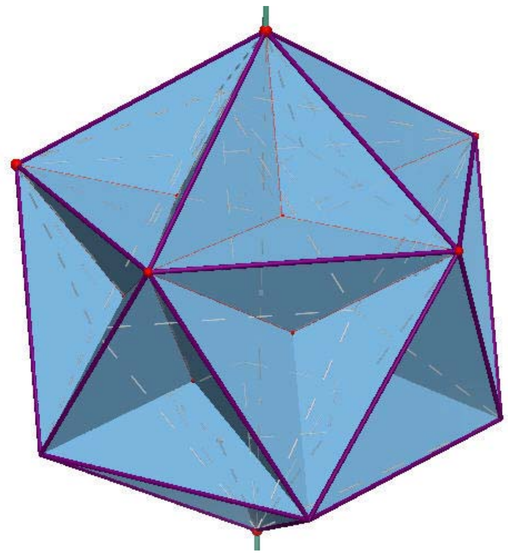




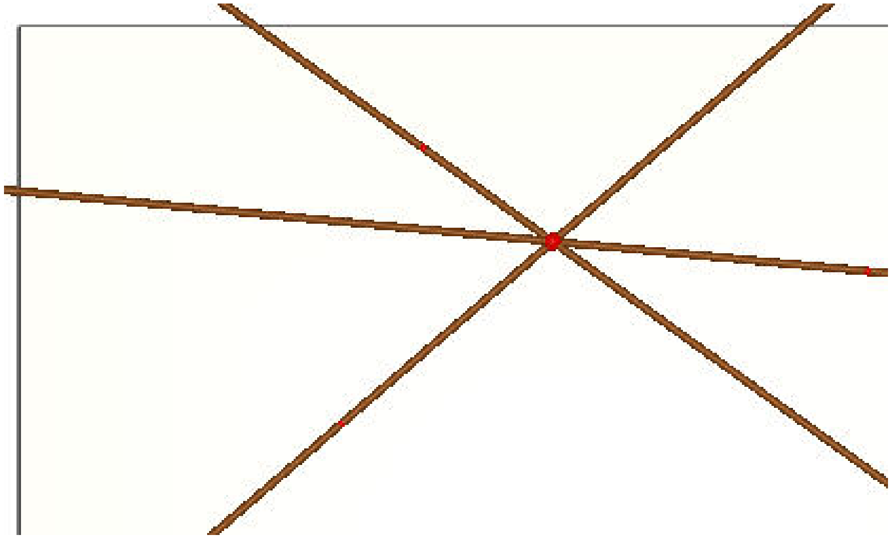
Reguläres Dodekaeder:
Besondere Sternung 2. Art

...



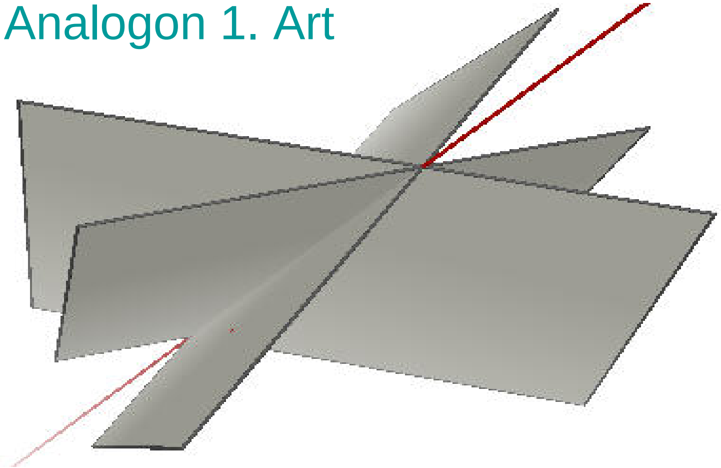


4. Analogisierung der Lage ebener Geraden

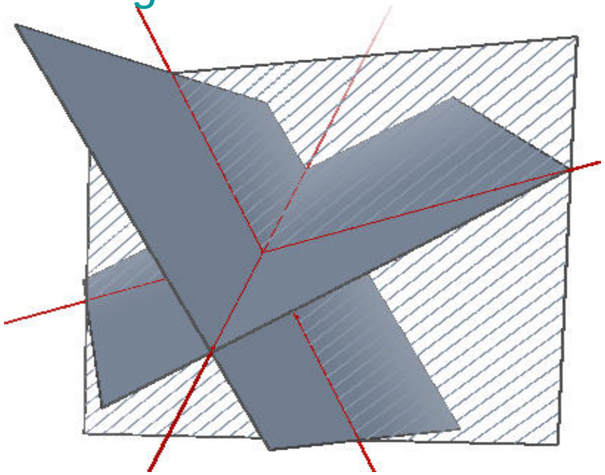


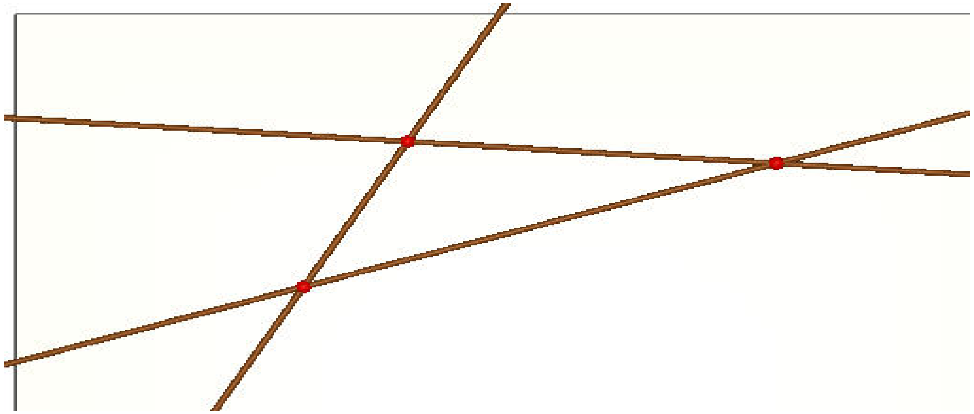
drei einander schneidende Geraden

Analogon 1. Art

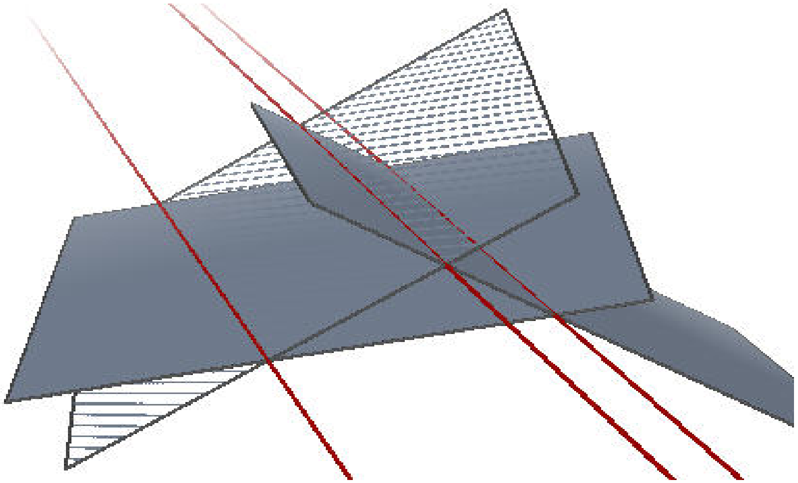


Analogon 2. Art

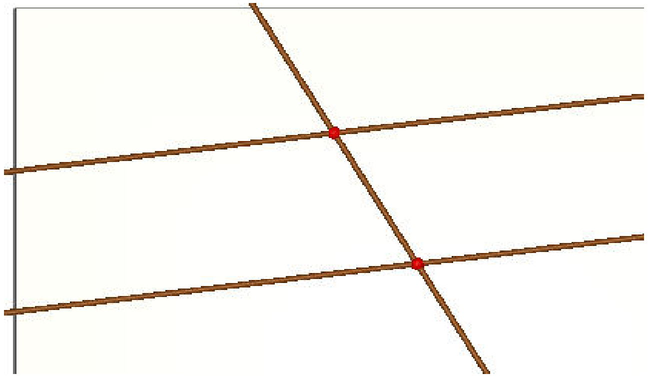




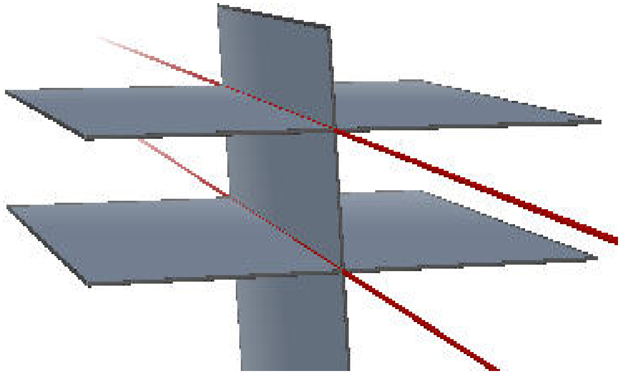
drei sich paarweise schneidende Geraden



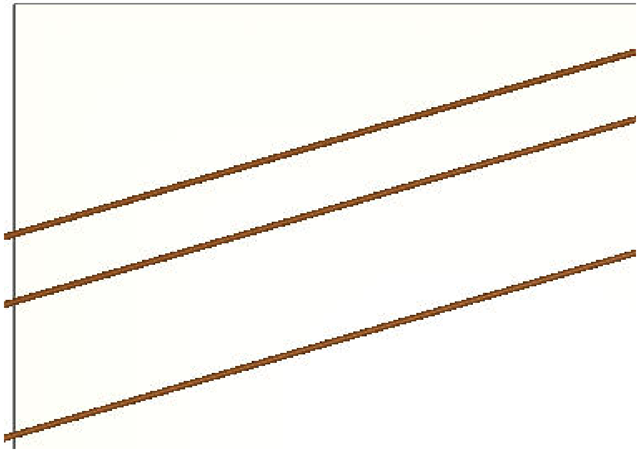
3D-Analogie



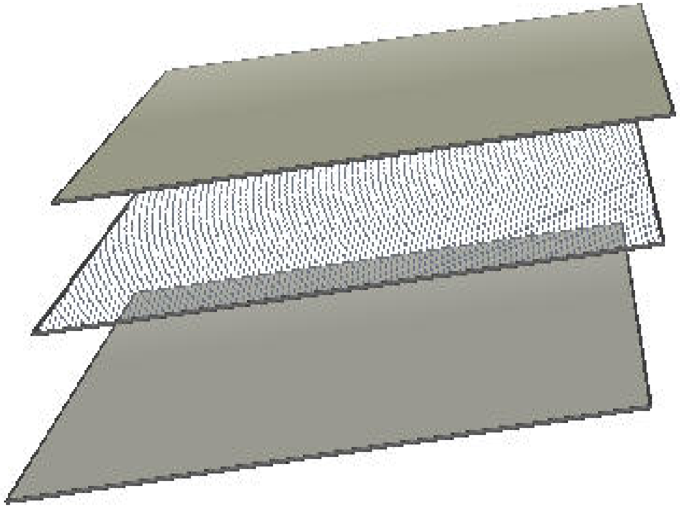
ein Paar paralleler Geraden, geschnitten von einer dritten Geraden



3D - Analogie



drei parallel Geraden

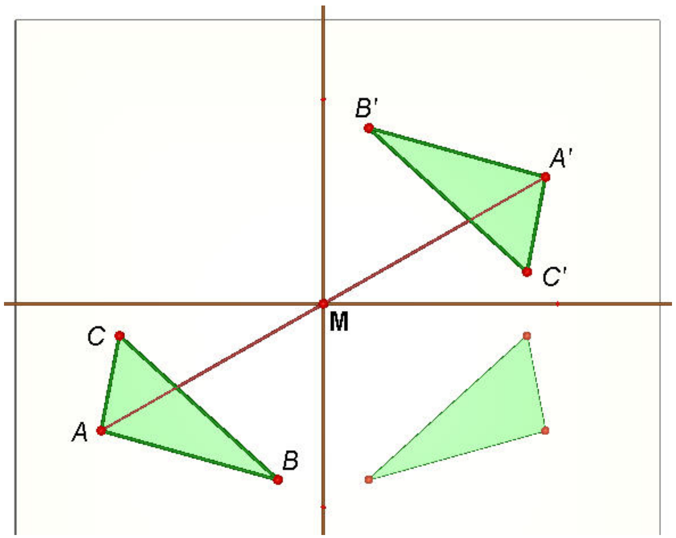


3D - Analogie

5. Analogisierung der ebenen Kongruenzabbildungen

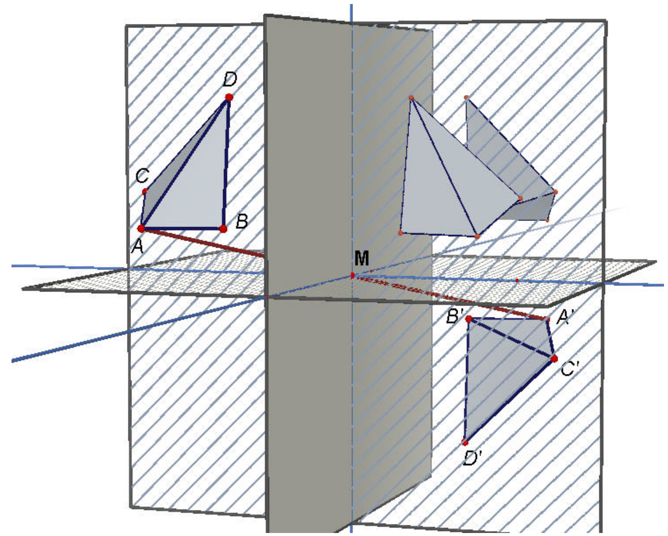
Eine Isometrie der Ebene ist bestimmt durch 3 nicht kollineare Punkte.

3D-Analogon: **Eine Isometrie des Raumes ist bestimmt durch 4 nicht komplanare Punkte.**

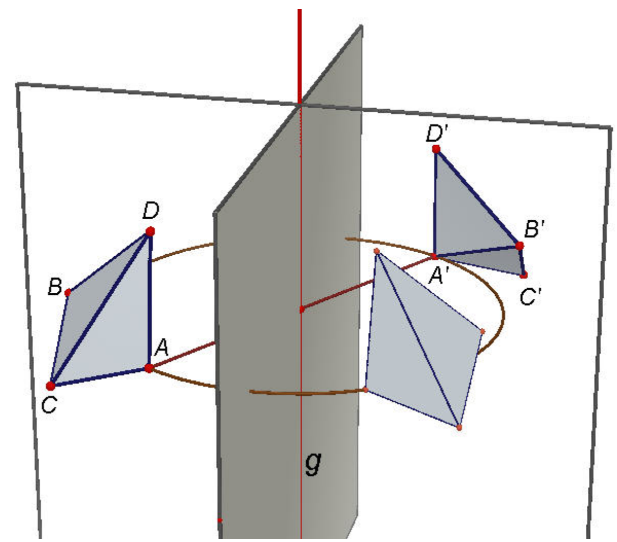


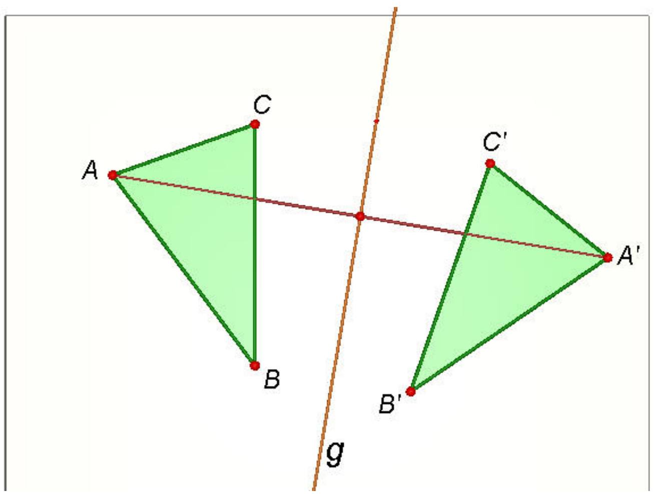
Ebene Punktspiegelung

Analogon 1. Art



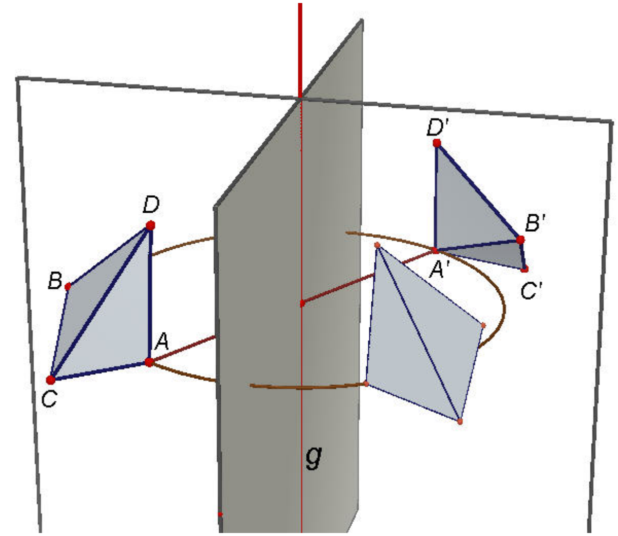
Analogon 2. Art



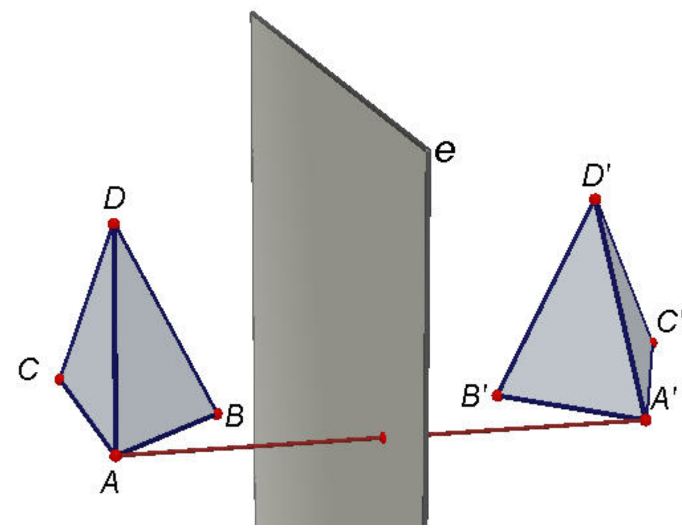


Geradenspiegelung

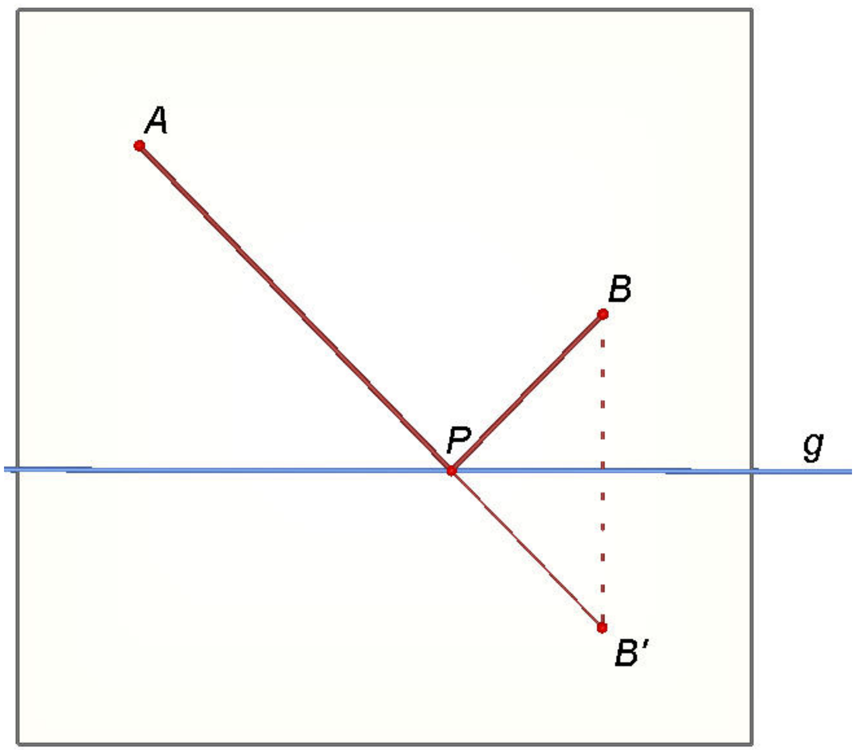
Analogon 1. Art



Analogon 2. Art

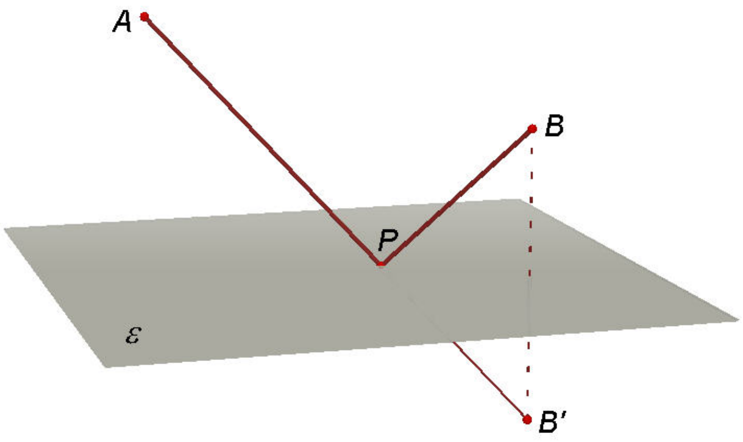


Eine Anwendung der Geraden-/Ebenenspiegelung

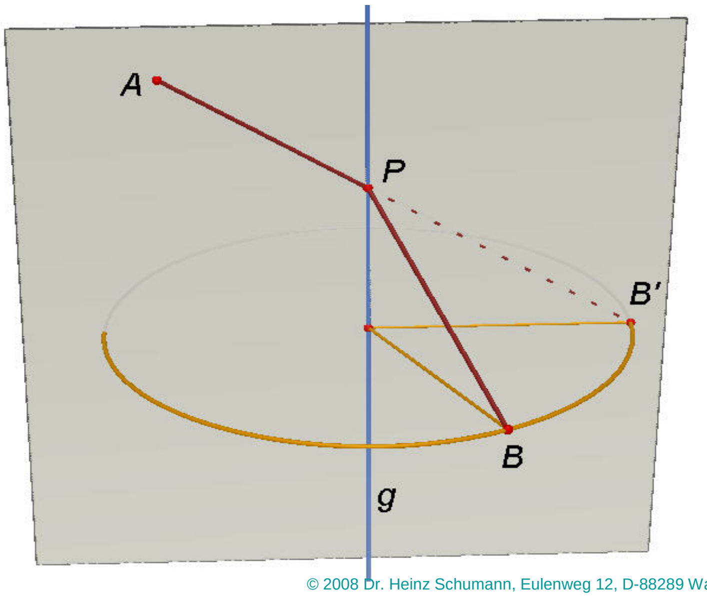


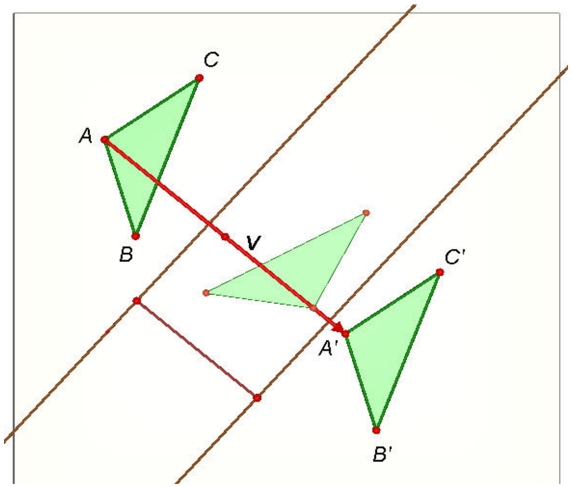
Optimierungsaufgabe mit Lösung

Analogon 1. Art

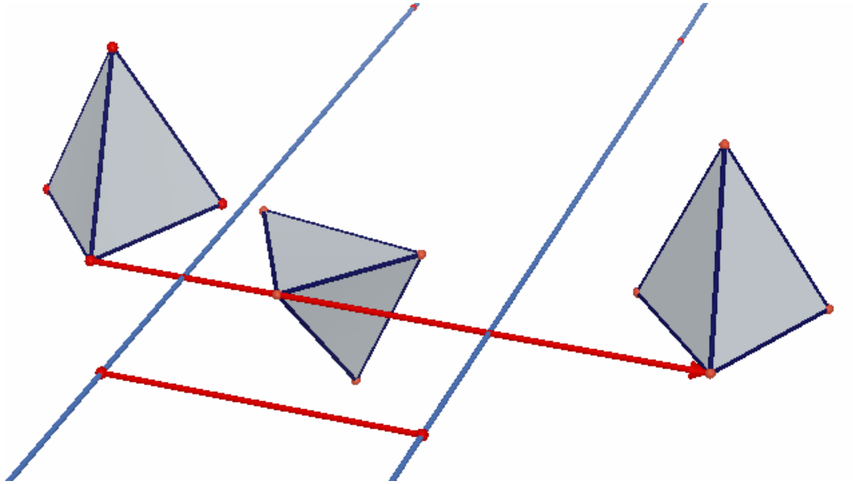


Analogon 2. Art

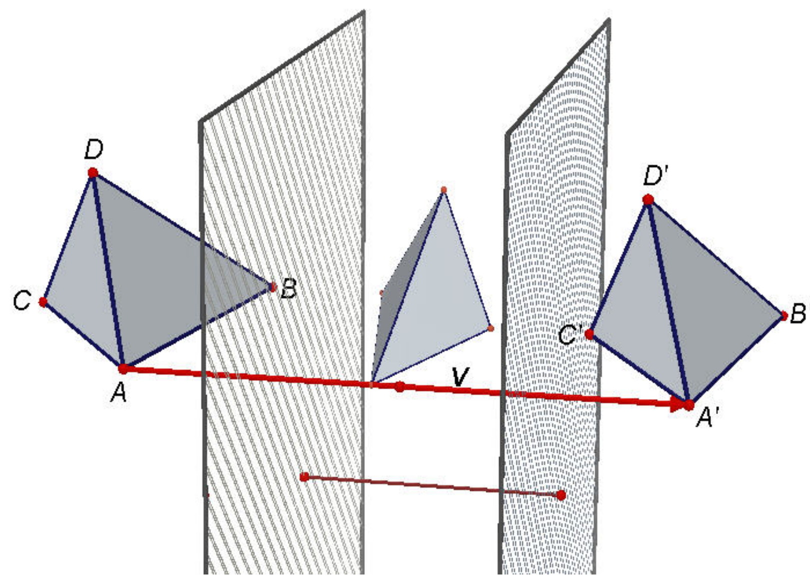




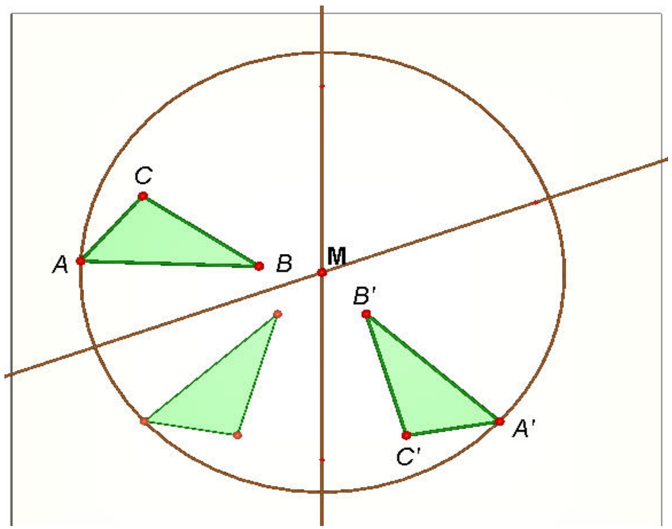
Parallelverschiebung



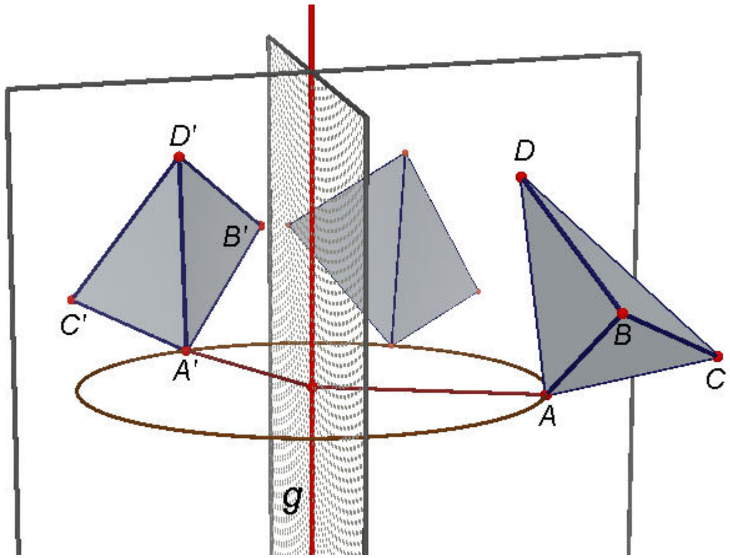
3D –Analogie 1. Art



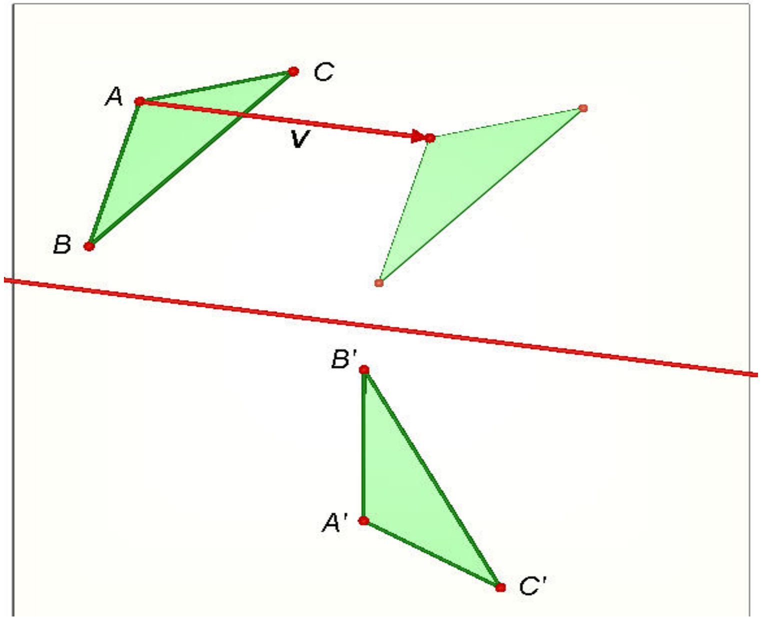
3D –Analogie 2. Art



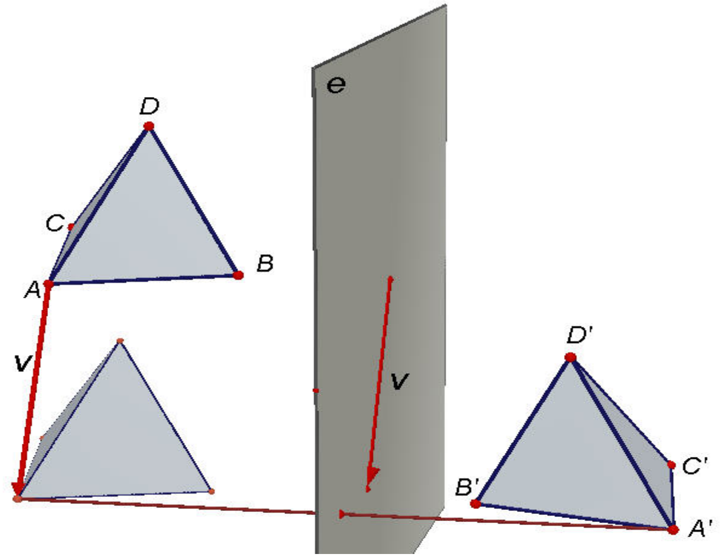
Drehung



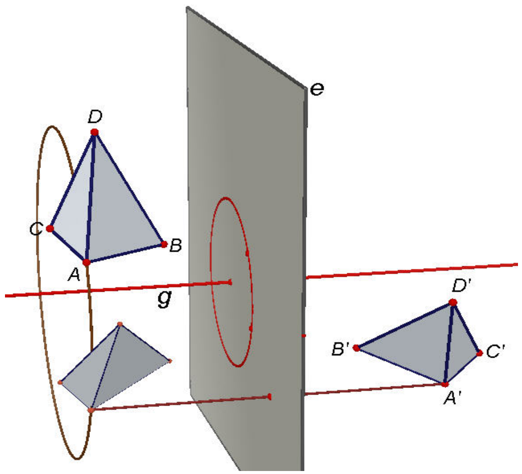
3D - Analogie



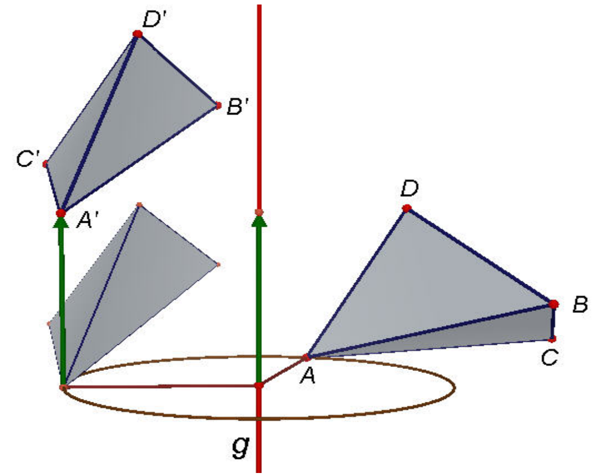
Schubspiegelung



3D - Analogon



Drehspiegelung



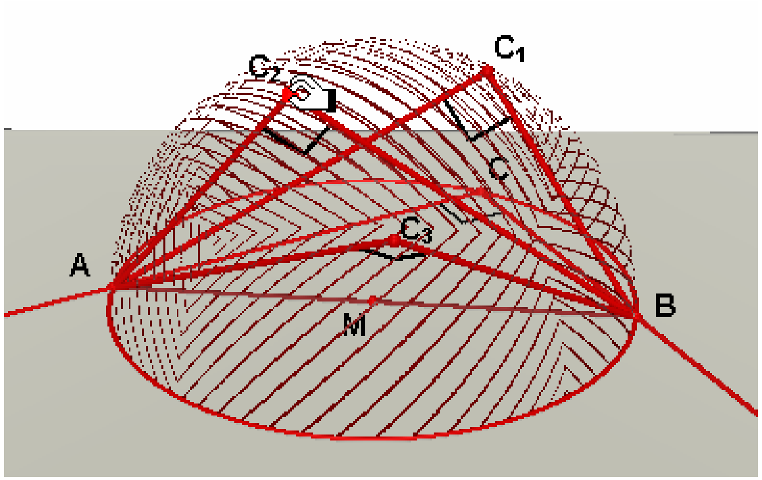
Schraubung

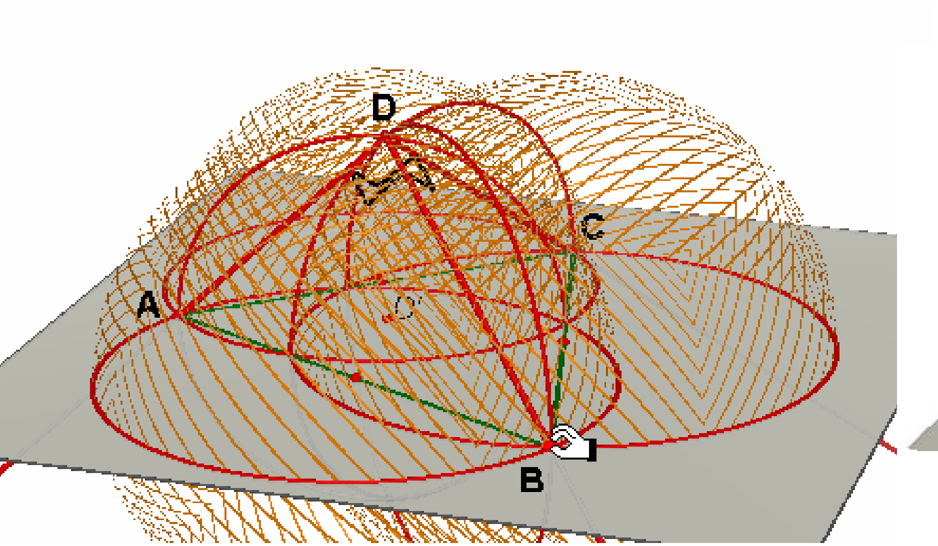
Drei-Geraden-Spiegelungssatz

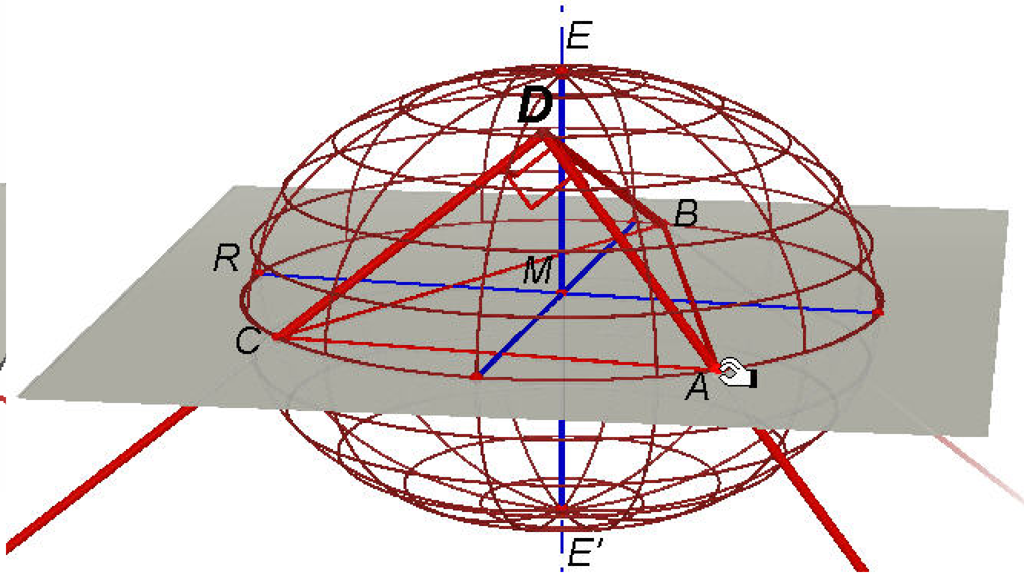
3D-Analogon: Vier-Ebenen-Spiegelungssatz

6. Analogisierung von Kreiskonfigurationen

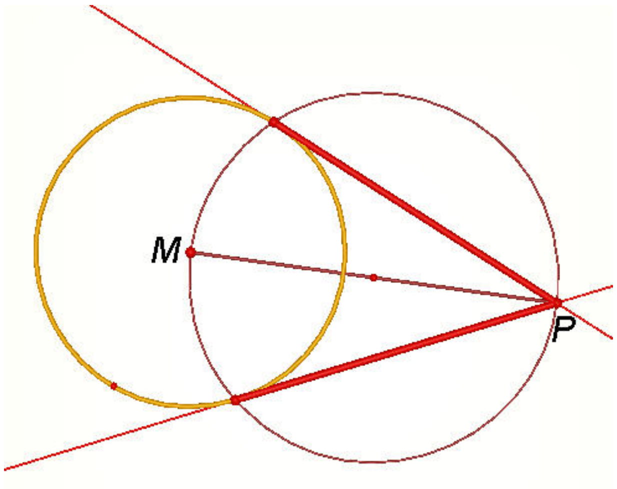
Analogisierungen
des Thaleskreises





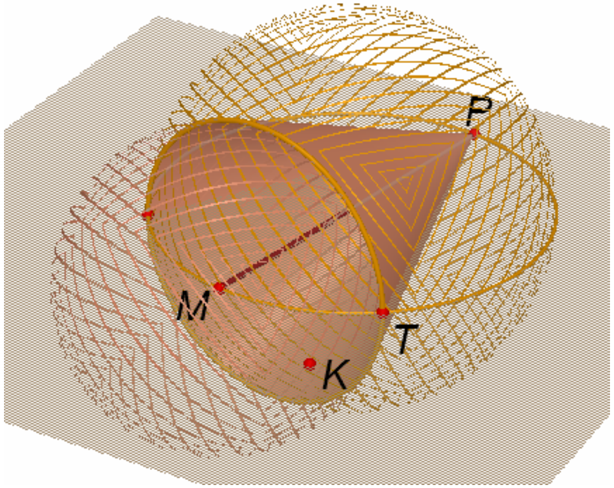


Analogisierungen von Kreistangenten-Konstruktionen

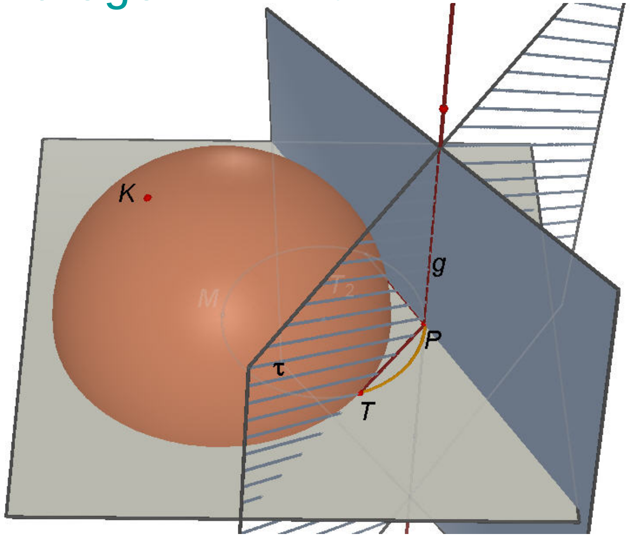


Tangenten von einem Punkt
an einen Kreis

Analogon 1. Art:



Analogon 2. Art



Systematik der Analogisierung der Tangenten an einen Kreis

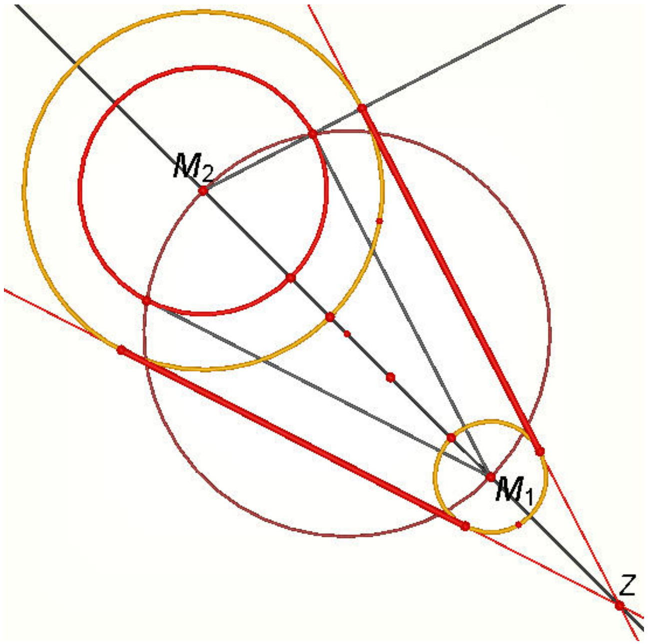
Ebene	**Raum**	
Kreis	Kreis Kreiszylinder Kugel	

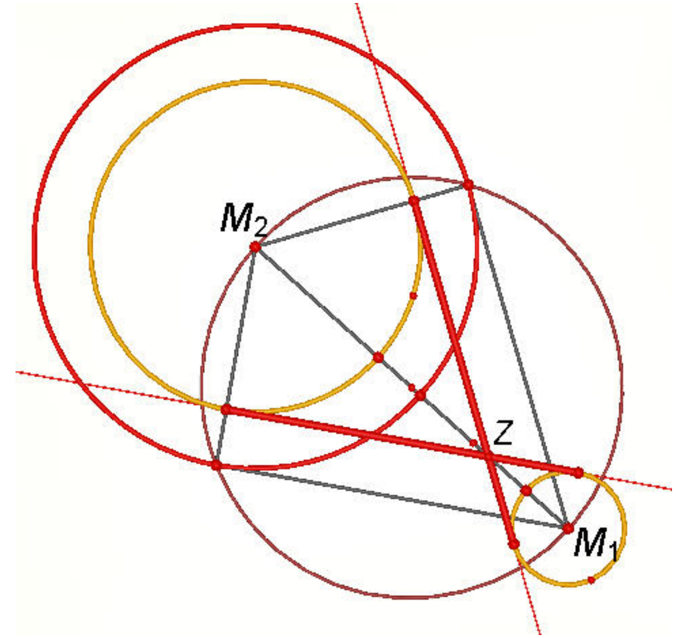
Analogisierung 1. Art

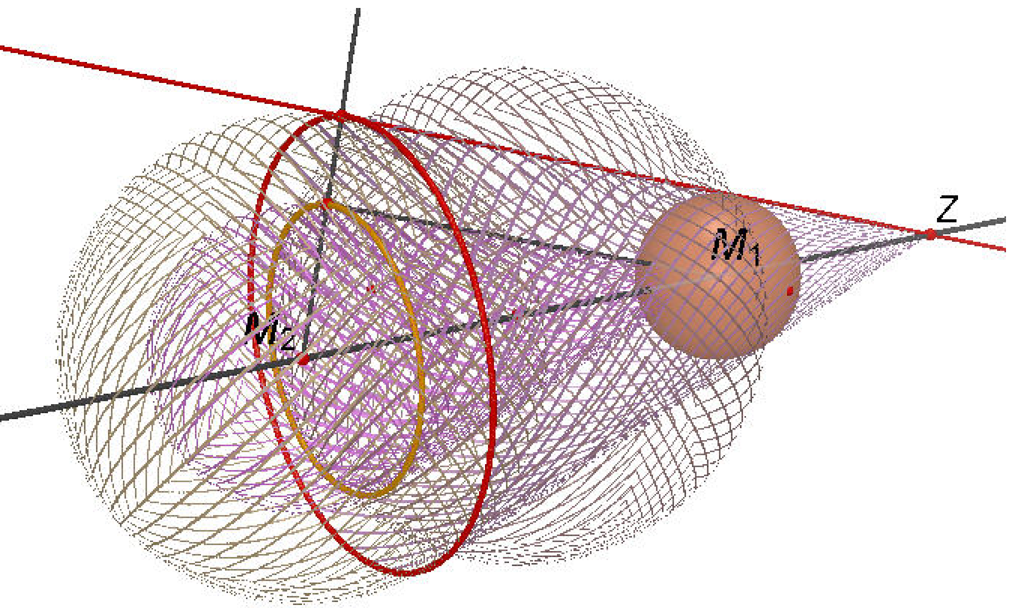
Tangenten Punkt-Kreis	Tangenten Punkt-Kreis:	Tangentialkegel (schief)
	Tangenten Punkt-Kreiszylinder:	Tangentialebenen
	Tangenten Punkt-Kugel:	Tangentialkegel (gerade)

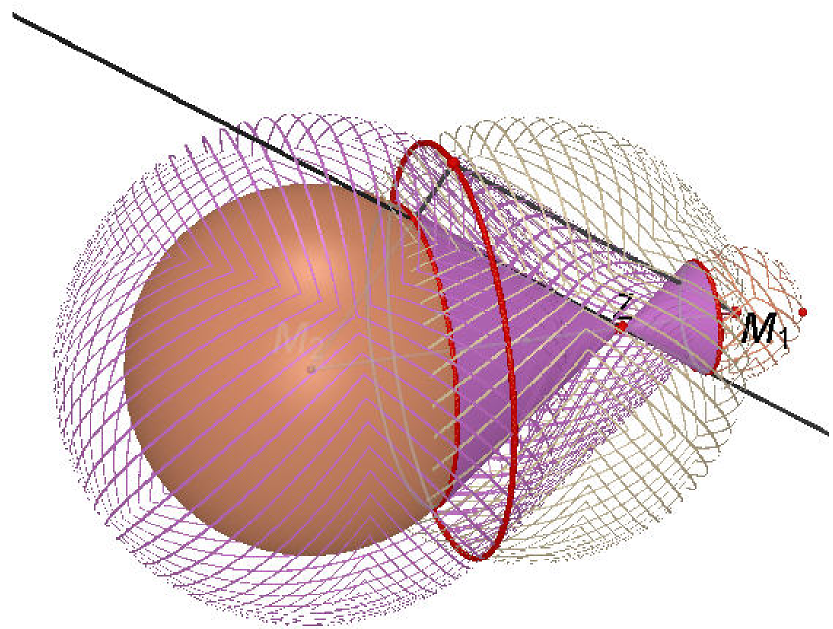
Analogisierung 2. Art

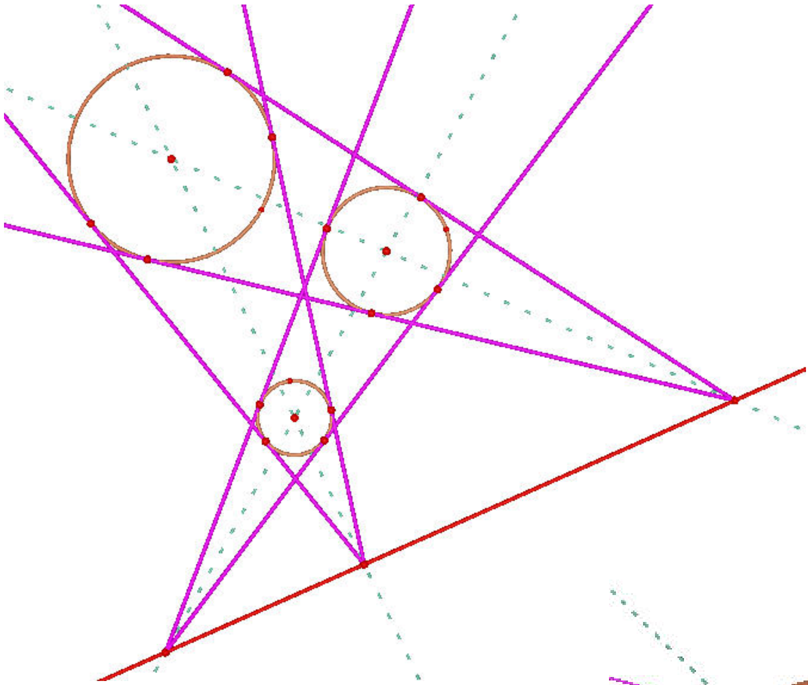
Tangenten Punkt-Kreis	Tangenten Gerade-Kreis:	Tangentiale Regelflächen
	Tangenten Gerade-Kreiszylinder:	Tangentiale Regelfächen (Sonderfall: Tangentialebenen)
	Tangenten Gerade-Kugel:	Tangentialebenen

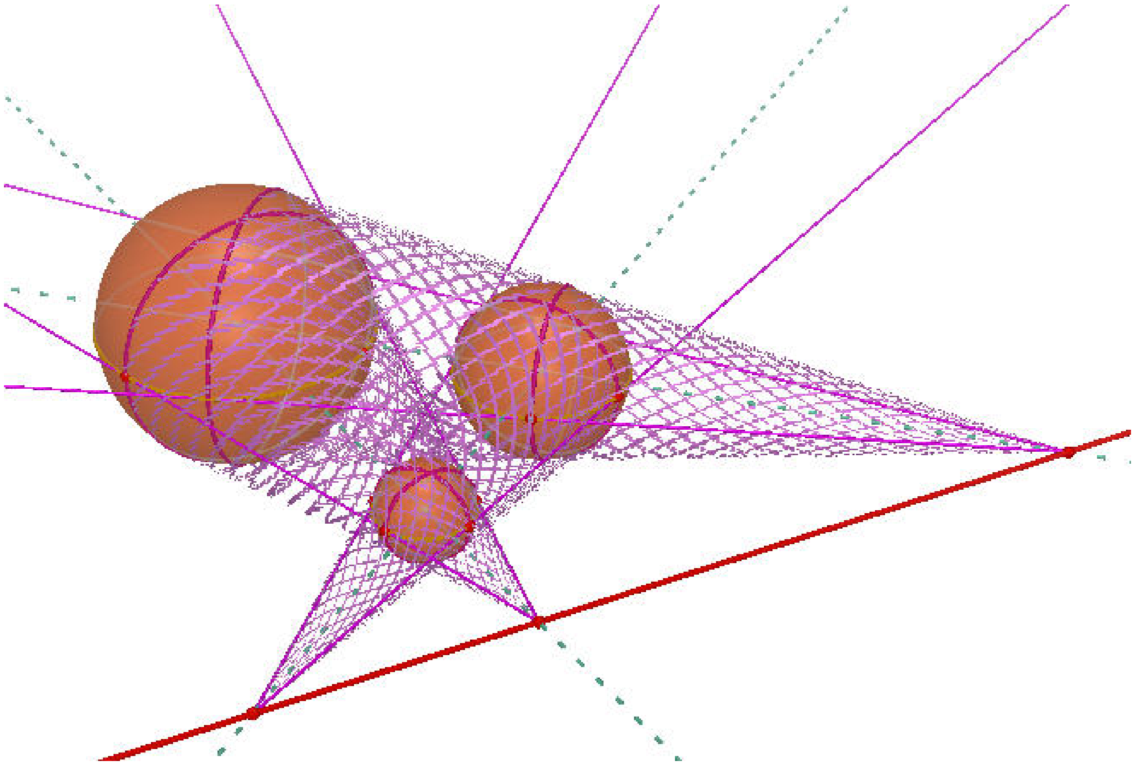

M2
M1
Z


M2
Z
M1

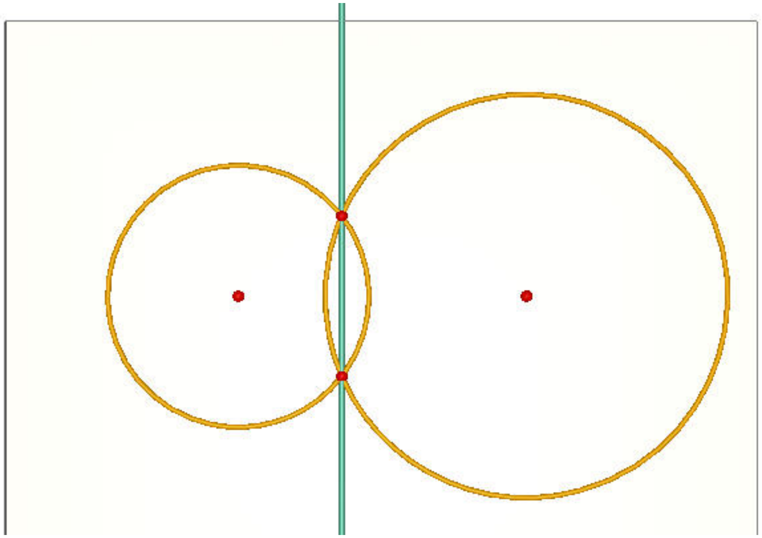

Z
M1
M2


Z
M1

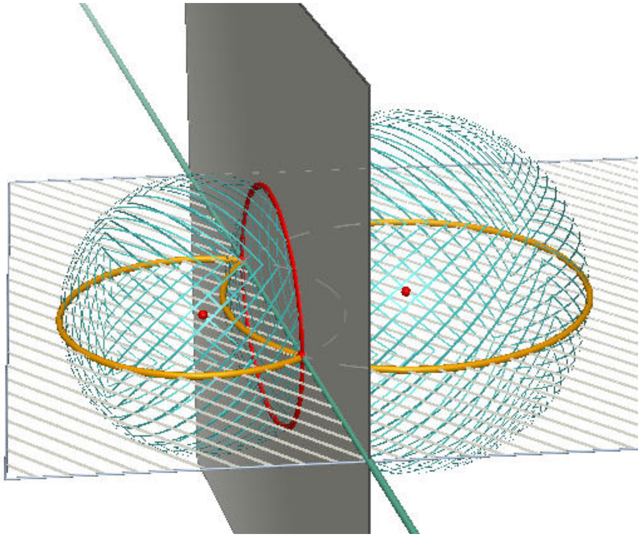




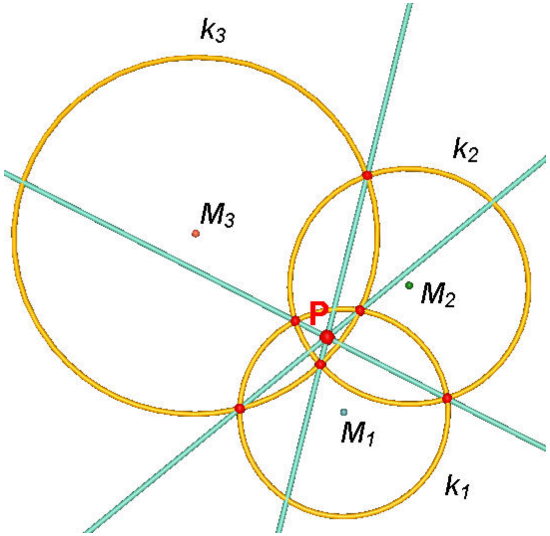
Analogisierungen von Kreispotenz-Punkten und -Geraden



Potenzgerade

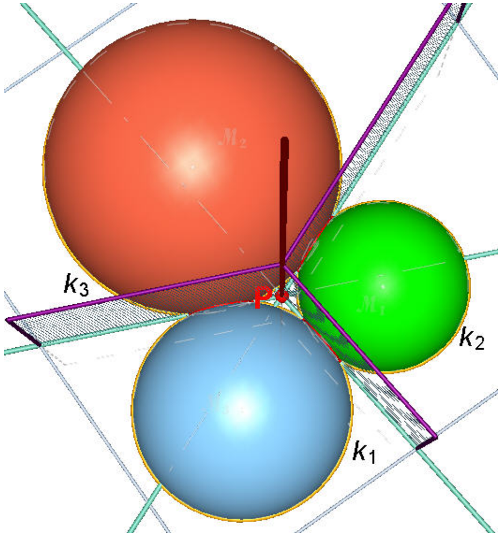


Potenzebene

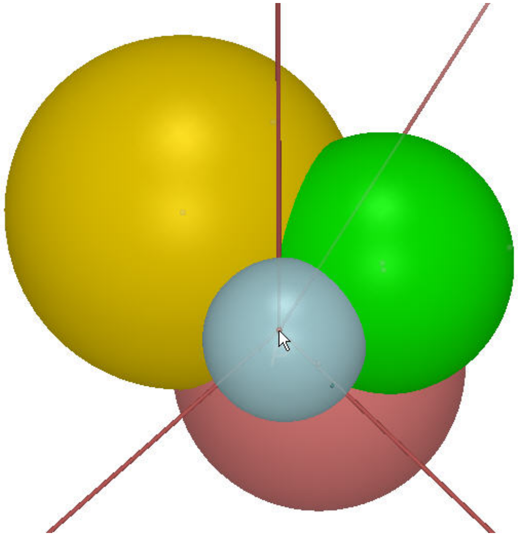


Potenzpunkt

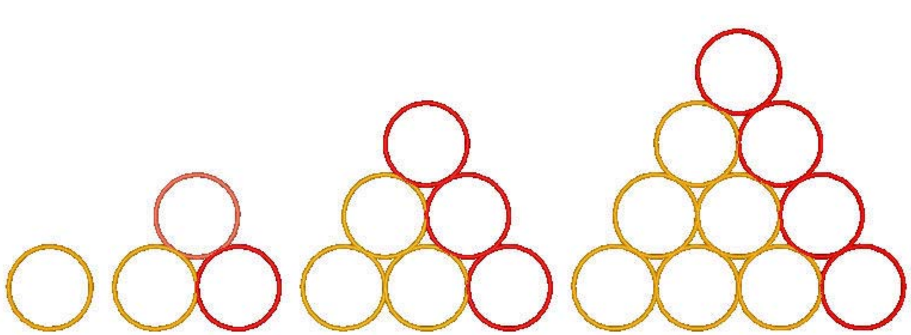
Analogon 1. Art

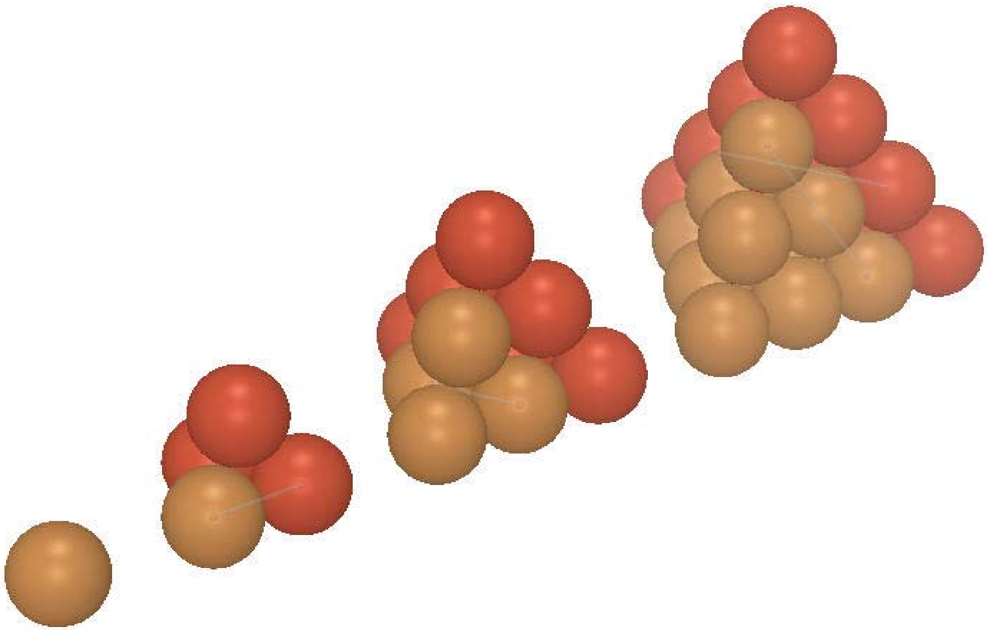


Analogon 2. Art

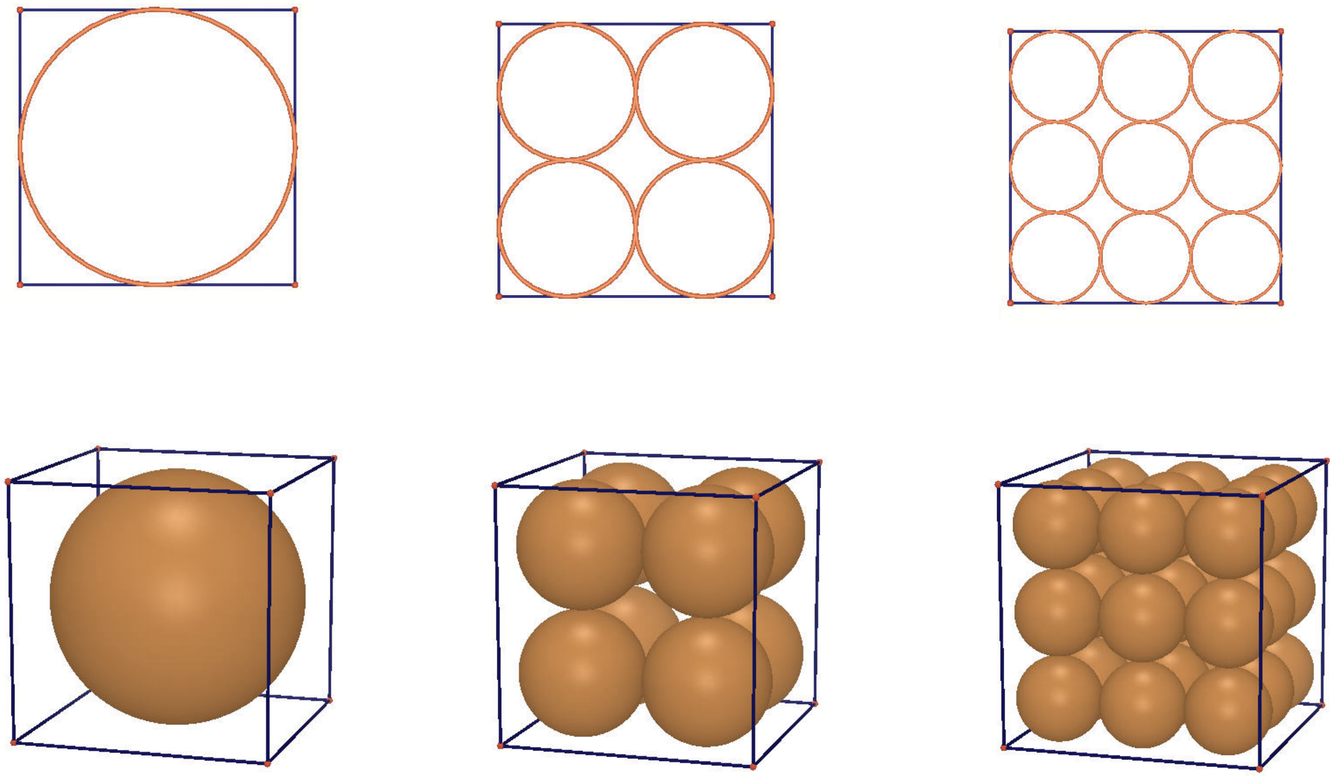


Analogisierung ebener figurierter Zahlenfolgen (Beispiele)



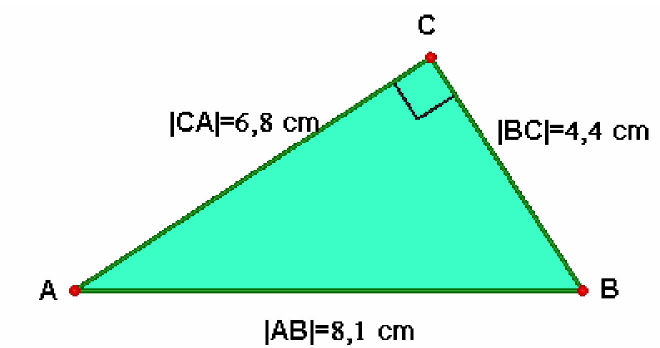


3D-Analogon



3D-Analogon

7. Analogisieren ebener Mess- und Berechnungsaussagen

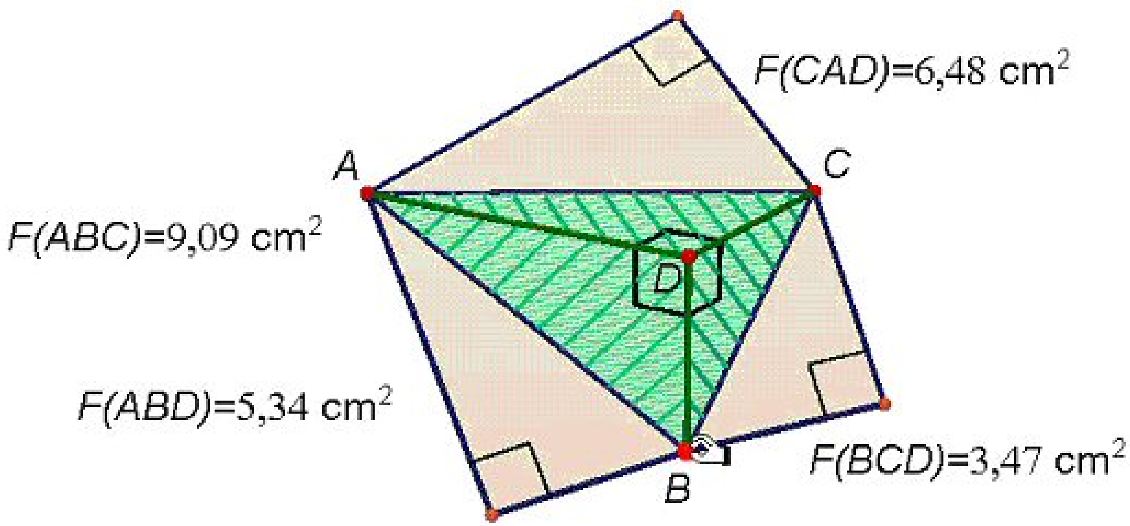


$|AB|^2 = 65{,}18\ \text{cm}^2$

$|BC|^2 = 19{,}51\ \text{cm}^2$ $|AC|^2 = 45{,}68\ \text{cm}^2$

$|BC|^2 + |CA|^2 = 65{,}18\ \text{cm}^2$

$|BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2 = 65{,}18\ \text{cm}^2$

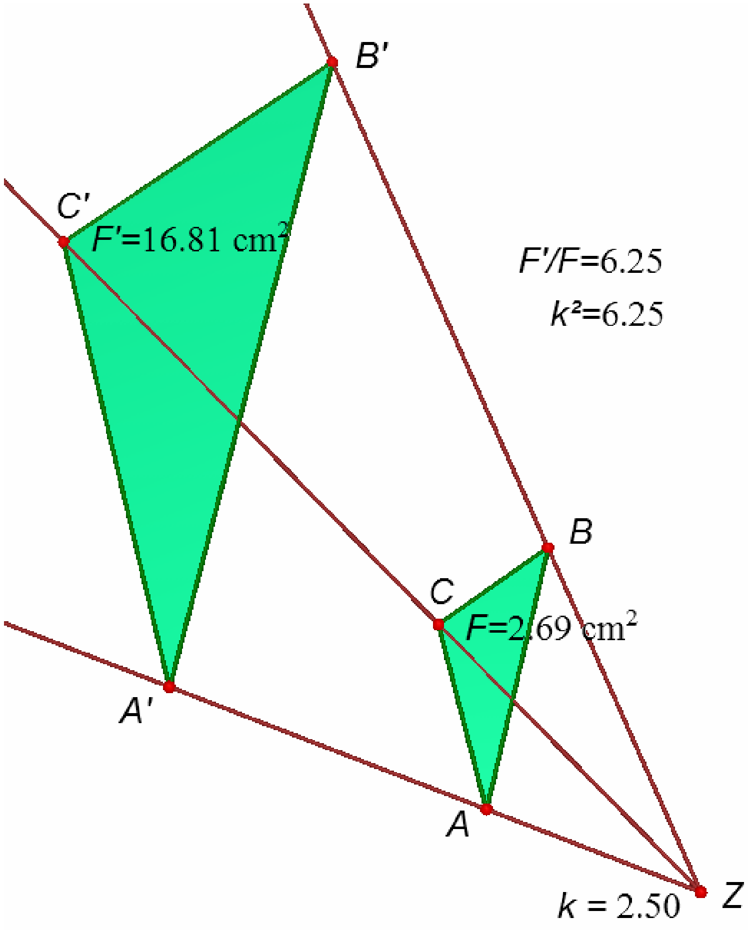


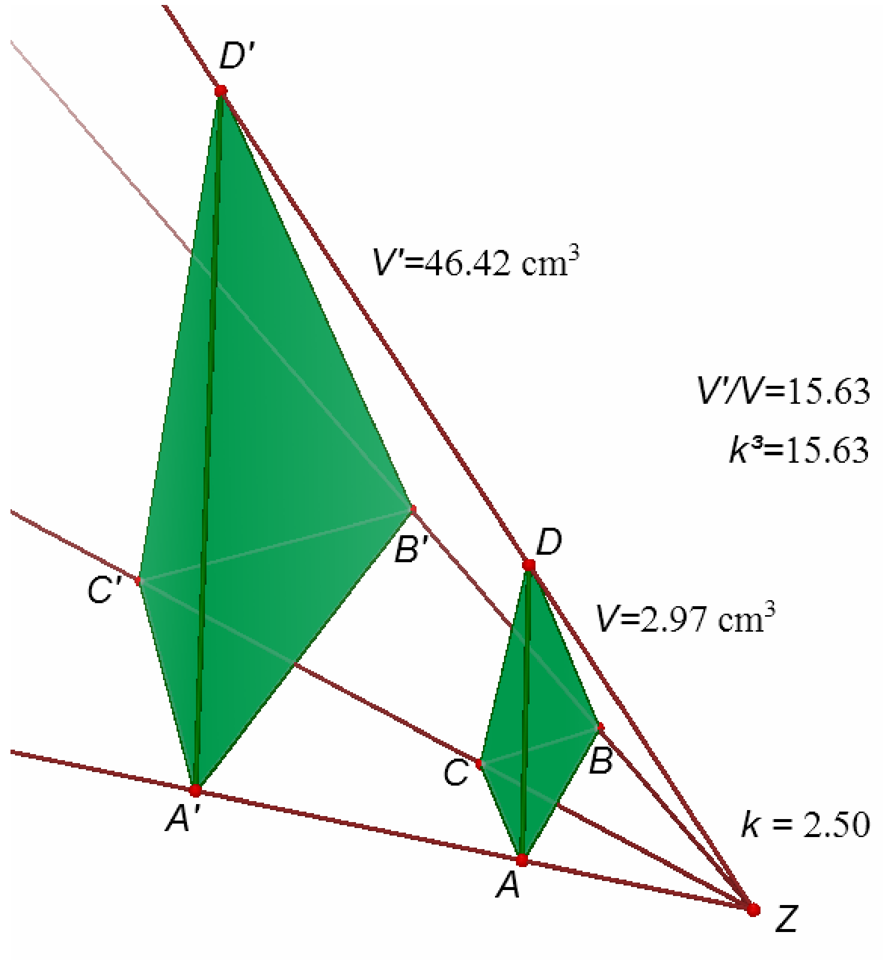
$F(ABC)^2 = 82{,}58\ \text{cm}^4$

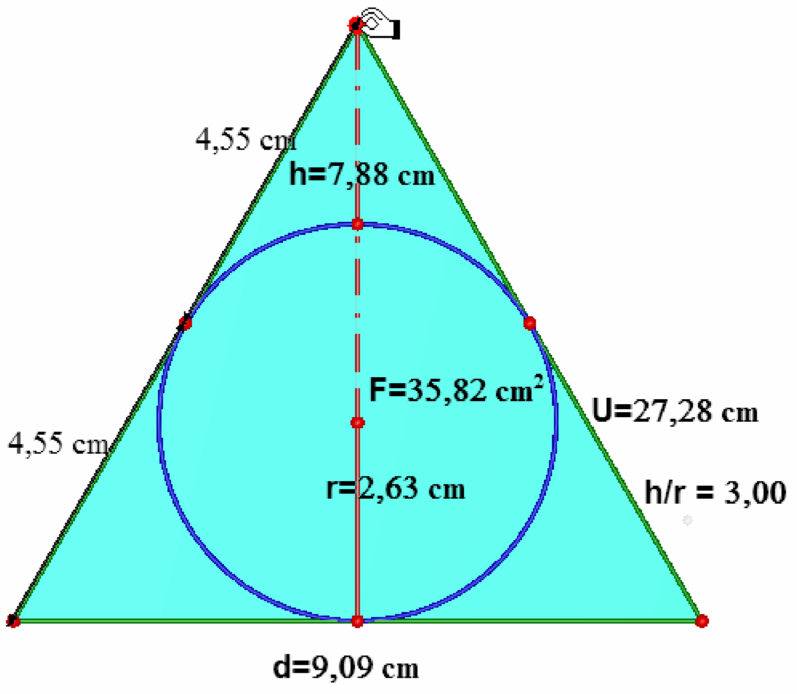
$F(ABD)^2 = 28{,}49\ \text{cm}^4$ $F(BCD)^2 = 12{,}06\ \text{cm}^4$ $F(CAD)^2 = 42{,}03\ \text{cm}^4$

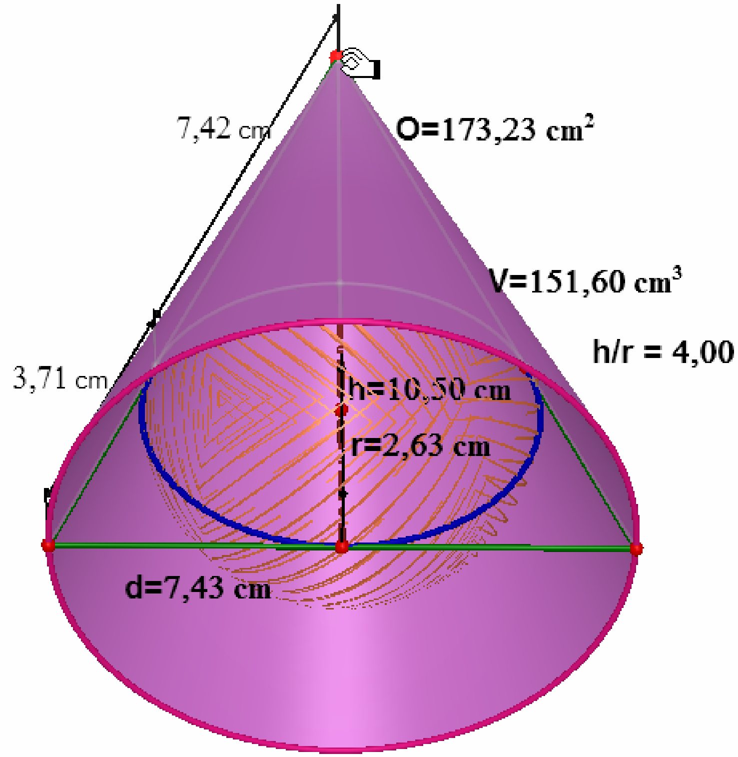
$F(ABD)^2 + F(BCD)^2 + F(CAD)^2 = 82{,}58\ \text{cm}^4$

$F(ABD)^2 + F(BCD)^2 + F(CAD)^2 = F(ABC)^2 = 82{,}58\ \text{cm}^4$


B′
C′
F′=16.81 cm²
F′/F=6.25
k²=6.25
B
C
F=2.69 cm²
A′
A
k = 2.50
Z


D′
V′=46.42 cm³
V′/V=15.63
k³=15.63
D
B′
C′
V=2.97 cm³
C
B
A′
k = 2.50
A
Z


4,55 cm
h=7,88 cm
4,55 cm
F=35,82 cm²
U=27,28 cm
r=2,63 cm
h/r = 3,00
d=9,09 cm


7,42 cm
O=173,23 cm²
V=151,60 cm³
h/r = 4,00
3,71 cm
h=10,50 cm
r=2,63 cm
d=7,43 cm

3. Schlussbemerkungen

Grenzen des interaktiven Analogisierens

Ebene Figuren	Räumliche Figuren
F(Quadrat) = a^2	V(Würfel) = a^3
Diagonale(Quadrat) = $a\sqrt{2}$	Raumdiagonale(Würfel) = $a\sqrt{3}$
F(Dreieck) = $\frac{g \cdot h}{2}$	V(Pyramide) = $\frac{G \cdot h}{3}$
F(Rechteck) = $a \cdot b$	V(Quader) = $a \cdot b \cdot c$
U(Rechteck) = $2a + 2b$	O(Quader) = $2ab + 2bc + 2ca$
Diagonale (Rechteck) = $\sqrt{a^2+b^2}$	Raumdiagonale (Quader) = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
F(Parallelogramm) = $g \cdot h$	V(Prisma) = $G \cdot h$
U(Kreis)= $\pi \cdot d$	O(Kugel)= $\pi \cdot d^2$

Das interaktive Analogisieren ist eine eindrucks-volles Beispiel für den *„didaktischen Mehrwert“* der Computernutzung im Geometrie-Unterricht.

Das interaktive Analogisieren eröffnet für Schüler/-innen, Studenten/-innen und Lehrer/-innen ein weites Feld raumgeometrischen Arbeitens, wenn …

Das Raumgeometrie-Curriculum für Allgemeinbildende Schulen ist unter dem Eindruck interaktiver und intuitiver Raumgeometrie-Werkzeuge, die den Zugang zum Reichtum an raumgeometrischem Wissen konstruierend öffnen, zu reformieren.

Dabei ist folgendes zu beachten:

- ***Raumgeometrie kommt vor Darstellender Geometrie und 3D CAD-Modellierung.***
- ***Synthetische Raumgeometrie kommt vor analytischer Raum-geometrie.***
- ***Dem entdeckenden Lernen ist mehr Raum zu geben.***
- ***Traditionelle und damit biographische Formen raumgeometrischer Enkulturation sind zu relativieren.***
- ***Es kommt darauf an, Raumgeometrie populär zu machen.***