Die Geometrie des Fußballs

Die Symmetrie der Kugel

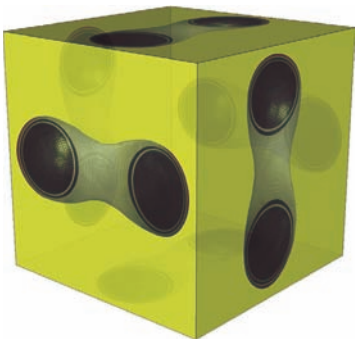
Der klassische Lederfußball wird aus 20 weißen Sechsecken und zwölf schwarzen Fünfecken genäht. Diese magischen Zahlen erinnern an die Anzahl der Ecken und Flächen eines Dodekaeders, dessen rote Kanten rechts im Bild auf den Europass-Fußball gezeichnet wurden.

Es ranken sich viele Theorien, warum der Fußball gerade als abgestumpftes Ikosaeder realisiert wurde. Man hätte auch einen Würfel oder ein anderes archimedisches oder reguläres Polyeder verwenden können. Im Vergleich zu anderen Körpern mit vergleichbarem Verhältnis der Radien von Umkugel zu Inkugel minimiert der klassische Fußball allerdings die Anzahl der Kanten pro Ecke (3) sowie die Anzahl der Lederflecken (32) und der Nähte (90). In gewisser Hinsicht ist der klassische Fußball damit optimal. Die Bälle der Weltmeisterschaft 2006 (Teamgeist) und Europameisterschaft 2008 (Europass) zeigen trotz ihrer Unterschiede erhebliche Ähnlichkeiten zum klassischen Fußball: Zur Verdeutlichung wurden in Rot die Kanten eines Dodekaeders aufgemalt. In Blau sehen wir einen Würfel, dessen Seiten jeweils einem Flansch sowie jeweils zwei Dodekaederseiten zugeordnet sind.

Klassische Symmetrie des Fußballs

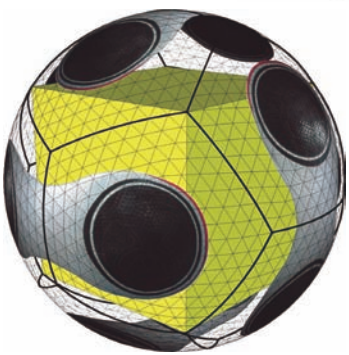
Der Europass zur EM 2008 mit Symmetrien

V. Braungardt, D. Kotschick *Die Klassifikation von Fußballmustern* Math. Semesterberichte, 2007, 54:53-68
adidas AG *www.press.adidas.com/de/desktopdefault.aspx/tabid-16/94_read-8454/* Adidas Spielball der UEFA EURO 2008
Wikipedia *http://en.wikipedia.org/wiki/Point_groups_in_three_dimensions* Point groups in three dimensions



← Würfel mit Symmetrie des Pyritkristalls

Konstruktion des Europass-Fußballs vom Würfel über das Pyrit-Dodekaeder zur runden Kugel

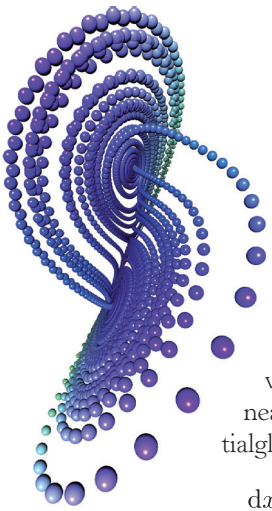


Der Teamgeist von 2006 und der Europass 2008 haben die Symmetrie eines Pyritkristalls. Wie ein Dodekaeder besteht das Kristall aus zwölf Fünfecken, allerdings haben die Fünfecke unterschiedliche Seitenlängen und sind paarweise an ihrer kürzesten Kante verbunden. Damit hat der aktuelle Fußball eine reduzierte Symmetrie gegenüber dem klassischen Fußball aus Fünf- und Sechsecken.

Die Bildsequenz auf dieser Seite zeigt die Konstruktion des Europass, ausgehend von einem Würfel. Zunächst bekommen die Würfelseiten durch einen Flansch eine Orientierung, jeweils um 90° gedreht gegenüber ihren Nachbarflächen. Im zweiten Bild erhält der Würfel ein Dodekaeder mit Pyritsymmetrie übergestülpt, wobei jeder Würfelseite ein Paar von Fünfecken zugeordnet wird. Weiteres Abrunden liefert in den folgenden Bildern den fertigen Fußball.

Interessant ist der Produktionsprozess der Herstellerfirma Adidas. Dort wird zunächst eine innere Gummihaut als reines Dodekaeder erzeugt, auf dem dann die sechs Flansche und acht Ecksterne aufgeklebt werden.

Die mathematische Analyse der Symmetrieeigenschaften der aktuellen Fußbälle sagt natürlich nichts über deren physikalischen Vorteile aus.



Der Lorenz-Attraktor

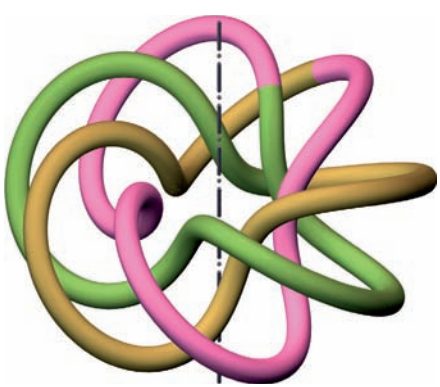
Wie magnetisch angezogen

1963 untersuchte der Meteorologe *Edward Norton Lorenz* (1917–2008) die Übertragung thermischer Energie von einem Ort der Erdatmosphäre zum anderen, indem er ein System von drei gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

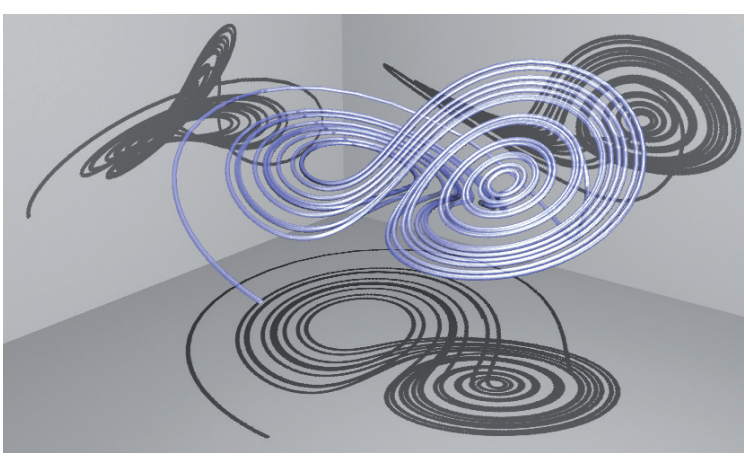
$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a(y - x),$$
$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = x(b - z) - y,$$
$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = xy - cz$$

aufstellte. Damit sollten Langzeitprognosen möglich werden. Das System ist sehr empfindlich auf die Anfangsbedingungen und divergiert recht rasch, egal wie nahe die Anfangswerte beisammen liegen. So macht das Lorenz-System anschaulich, dass im atmosphärischen Strömungsbild kleine Ursachen große Wirkung zeigen können. Die numerische Lösung des Systems zeigt bei bestimmten Parameterwerten deterministisch chaotisches Verhalten, die Trajektorien folgen einem seltsamen Attraktor.

Damit spielt der Lorenz-Attraktor für die mathematische Chaostheorie eine Rolle, denn die Gleichungen stellen wohl eines der einfachsten Systeme mit chaotischem Verhalten dar. Typische Werte für die Konstanten (a ist die sog. Prandtl-Zahl, b die Rayleigh-Zahl) sind etwa $a = 10$, $b = 28$ und $c = 8/3$. Für $b = 99{,}96$ stellt sich ein Torusknoten ein.

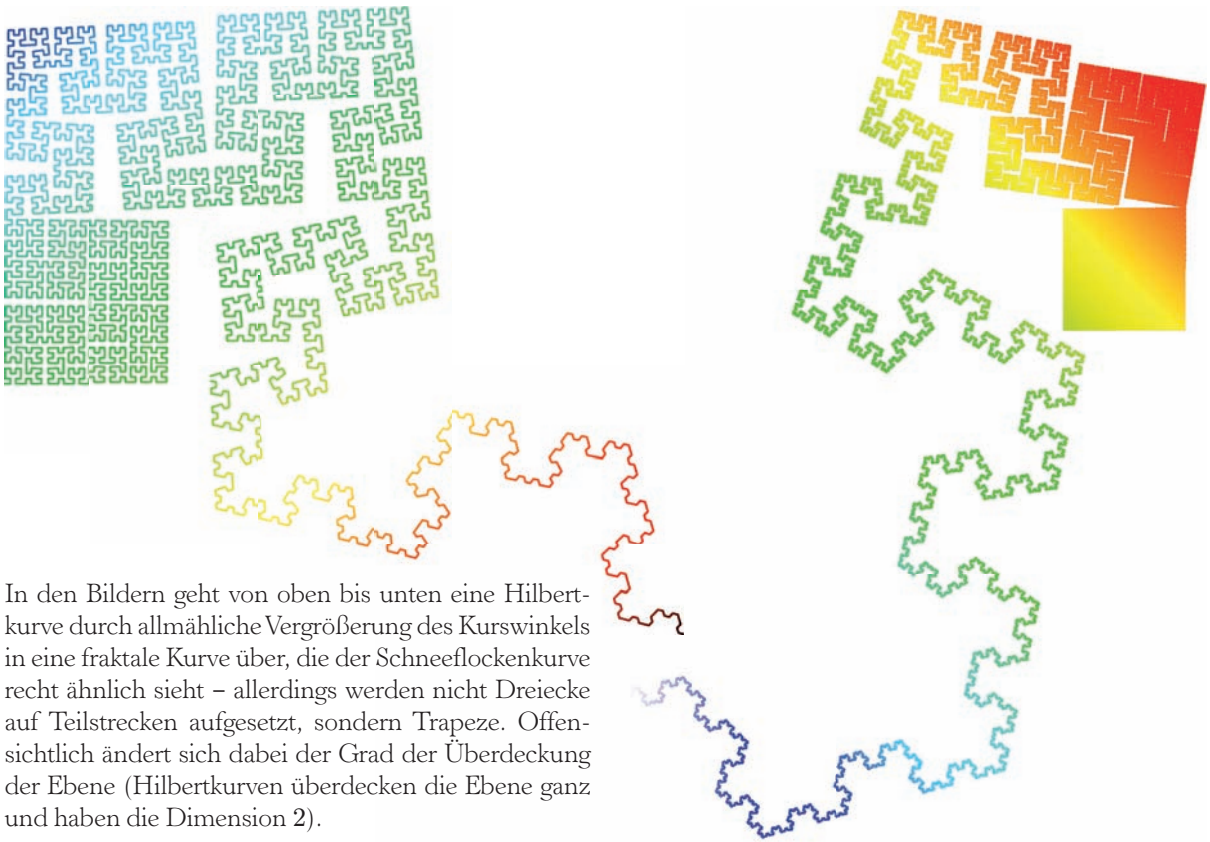


Torusknoten



E. N. Lorenz *Deterministic nonperiodic flow* J. Atmos. Sci. 20, 1963: 130-141
R. Morris *http://demonstrations.wolfram.com/LorenzAttractor* Lorenz Attractor – Wolfram Demonstrations Project
O. Kobchenko *www.jsoftware.com/jwiki/Essays/Lorenz_Attractor* Lorenz Attractor – Jsoftware
P. Bourke *http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/lorenz* The Lorenz Attractor in 3D – University of Western Australia
Wikipedia *http://de.wikipedia.org/wiki/Lorenz-Attraktor* Lorenz-Attraktor

Fraktale Dimension



In den Bildern geht von oben bis unten eine Hilbertkurve durch allmähliche Vergrößerung des Kurswinkels in eine fraktale Kurve über, die der Schneeflockenkurve recht ähnlich sieht – allerdings werden nicht Dreiecke auf Teilstrecken aufgesetzt, sondern Trapeze. Offensichtlich ändert sich dabei der Grad der Überdeckung der Ebene (Hilbertkurven überdecken die Ebene ganz und haben die Dimension 2).

Wie kann man sich eine nicht-ganzzahlige Dimension d vorstellen? Nach *Felix Hausdorff* ist für den Spezialfall eines geometrischen Objekts, welches aus n disjunkten Teilobjekten besteht, die im Maßstab 1:m verkleinerte Kopien des Gesamtobjekts darstellen, $m^d = n$, also $d = \log n / \log m$. Damit hat die Koch-Kurve, die aus vier jeweils im Maßstab 1:3 verkleinerten Kopien der Gesamtkurve entsteht, die nicht-ganzzahlige Dimension $d = \log 4 / \log 3 \approx 1{,}2618595$. Ein Quadrat hingegen, das man aus neun Quadraten mit jeweils einem Drittel der Seitenlänge zusammensetzen kann, hat sinnvollerweise die Dimension $d = \log 9 / \log 3 = 2$.

Laurent Nottale *Fractal Space-Time and Microphysics* World Scientific, 1993
Wikipedia *http://de.wikipedia.org/wiki/Hausdorff-Dimension* Hausdorff-Dimension (Definition der fraktalen Dimension)