Daniel Lordick, TU Dresden (D)

Die Eigenschattengrenze des Torus als Einstieg in das Hochgebirge der Geometrie

Zusammenfassung:
Tangenten an die Eigenschattengrenze des Torus zu konstruieren ist traditionell eine quadratische *Aufgabe der konstruktiven Differentialgeometrie. Daniel Lordick führt vor, wie man ausschließlich synthetisch, das heißt mit den elementaren Werkzeugen der Darstellenden Geometrie, eine* lineare *Lösung findet. Dabei öffnet sich ein Zugang zur Welt der Regelflächen vierten Grades. Einige Modelle lassen die Faszination für das Thema lebendig werden.*

Vor einem Jahr wurde ich hier in Strobl im kleinen Kreis gefragt, auf welchem Weg ich zur Geometrie gefunden habe. Als ich ins Erzählen geriet, bat man mich, die Geschichte als Vortrag zu wiederholen. Ich möchte heute also zwei Dinge zugleich: Ihre fachliche Neugier befriedigen und von meinen persönlichen Umwegen bis zur Geometrietagung in Strobl berichten, eine geistige Wanderung ins Hochgebirge der Geometrie. Diese am Klettern geschulte Ausdrucksweise ist Klaus Meirer geschuldet, der mich beim Steigen im steinigen Terrain synthetischer Folgerungen begleitet hat.

Ich habe Architektur an der Technischen Universität Berlin studiert. Schon während der ersten Semester fiel meiner damaligen Freundin auf, wie ich bei Fragen zur Darstellenden Geometrie meinen Kommilitonen immer sicher Rede und Antwort stand. Sie hatte deshalb die Idee, ich könne in dem Fach als Tutor arbeiten. Auf zwei Plätze kamen damals zwei Bewerber und so war ich für ein paar Semester dabei. Direkt nach dem Diplom erinnerte sich Professor Arno Bonanni an meine Tutorenzeit und holte mich als wissenschaftlichen Mitarbeiter zurück an seinen Lehrstuhl.

Eine solche Position nutzen meine Architekten-Kollegen normalerweise, um neben der Lehre an Architekturwettbewerben teilzunehmen. Ich geriet dagegen schnell auf Abwege: Ich nahm den dritten Band eines Skriptes zur Darstellenden Geometrie in Angriff, wodurch ich meine Kenntnisse begrifflich schärfte, und – darum geht es hier – ich stieß auf ein Phänomen: In sogenannten DG-III-Kursen zeichnete man zwar Tangenten an *Schnittkurven*, aber nicht an die *Eigenschattengrenze* des Torus bei Parallelbeleuchtung; sie wurde nur punktweise behandelt.

Tatsächlich führte mir Tobias Pick, ein Vorgänger im Amt, diese Fehlstelle vor Augen, ohne aber auf das Problem näher einzugehen. In meinem jugendlichen Übermut nahm ich mich der Frage an, hatte schon am selben Abend eine Lösung und faxte sie ihm. Leider war sie völlig falsch, wie ich am nächsten Morgen mit klarem Verstand feststellen musste. Ganz so einfach geht es also nicht. Das liegt vor allem daran, dass die Eigenschattengrenze naturgemäß als *Berührkurve* von Torus und einhüllendem Lichtzylinder aufgefasst werden muss. Das bedeutet aber auch, Torus und Lichtzylinder haben in jedem Punkt der Eigenschattengrenze eine gemeinsame Tangentialebene. Demnach ist eine Schnittgerade der Tangentialebenen, wie sie bei Schnittkurven benutzt wird, gar nicht definiert.

Das Problem ließ mich nicht mehr los. Jetzt hätte ich natürlich in Wien, wo Emil Müller, Josef Krames, Erwin Kruppa, Walter Wunderlich, Heinrich Brauner und viele andere gewirkt haben, anrufen können und mir eine Lösung sagen lassen. Aber von dieser Möglichkeit ahnte ich nichts und die Instituts-Bibliothek enthielt keinen Hinweis in diesem Sinne. Wo ich hinsah, gab es höchstens Punktkonstruktionen und Bücher über Darstellungstechniken, Kunstgeschichte und Architekturtheorie, aber kaum anspruchsvolle Geometrie. Ich hatte keine Bildung in Konstruktiver Differentialgeometrie, wusste nichts von *Berührtorsen*, *Indikatrizen*, *konjugierten Flächentagenten* und wie man all das nutzt, um die gesuchten Tangenten zu bestimmen.

Also werkelte ich weiter, zeichnete immer wieder große Blätter mit vielen feinen Strichen grau und wurde von meinen Kollegen als Sonderling behandelt. Doch eines Tages springe ich auf, so wie mich eine Erkenntnis aus meinen Zeichnungen anspringt: Da formt sich eine neue

Fläche, die mit der Punktkonstruktion zu tun hat, und die genau durch die Eigenschattengrenze geht; eine Fläche, die durch die Flächennormalen längs der Eigenschattengrenze erzeugt wird. So viel weiß ich: es handelt sich um ein *Konoid*, eine windschiefe Regelfläche. Damit war die Lösung des Problems geboren, das war der Durchstieg: Man kann die Tangenten an die Eigenschattengrenze eben doch als Schnittgerade zweier Tangentialebenen betrachten! Plötzlich war die verzwickte Aufgabe genau wie die Konstruktion einer gewöhnlichen Schnittkurve zu behandeln und damit elementarer Stoff der Darstellenden Geometrie.

Mein nächstes Problem war, ich musste die Tangentialebenen des Konoids in den Griff bekommen. Aber da endlich half mir unsere Bibliothek. Ein wunderbares zweibändiges Werk von Georg Scheffers zur Darstellenden Geometrie erklärt den Stoff, und zwar unter dem Namen »windschiefe Perspektivität«. Das halte ich immer noch für einen sehr plastischen Begriff. Er meint die Faserung des Raumes durch die Treffgeraden zweier windschiefer Geraden. In Wien nennt man das ein *Netz*. Ich stelle mir vor, wenn die beiden Geraden einander schneiden, erhalte ich eine gewöhnliche Zentralperspektive und wenn ich sie parallel anordne, eine Parallelprojektion. Die Ebenen durch die zwei Geraden muss ich dabei natürlich ausnehmen, aber sonst fügen sich alle drei Abbildungen in einen gemeinsamen Kosmos. So ergab die windschiefe Perspektive für mich als Architekten einen Sinn.

Nun konnte ich die gesuchten Tangenten konstruieren. Nur warum ich das konnte, verstand in meinem Umkreis keiner. Und dieser Umkreis, so erfuhr ich später, hatte einen Radius von rund zweihundert Kilometern. Das ist die Distanz zwischen Berlin und Dresden.

Mein Arbeitsplatz war in einer Halle mit Oberlicht und Fernsicht im Dachgeschoss eines schönen alten AEG-Gebäudes in Berlin-Wedding untergebracht. Meine Kollegen und ich saßen dort an großen Tischen zusammen. In diesem angenehmen sozialen Gefüge geriet ich zunehmend in eine mentale Isolation. Um diese zu durchbrechen und meine Kollegen in meine Geheimwissenschaft einzuweihen oder doch zumindest dafür zu begeistern, habe ich aus Holzstäben und Karton einen Ausschnitt des entdeckten Konoids gebaut. Das Modell, das heißt die aus Geraden erzeugte Fläche, erinnert vage an Bauten von Kenzo Tange oder Félix Candela und außerdem kommen Konoide gelegentlich in Bauwerken von Antoni Gaudí, Helmut Jahn, Rem Koolhaas und anderen vor. Nach diesen Hinweisen brachten mir meine Kollegen immerhin ein gewisses Verständnis für meine Faszination am Thema entgegen.

Später taufte Klaus Meirer die von mir benutzten Hilfsflächen auf den einheitlichen Namen »Begleitregelfläche«, weil sie die Eigenschattengrenze begleiten. Eine brauchbare Begleitregelfläche wird nicht notwendigerweise aus den Normalen der untersuchten Fläche gebildet, aber sie wird grundsätzlich durch drei Leitkurven festgelegt. Beim Torus unter Parallelbeleuchtung sind die Leitkurven leicht zu sehen: Eine ist die *Drehachse* des Torus und eine zweite sein *Mittenkreis*. Außerdem haben die Erzeugenden eine Richtebene normal zur Lichtrichtung. Die Richtebene kann man durch ihre *Ferngerade* ersetzen und erhält als dritte Kurve eine uneigentliche Gerade. Anders gesprochen: Alle Erzeugenden der Begleitregelfläche sind Normalen des Torus und gehören folglich seiner *Normalenkongruenz* an. Schneidet man diese mit dem *linearen Komplex* der zu den Lichtstrahlen normalen Geraden, so ist der Schnitt die gesuchte Begleitregelfläche.

Betrachtet man die Torusachse und die Ferngerade, so handelt es sich bei der Begleitregelfläche offensichtlich um eine *Netzfläche* durch den Mittenkreis des Torus. Das ist eine Regelfläche vierten Grades – übrigens nach der Sturm'schen Klassifikation von siebter Art. Auf der Fläche lebt eine *Schar zueinander projektiver Kegelschnitte*. Die Kegelschnitte sind Ellipsen, ihre Hauptscheitel liegen auf den *Torsalerzeugenden* der Regelfläche und sie erscheinen unter *Normalprojektion* parallel zur Torusachse als konzentrische Kreise. Die Regelfläche ist nur von der Lichtrichtung und dem Mittenkreis des Torus abhängig, aber nicht vom Meridiankreisradius. Folglich kann man den Meridiankreisradius auf null schrumpfen lassen und der den Torus berührende Lichtzylinder ist in dieser Grenzlage ein schiefer Kreiszylinder durch den Mittenkreis. Das verdeutlicht: die Begleitregelfläche ist die *Normalenfläche* des Kreiszylinders längs des Mittenkreises.

Das konnte ich damals noch nicht so schön aufsagen und genoss auch noch nicht diesen Weitblick einer Gipfelbesteigung. Aber ich wollte gerne etwas aus meiner Konstruktion machen und sie nicht wieder in der Schublade versinken lassen. Ich wollte auch herausfinden, ob mein Zugang originell war oder ob das schon jemand vor mir gemacht hatte. Ich suchte die

Antwort im Telefonverzeichnis der TU Berlin und rief Professor Bernd Wegner von der Fakultät für Mathematik an. Er hörte mich an, meinte, damit könne er nichts anfangen, aber vielleicht die Österreicher, die beschäftigten sich mit Darstellender Geometrie, und verwies mich an Professor Stachel in Wien. Ich war irritiert. Als gebürtiger Bayer kannte ich Österreich nur vom Bergsteigen und Skifahren. Das Gespräch mit Herrn Stachel war kurz. Ich war zuerst enttäuscht, bekam aber den wertvollen Hinweis, es gäbe einen Professor in Dresden, Herrn Weiß, der kenne sich damit aus. Das Telefonat mit Gunter Weiß war eine Offenbarung. Zum ersten Mal gab mir jemand das Gefühl, er verstünde, wovon ich rede. Ich bin mir sicher, er verstand es bereits am Telefon, ganz ohne Zeichnung. Er gab mir den Rat, ich möge meine Erkenntnisse aufschreiben und ihm vorlegen.

In den nächsten Wochen setzte ich mich hin und fasste alles zusammen, was ich damals wusste. Ganz im Stil unseres DG-Skriptes gesellte sich im schicken Querformat zu jeder Zeichnung auf der gegenüberliegenden Seite die Erläuterung. Ich kam beim Schreiben auf viele neue Erkenntnisse, schöne Kleinigkeiten zum Umriss, Querbezüge zu elementaren Kegelschnittkonstruktionen und das Büchlein schwoll auf dreißig Seiten. Ich stellte drei Exemplare her: eines für Herrn Bonanni, meinen Dienstherrn, damit er sah, was ich aus seiner alten Fragestellung gemacht hatte, eines für mich und eines für Herrn Weiß. Ich überbrachte es persönlich. Das war vielleicht ein bisschen seltsam. Ich fuhr nach Dresden, war unendlich stolz, legte das Büchlein Herrn Weiß vor die Nase und sah ihm zu, wie er las. Ich war schrecklich ungeduldig. Aber das machte nichts – er erfasste es sehr schnell. Ich wusste damals nicht, was sein verschmitzter Blick in Wirklichkeit sagte: »Wieso bin ich da nicht selber draufgekommen?«, oder auch: »Warum sind wir in Wien alle daran vorbeigelaufen?«.

Die Antwort auf die letzte Frage muss wahrscheinlich lauten: Weil es schon eine Lösung für die Tangentenkonstruktion gab: Über den Umweg der Differentialgeometrie kann man *lokal* in den Punkten der Eigenschattengrenze die *Involution konjugierter Flächentangenten* mithilfe der *Indikatrix* verfügbar machen. Das ist die konstruktive Lösung eines *quadratischen* Problems und wurde in Wien so geübt. Am härtesten etwa an der *Meridiankreisschraubfläche*. Eine Anwendung auf Drehflächen findet sich im »Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie« von Brauner. So war der Blick auf den direkten Zugang verstellt, der die Eigenschattengrenze mit einer Hilfsfläche *global* erfasst, elementar begründet werden kann und vor allem in eine *lineare* Tangentenkonstruktion mündet. Der Kern ist schließlich die Übertragung eines einfachen Teilverhältnisses.

Nun, nachdem mir Gunter Weiß bescheinigte, mein Verfahren sei elegant und originell, stellte ich die Frage, ob ich dafür einen Doktor bekommen könne. Dazu müsse ich das Verfahren an Schieb- und Schraubflächen erproben, antwortete Weiß nach kurzem Zögern. Jetzt war ich platt. Das hatte ich mir leichter vorgestellt. Ich hatte doch schon so viel gemacht! Mein heimlich gestecktes Ziel rückte in weite Ferne. Ich sah nicht, wie das mit den anderen Flächenklassen gehen sollte. Außerdem könne er die Dissertation nicht betreuen, sagte Weiß. Aber er kenne einen Kollegen, einen alten Bekannten aus der Zeit am Institut in Wien, der sei inzwischen Professor an einer Architekturfakultät und könne mich unter die Fittiche nehmen: Klaus Meirer in Karlsruhe.

Ich schickte also ein viertes Heftchen nach Karlsruhe und reiste wenig später hinterher. Dort nahm die Dissertation dann Gestalt an. Allerdings anders als ich gedacht hatte. Sie wuchs zu einem Gebirge, an dessen Fuß ich angelangt war. Als Kletterseil drückte mir Meirer ein Buch in die Hand, von dem ich kein Wort verstand: »Konstruktive Behandlung der Regelflächen« von Müller und Krames. Das müsse ich lesen, das müsse ich einbeziehen, sprach Meirer.

Ich las und lernte, konstruierte und forschte; ich hatte eine Schreibhemmung. Ich überwand sie durch Schreiben mit der Hand, nicht am Computer. Leider kann meine Handschrift fast niemand lesen, ich auch nicht. Aber wie durch ein Wunder formte sich die Arbeit und tatsächlich ließ sich die *Begleitregelflächenmethode*, wie Meirer sie nannte, auch auf andere Flächenklassen übertragen. Neue Modelle zu Schieb- und Schraubflächen entstanden und sogar die *Zentralbeleuchtung* am Torus konnte global behandelt werden. Ein Kosmos aus Strukturen und Flächen tat sich auf, ich war ein Entdecker an steilen Hängen, fand fruchtbare Täler und Quellen der Erkenntnis. Mein Manuskript tippte und überarbeitete ich, fügte die Teile zum Ganzen und baute über 150 Zeichnungen ein. Fertig! Dachte ich. Ich gab das Werk per Post an Meirer zum Bejubeln. Es kam alsbald zurück, in Kopie mit ein paar Anmerkungen. Ach was, so war es leider nicht! Die Seiten waren über und über voll mit Korrekturen, Streichungen, Ergänzungen, stilistischen Verfeinerungen. Einfach nicht wiederzuerkennen. Das war der Tiefpunkt. Ich ging den Text durch, stellte um, formulierte neu, schliff und glättete meine Gedankengänge, versuchte jene Eleganz und Verständlichkeit herzustellen, die Meirer erwartete. Es war das dritte Mal, dass ich meine Arbeit schrieb. Sie reifte. Nur den Glauben, sie sei gut, hatte ich fast verloren.

So war der Gang zu meiner Verteidigung auch das letzte Aufbäumen von jemandem, der das einmal begonnene zu Ende bringen muss, der den Gipfel schon überschritten hat und, vor Erschöpfung matt, hofft, heil und bei Tageslicht zurück ins Dorf zu kommen. Und ich hatte Glück. Als Klaus Meirer, Gunter Weiß und Hellmuth Stachel in Karlsruhe über meinen Text und den Vortrag befanden, waren sie gnädig gestimmt. Vielleicht auch aus Rührung, weil ein Architekt sich so weit in das Hochgebirge der Geometrie hineingewagt hatte.

Literatur:

Brauner, Heinrich: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie; Wien, New York 1986

Kruppa, Erwin: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie; Wien 1957

Lordick, Daniel: Konstruktion der Schattengrenzen krummer Flächen mithilfe von Begleitflächen; Aachen 2001 (Dissertation)

Lordick, Daniel: Schattengrenzen krummer Flächen – Drehflächen, Schraubrohrfläche und Meridiankreisschraubfläche, in: KoG No.6, Zagreb 2002, 11-19

Lordick, Daniel: Schattengrenzen krummer Flächen – Linearer Zugang zur Involution konjugierter Tangenten in Punkten von Schiebflächen, in: KoG No.8, Zagreb 2004, 3-10

Müller, Emil; Krames, Josef: Konstruktive Behandlung der Regelflächen; in: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Band III; Leipzig, Wien 1931

Scheffers, Georg: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Band 1, Berlin 1922; Band 2, Berlin 1927