

Analoge Recheninstrumente zur Beschreibung von Himmelserscheinungen



28. Fortbildungstagung für Geometrie

Strobl, November 05 – 08, 2007

Frank Henschel / Marco Hamann

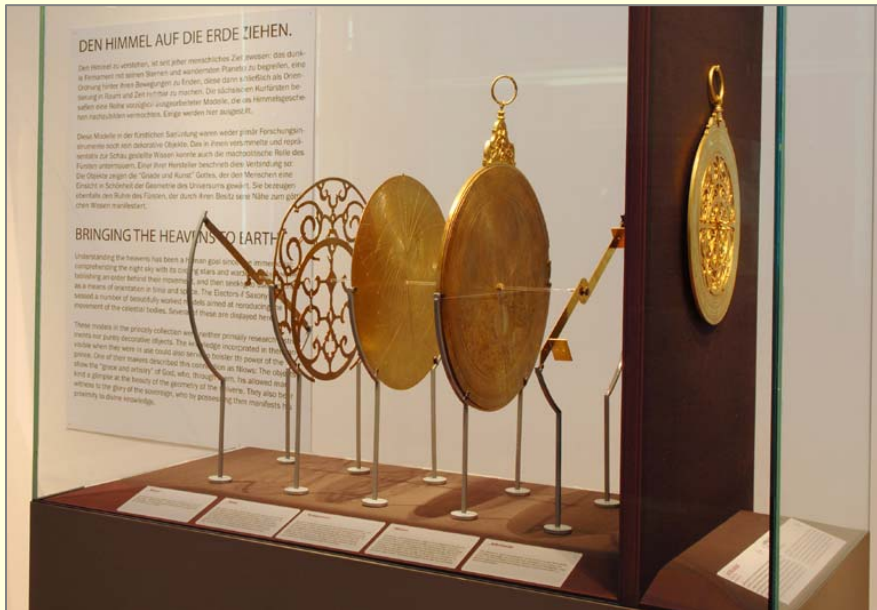
Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden



“Geometrie der Macht”. Ausstellung im Grünen Gewölbe, Dresden (rechts)

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden (links und Mitte)

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden



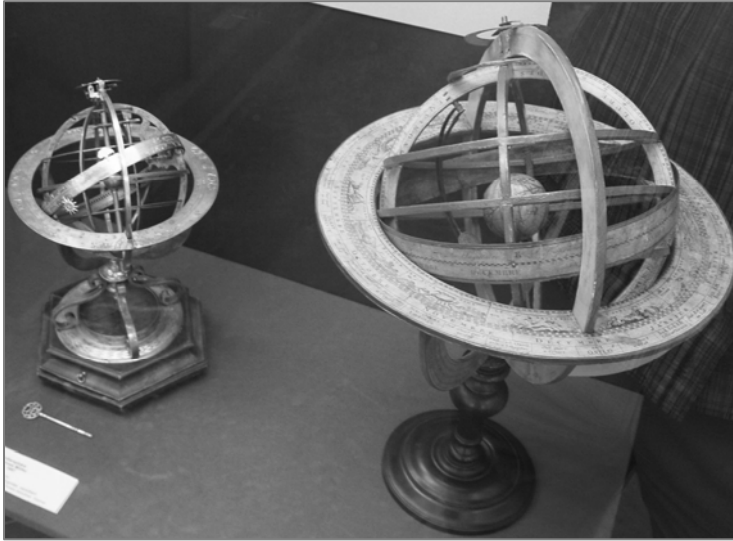
JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

“Geometrie der Macht”: Ausstellung im Grünen Gewölbe, Dresden.

Gliederung

- Einführung
- Astrolabium als Funktionsmodell der „Himmelskugel“
- Stereographische Projektion und Eigenschaften
- Verwendung eines Astrolabiums als (analoger) Rechner
- Lern- und Lehransätze

Die Himmelskugel



Geozentrische Armillarsphäre, Frankreich um 1500
Mathematisch-Physikalischer Salon

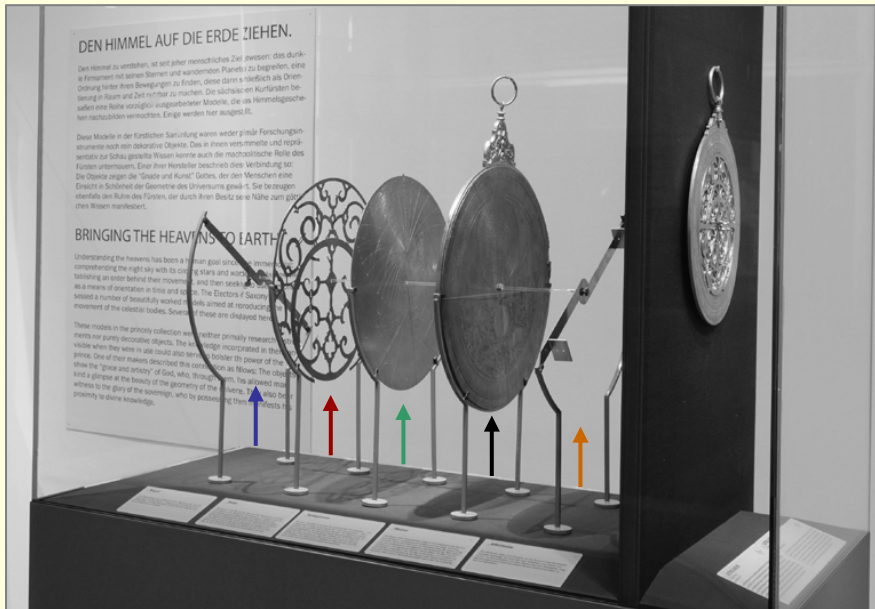
Grundlegende Aussagen in der **griechischen Astronomie**:

- Die Erde ist eine Kugel und liegt im Zentrum des Himmels. Sie besitzt verschwindende Größe im Vergleich zum Himmel.
- Der Himmel ist auch eine Kugel (**Himmelskugel**).
- Der Himmel befindet sich in täglicher Bewegung um eine Achse durch die Erde.

Die Tierkreiszeichen

Symbol	Lateinisch	Deutsch
♈ Ari	Aries	Widder
♉ Tau	Taurus	Stier
♊ Gem	Gemini	Zwillinge
♋ Can	Cancer	Krebs
♌ Leo	Leo	Löwe
♍ Vir	Virgo	Jungfrau
♎ Lib	Libra	Waage
♏ Sco	Scorpius	Skorpion
♐ Sag	Sagittarius	Schütze
♑ Cap	Capricornus	Steinbock
♒ Aqr	Aquarius	Wassermann
♓ Psc	Pices	Fische

Astrolabium – Modell der Himmelskugel



Bestandteile eines Astrolabiums:

- Mater (Grundplatte)
- Rete („Himmelskugel“)
- Latitude plate (Koordinatennetz)
- Rule (Zeiger)
- Alidade (Lineal)

JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

“Geometrie der Macht”: Ausstellung im Grünen Gewölbe, Dresden.

Astrolabium – Modell der Himmelskugel



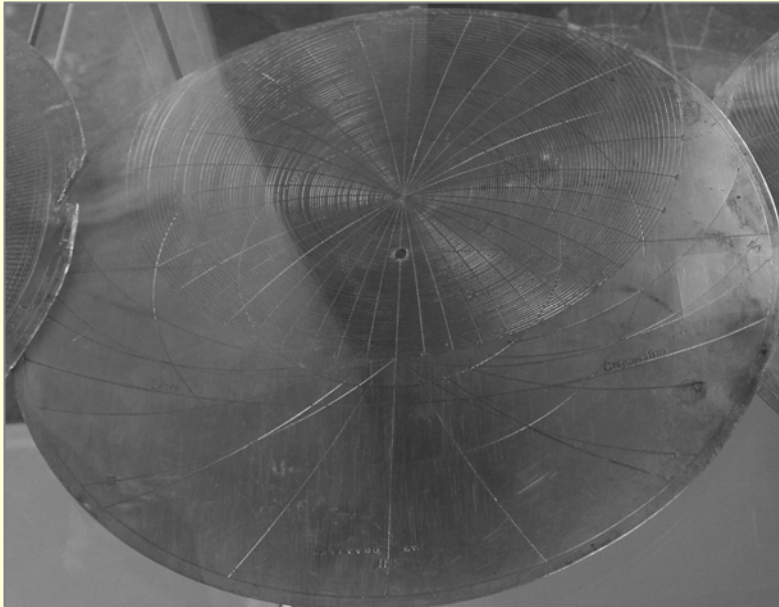
JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

Rete $\hat{=}$ Himmelskugel, insbesondere:

- Sterne / Sternbilder
- Himmelsnordpol
- Ekliptik (scheinbare jährliche Bahn der Sonne am Himmel)
- Skala für Rektaszension

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden

Astrolabium – Modell der Himmelskugel



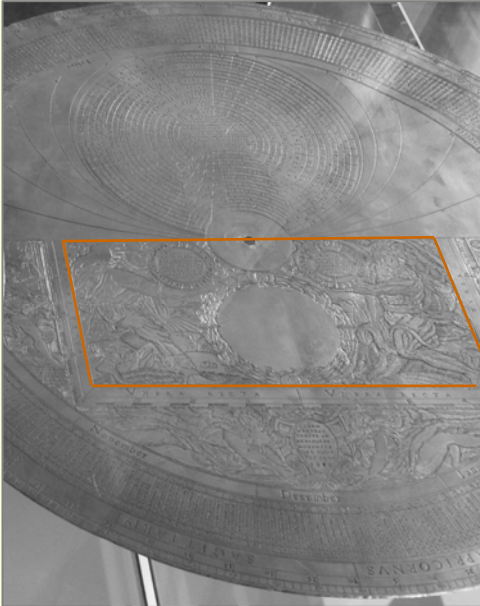
JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

Latitude Plate $\hat{=}$ Koordinatennetz:

- Himmelsäquator und -nordpol
- Nördlicher und südlicher Wendekreis
- Horizont und Zenit
- Meridiane bezüglich des Horizonts
- (Kurven für saisonale Stunden)

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden

Astrolabium – Modell der Himmelskugel



Rückseite, insbesondere mit:

- Kreisförmige Kalenderskala und konzentrische Skala für Tierkreiszeichen
- Schattenquadrat
- Kurven für saisonale Stunden

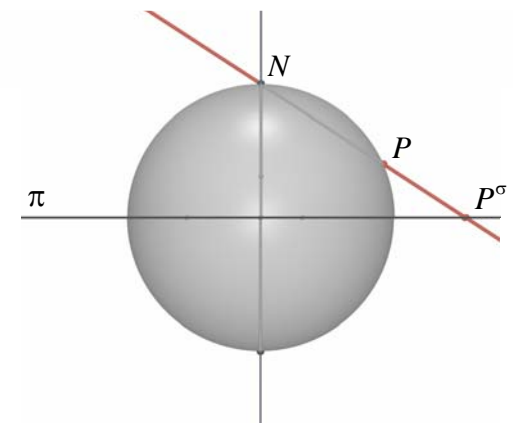
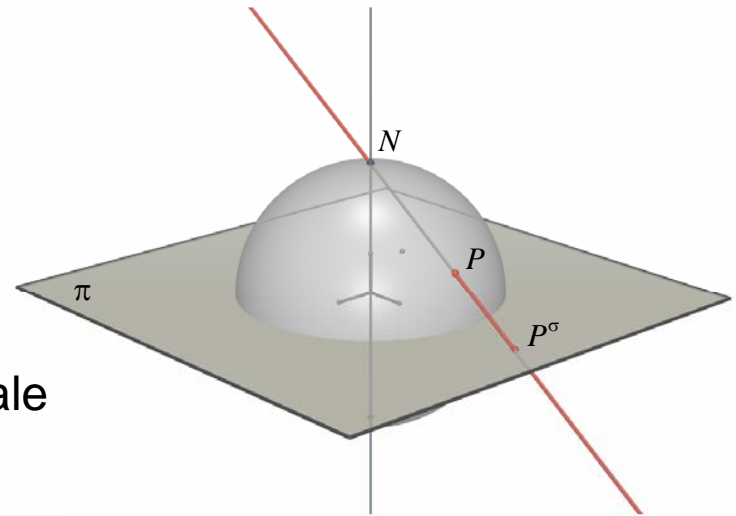
JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden

Stereographische Projektion

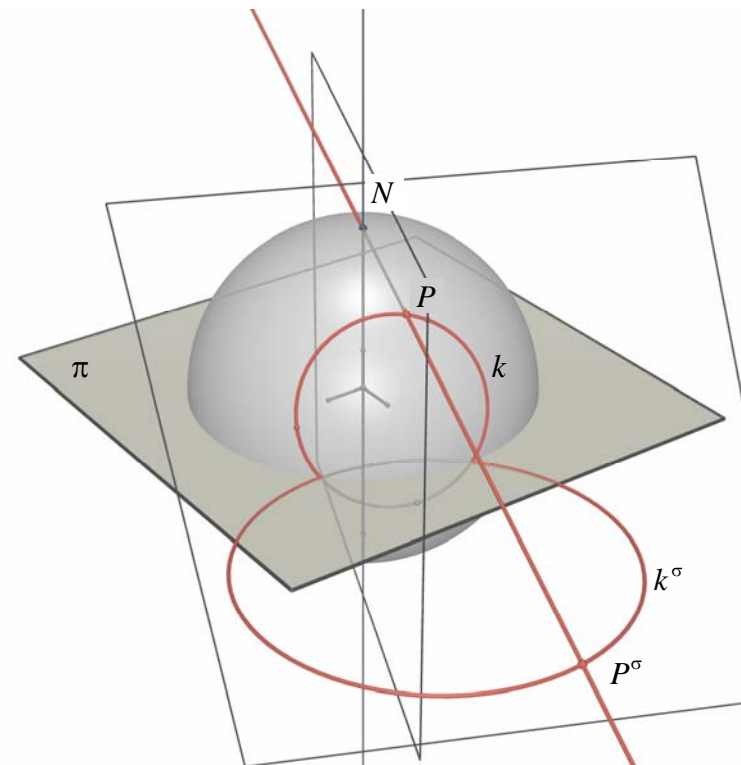
Gegeben sind eine Kugel $\Phi(M, r) \subset A^3$ mit Mittelpunkt M und Radius r , des weiteren ein Paar (N, S) von gegenüberliegenden Punkten auf Φ sowie die zu SN orthogonale Ebene π durch M .

Die Abbildung $\sigma: \Phi \setminus \{N\} \rightarrow \pi: P \mapsto P^\sigma$ mit $P^\sigma := NP \cap \pi$ heißt **stereographische Projektion**.



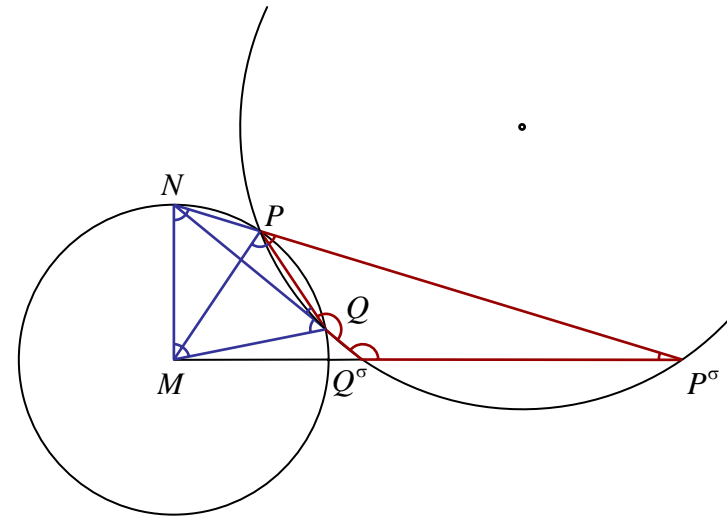
Stereographisches Bild von Kreisen

- Kreise $l \subset \Phi$ mit $N \in l$ werden auf Geraden $l^\sigma \subset \pi$ abgebildet und umgekehrt.
- Kreise $k \subset \Phi$ mit $N \notin k$ werden auf Kreise $k^\sigma \subset \pi$ abgebildet und umgekehrt.



Stereographisches Bild von Kreisen

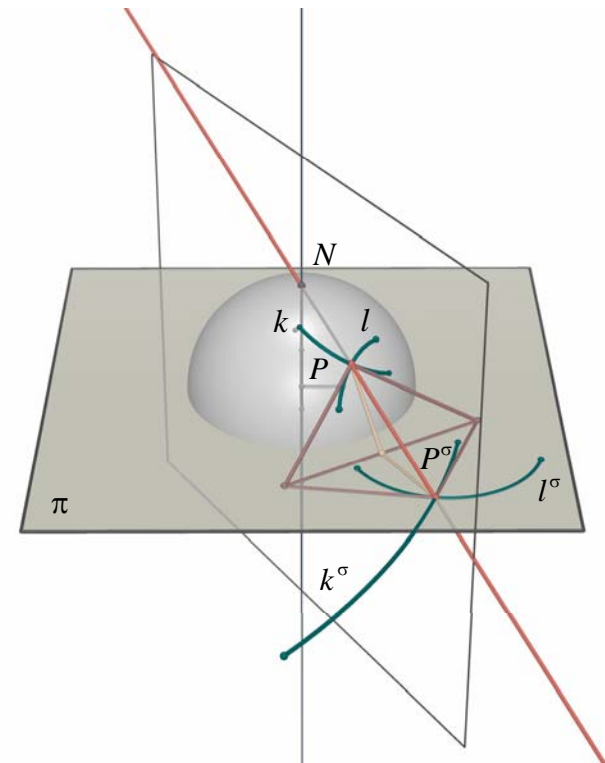
- Kreise $l \subset \Phi$ mit $N \in l$ werden auf Geraden $l^\sigma \subset \pi$ abgebildet und umgekehrt.
- Kreise $k \subset \Phi$ mit $N \notin k$ werden auf Kreise $k^\sigma \subset \pi$ abgebildet und umgekehrt.



Nachweis: Es ist zu zeigen, dass das Viereck $PQQ^\sigma P^\sigma$ ein **Sehnenviereck** ist: Man bestimme die Basiswinkel in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle MPN : 1/2(\pi - \alpha)$, $\triangle MQP : 1/2(\pi - \beta)$ und $\triangle MQN : 1/2(\pi - \alpha - \beta)$, woraus sich die gegenüberliegenden Innenwinkel in $PQQ^\sigma P^\sigma$ zu $(\alpha/2, \pi - \alpha/2)$ und $((\alpha + \beta)/2, \pi - (\alpha + \beta)/2)$ ergeben.

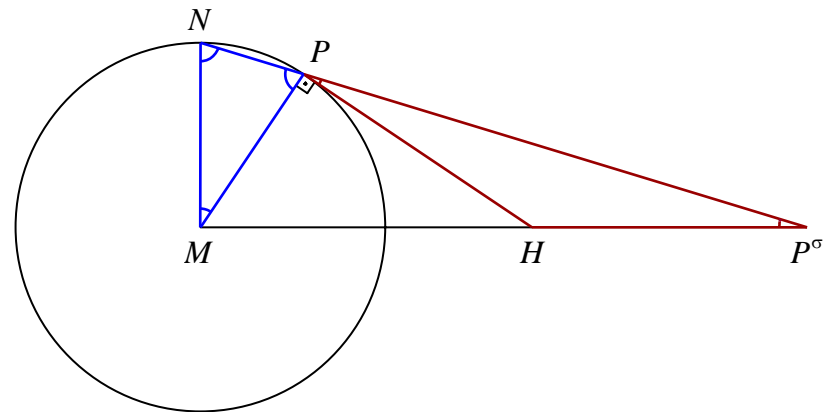
Stereographische Projektion

- Die Größe des Winkels zwischen den Richtungen zweier Kurven $k, l \subset \Phi$ in $P := k \cap l$ bleibt unter der Abbildung σ erhalten, d. h. $k^\sigma, l^\sigma \subset \pi$ schließen in P^σ einen gleichgroßen Winkel ein.



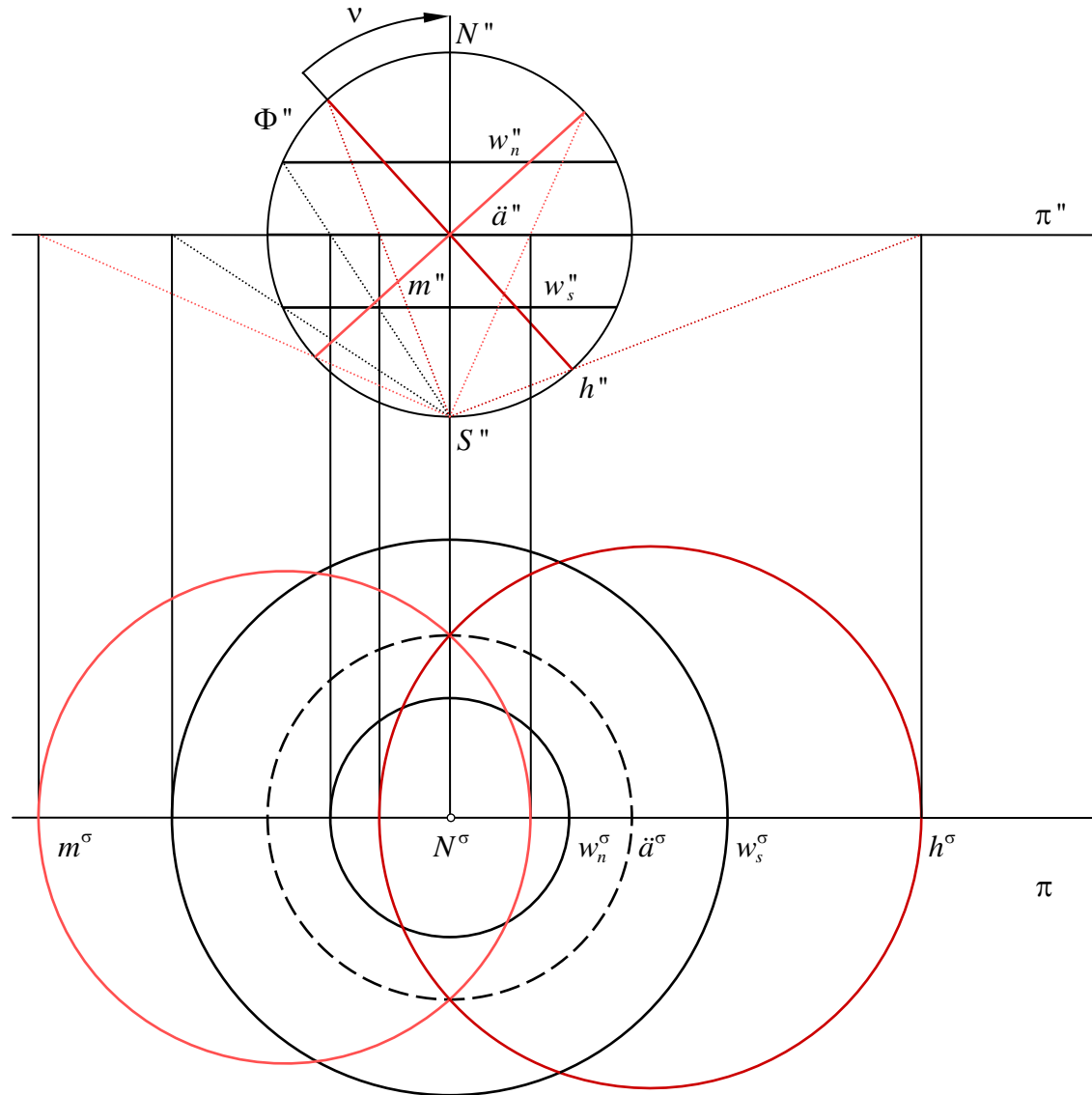
Stereographische Projektion

- Die Größe des Winkels zwischen den Richtungen zweier Kurven $k, l \subset \Phi$ in $P := k \cap l$ bleibt unter der Abbildung σ erhalten, d. h. $k^\sigma, l^\sigma \subset \pi$ schließen in P^σ einen gleichgroßen Winkel ein.



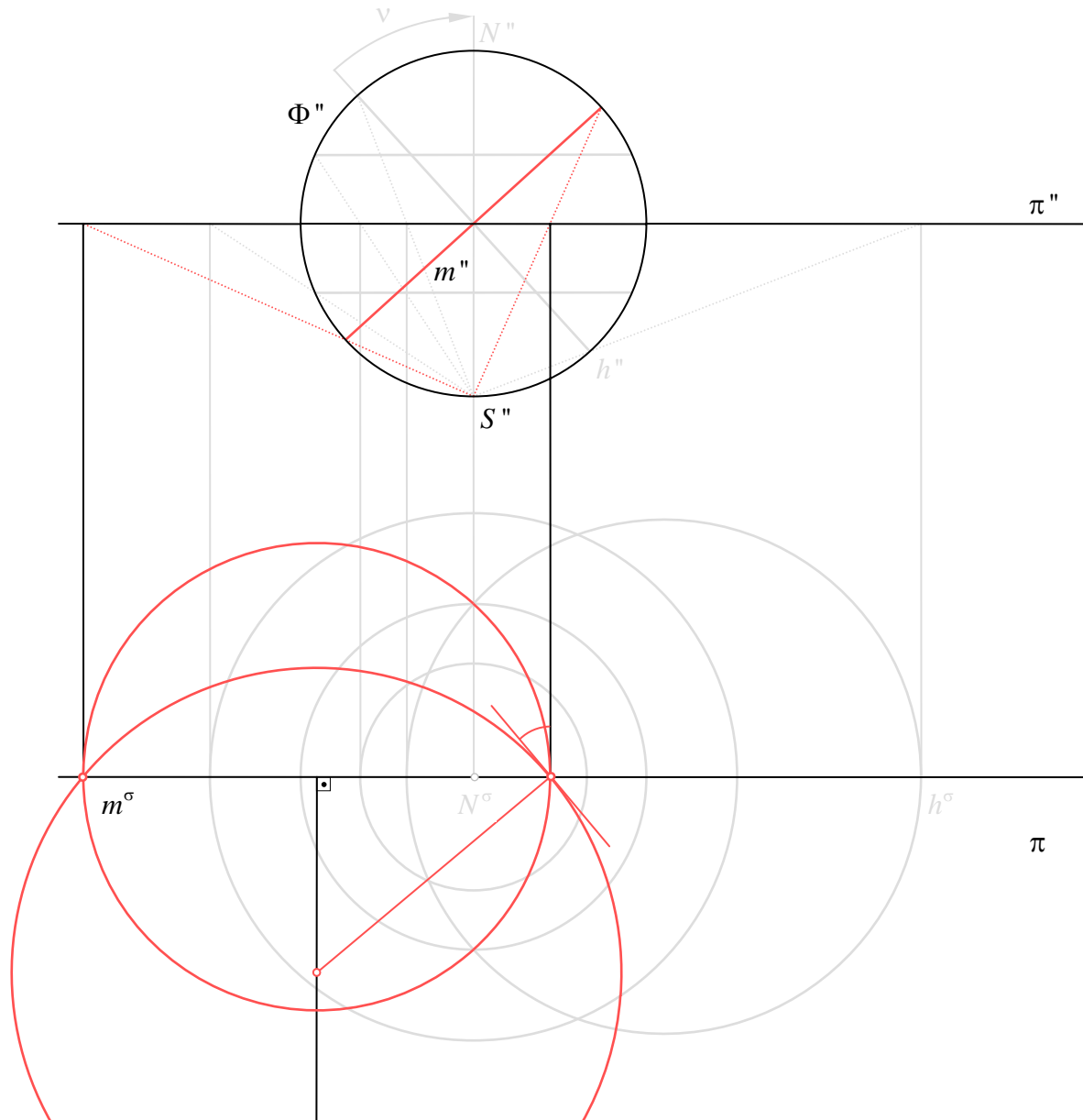
Nachweis: Es ist zu zeigen, dass das Dreieck $HP^\sigma P$ in der Meridianschnittebene ein **gleichschenkliges Dreieck** ist. Man bestimme hierzu die Winkel in den Dreiecken $\triangle MPN : \angle NPM = 1/2(\pi - \alpha)$, $\triangle MP^\sigma N : \angle PP^\sigma M = \alpha/2$ und $\triangle HP^\sigma P : \angle HPP^\sigma = \alpha/2$.

Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\nu \approx 41^\circ, d$) anzufertigen.

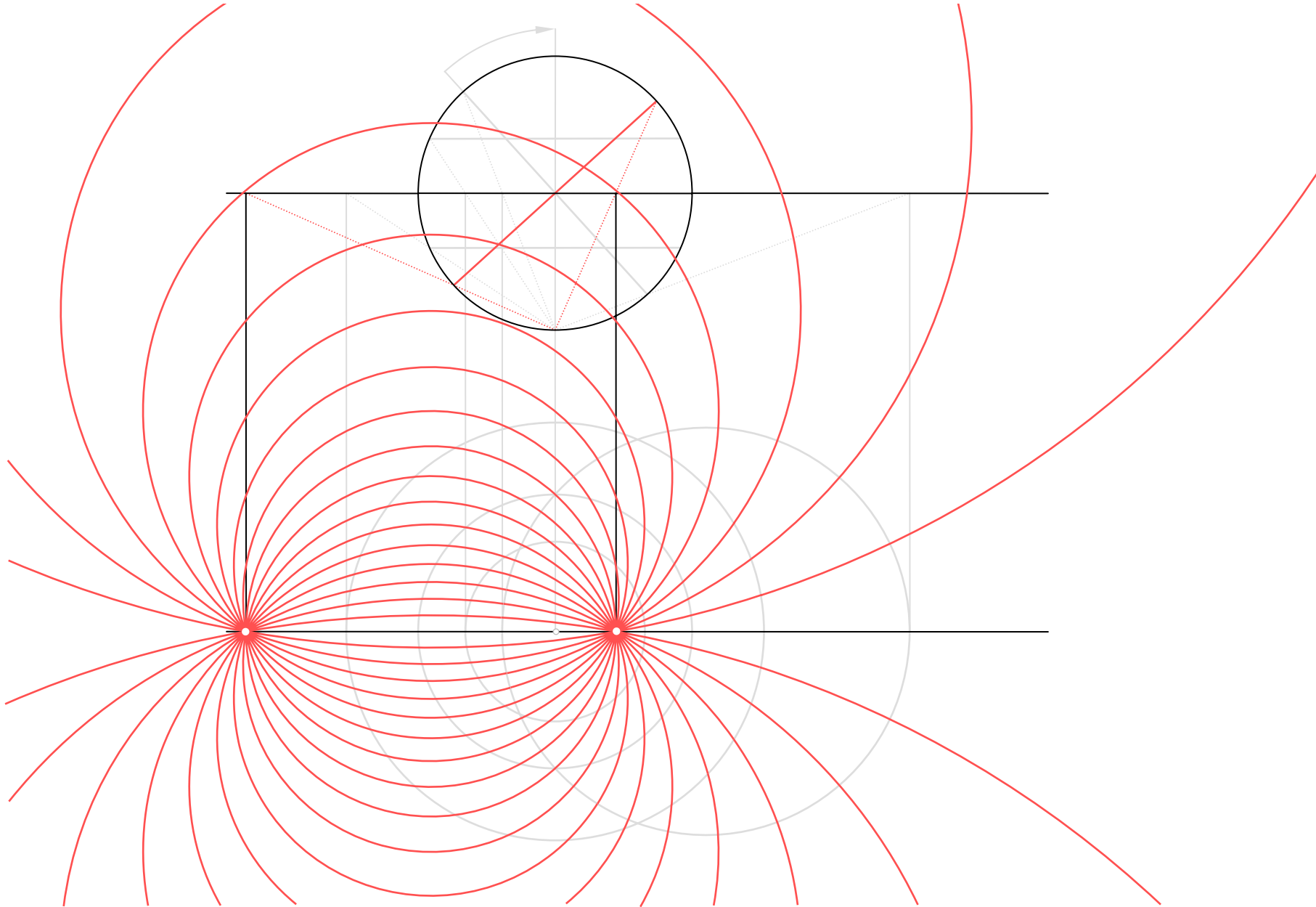


$$r_{\Phi} = \cot(((\pi/2) + \epsilon)/2)(d/2)$$

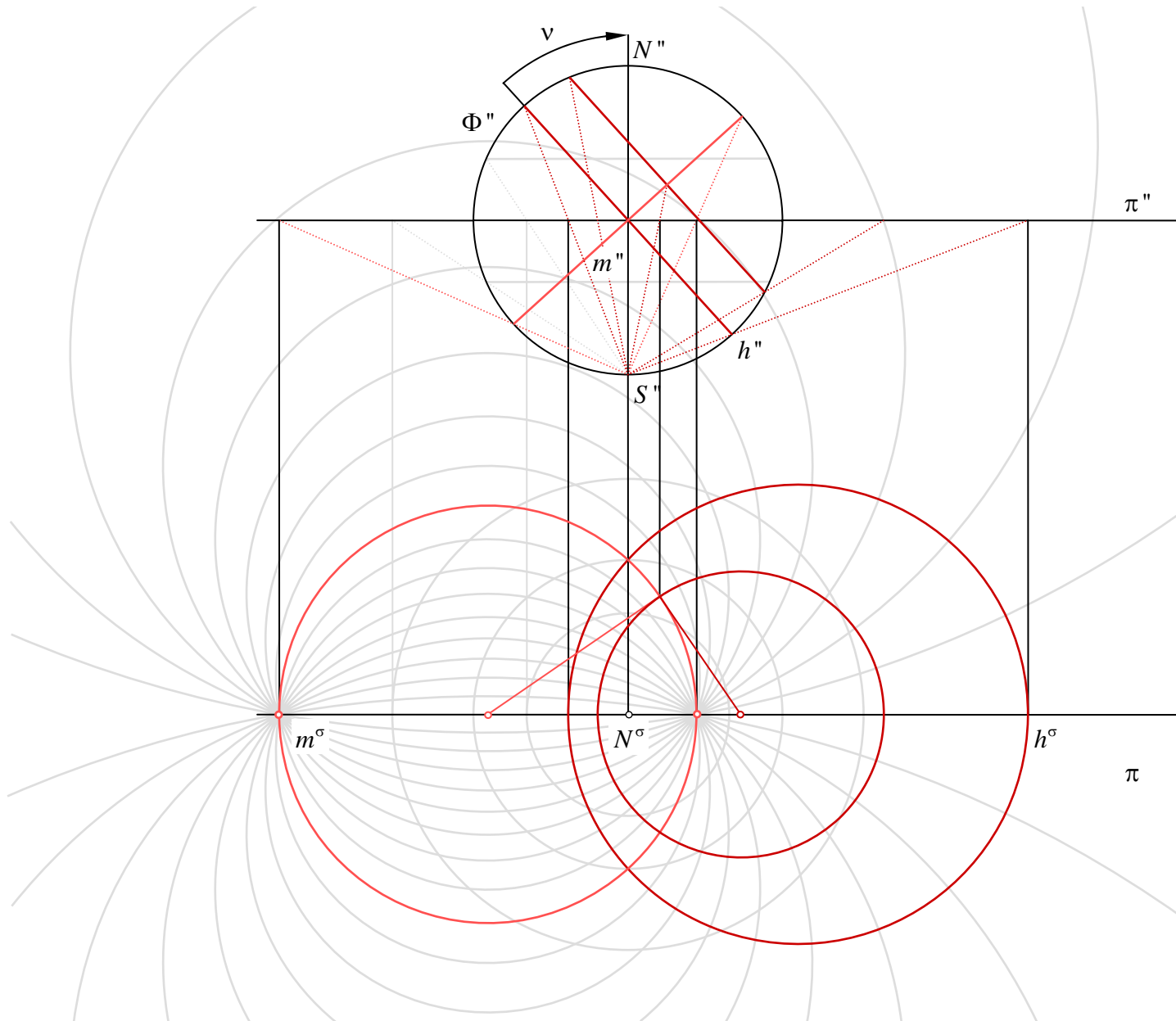
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\nu \approx 41^\circ$, d) anzufertigen.



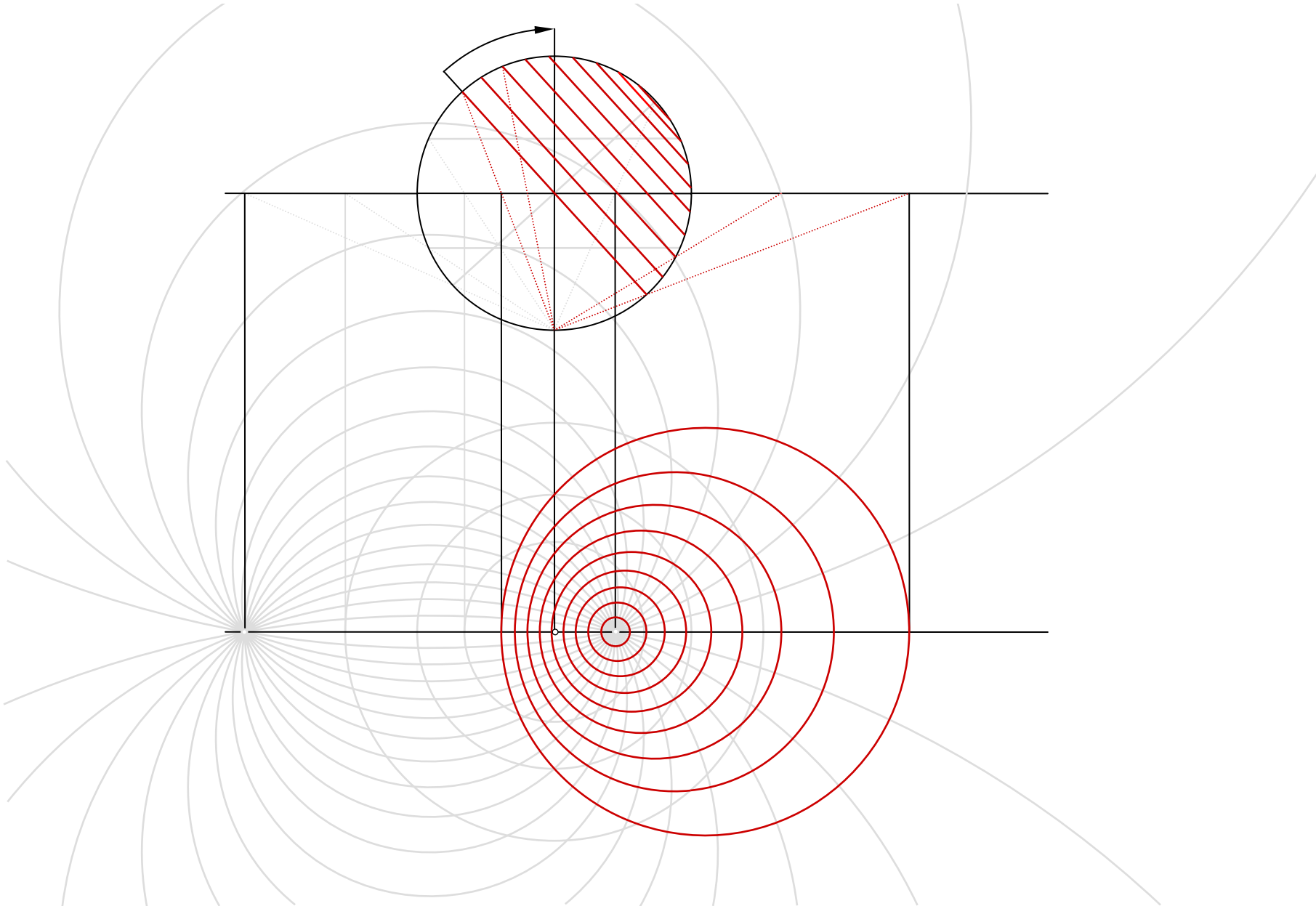
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\varphi \approx 41^\circ$, d) anzufertigen.



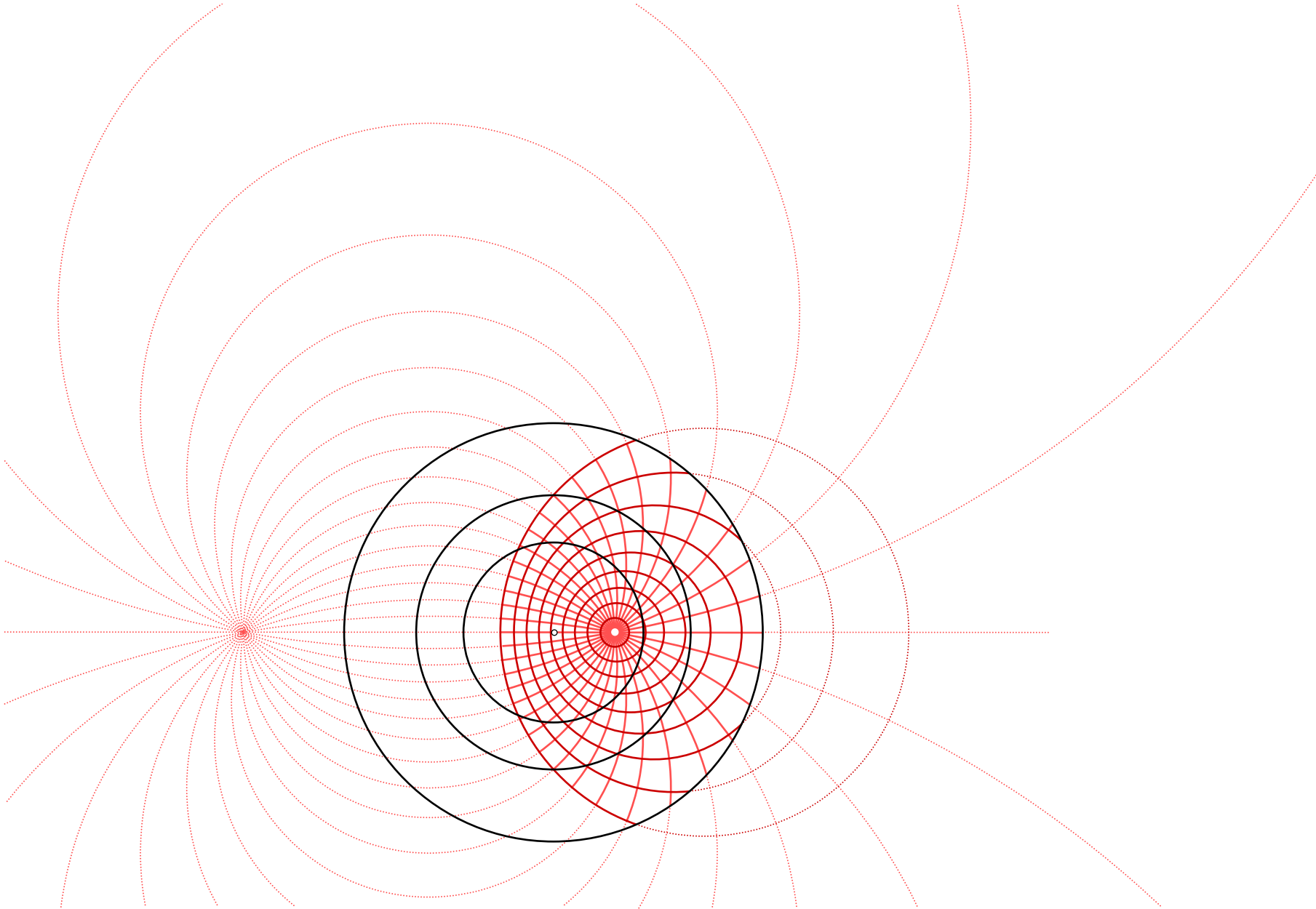
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\nu \approx 41^\circ$, d) anzufertigen.



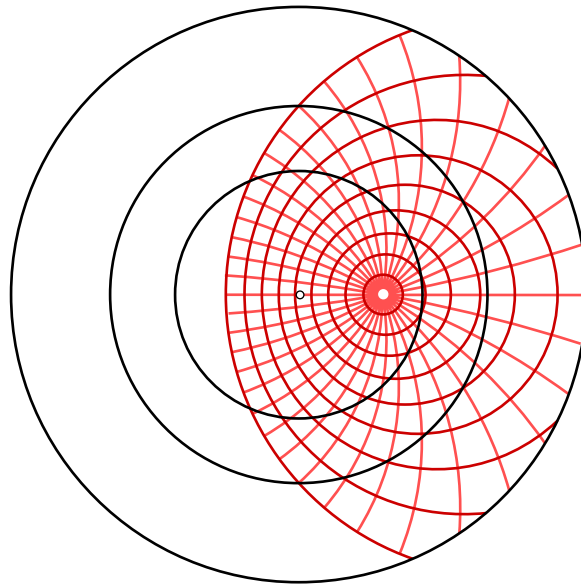
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\varphi \approx 41^\circ$, d) anzufertigen.



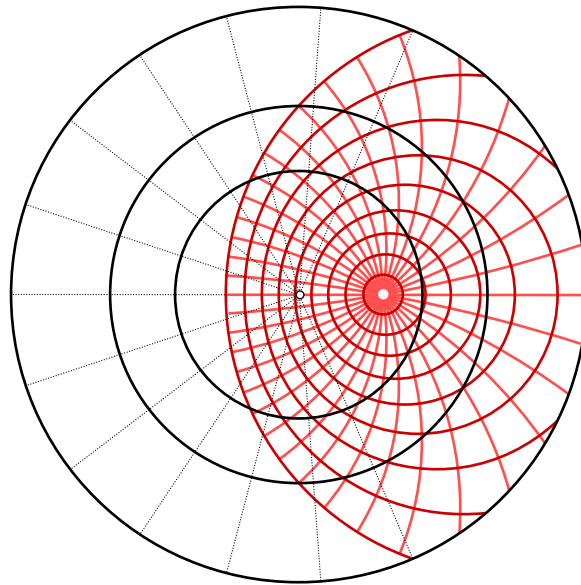
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\varphi \approx 41^\circ$, λ) anzufertigen.



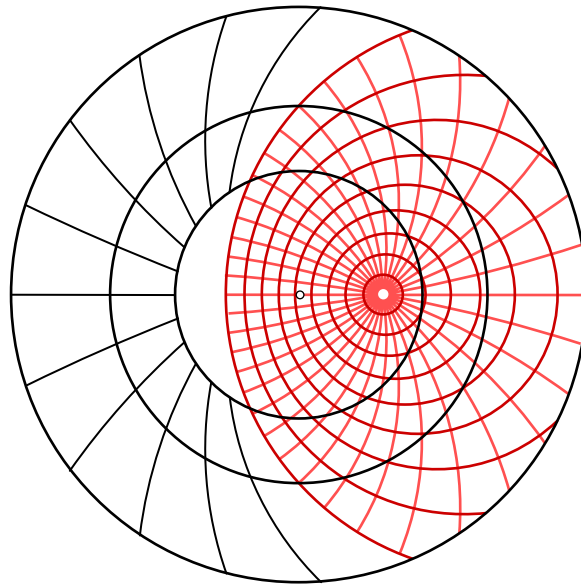
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\varphi \approx 41^\circ$, λ) anzufertigen.



Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\varphi \approx 41^\circ$, d) anzufertigen.



Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite $\varphi \approx 41^\circ$, d) anzufertigen.



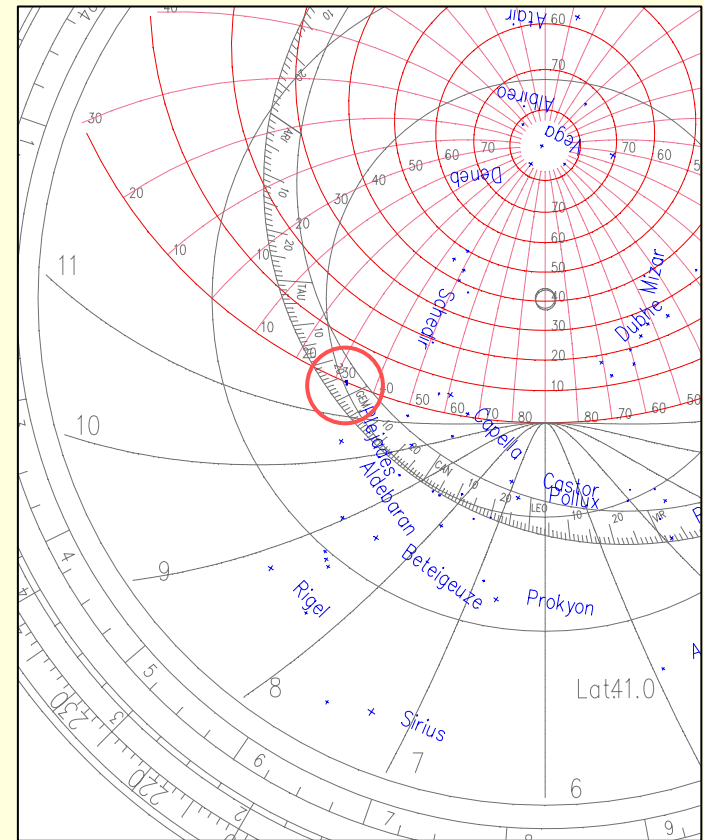
Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*

Astrolabium-Bausatz aus:

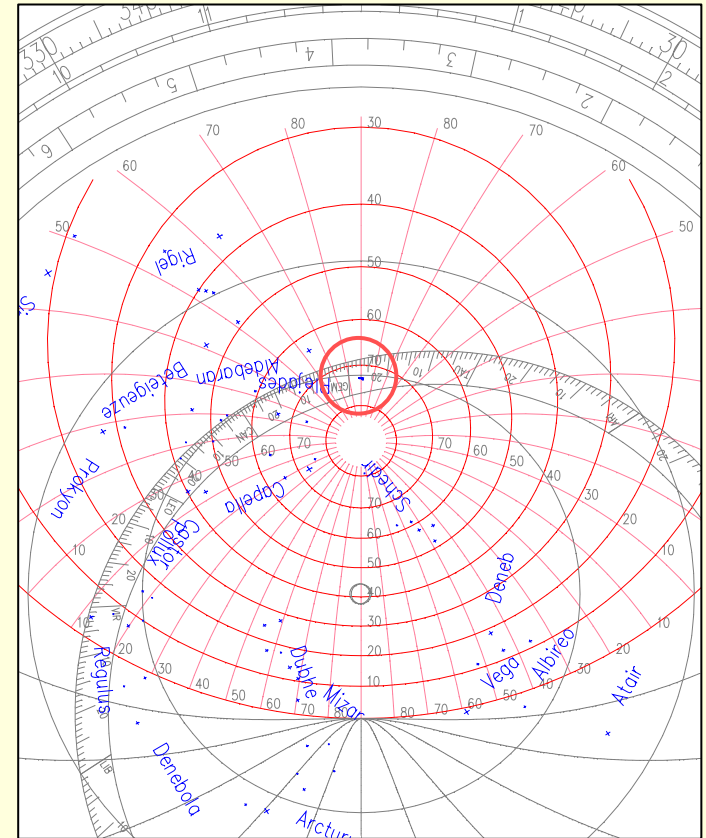
www.math.tu-dresden.de/~f.henschel/astrolabium



Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

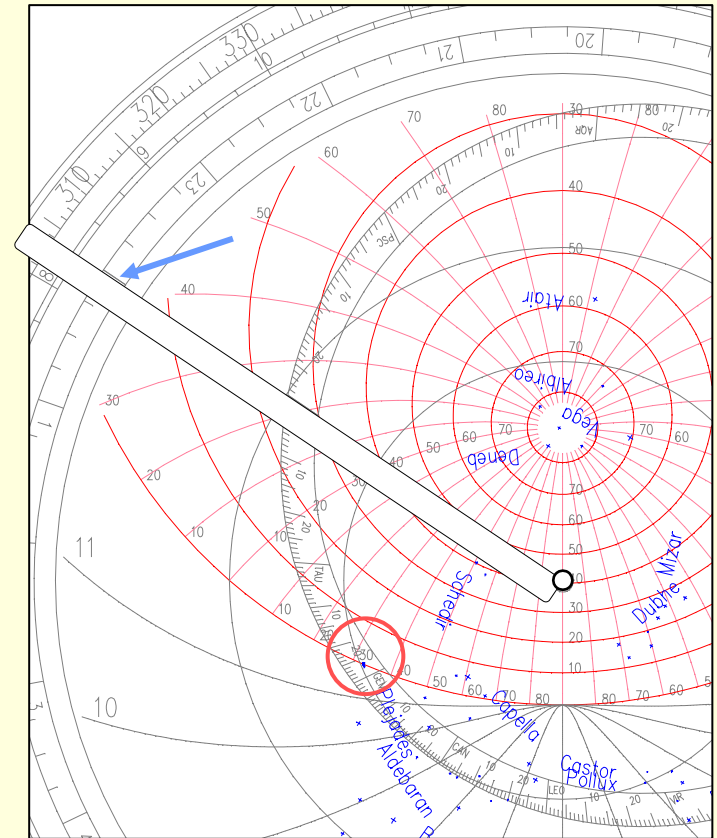
- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

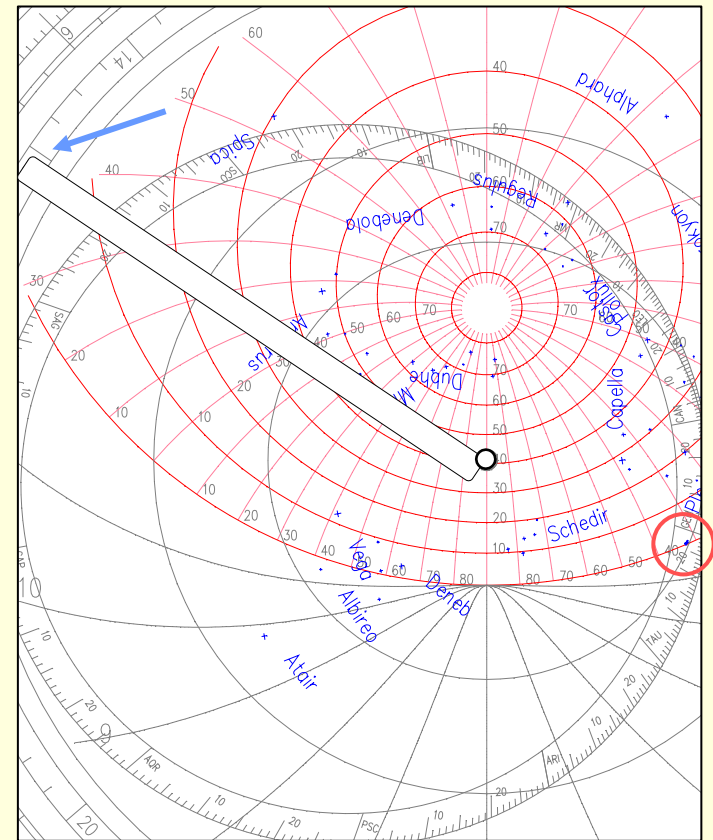
- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

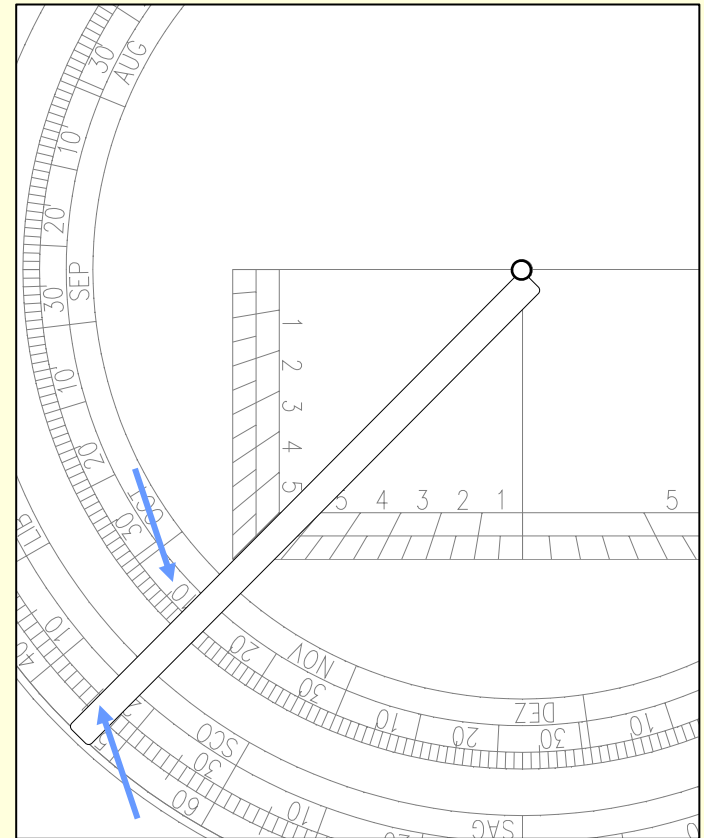
- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

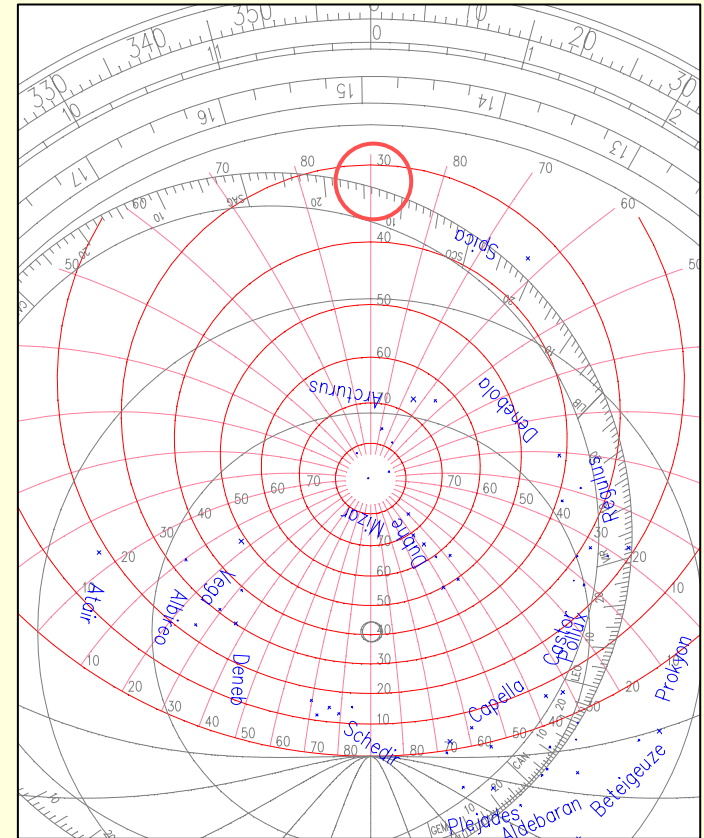
- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

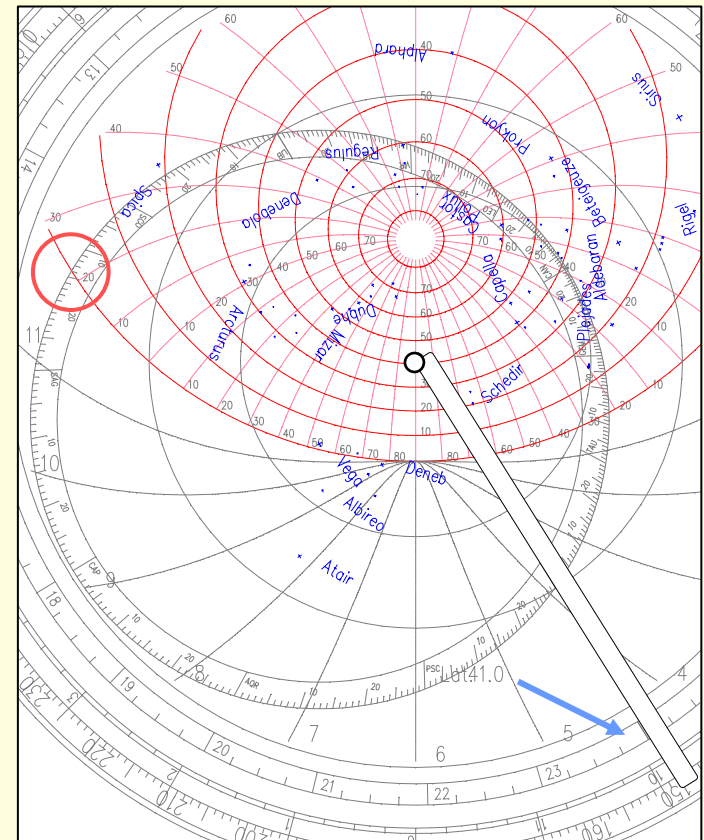
- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

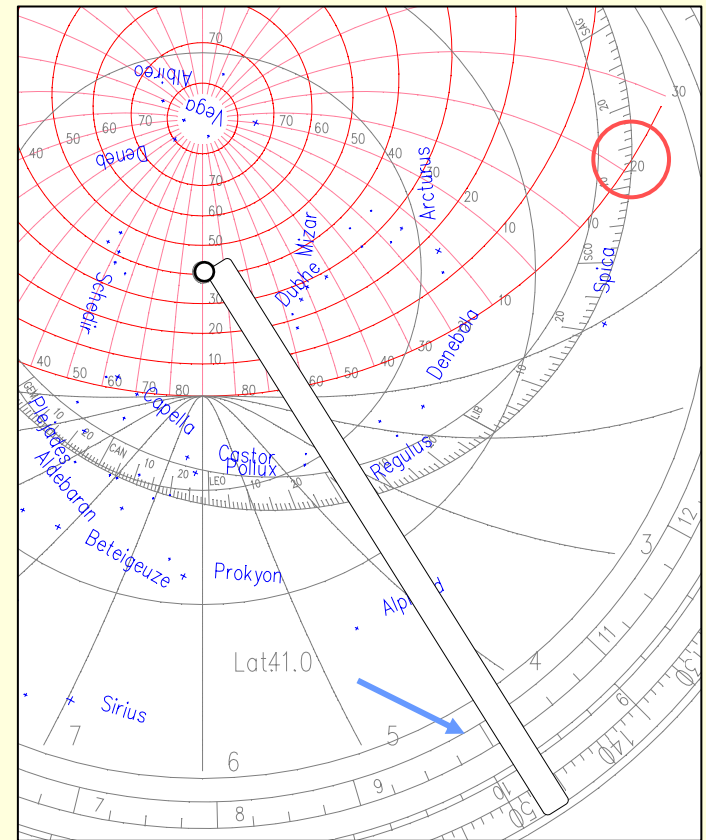
- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



Verwenden eines Astrolabiums

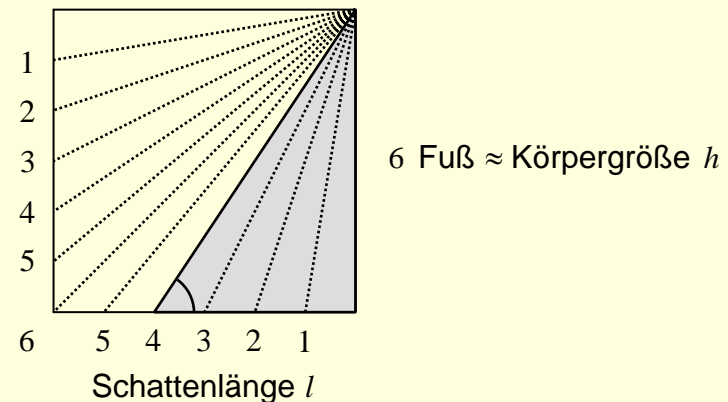
Beobachtung der Positionen von **Fixsternen** / **Sonne**:

Mit Hilfe eines Astrolabiums lassen sich **Höhen** von Fixsternen / der Sonne (über dem Horizont) näherungsweise bestimmen und zweckmäßig verwenden.

Bsp.: Bestimmung der Sonnenhöhe über dem Horizont

Die Höhe der Sonne darf nicht durch direkte Beobachtung bestimmt werden.

- **Schattenquadrat:** Verwendung von Seitenlängen-Verhältnissen in ähnlichen Dreiecken $h/l = H/L$.
- Der Höhenwinkel der Sonne lässt sich auch direkt an der Höhenskala durch Ausrichten der **Alidade** nach dem Sonnenlicht ablesen.



Verwenden eines Astrolabiums

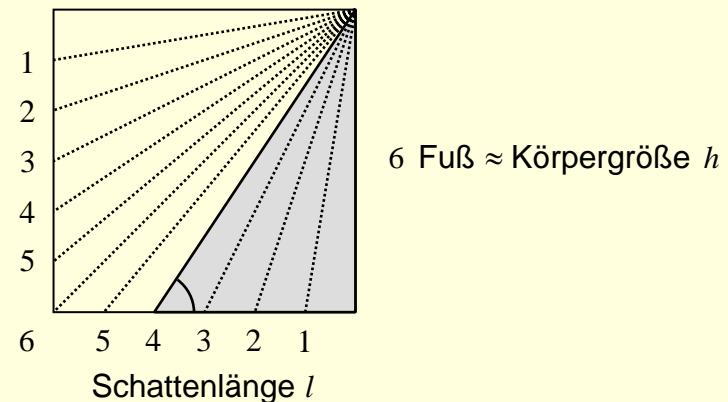
Beobachtung der Positionen von **Fixsternen** / **Sonne**:

Mit Hilfe eines Astrolabiums lassen sich **Höhen** von Fixsternen / der Sonne (über dem Horizont) näherungsweise bestimmen und zweckmäßig verwenden.

Bsp.: Bestimmung der Sonnenhöhe über dem Horizont

Die Höhe der Sonne darf nicht durch direkte Beobachtung bestimmt werden.

- **Schattenquadrat:** Verwendung von Seitenlängen-Verhältnissen in ähnlichen Dreiecken $h/l = H/L$.
- Der Höhenwinkel der Sonne lässt sich auch direkt an der Höhenskala durch Ausrichten der **Alidade** nach dem Sonnenlicht ablesen.



Verwenden eines Astrolabiums

Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

Bsp.: Bestimmung der Zeit am 8. November in Thessaloniki (morgens, Sonnenhöhe 20°)

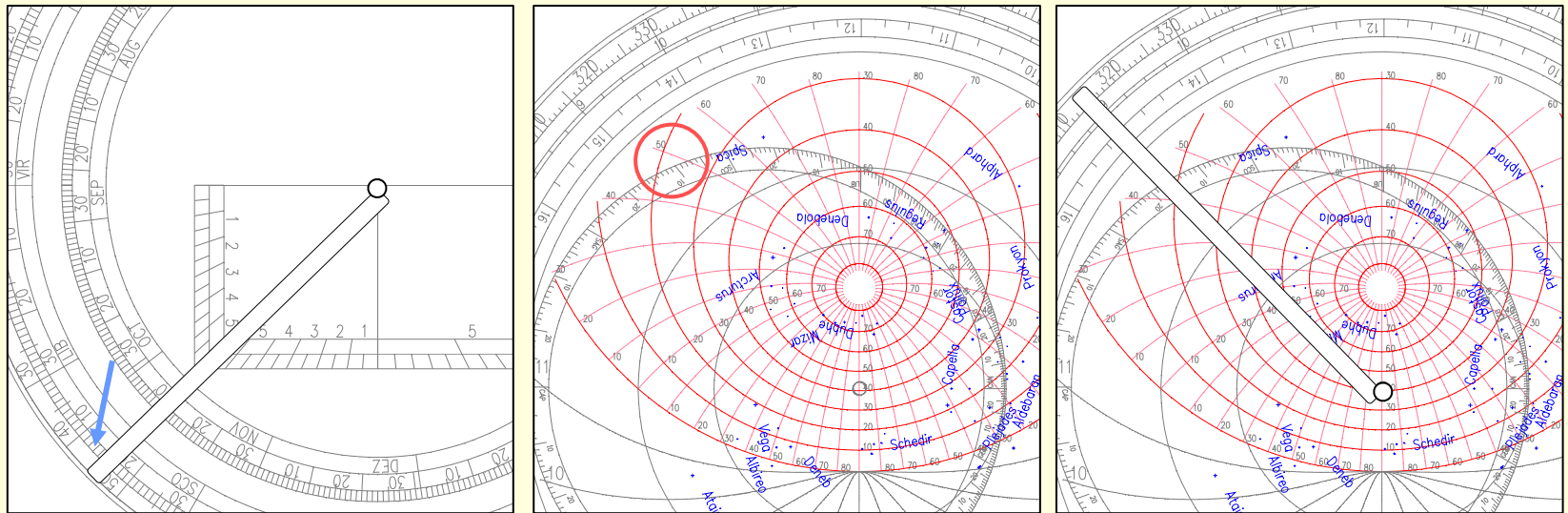
1. Bestimmung der Position der Sonne auf der Ekliptik am 8. November mit Hilfe der Kalender-Skala (15° in Tierkreiszeichen des Scorpions [♏]).
2. Übertragen der Position ♏ 15° auf der Ekliptik über dem 20°-Höhenkreis am östlichen Horizont.
3. Drehen des Zeigers in diese Position und Ablesen der Zeit auf der Stunden-Skala.

Verwenden eines Astrolabiums

Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

Bsp.: Bestimmung der Zeit am 8. November in Thessaloniki (morgens, Sonnenhöhe 20°)



Verwenden eines Astrolabiums

Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

Bsp.: Zeitangabe in der Nacht vom 7. - 8. Nov., Thessaloniki (Betelgeuse 50° , südwestliche Richtung)

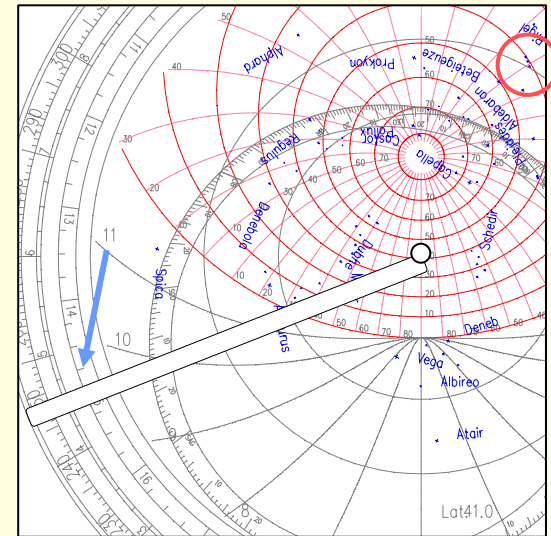
1. Bestimmung der Position der Sonne auf der Ekliptik am 8. November mit Hilfe der Kalender-Skala (15° in Tierkreiszeichen des Scorpions [\mathbb{M}]).
2. Drehen der Sternenscheibe (rete), bis die Position von Betelgeuse über dem 50° -Höhenkreis in südwestlicher Richtung erscheint.
3. Drehen des Zeigers in die Position \mathbb{M} 15° auf der Ekliptik (Sonne ist Zeitgeber!) und Ablesen der Zeit auf der Stunden-Skala.

Verwenden eines Astrolabiums

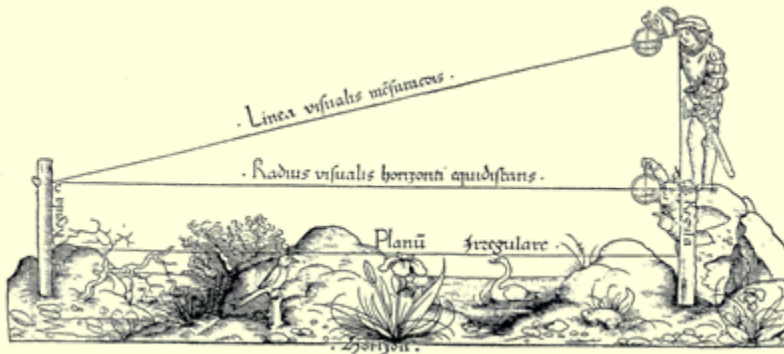
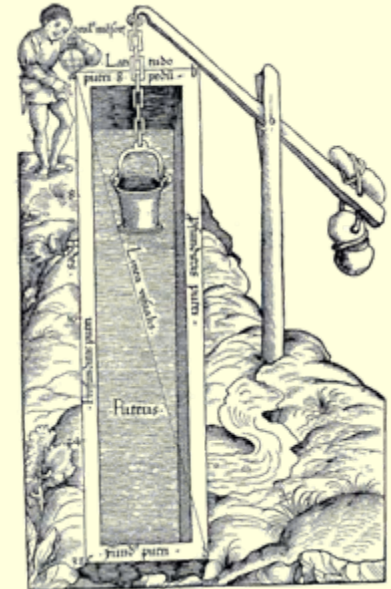
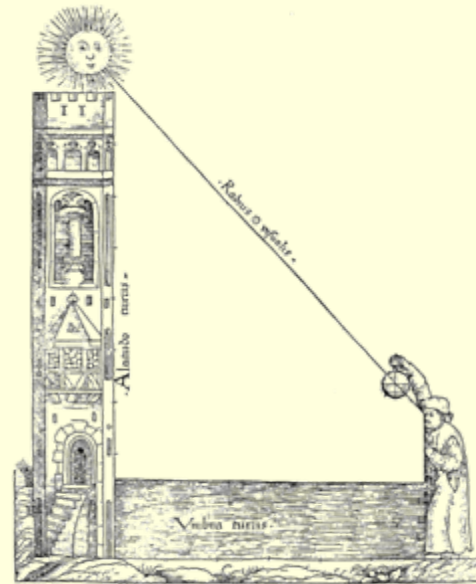
Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

Bsp.: Zeitangabe in der Nacht vom 7. - 8. Nov., Thessaloniki (Betelgeuse 50° , südwestliche Richtung)



Weitere Anwendungsgebiete



Abbildungen aus:
WEBSTER, R. a. M.: Western Astrolabes.

Lern- und Lehransätze

- Auseinandersetzung mit historischen (und modernen) Vorstellungen in der Astronomie, Schulung des (räumlichen) Vorstellungsvermögens,
- Interdisziplinäre Behandlung eines Gegenstandes,
- Bewusste Auseinandersetzung mit dem kulturellen Erbe,
- Kennen lernen einer wissenschafts- und kulturhistorischen Verankerung mathematischer und geometrischer Inhalte der Schullehrpläne (nicht nur) als alternative Lehr- und Lernmethode.
- ...