

# Analoge Recheninstrumente zur Beschreibung von Himmelserscheinungen



28. Fortbildungstagung für Geometrie

Strobl, November 05 – 08, 2007

Frank Henschel / Marco Hamann

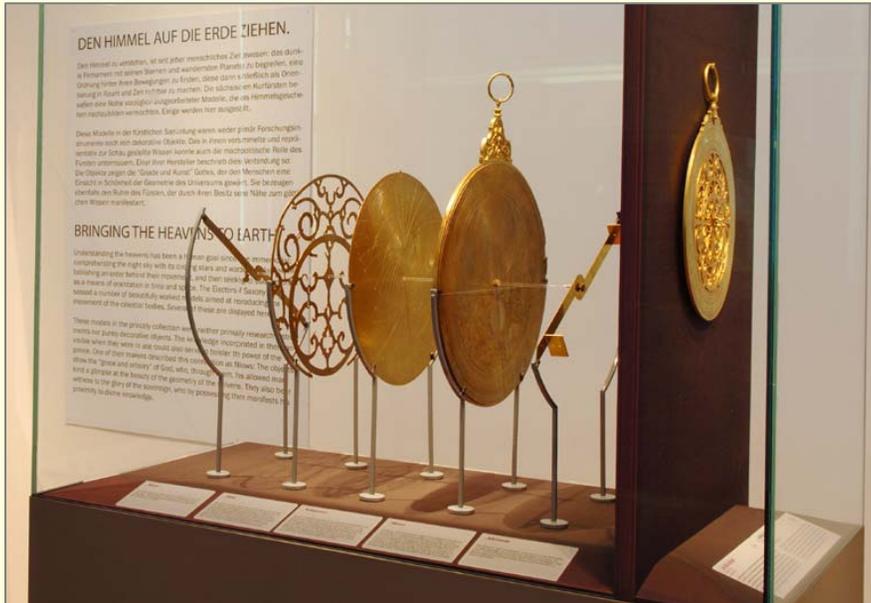
# Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden



“Geometrie der Macht”. Ausstellung im Grünen Gewölbe, Dresden (rechts)

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden (links und Mitte)

# Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden



JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

“Geometrie der Macht”: Ausstellung im Grünen Gewölbe, Dresden.

# Gliederung

- Einführung
- Astrolabium als Funktionsmodell der „Himmelskugel“
- Stereographische Projektion und Eigenschaften
- Verwendung eines Astrolabiums als (analoger) Rechner
- Lern- und Lehransätze

# Die Himmelskugel



Geozentrische Armillarsphäre, Frankreich um 1500  
Mathematisch-Physikalischer Salon

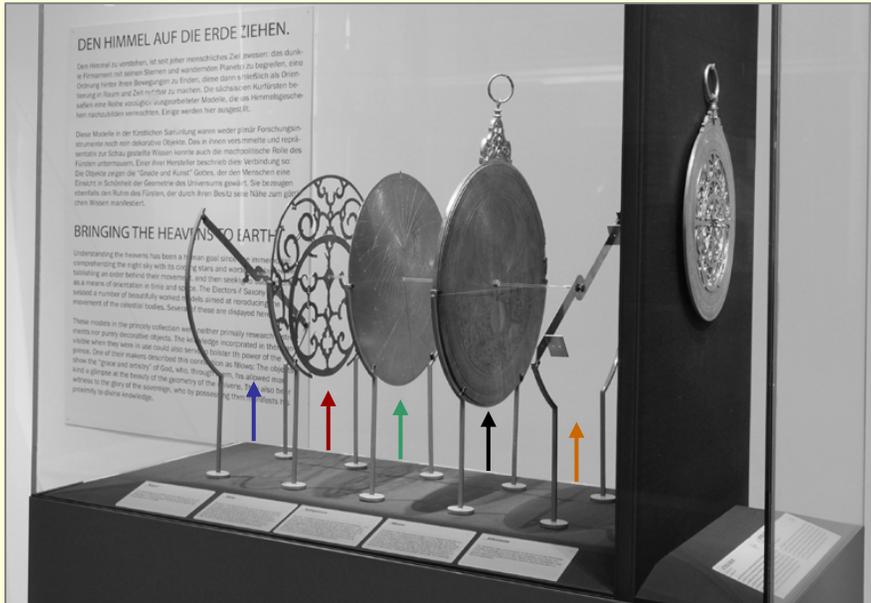
Grundlegende Aussagen in der **griechischen Astronomie**:

- Die Erde ist eine Kugel und liegt im Zentrum des Himmels. Sie besitzt verschwindende Größe im Vergleich zum Himmel.
- Der Himmel ist auch eine Kugel (**Himmelskugel**).
- Der Himmel befindet sich in täglicher Bewegung um eine Achse durch die Erde.

# Die Tierkreiszeichen

Symbol	Lateinisch	Deutsch
♈ Ari	Aries	Widder
♉ Tau	Taurus	Stier
♊ Gem	Gemini	Zwillinge
♋ Can	Cancer	Krebs
♌ Leo	Leo	Löwe
♍ Vir	Virgo	Jungfrau
♎ Lib	Libra	Waage
♏ Sco	Scorpius	Skorpion
♐ Sag	Sagittarius	Schütze
♑ Cap	Capricornus	Steinbock
♒ Aqr	Aquarius	Wassermann
♓ Psc	Pices	Fische

# Astrolabium – Modell der Himmelskugel



## Bestandteile eines Astrolabiums:

- Mater (Grundplatte)
- Rete („Himmelskugel“)
- Latitude plate (Koordinatennetz)
- Rule (Zeiger)
- Alidade (Lineal)

JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

“Geometrie der Macht”: Ausstellung im Grünen Gewölbe, Dresden.

# Astrolabium – Modell der Himmelskugel



**Rete**  $\hat{=}$  Himmelskugel, insbesondere:

- Sterne / Sternbilder
- Himmelsnordpol
- Ekliptik (scheinbare jährliche Bahn der Sonne am Himmel)
- Skala für Rektaszension

JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden

# Astrolabium – Modell der Himmelskugel



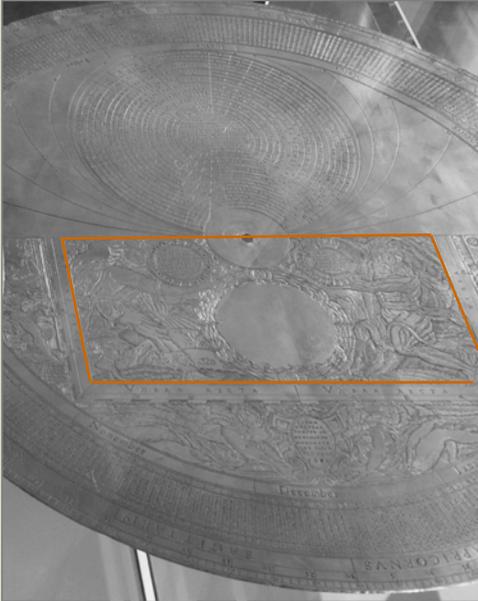
JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

**Latitude Plate**  $\hat{=}$  Koordinatennetz:

- Himmelsäquator und -nordpol
- Nördlicher und südlicher Wendekreis
- Horizont und Zenit
- Meridiane bezüglich des Horizonts
- (Kurven für saisonale Stunden)

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden

# Astrolabium – Modell der Himmelskugel



**Rückseite**, insbesondere mit:

- Kreisförmige Kalenderskala und konzentrische Skala für Tierkreiszeichen
- Schattenquadrat
- Kurven für saisonale Stunden

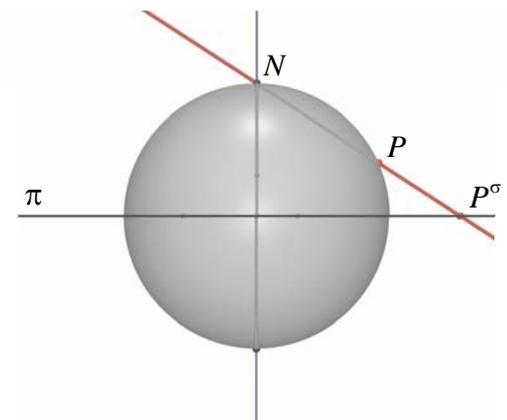
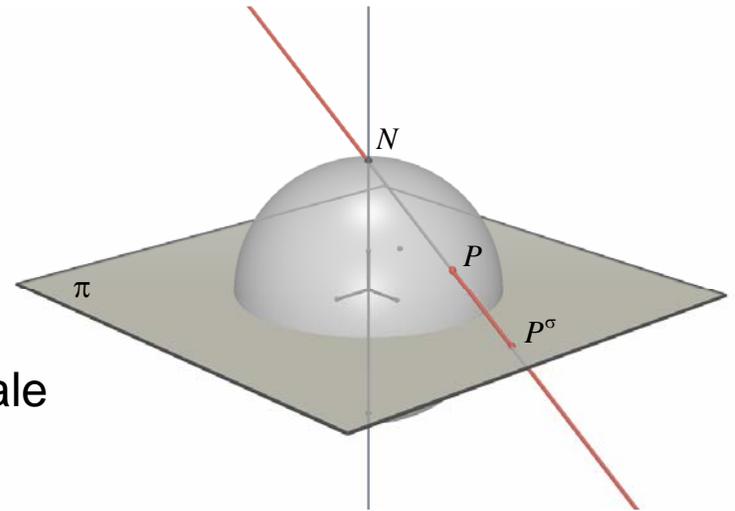
JOHANN JOACHIM PRÄTORIUS, Nürnberg 1568

Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden

# Stereographische Projektion

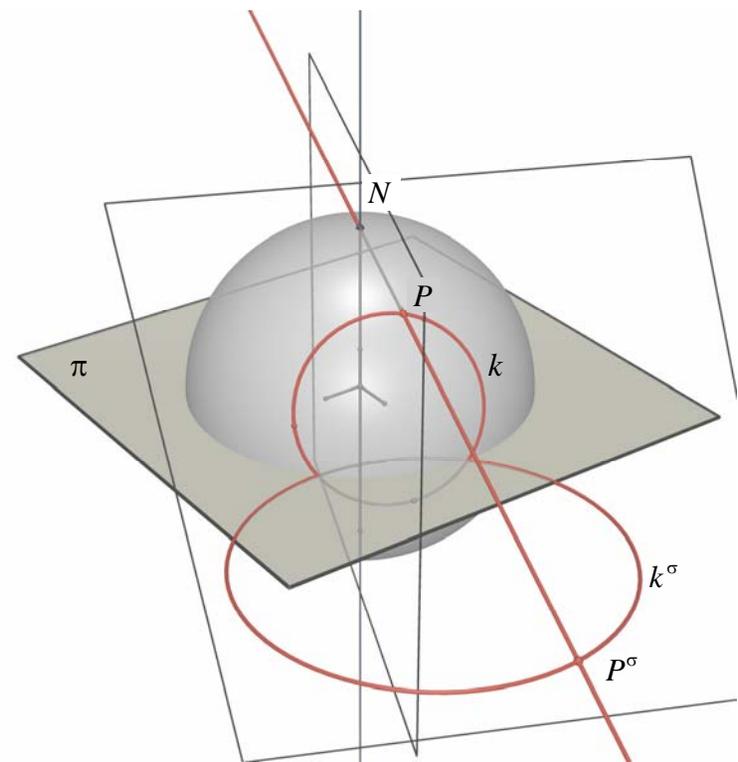
Gegeben sind eine Kugel  $\Phi(M, r) \subset A^3$  mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ , des weiteren ein Paar  $(N, S)$  von gegenüberliegenden Punkten auf  $\Phi$  sowie die zu  $SN$  orthogonale Ebene  $\pi$  durch  $M$ .

Die Abbildung  $\sigma: \Phi \setminus \{N\} \rightarrow \pi: P \mapsto P^\sigma$  mit  $P^\sigma := NP \cap \pi$  heißt **stereographische Projektion**.



# Stereographisches Bild von Kreisen

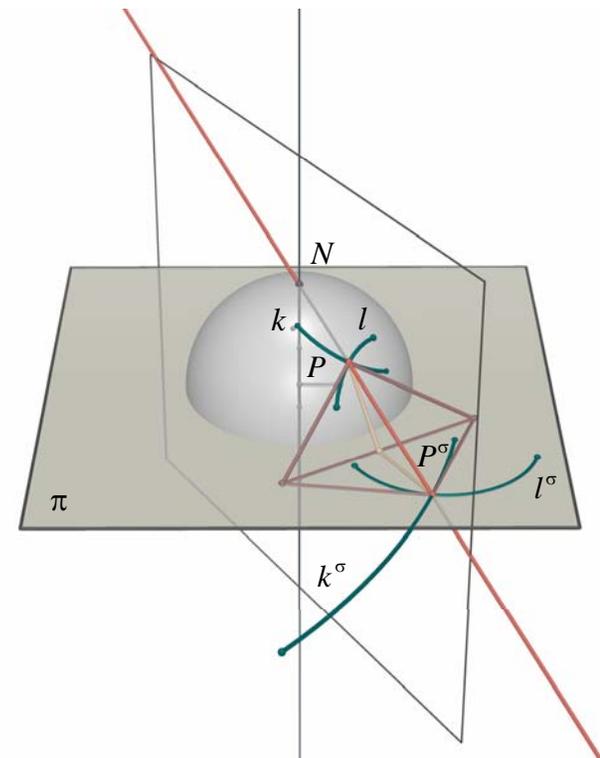
- Kreise  $l \subset \Phi$  mit  $N \in l$  werden auf Geraden  $l^\sigma \subset \pi$  abgebildet und umgekehrt.
- Kreise  $k \subset \Phi$  mit  $N \notin k$  werden auf Kreise  $k^\sigma \subset \pi$  abgebildet und umgekehrt.





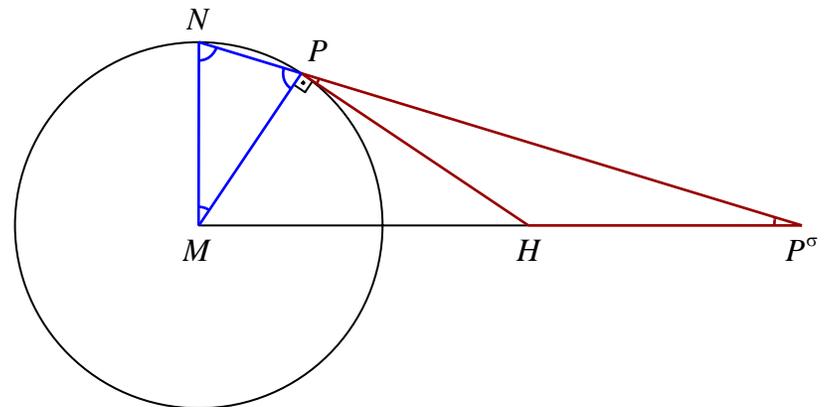
# Stereographische Projektion

- Die Größe des Winkels zwischen den Richtungen zweier Kurven  $k, l \subset \Phi$  in  $P := k \cap l$  bleibt unter der Abbildung  $\sigma$  erhalten, d. h.  $k^\sigma, l^\sigma \subset \pi$  schließen in  $P^\sigma$  einen gleichgroßen Winkel ein.



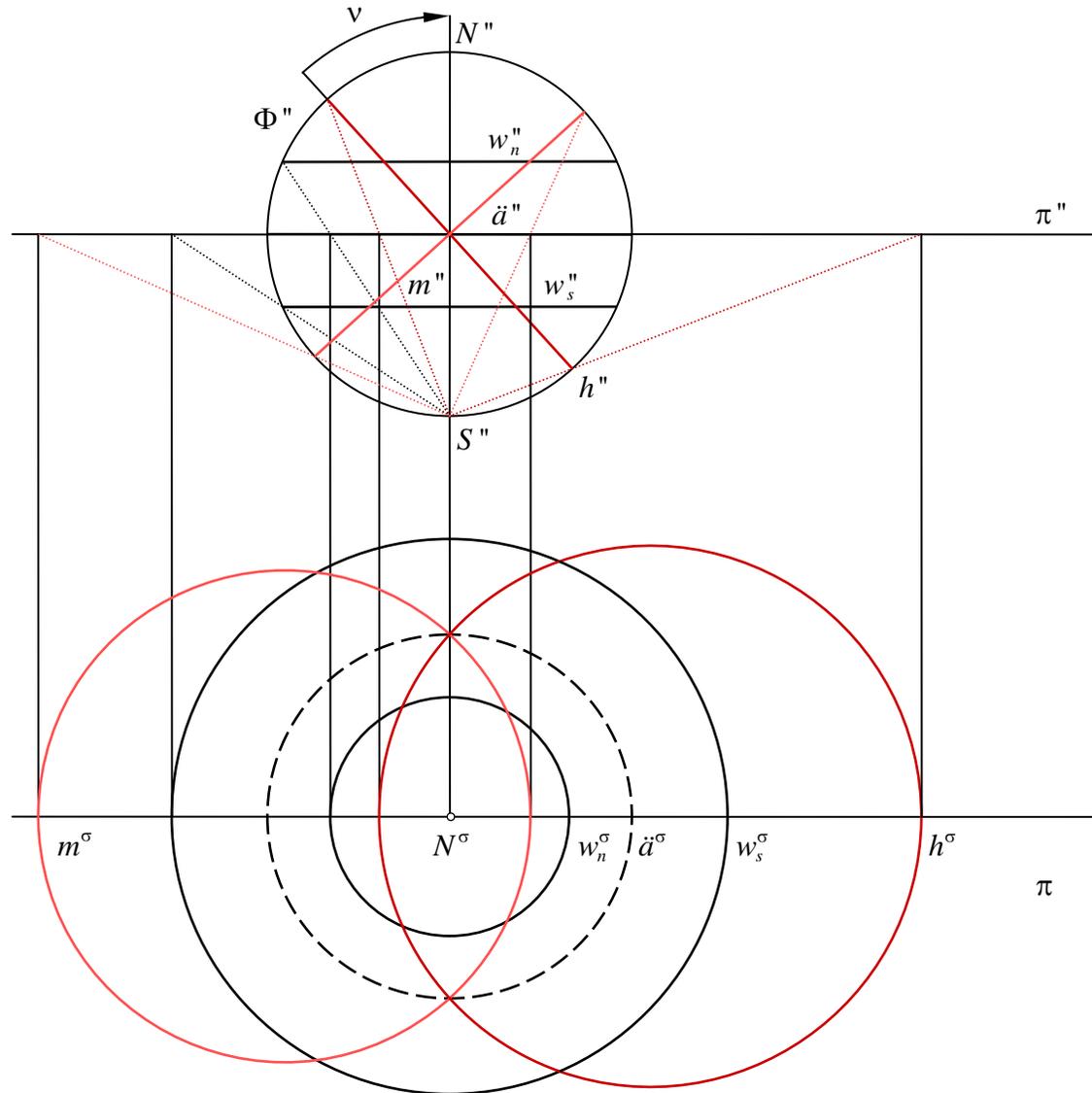
# Stereographische Projektion

- Die Größe des Winkels zwischen den Richtungen zweier Kurven  $k, l \subset \Phi$  in  $P := k \cap l$  bleibt unter der Abbildung  $\sigma$  erhalten, d. h.  $k^\sigma, l^\sigma \subset \pi$  schließen in  $P^\sigma$  einen gleichgroßen Winkel ein.



*Nachweis:* Es ist zu zeigen, dass das Dreieck  $HP^\sigma P$  in der Meridianschnittebene ein **gleichschenkliges Dreieck** ist. Man bestimme hierzu die Winkel in den Dreiecken  $\triangle MPN : \sphericalangle NPM = 1/2(\pi - \alpha)$ ,  $\triangle MP^\sigma N : \sphericalangle PP^\sigma M = \alpha/2$  und  $\triangle HP^\sigma P : \sphericalangle HPP^\sigma = \alpha/2$ .

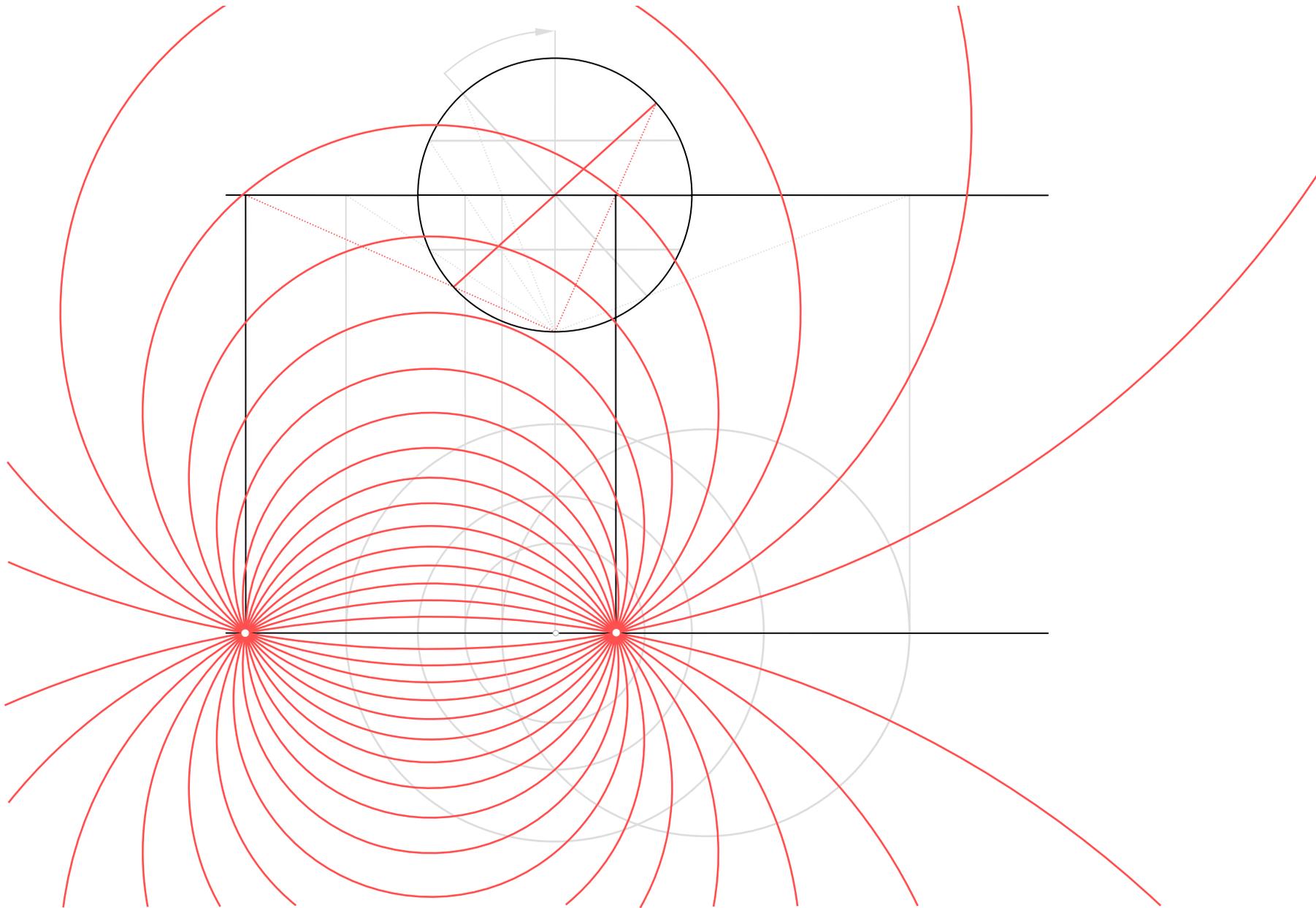
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ, d$ ) anzufertigen.



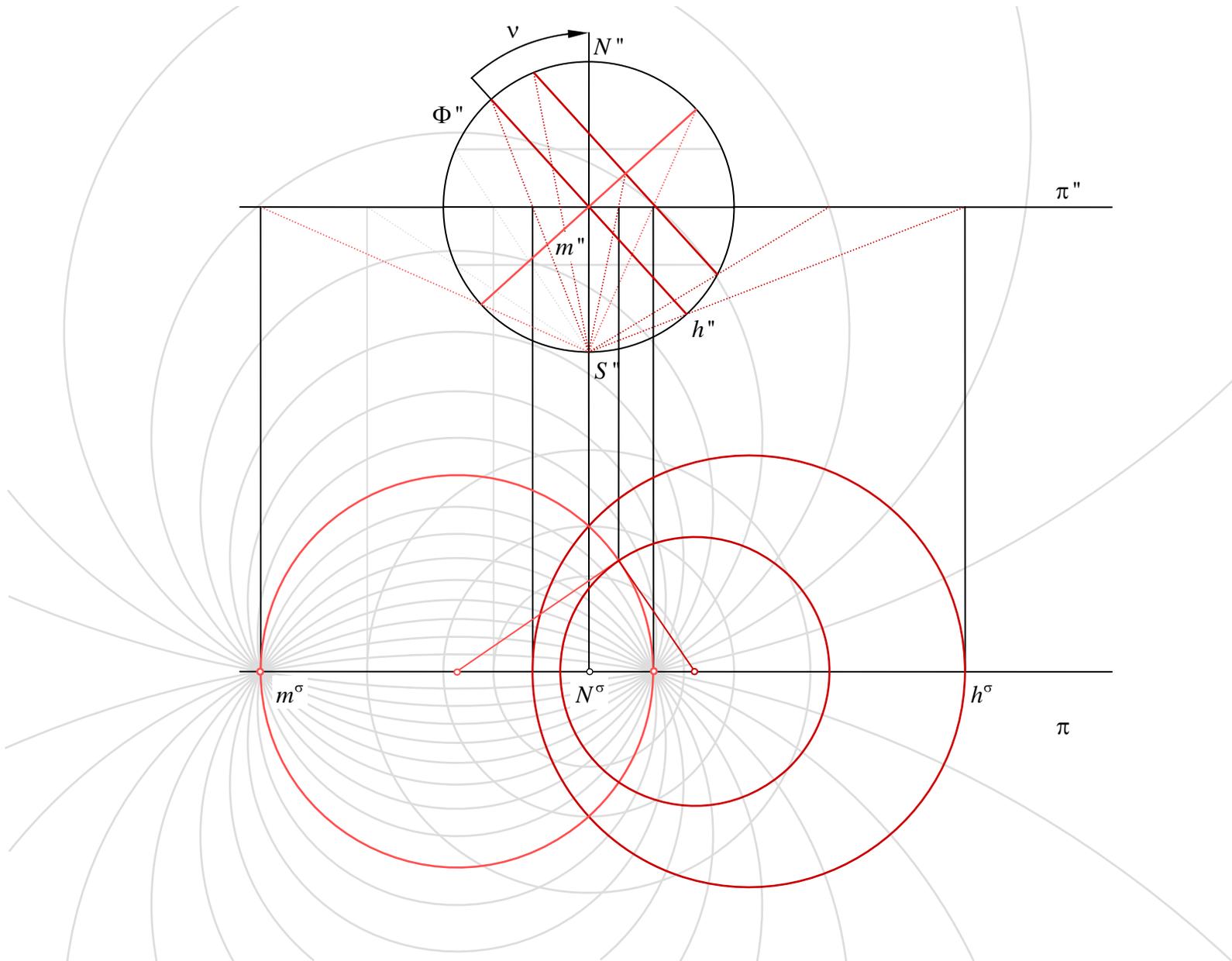
$$r_\Phi = \cot(((\pi/2) + \epsilon)/2)(d/2)$$



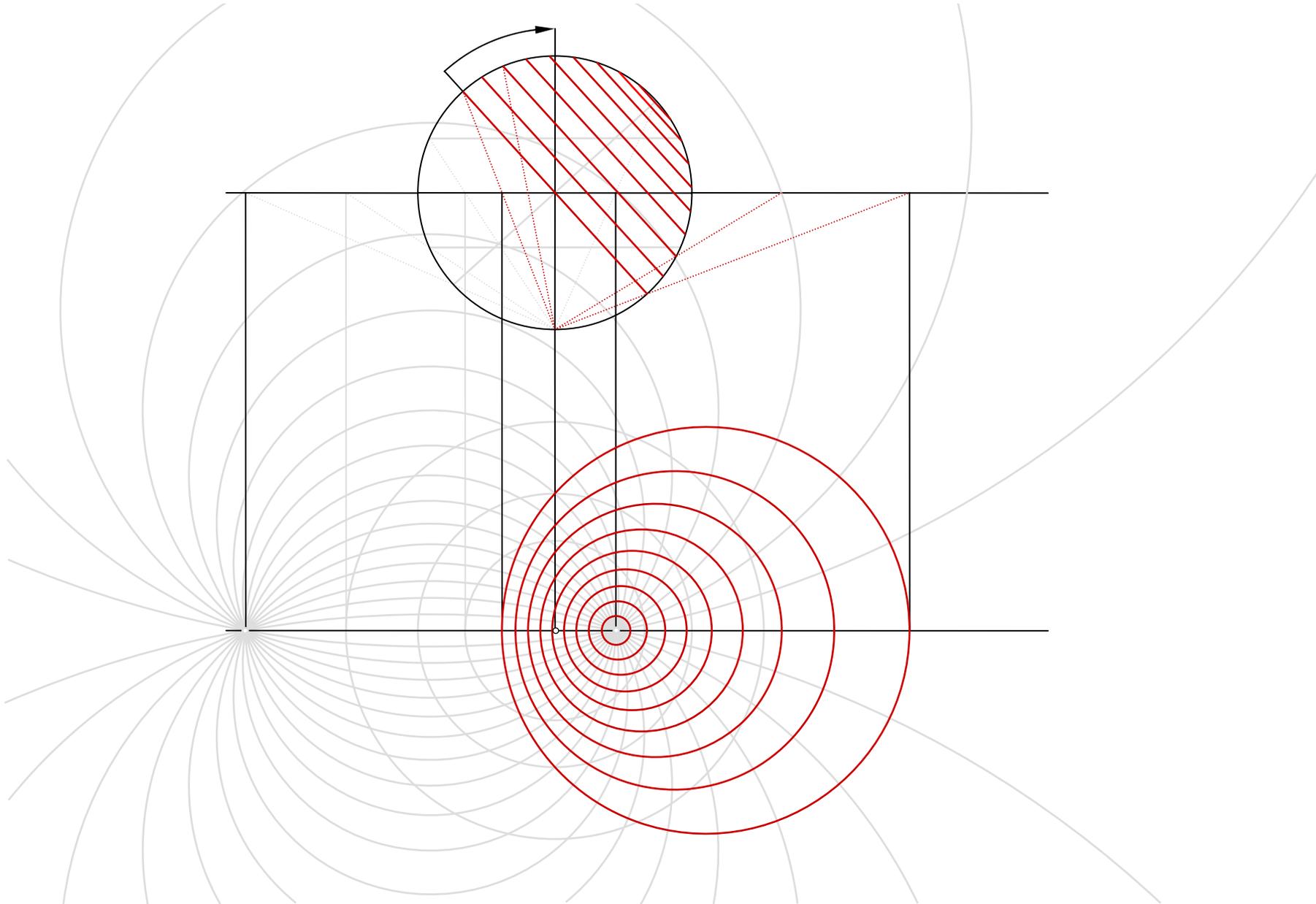
*Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ, d$ ) anzufertigen.*



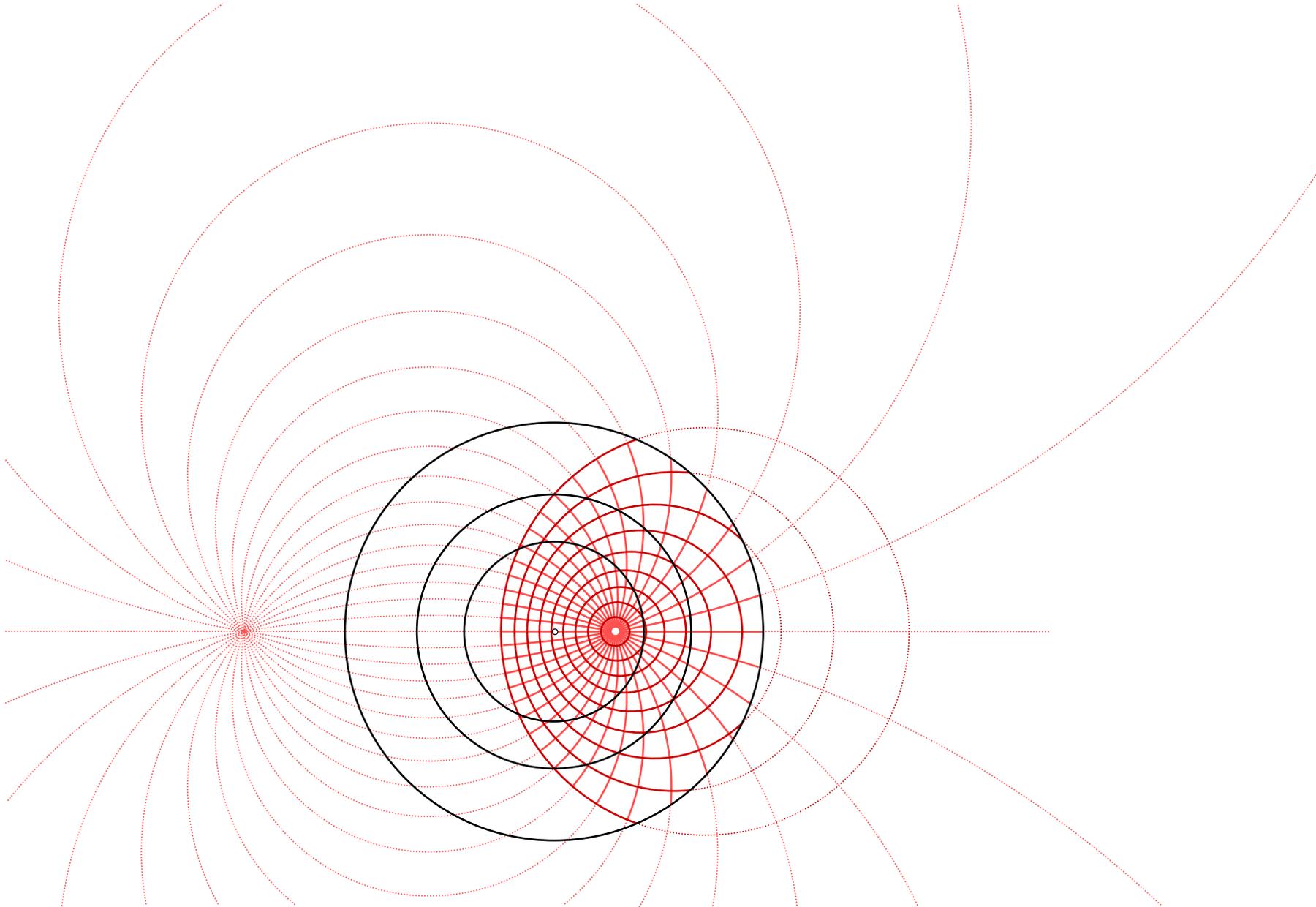
Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ, d$ ) anzufertigen.



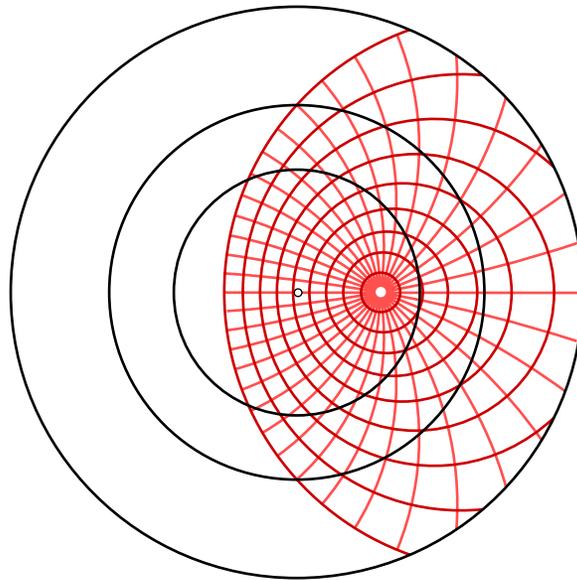
*Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ, d$ ) anzufertigen.*



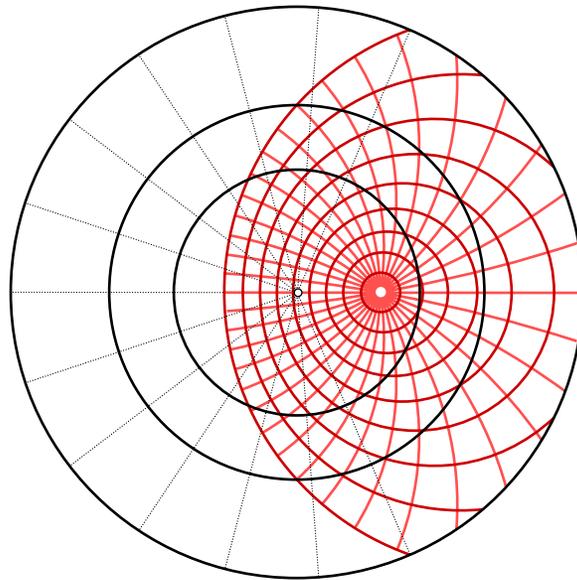
*Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ, d$ ) anzufertigen.*



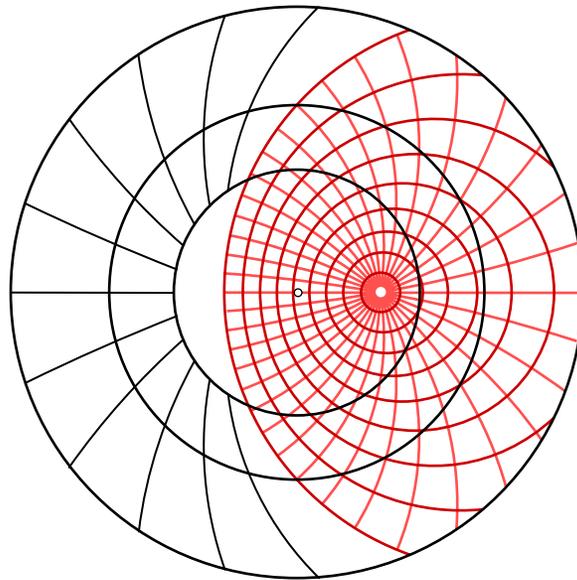
*Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ, d$ ) anzufertigen.*



*Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ$ ,  $d$ ) anzufertigen.*



*Es ist eine Scheibe mit dem Koordinatennetz (Horizont-System) für einen Beobachter in Thessaloniki (geographische Breite  $\nu \approx 41^\circ$ ,  $d$ ) anzufertigen.*



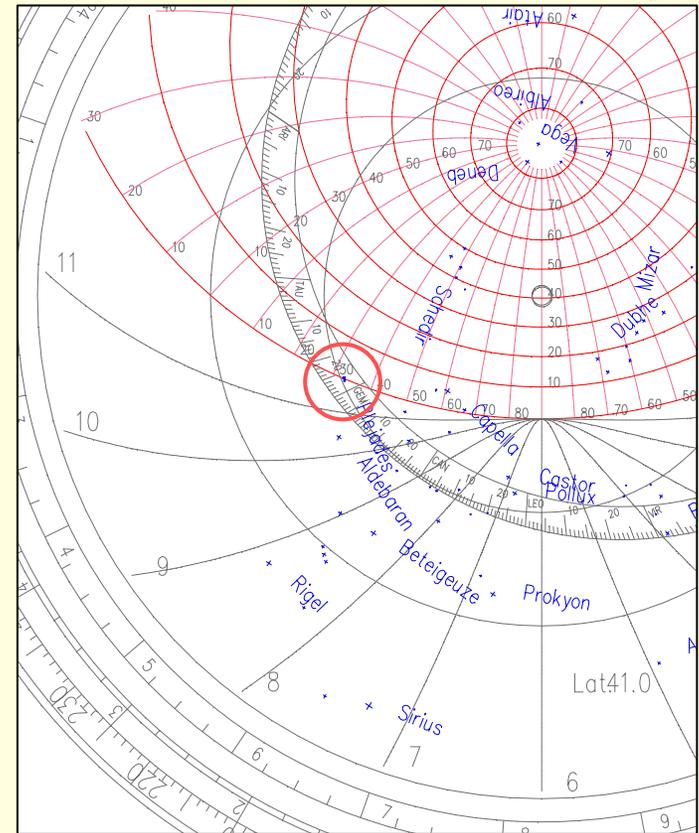
# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*

Astrolabium-Bausatz aus:

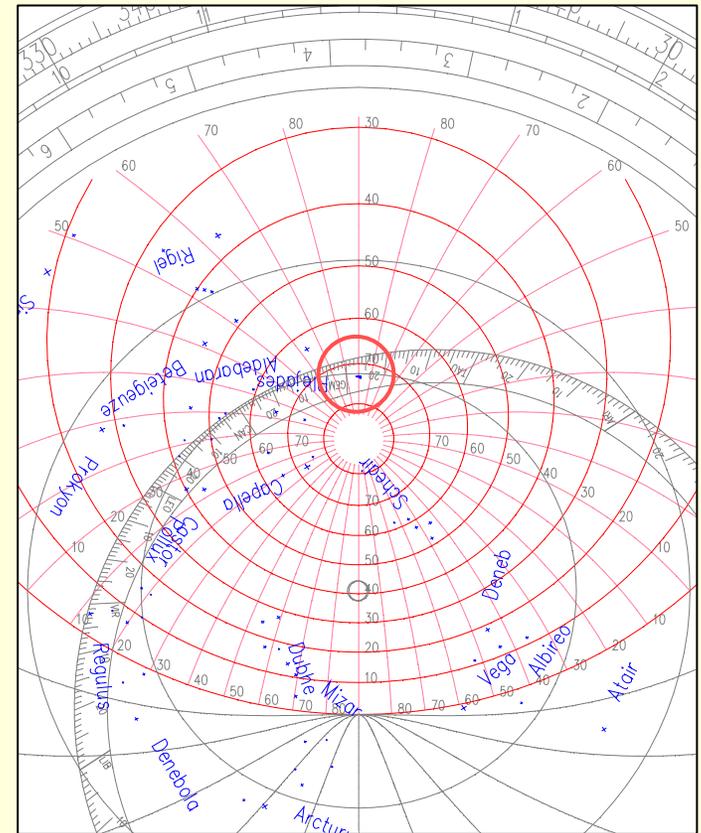
[www.math.tu-dresden.de/~f.henschel/astrolabium](http://www.math.tu-dresden.de/~f.henschel/astrolabium)



# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

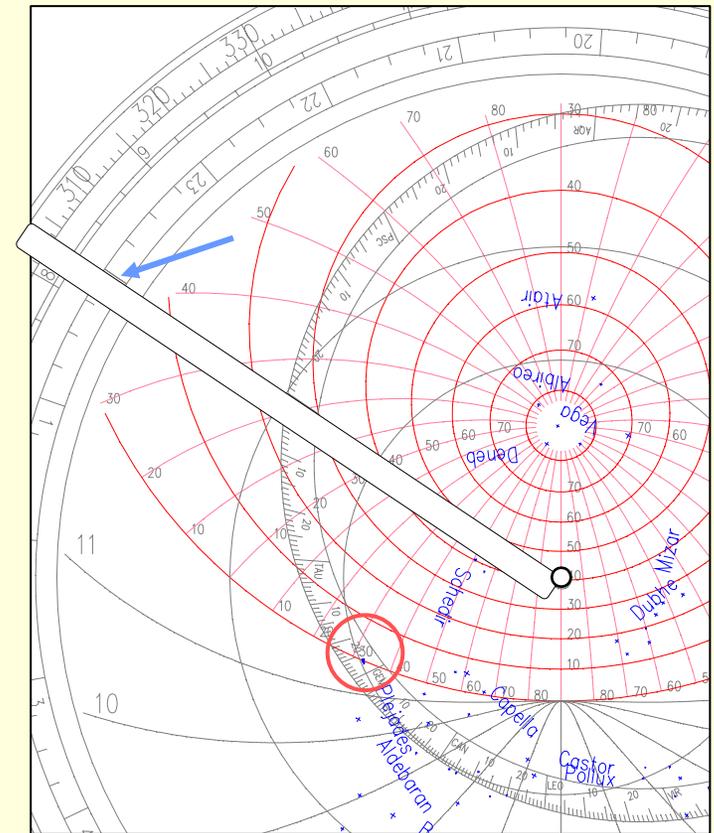
- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

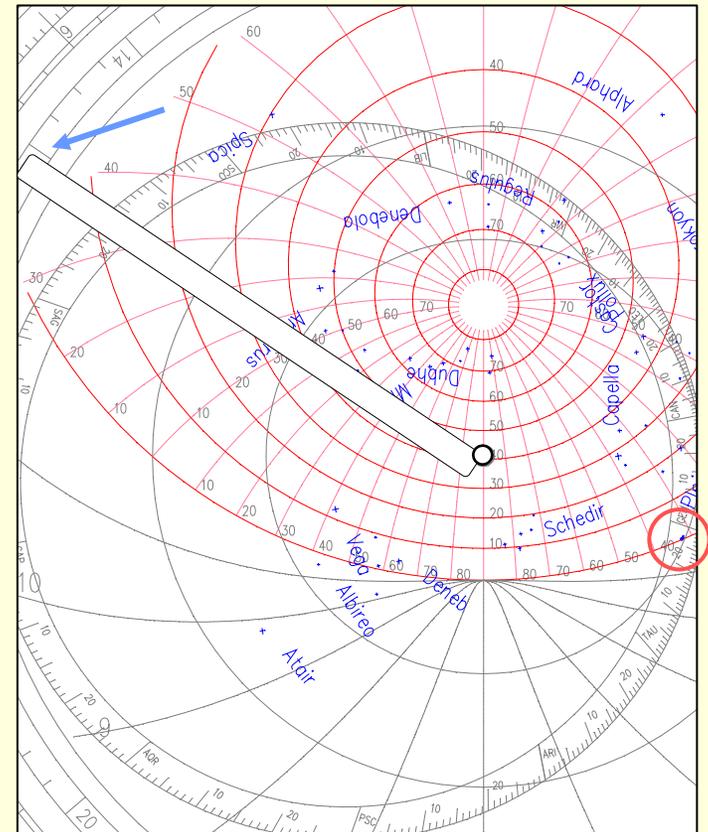
- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Positionen von **Fixsternen**, insbesondere:

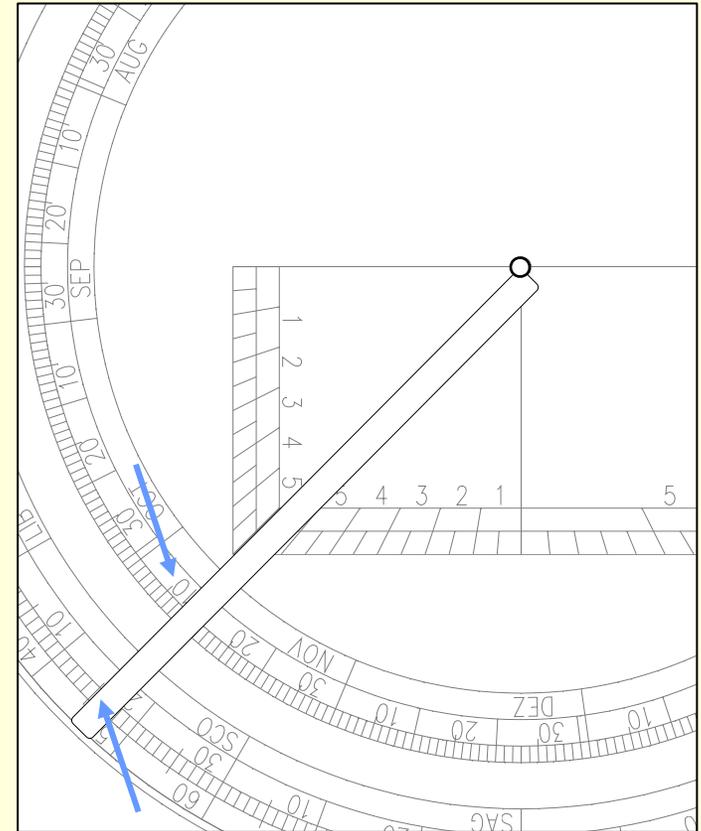
- *In welcher Richtung am Horizont gehen die Plejaden auf / unter?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überqueren sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

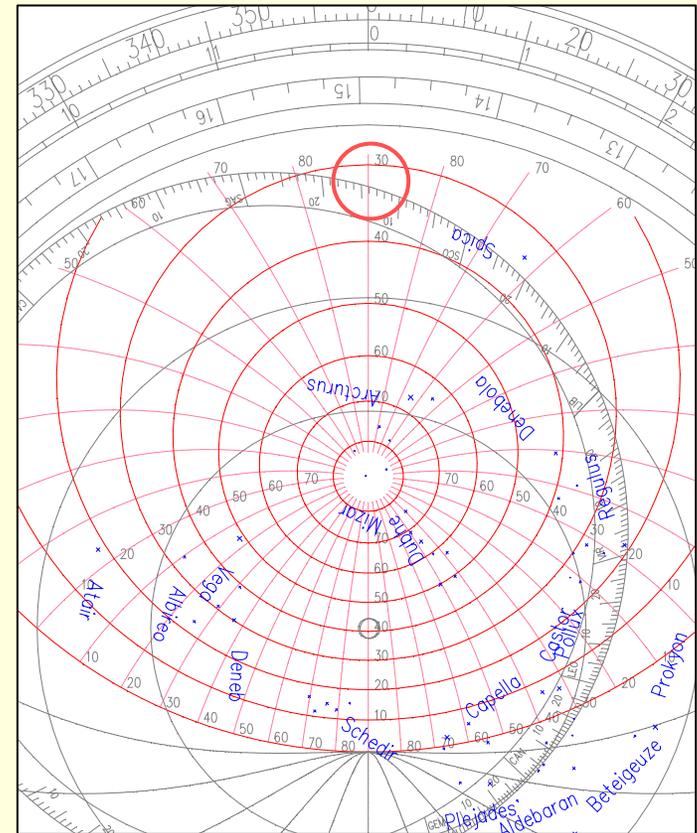
- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

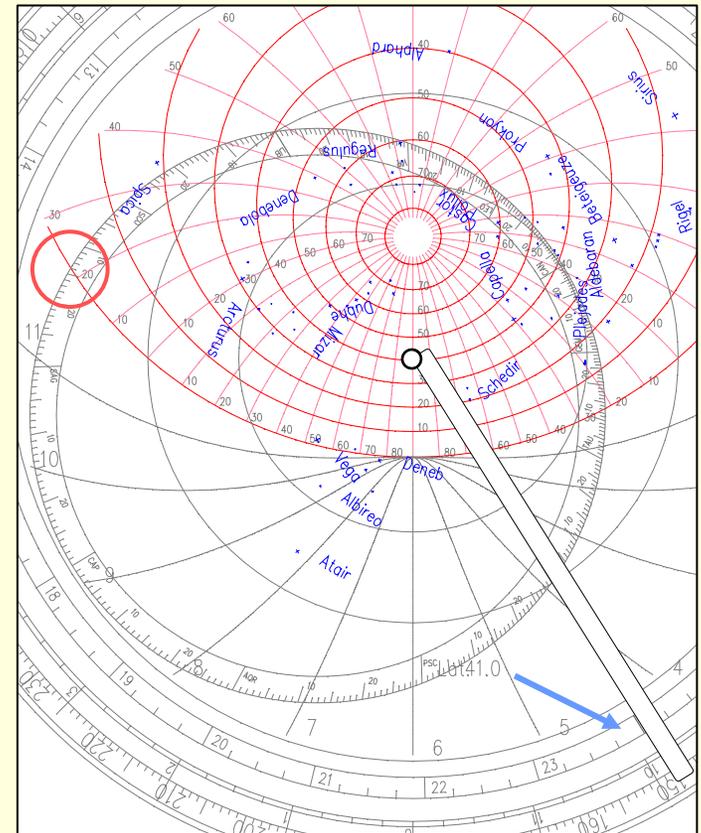
- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

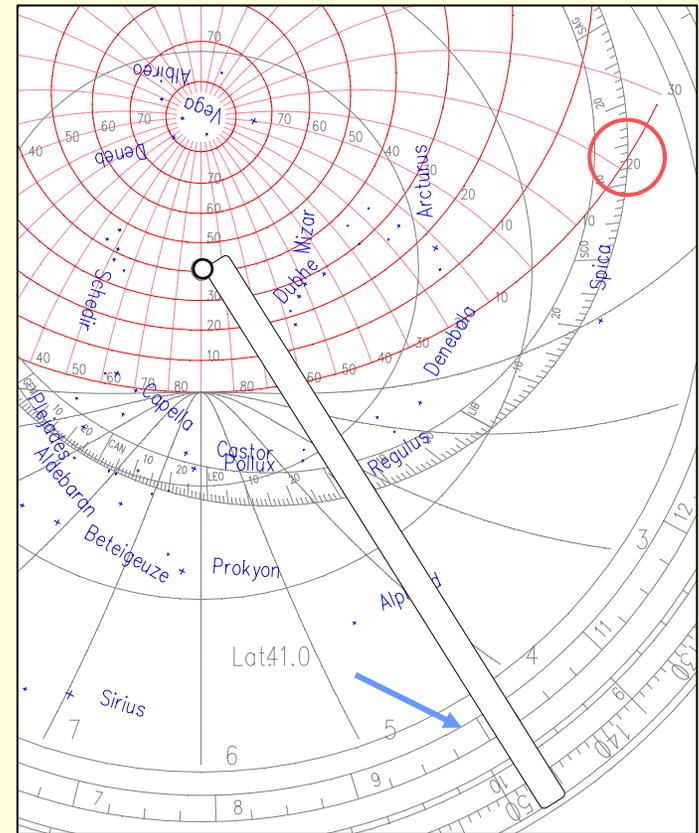
- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



# Verwenden eines Astrolabiums

Vorhersage der Position der **Sonne**, etwa:

- *An welcher Stelle der Ekliptik befindet sich die Sonne am 7. November?*
- *In welcher Höhe über dem Horizont überquert sie den (S-) Meridian?*
- *Welche Zeit vergeht zwischen ihrem Auf- und Untergang am Horizont?*



# Verwenden eines Astrolabiums

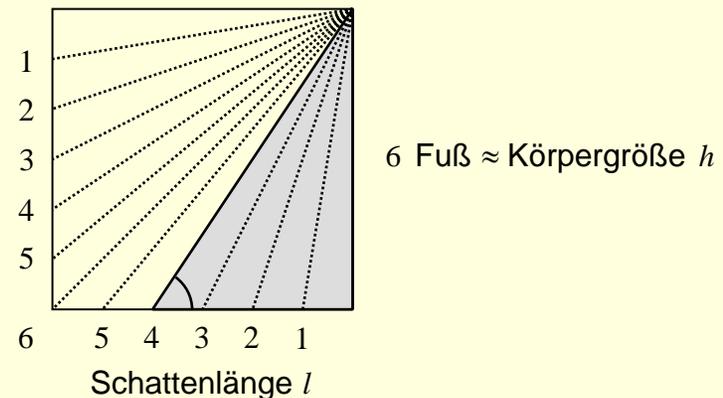
Beobachtung der Positionen von **Fixsternen** / **Sonne**:

Mit Hilfe eines Astrolabiums lassen sich **Höhen** von Fixsternen / der Sonne (über dem Horizont) näherungsweise bestimmen und zweckmäßig verwenden.

*Bsp.: Bestimmung der Sonnenhöhe über dem Horizont*

Die Höhe der Sonne darf nicht durch direkte Beobachtung bestimmt werden.

- **Schattenquadrat:** Verwendung von Seitenlängen-Verhältnissen in ähnlichen Dreiecken  $h/l = H/L$ .
- Der Höhenwinkel der Sonne lässt sich auch direkt an der Höhenskala durch Ausrichten der **Alidade** nach dem Sonnenlicht ablesen.



# Verwenden eines Astrolabiums

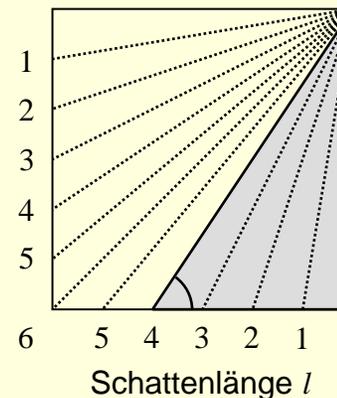
Beobachtung der Positionen von **Fixsternen / Sonne**:

Mit Hilfe eines Astrolabiums lassen sich **Höhen** von Fixsternen / der Sonne (über dem Horizont) näherungsweise bestimmen und zweckmäßig verwenden.

*Bsp.: Bestimmung der Sonnenhöhe über dem Horizont*

Die Höhe der Sonne darf nicht durch direkte Beobachtung bestimmt werden.

- **Schattenquadrat:** Verwendung von Seitenlängen-Verhältnissen in ähnlichen Dreiecken  $h/l = H/L$ .
- Der Höhenwinkel der Sonne lässt sich auch direkt an der Höhenskala durch Ausrichten der **Alidade** nach dem Sonnenlicht ablesen.



6 Fuß  $\approx$  Körpergröße  $h$

# Verwenden eines Astrolabiums

## Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

*Bsp.: Bestimmung der Zeit am 8. November in Thessaloniki (morgens, Sonnenhöhe 20°)*

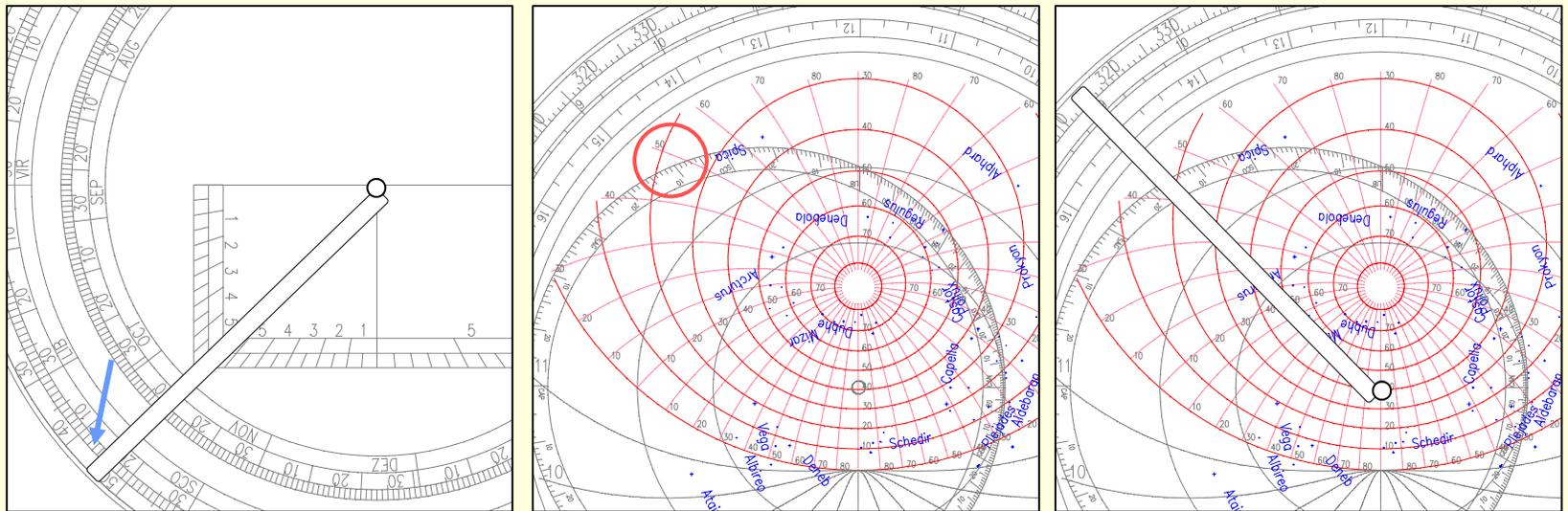
1. Bestimmung der Position der Sonne auf der Ekliptik am 8. November mit Hilfe der Kalender-Skala (15° in Tierkreiszeichen des Scorpions [ $\text{♏}$ ]).
2. Übertragen der Position  $\text{♏}$  15° auf der Ekliptik über dem 20°-Höhenkreis am östlichen Horizont.
3. Drehen des Zeigers in diese Position und Ablesen der Zeit auf der Stunden-Skala.

# Verwenden eines Astrolabiums

## Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

*Bsp.: Bestimmung der Zeit am 8. November in Thessaloniki (morgens, Sonnenhöhe 20°)*



# Verwenden eines Astrolabiums

## Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

*Bsp.: Zeitangabe in der Nacht vom 7. - 8. Nov., Thessaloniki (Betelgeuse 50°, südwestliche Richtung)*

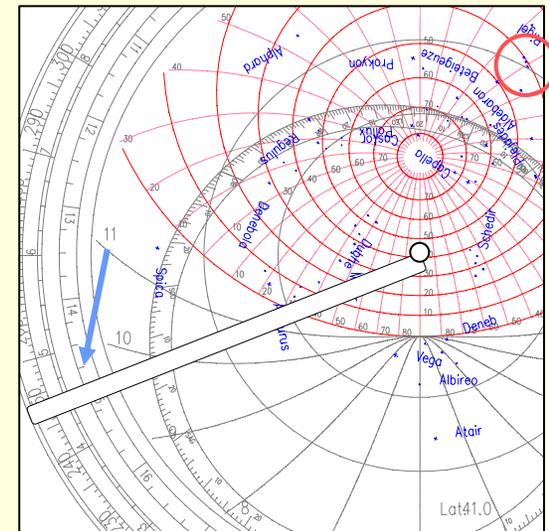
1. Bestimmung der Position der Sonne auf der Ekliptik am 8. November mit Hilfe der Kalender-Skala (15° in Tierkreiszeichen des Scorpions [♏]).
2. Drehen der Sternenscheibe (rete), bis die Position von Betelgeuse über dem 50°-Höhenkreis in südwestlicher Richtung erscheint.
3. Drehen des Zeigers in die Position ♏ 15° auf der Ekliptik (Sonne ist Zeitgeber!) und Ablesen der Zeit auf der Stunden-Skala.

# Verwenden eines Astrolabiums

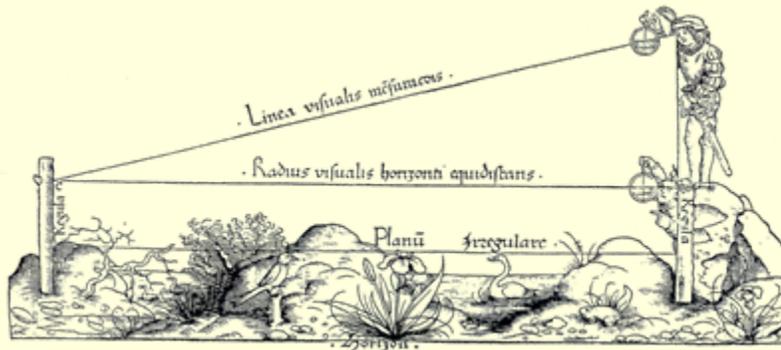
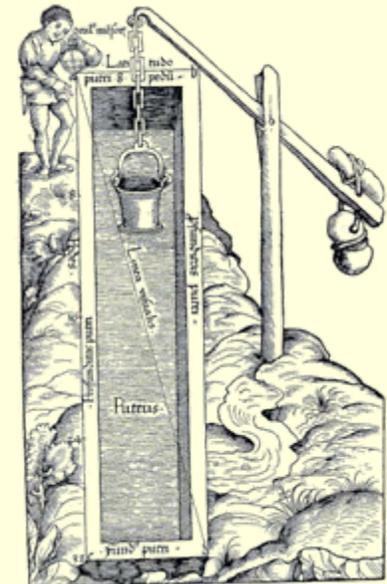
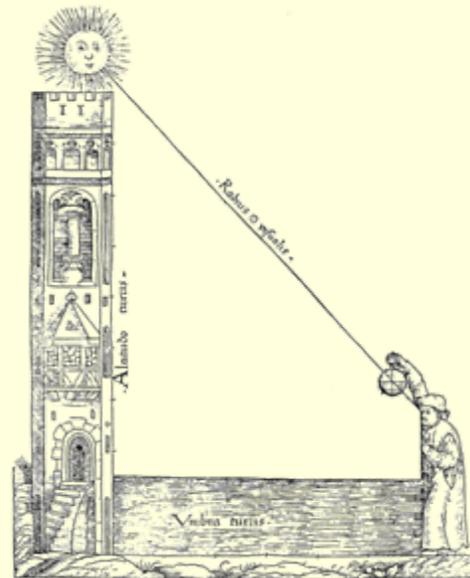
## Bestimmung der **Zeit**:

Unter Verwendung der Positionsbestimmung von Sternen /der Sonne lässt sich mit einem Astrolabium (sowohl am **Tag** als auch in der **Nacht**) die Sonnenzeit angeben.

*Bsp.: Zeitangabe in der Nacht vom 7. - 8. Nov., Thessaloniki (Betelgeuse  $50^\circ$ , südwestliche Richtung)*



# Weitere Anwendungsgebiete



Abbildungen aus:  
WEBSTER, R. a. M.: Western Astrolabes.

# Lern- und Lehransätze

- Auseinandersetzung mit historischen (und modernen) Vorstellungen in der Astronomie, Schulung des (räumlichen) Vorstellungsvermögens,
- Interdisziplinäre Behandlung eines Gegenstandes,
- Bewusste Auseinandersetzung mit dem kulturellen Erbe,
- Kennen lernen einer wissenschafts- und kulturhistorischen Verankerung mathematischer und geometrischer Inhalte der Schullehrpläne (nicht nur) als alternative Lehr- und Lernmethode.
- ...