Aliasing und Anti-Aliasing Sampling and Reconstruction

Eine Einführung

Alexander Wilkie

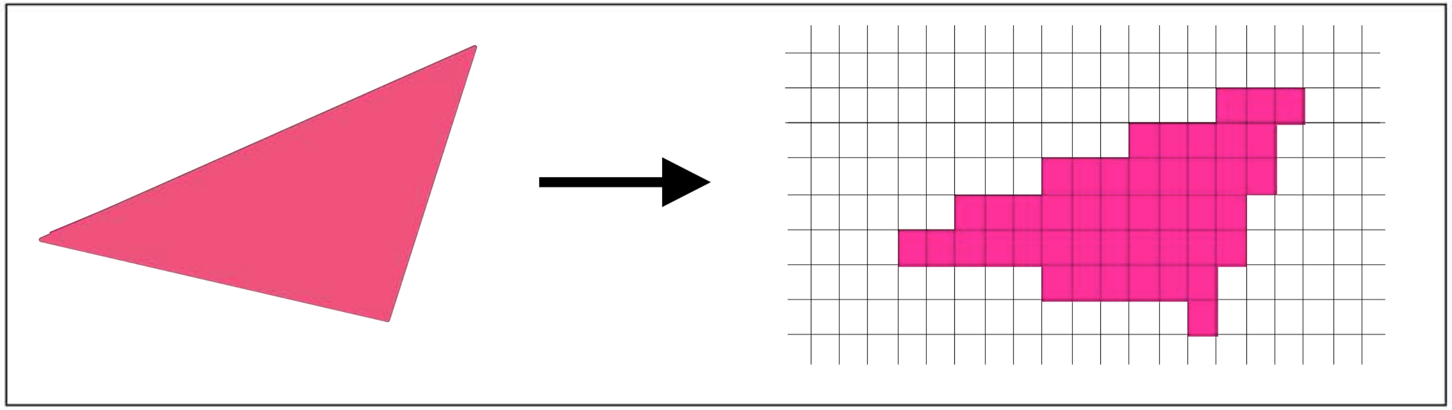
Quellen:

Foley, van Dam, Feiner, Hughes:
Computer Graphics - Principles and Practice

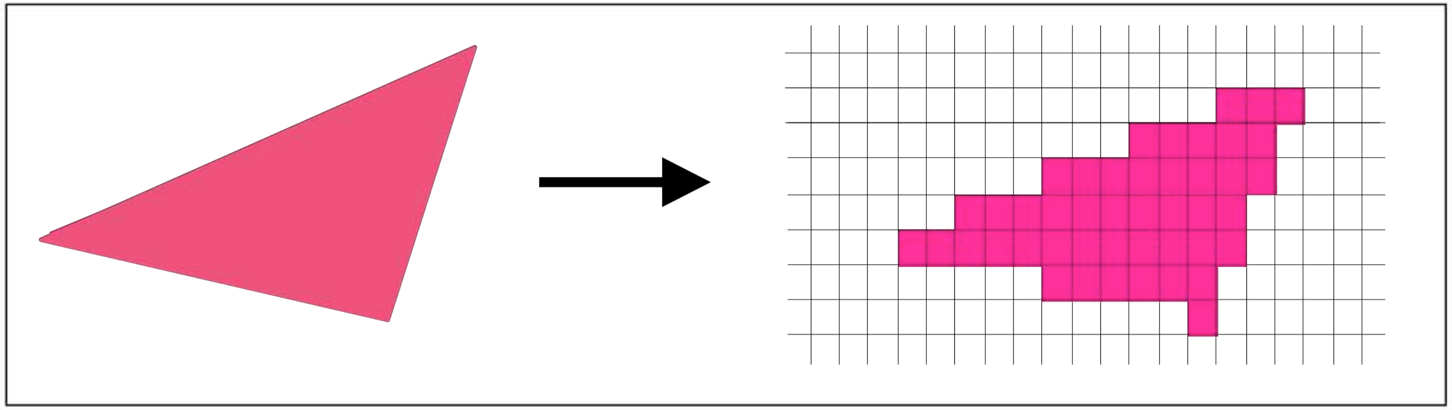
Übersicht

- Einführung - Aliasing
  - Problemdefinition, Beispiele
- Ad-hoc Gegenstrategien
- Sampling-Theorie
  - Fourier-Transformation
  - Faltung und Faltungs-Theorem
- Rekonstruktion
  - Sampling Theorem
  - Reconstruction in theory and practice

Aliasing - ein vielgesichtiges Problem

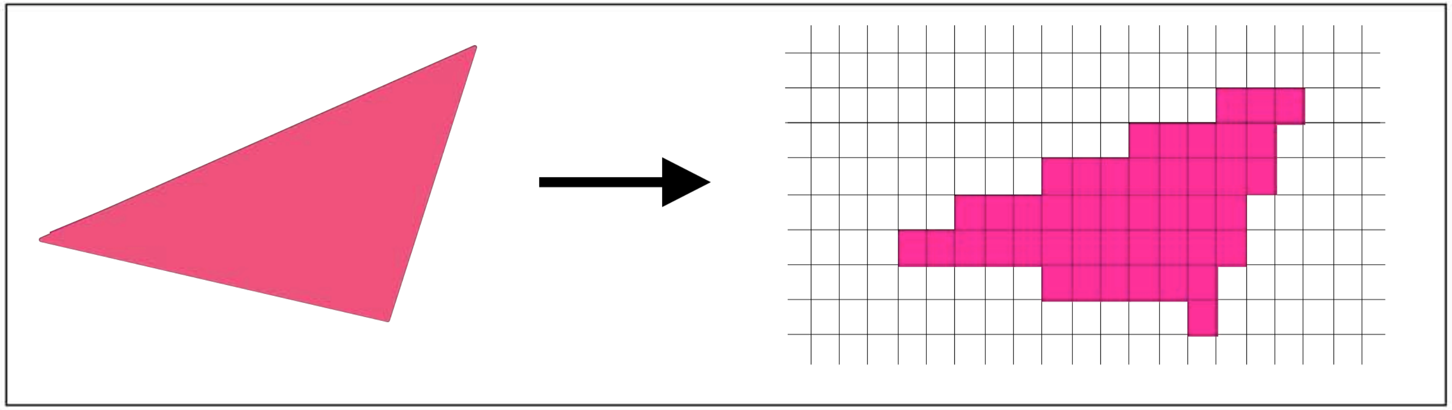


Aliasing - ein vielgesichtiges Problem



Fehler die durch die Konversion von analogen Daten in digitale Form entstehen:

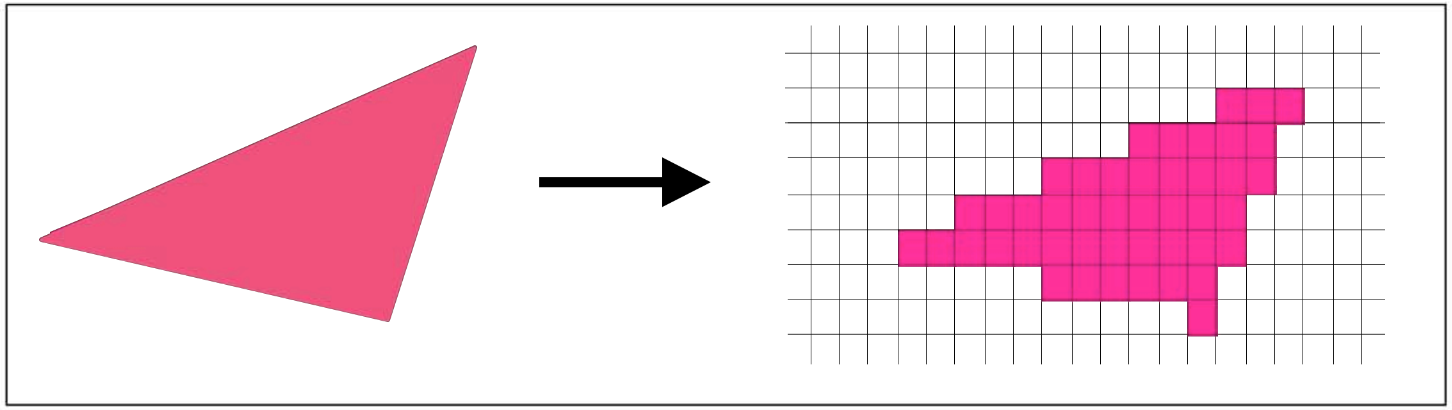
Aliasing - ein vielgesichtiges Problem



Fehler die durch die Konversion von analogen Daten in digitale Form entstehen:

- ***Geometrische Auflösung („Pixeldichte", Artefakte)***

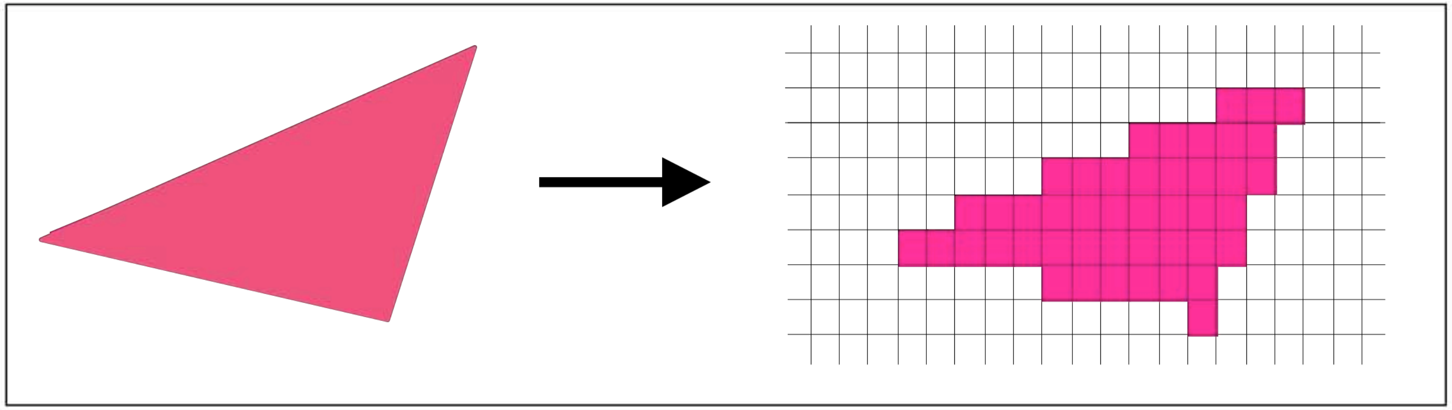
Aliasing - ein vielgesichtiges Problem



Fehler die durch die Konversion von analogen Daten in digitale Form entstehen:

- ***Geometrische Auflösung („Pixeldichte", Artefakte)***
- ***Farbqualität***

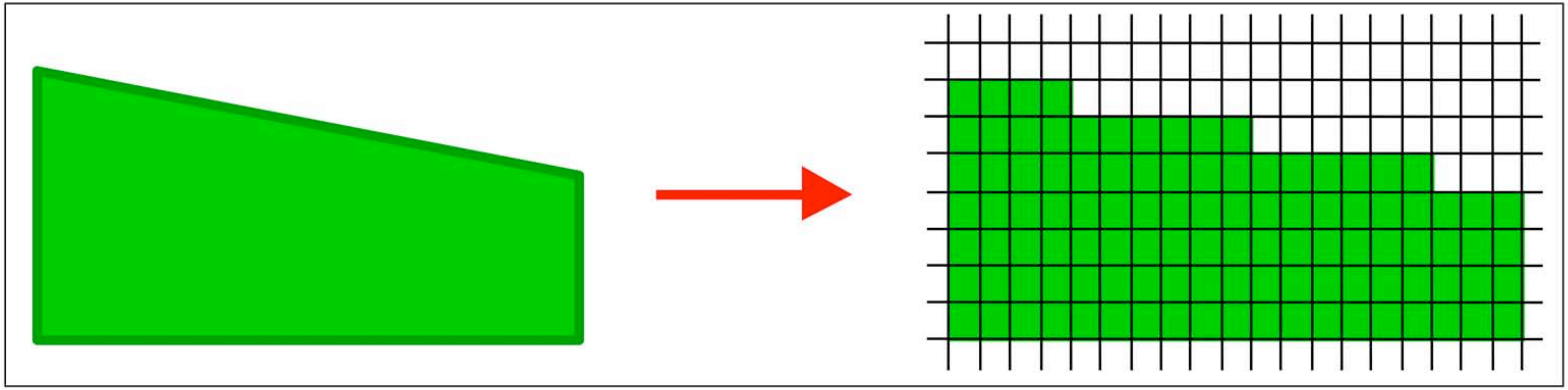
Aliasing - ein vielgesichtiges Problem

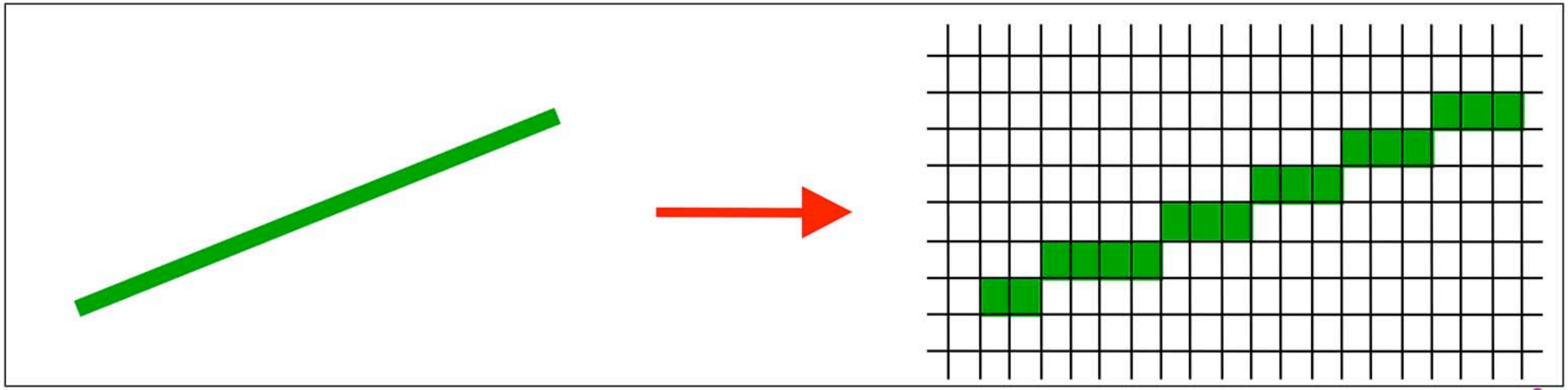


Fehler die durch die Konversion von analogen Daten in digitale Form entstehen:

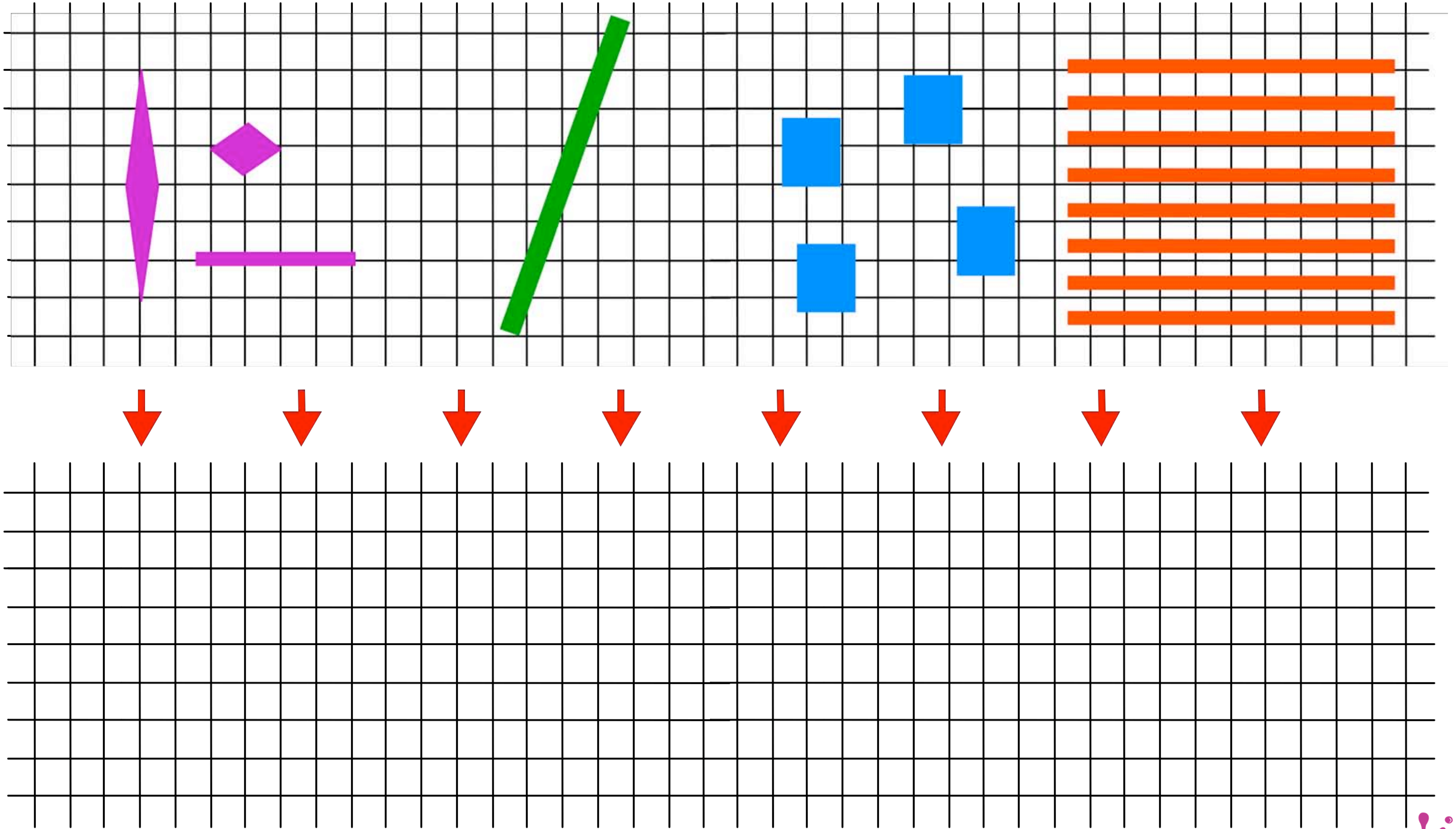
- ***Geometrische Auflösung („Pixeldichte", Artefakte)***
- ***Farbqualität***
- ***Falsche Bildfolge in Animationen***

Aliasing: Treppen-Effekt

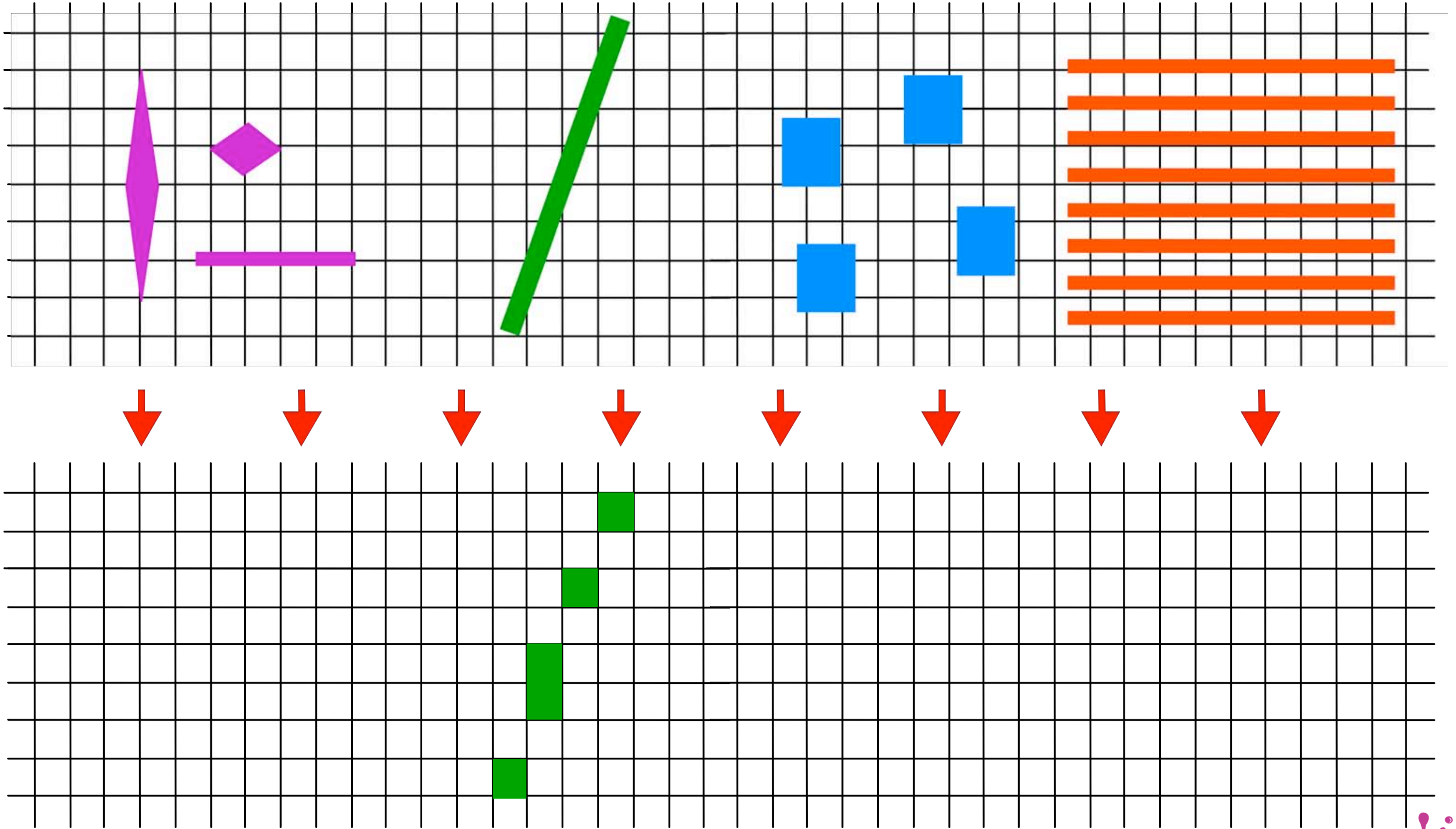




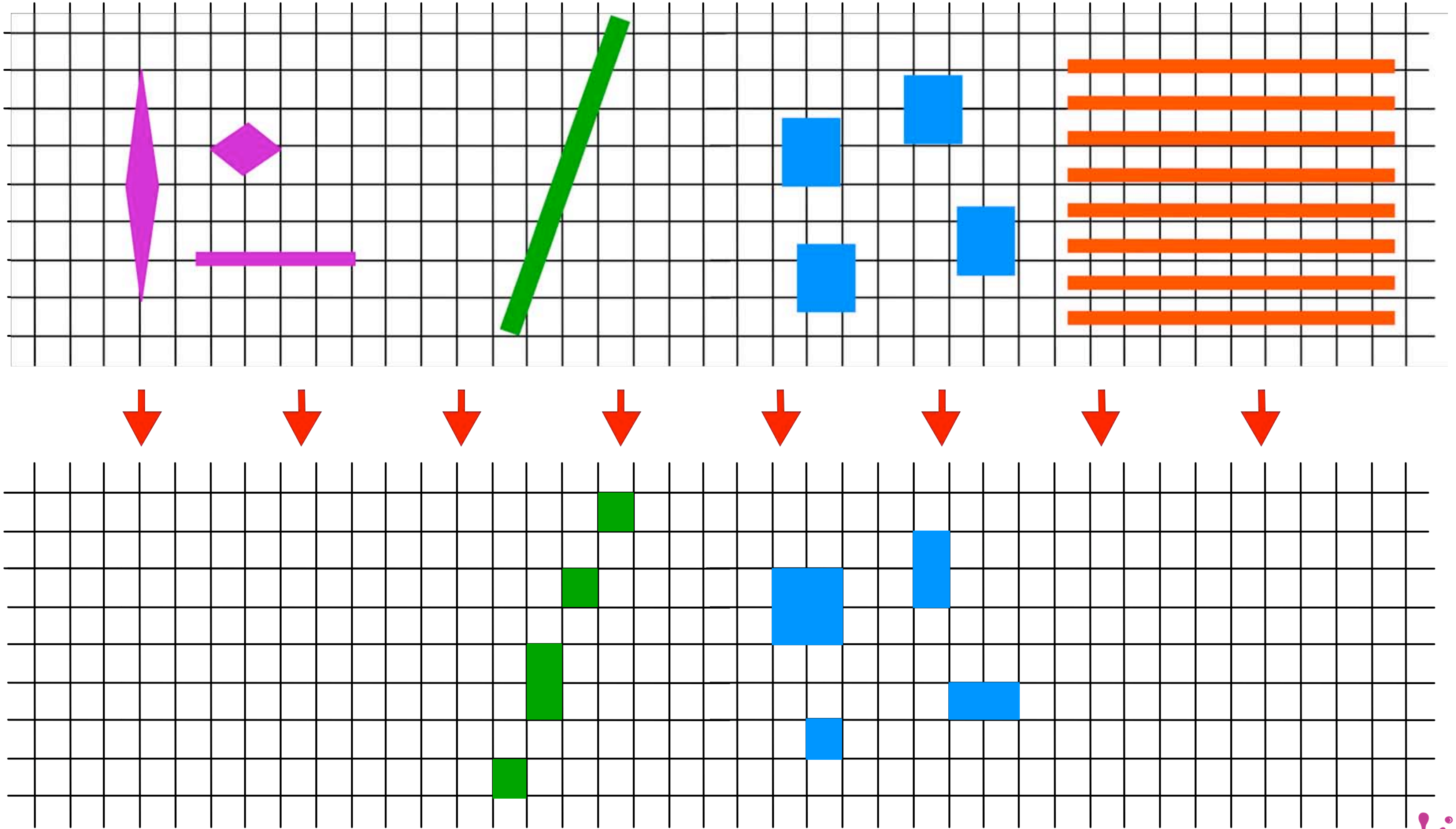
Aliasing: Sampling-Fehler



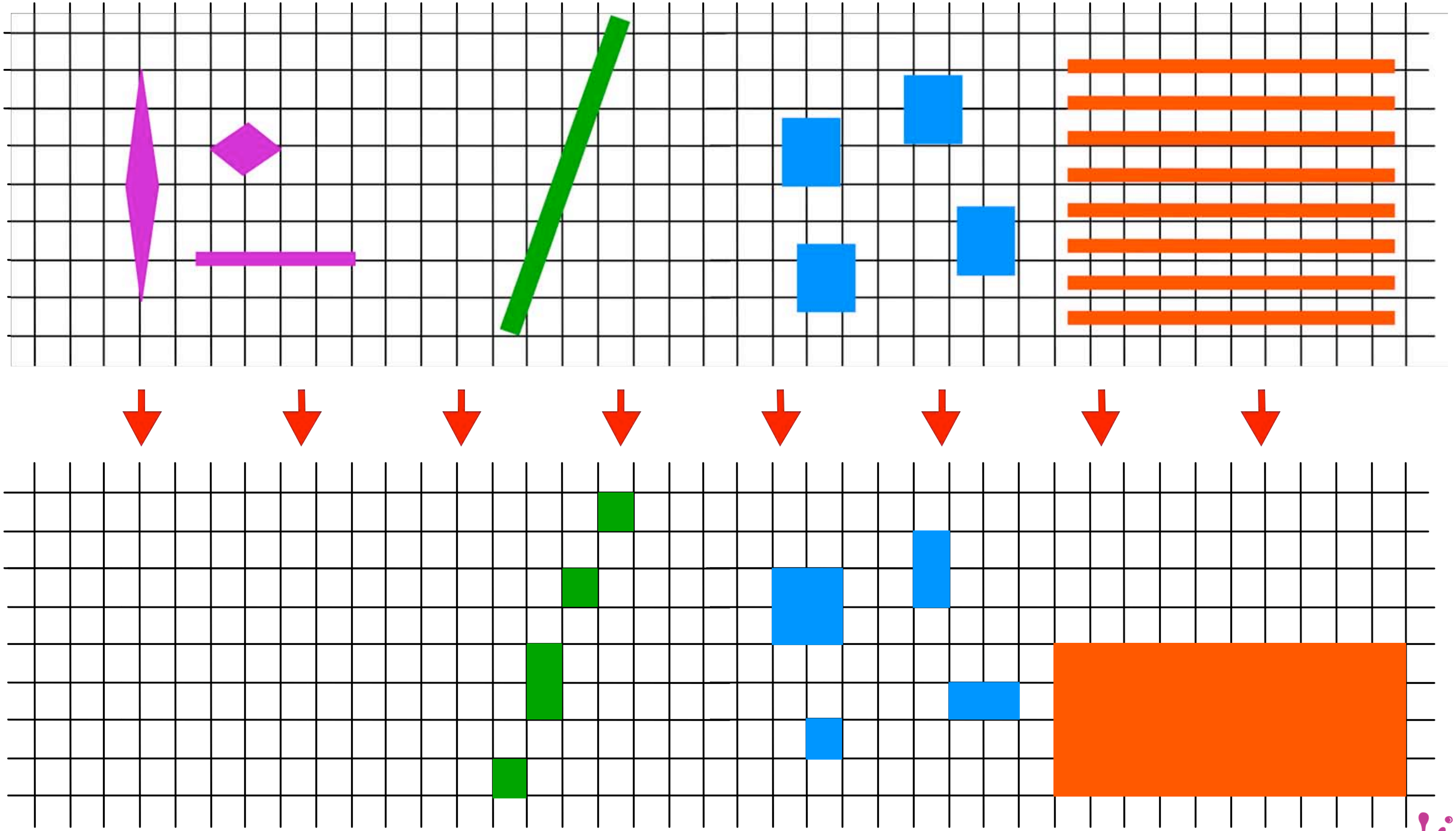
Aliasing: Sampling-Fehler



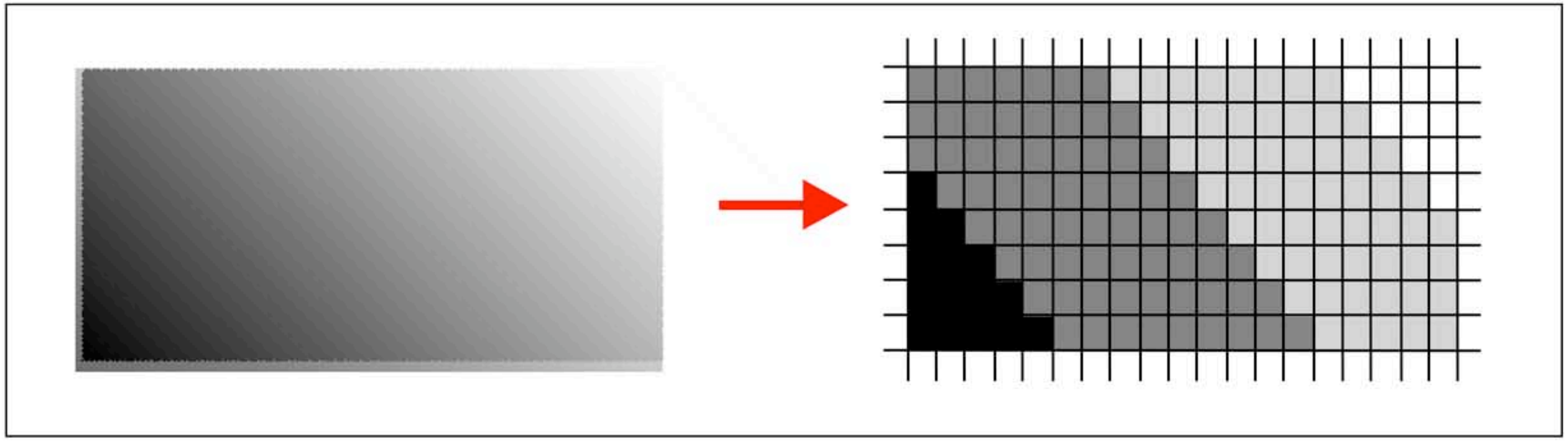
Aliasing: Sampling-Fehler



Aliasing: Sampling-Fehler



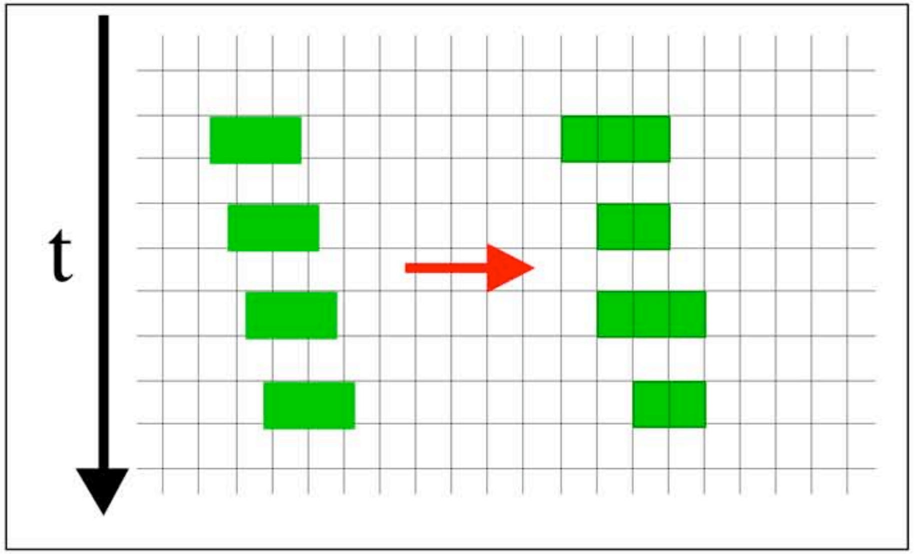
Aliasing: Farbverläufe



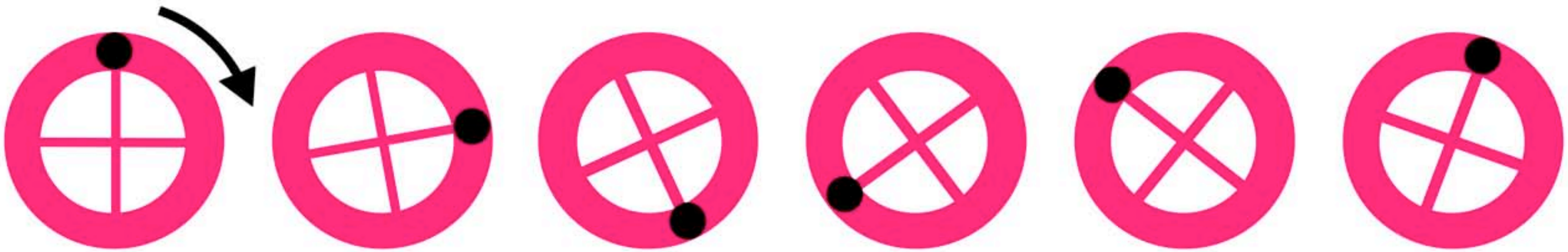
Falsche Farbverläufe können entstehen

Aliasing in Animationen

- Bildsprünge
- "worming“

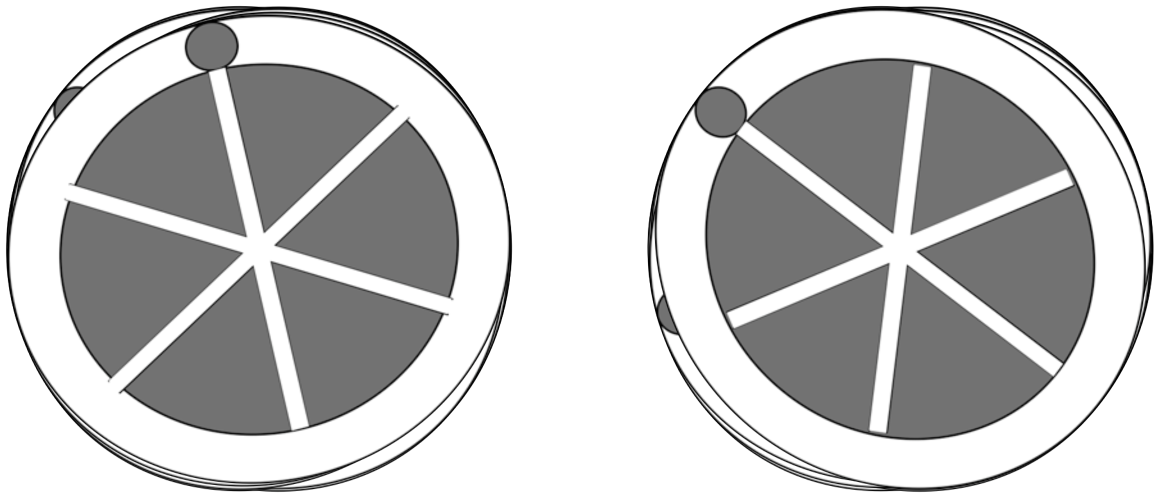


- Rückwärts drehende Räder



Rückwärts Drehende Räder

Rückwärts Drehende Räder



Aliasing: Behebung des Problems

1. “Höherer Aufwand”

- Ad-hoc Ansätze
- Höhere Auflösung
- Höhere Farbtiefe
- Schnellere Bildfolge

2. “Mehr Hirn einsetzen”

- Verstehen des Problems
- ***Effiziente*** Gegenmaßnahmen

Aliasing: Behebung des Problems

1. “Höherer Aufwand”

- Ad-hoc Ansätze
- Höhere Auflösung
- Höhere Farbtiefe
- Schnellere Bildfolge

Oft aufwendig, nicht immer zielführend, manchmal unmöglich

2. “Mehr Hirn einsetzen”

- Verstehen des Problems
- ***Effiziente*** Gegenmaßnahmen

Aliasing: Behebung des Problems

1. "Höherer Aufwand"

- Ad-hoc Ansätze
- Höhere Auflösung
- Höhere Farbtiefe
- Schnellere Bildfolge

Oft aufwendig, nicht immer zielführend, manchmal unmöglich

2. "Mehr Hirn einsetzen"

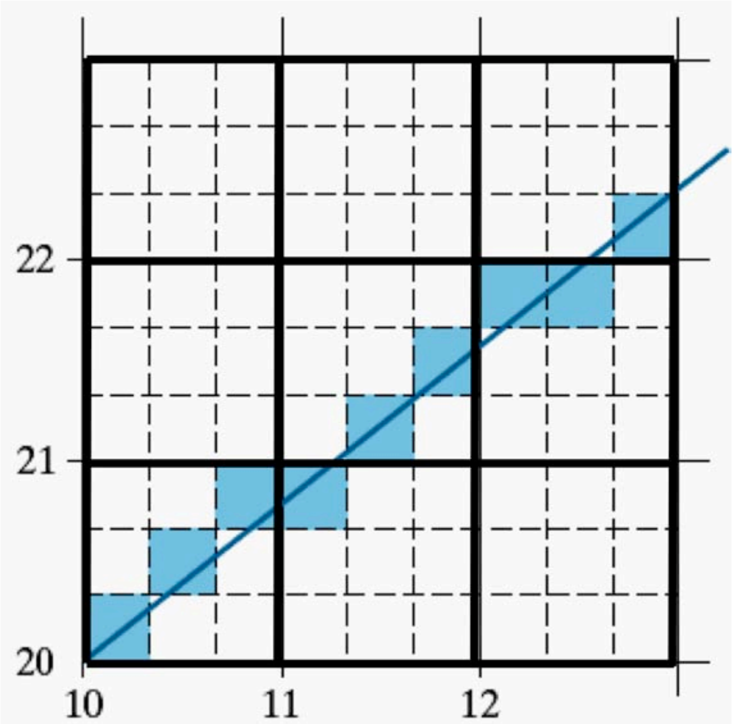
- Verstehen des Problems
- ***Effiziente*** Gegenmaßnahmen

machbar

Ad-Hoc Anti-Aliasing

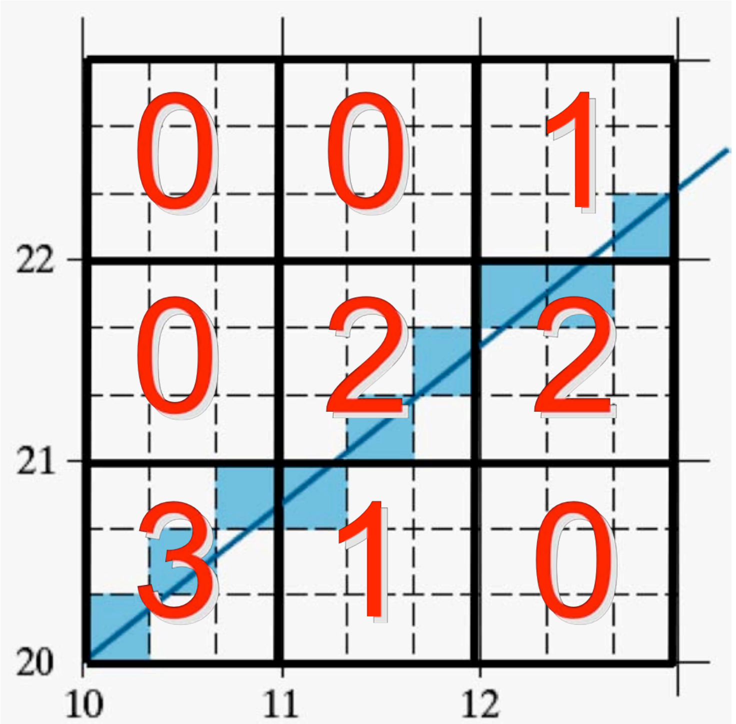
- Supersampling von Linien
- Subpixel weighting masks
- Area sampling für Linien
- Verwendung von simplen Filtern
- Kompensation variabler Linienstärke
- Anti-Aliasing von Flächenkanten

Antialiasing: Supersampling von Linien



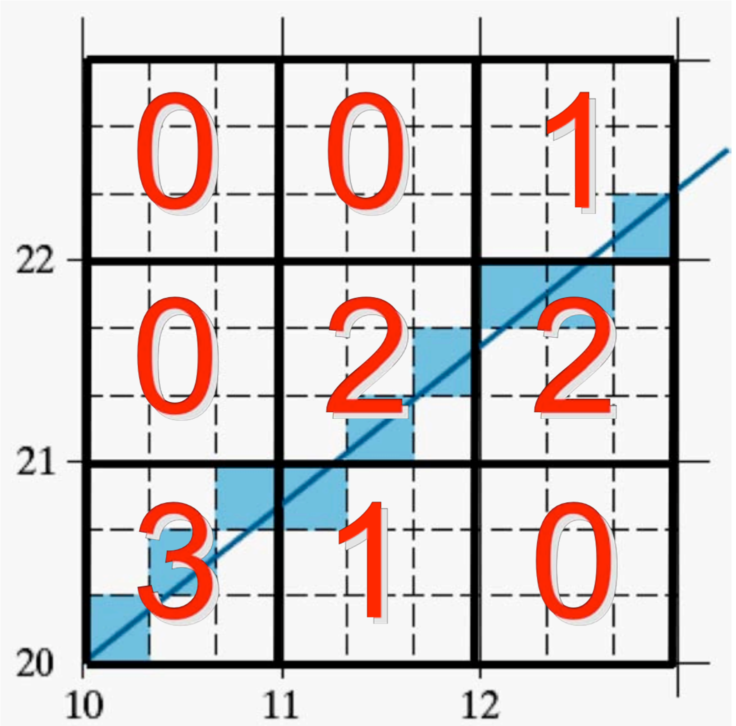
mathematische Linie

Antialiasing: Supersampling von Linien



mathematische Linie

Antialiasing: Supersampling von Linien



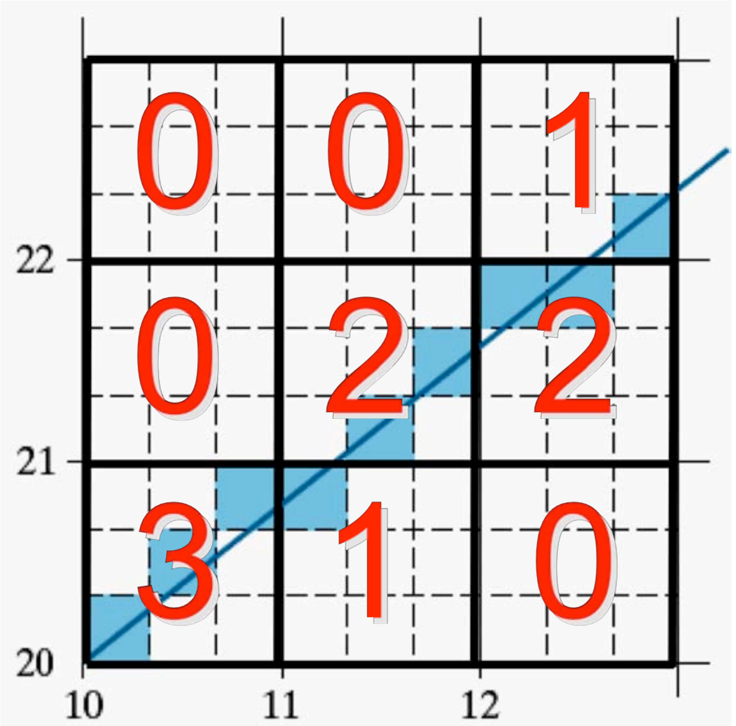
mathematische Linie

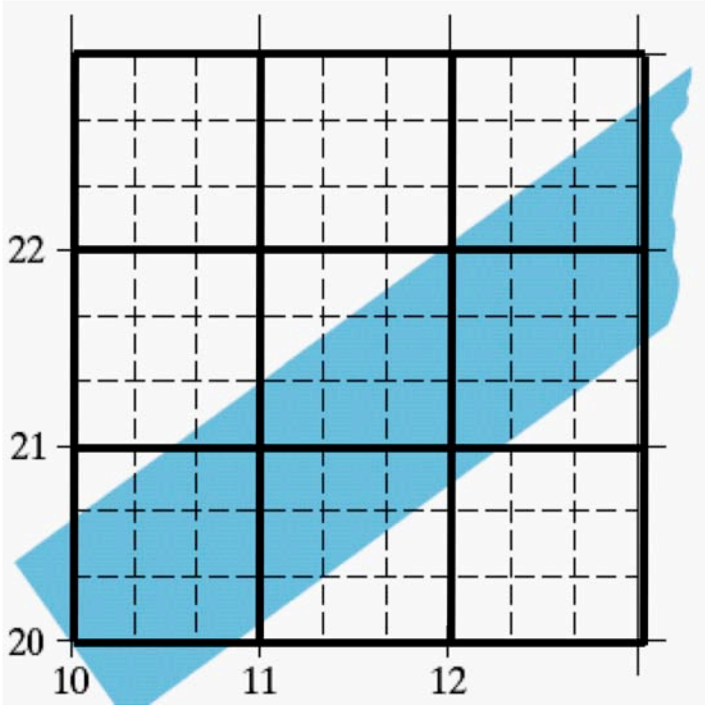
3 = max. Intensität

...

0 = min. Intensität

Antialiasing: Supersampling von Linien





mathematische Linie

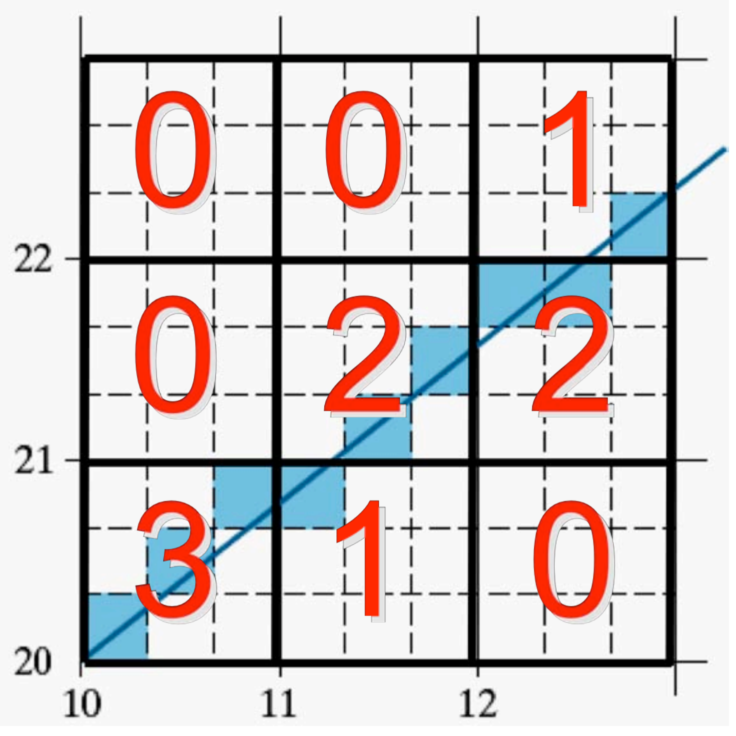
Breite Linie

3 = max. Intensität

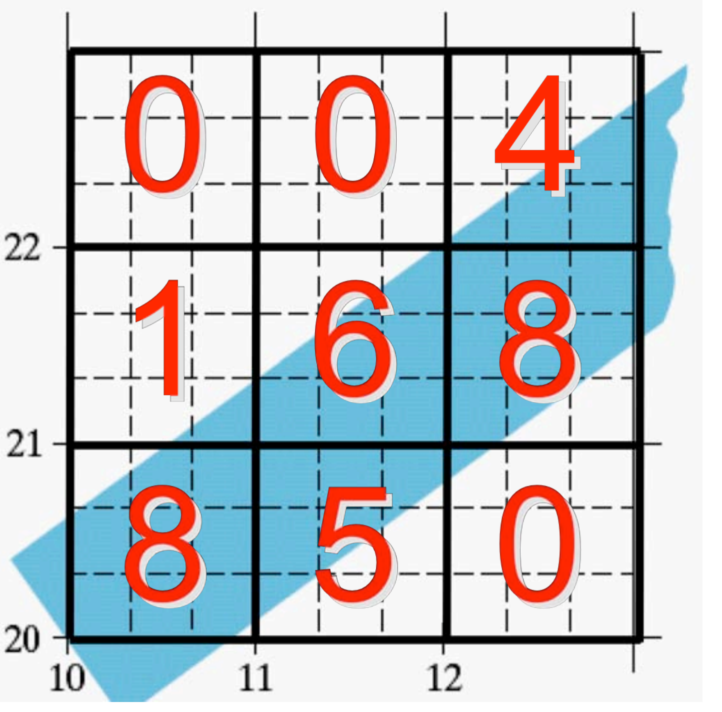
...

0 = min. Intensität

Antialiasing: Supersampling von Linien



mathematische Linie



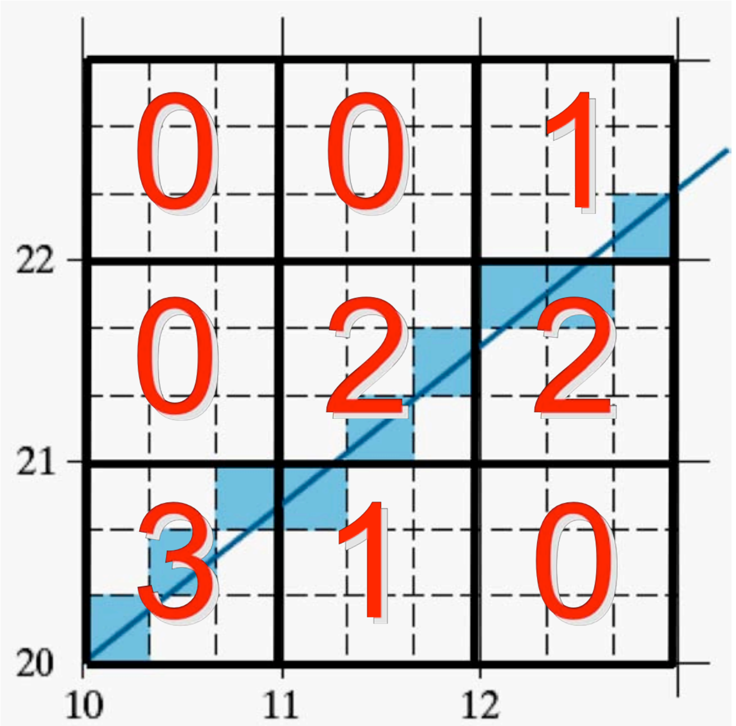
Breite Linie

3 = max. Intensität

...

0 = min. Intensität

Antialiasing: Supersampling von Linien

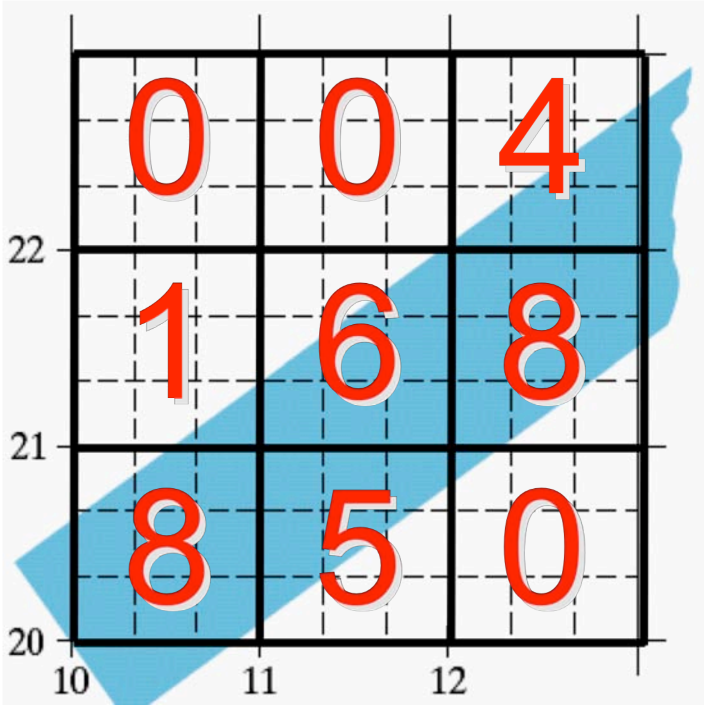


mathematische Linie

3 = max. Intensität

...

0 = min. Intensität



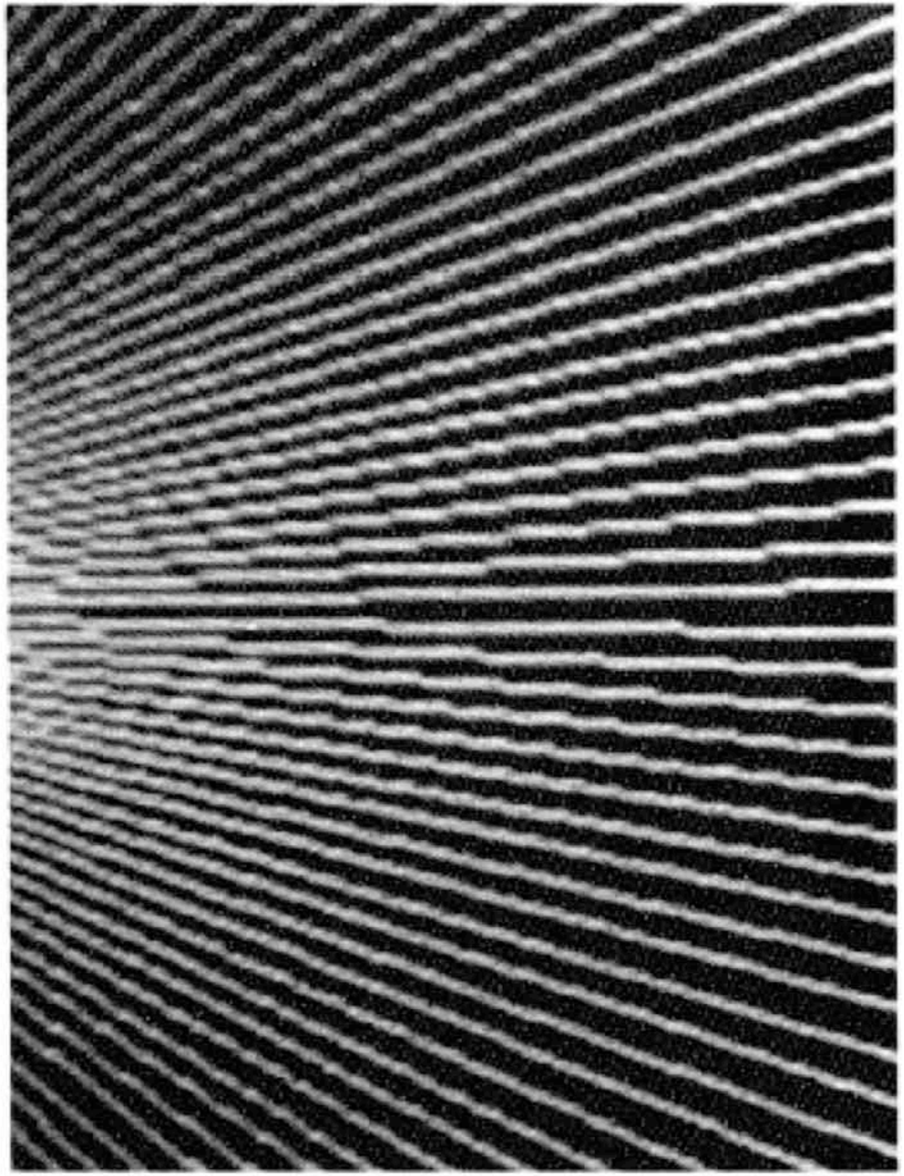
Breite Linie

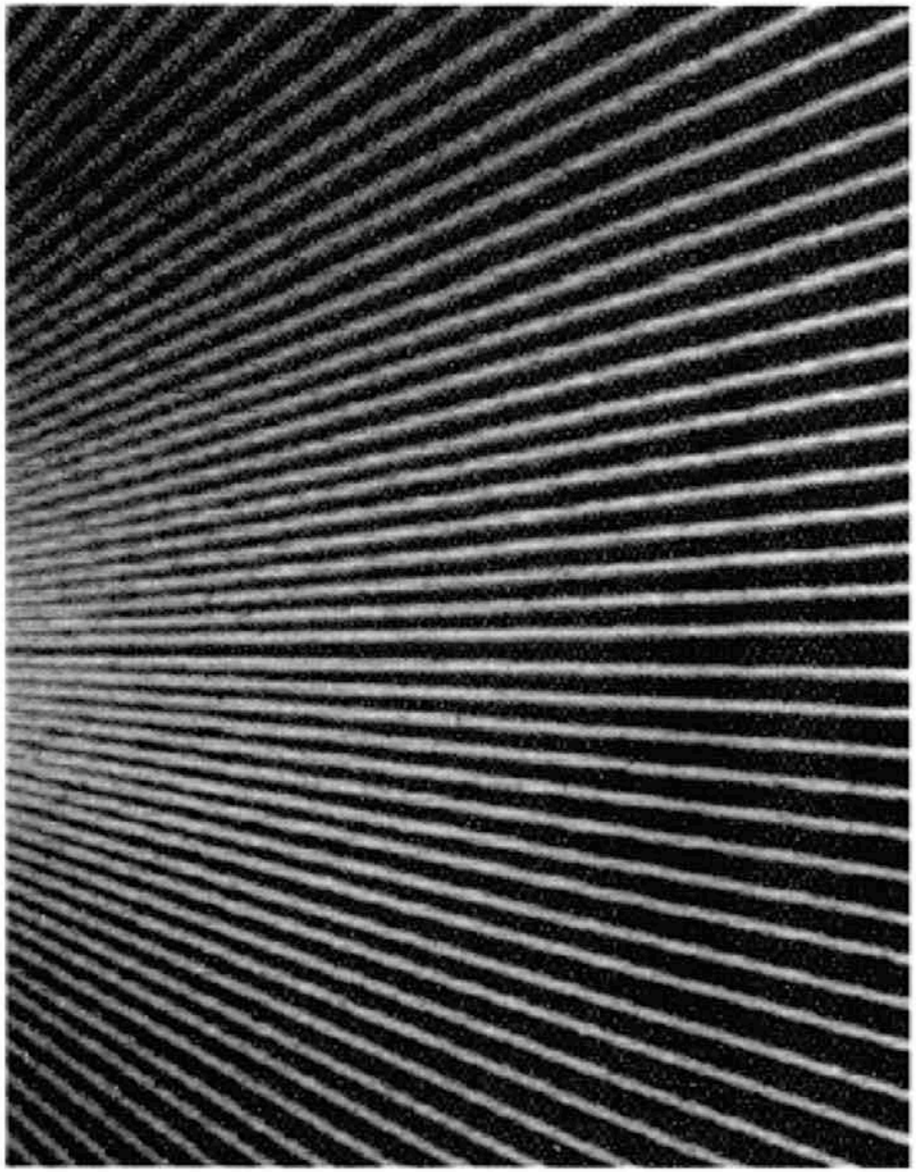
9 = max. Intensität

...

0 = min. Intensität

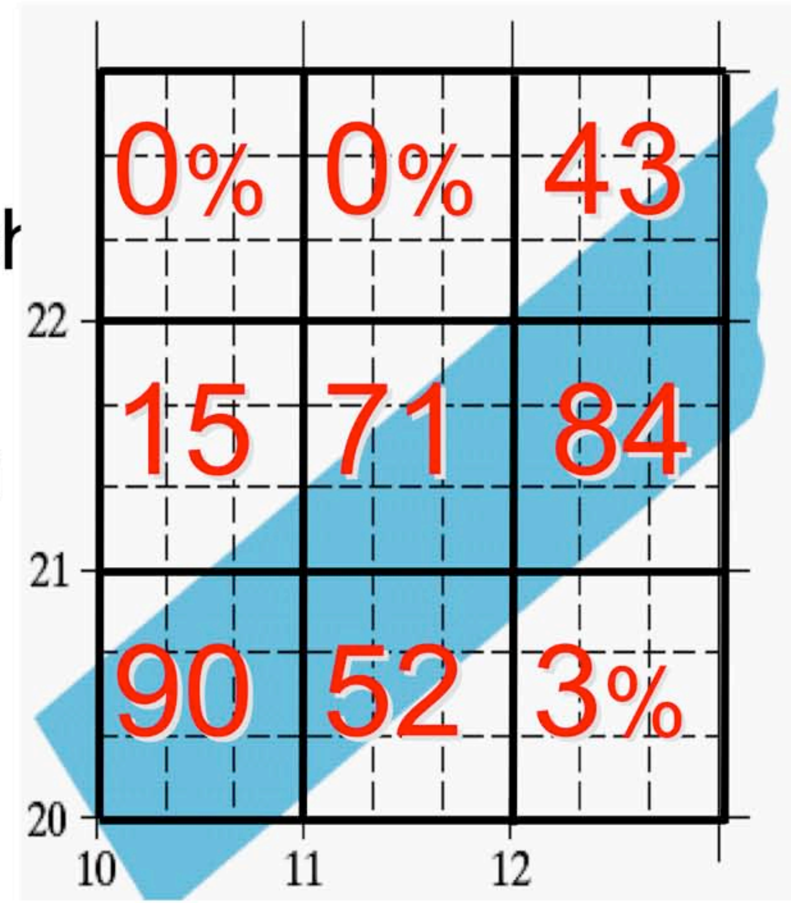
Antialiasing





Antialiasing: Area Sampling von Linien

- Exaktes Ausrechnen der bedeckten Fläche
- Für Linien analytisch möglich
- Relativ aufwendig, schlecht zu verallgemeinern (Kreise etc.)



Anti-Aliasing: Gewichtungsmasken

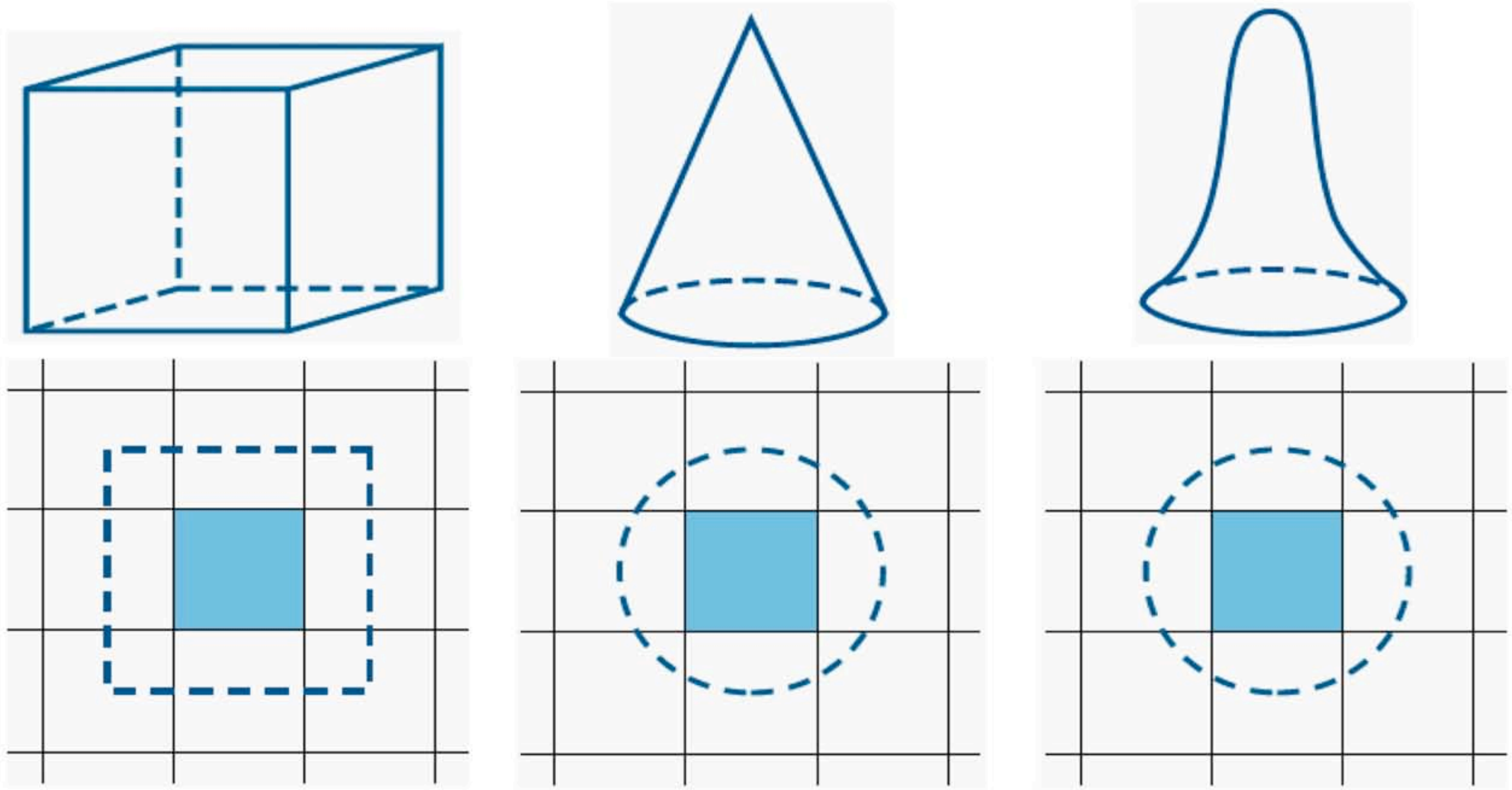
1	2	1
2	4	2
1	2	1

Relative Gewichte für ein Gitter von 3x3 sub-Pixeln

- Mehr Gewicht für das zentrale Sub-Pixel
- Muß durch die Summe der Gewichte dividiert werden
- Maske kann auch Nachbar-Pixel mit einbeziehen

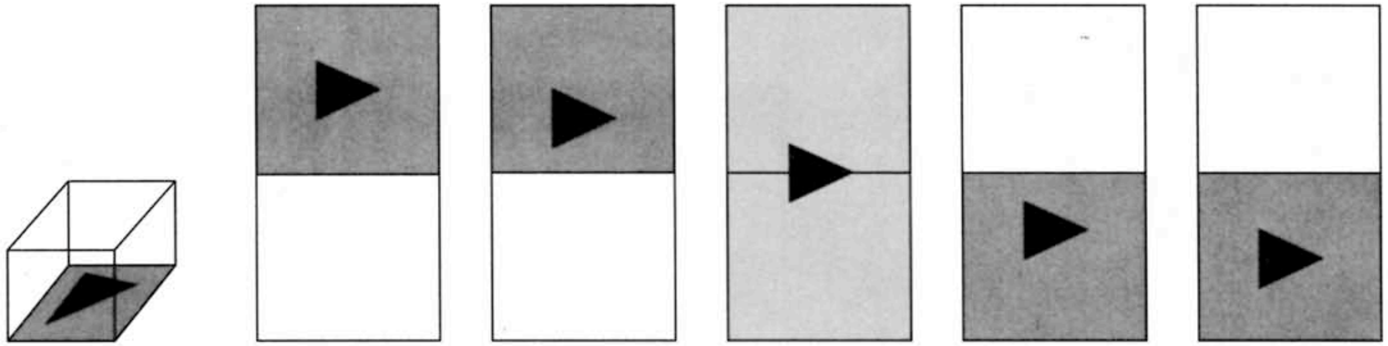
Anti-Aliasing: Einsatz von Filtern

Gewichtungsfunktionen, die zur Berechnung von geglätteten Linien usw. herangezogen werden

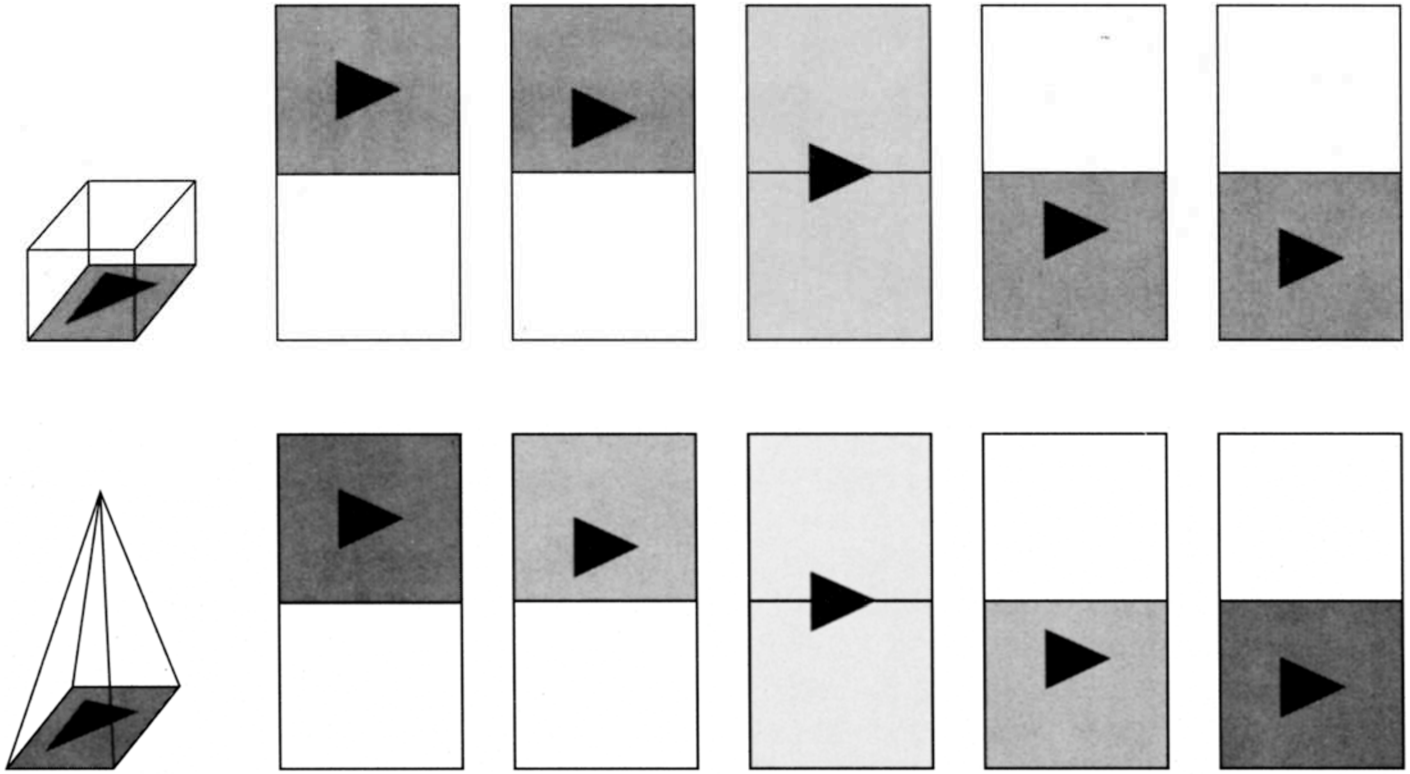


Box-Filter Kegel Gauß-Filter

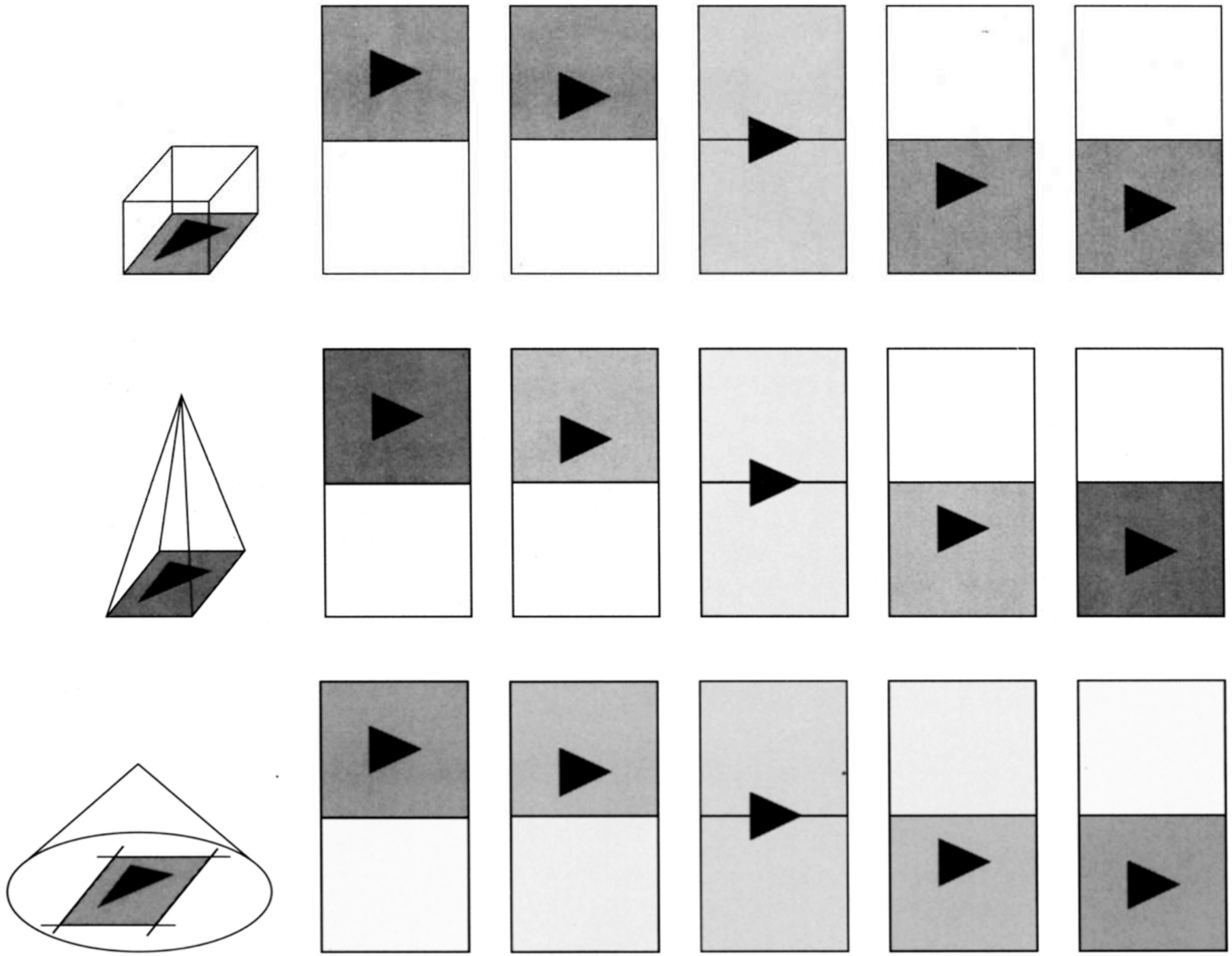
Filter Kernels in Action



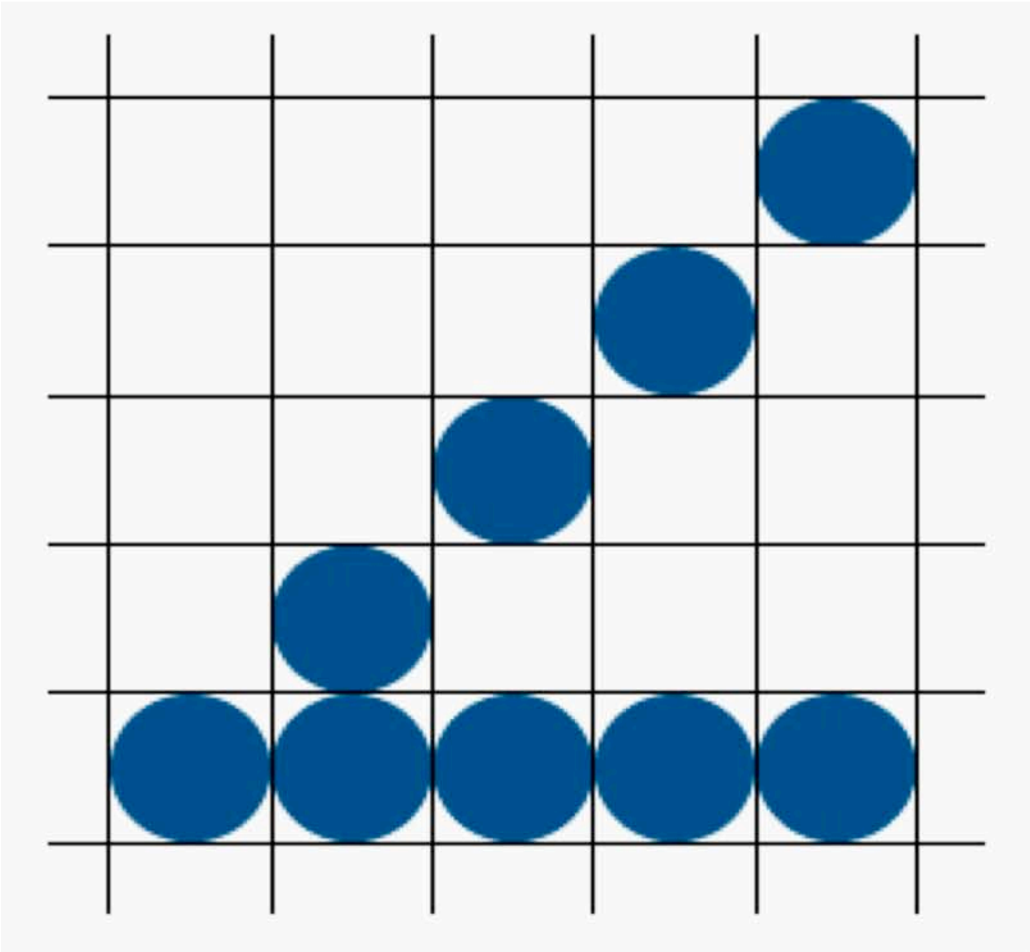
Filter Kernels in Action



Filter Kernels in Action

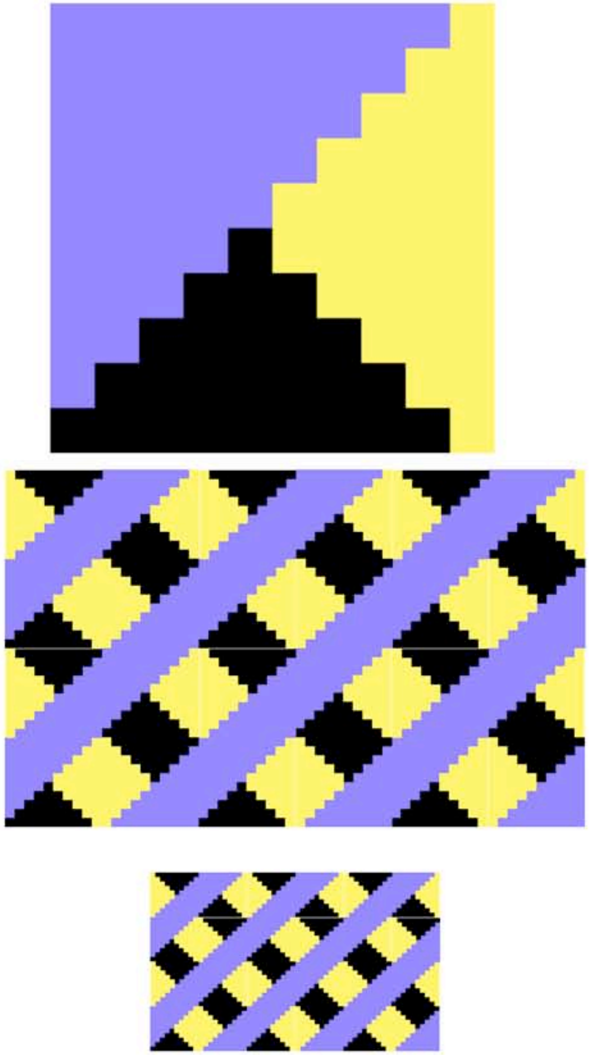


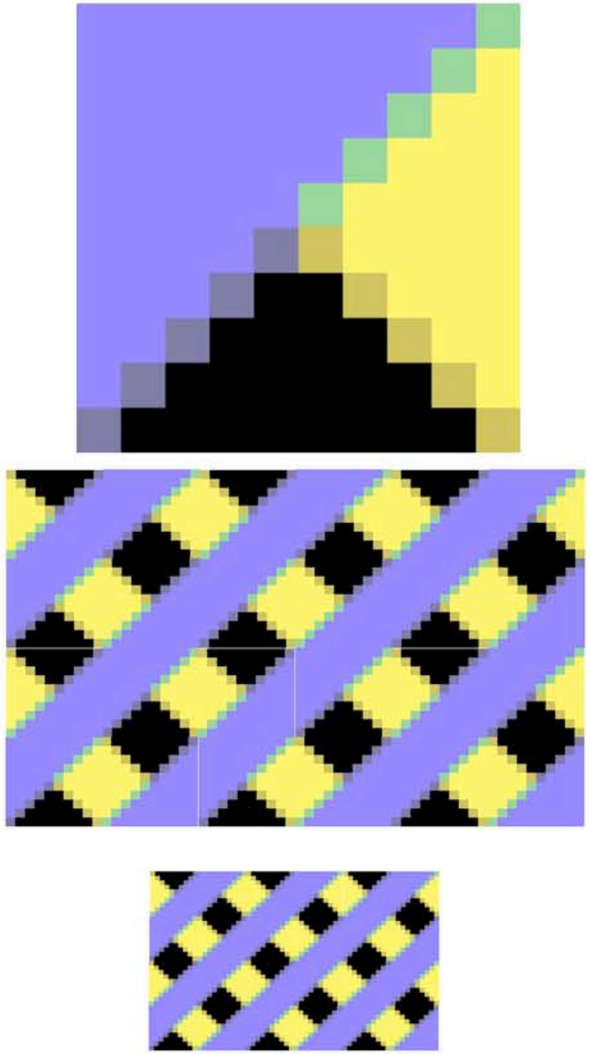
Anti-Aliasing: Intensität von Linien



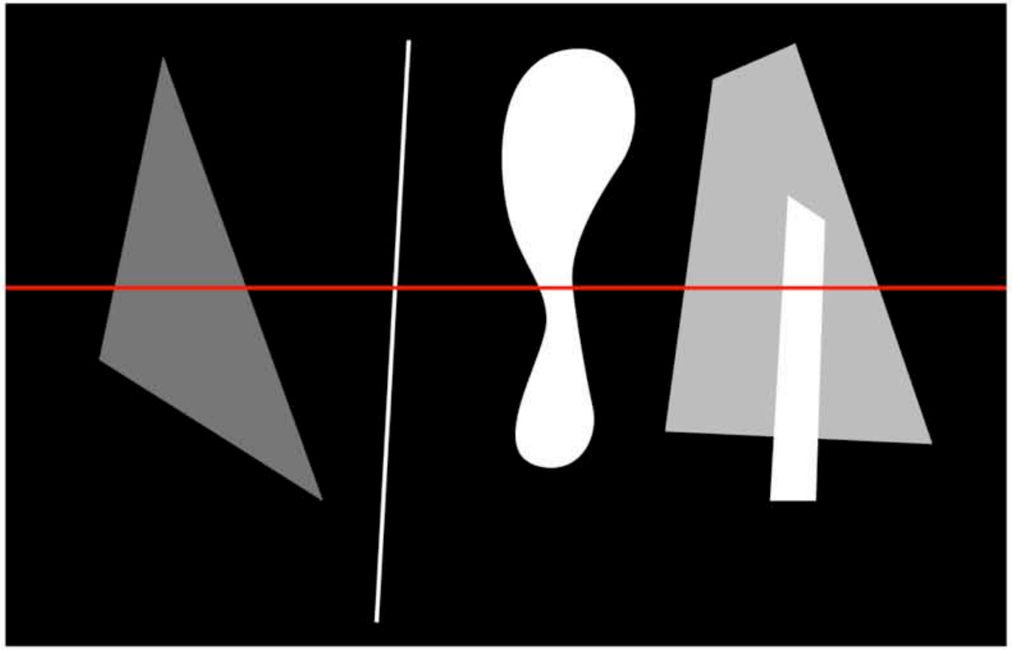
- Linien unterschied-licher Richtung erscheinen unterschiedlich hell
- Dieser Effekt sollte durch Anti-Aliasing ebenfalls unterdrückt werden!

Antialiasing

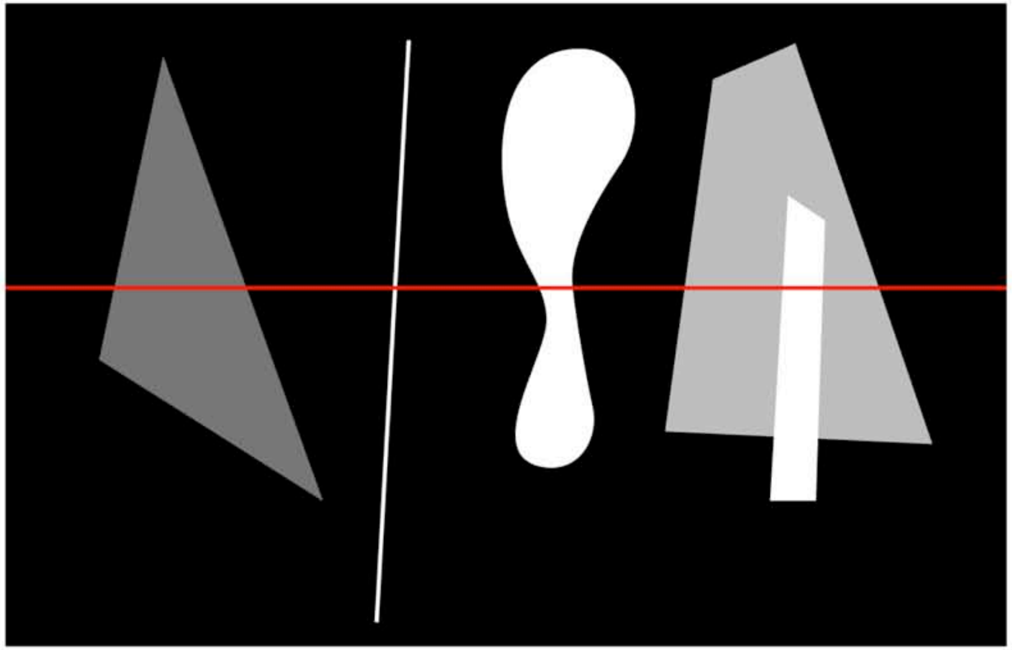


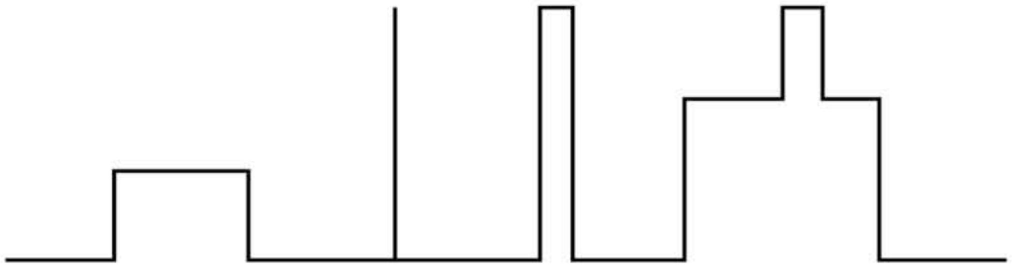


Die Bildzeile als Signal

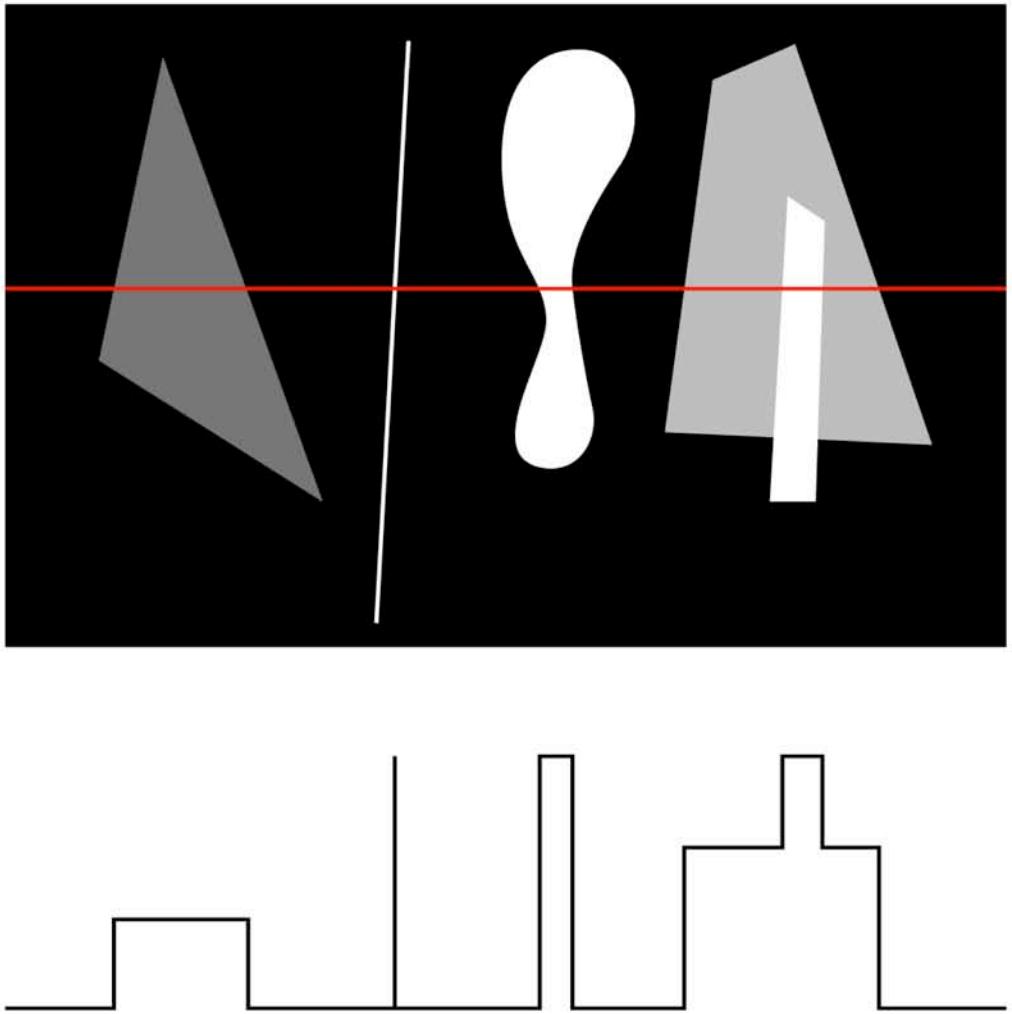


Die Bildzeile als Signal

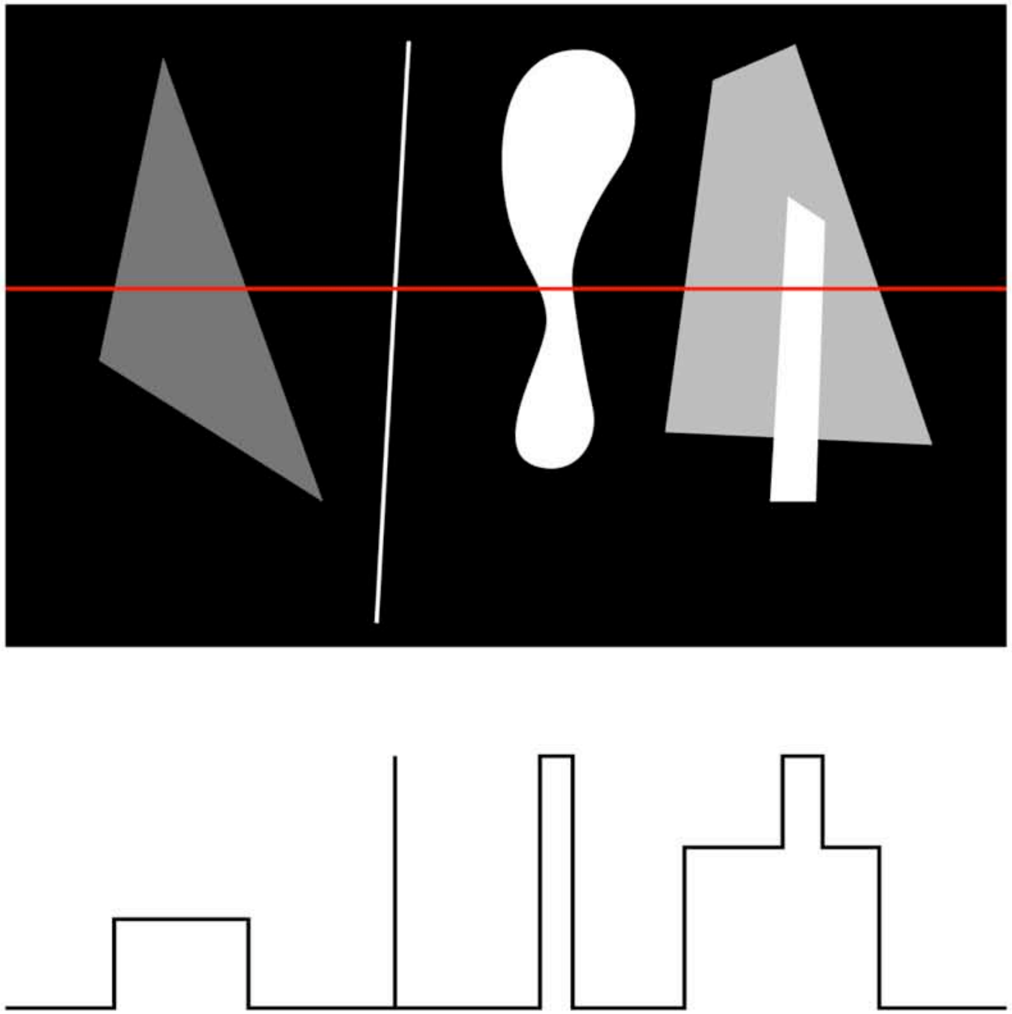


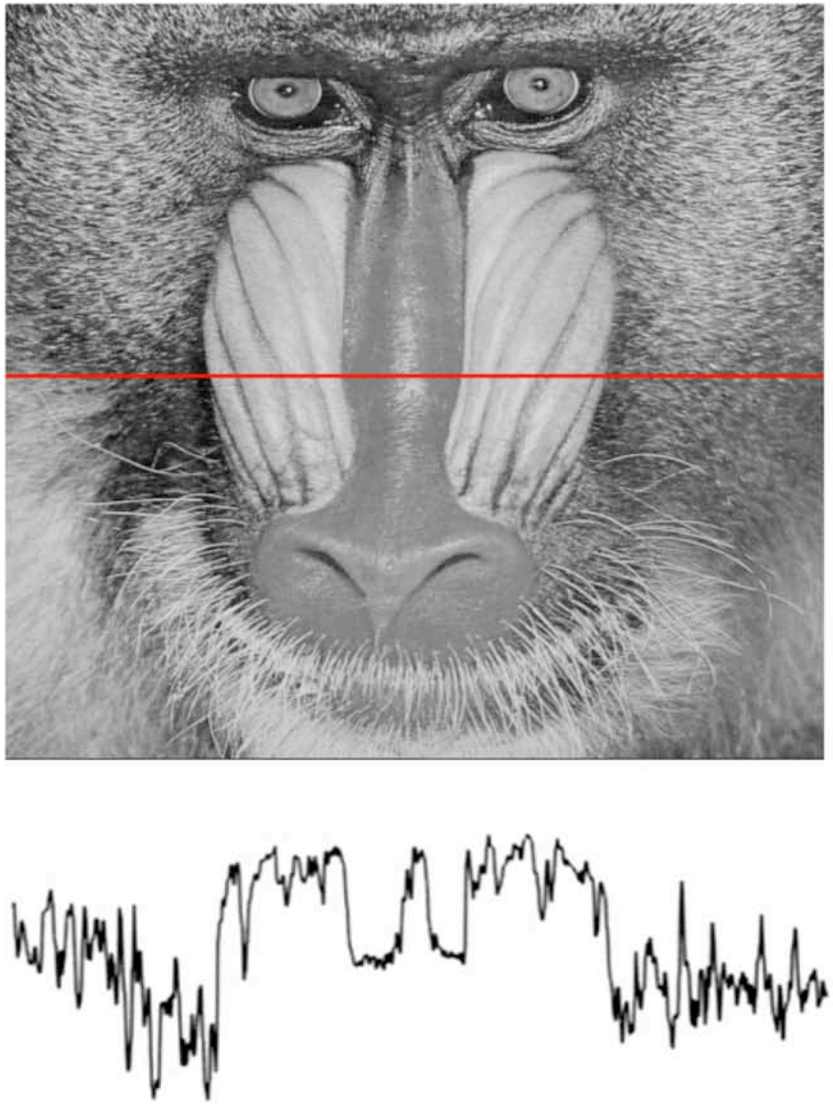


Die Bildzeile als Signal



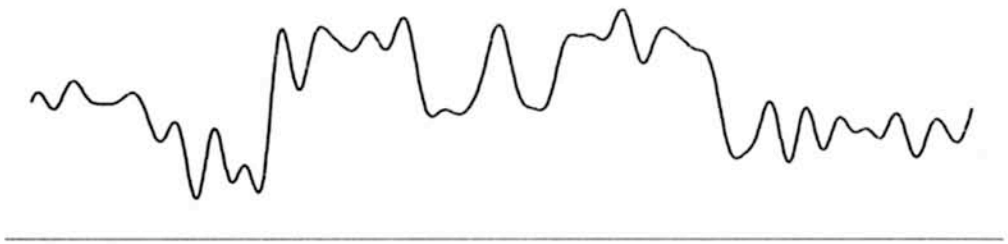
Die Bildzeile als Signal





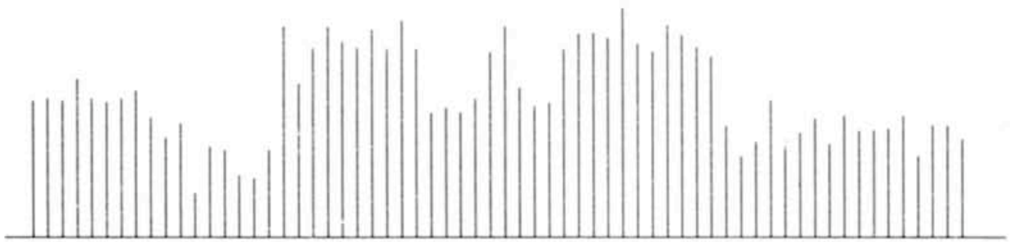
Speicherung einer Bildzeile

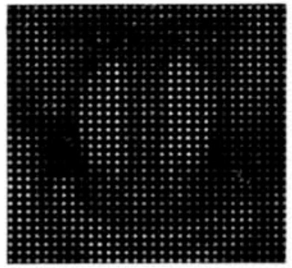
Original



Abtastung

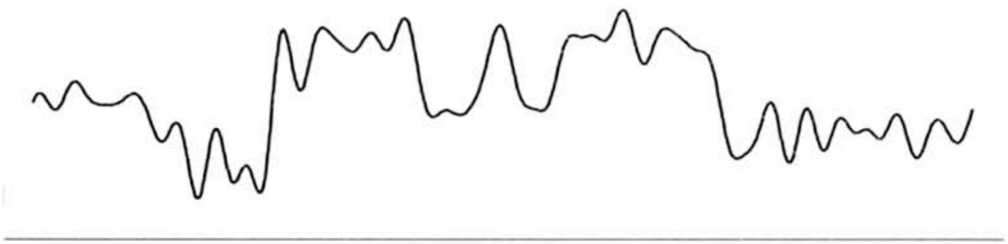
Digitalisiertes Signal



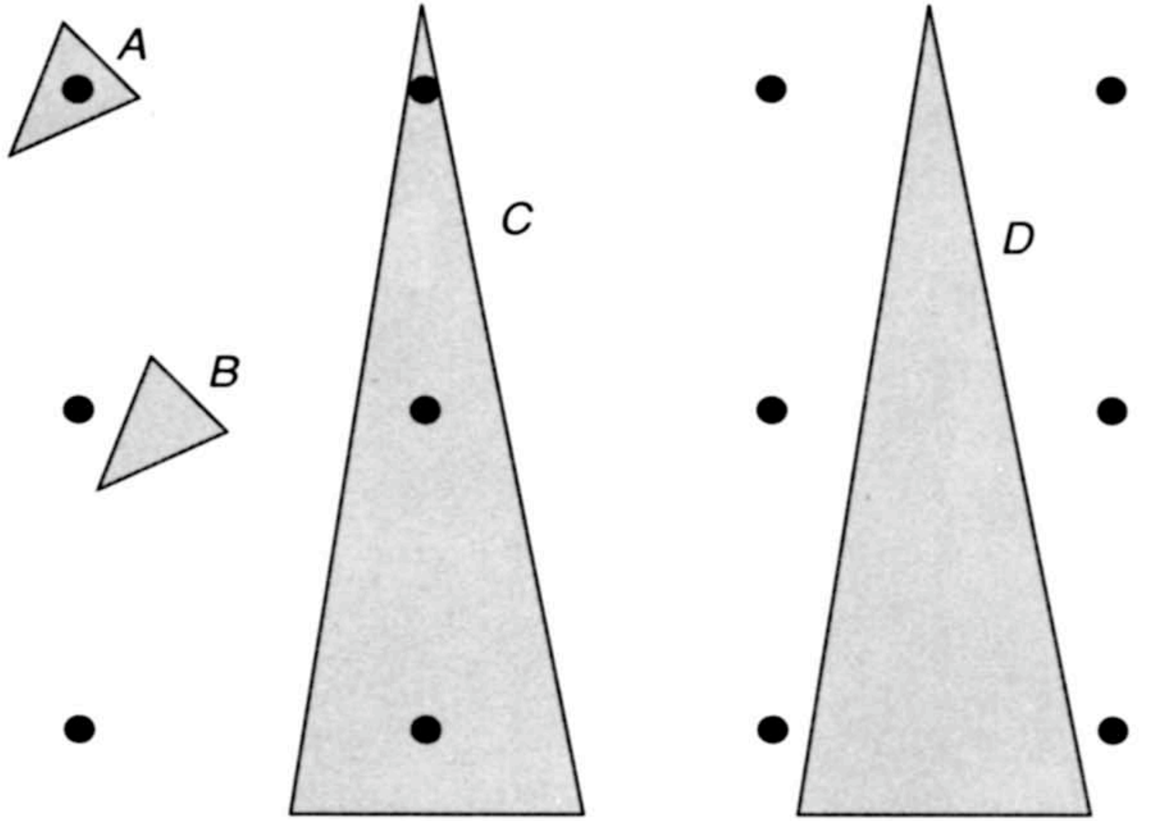


Rekonstruktion

Wiedergabe



Abtastung: Prinzipielles Problem

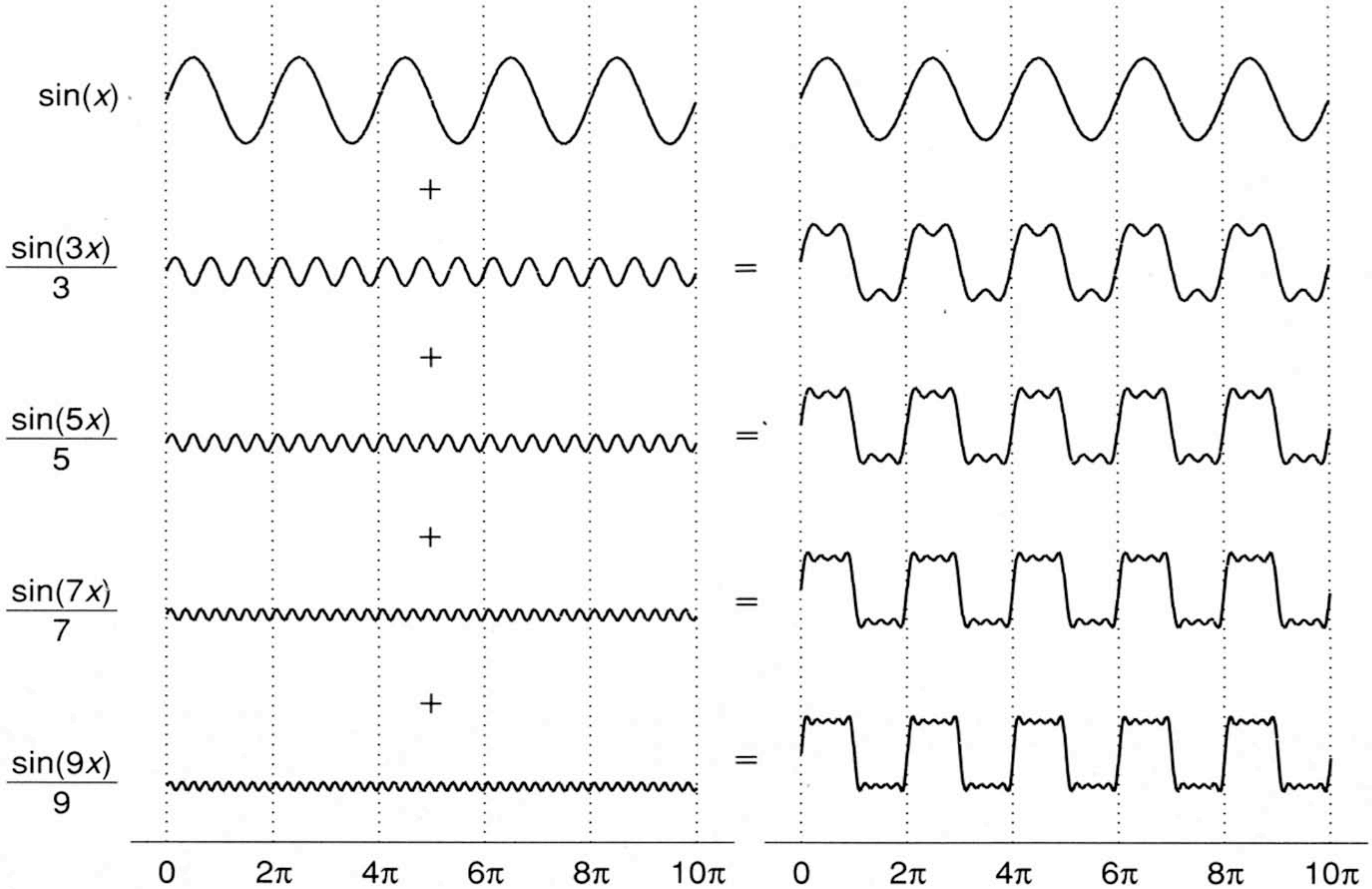


- Ohne Wissen über das abzutastende Signal kann nie garantiert werden, daß eine Abtastung sinnvolle Ergebnisse liefert!

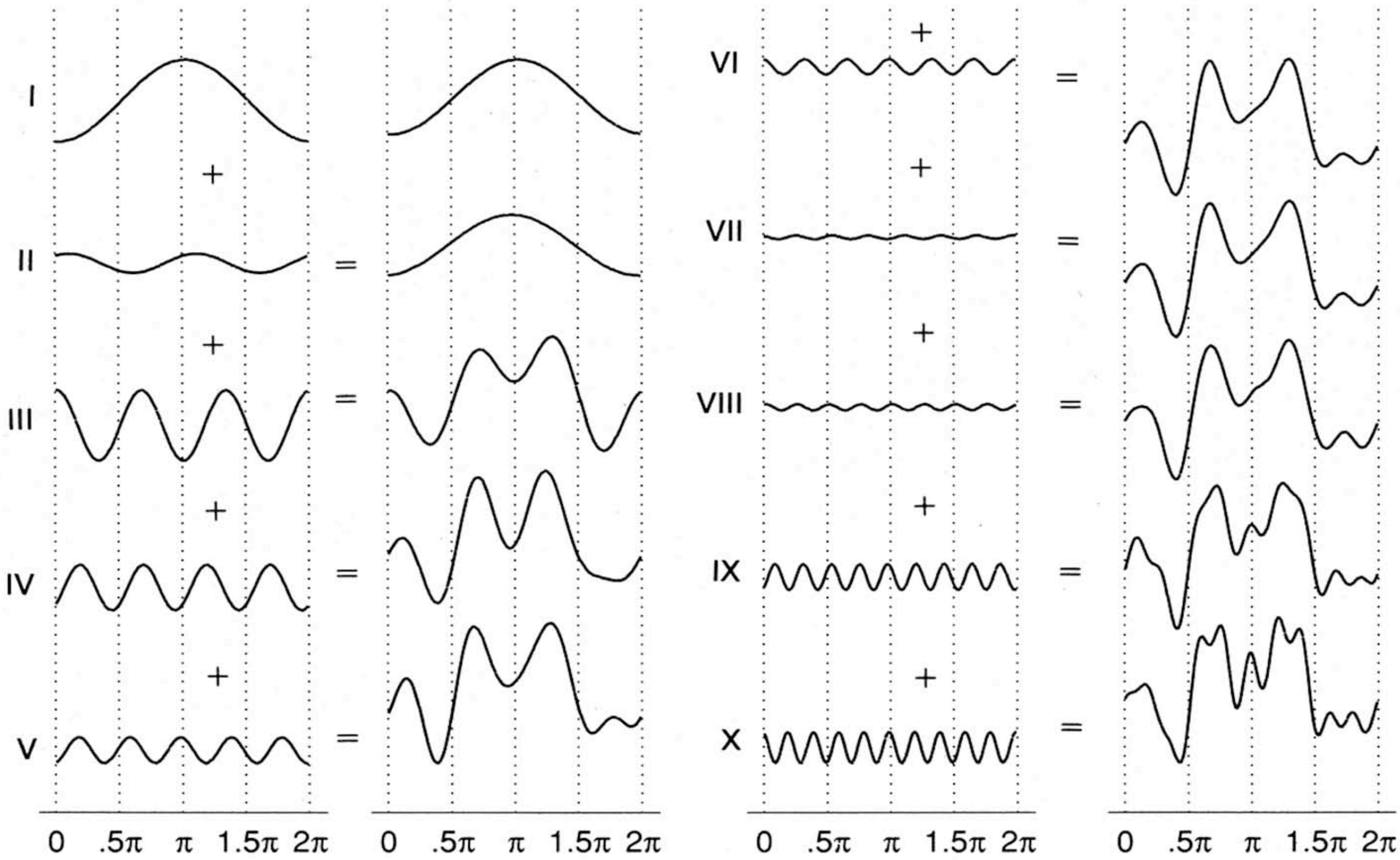
Abtast-Theorie

- Stellt Beziehung zwischen Signal und Abtastwerten her
- {Bild|Farb|3D}-Daten werden als Signal gesehen
- Signale können sowohl zeitlich als auch räumlich aufgefaßt werden
- Signale können als Summe von verschiedenen Frequenzen gesehen werden

Zerlegung einer Rechteckschwingung



Zerlegung eines beliebigen Signals



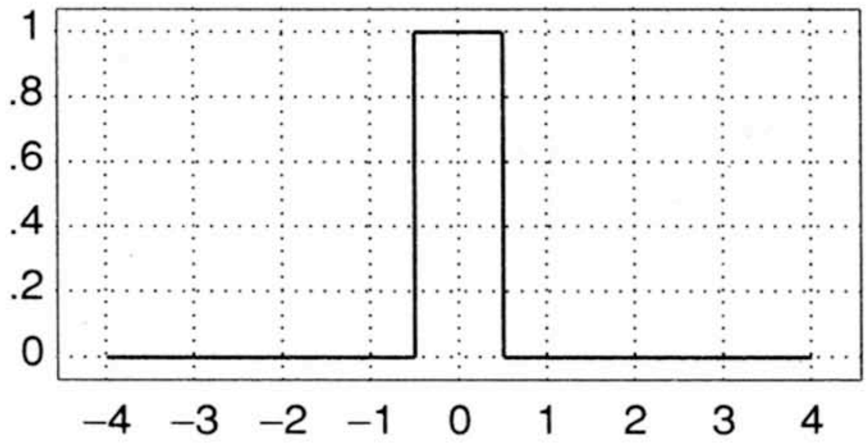
Fourier-Transformation

- Bindeglied zwischen Orts- und Frequenzraum
- Für breite Klassen von Signalen verwendbar
  - f(x) Funktion im Ortsraum
  - F(u) Funktion im Frequenzraum

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\cos 2\pi ux - i \sin 2\pi ux]\, dx$$

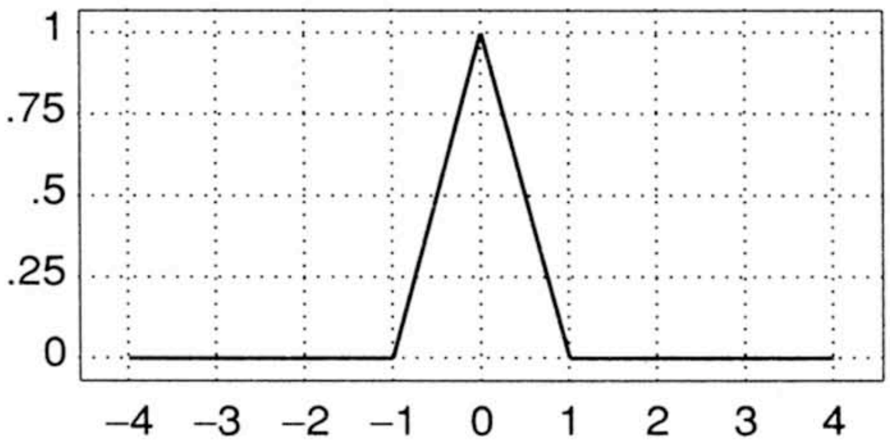
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)[\cos 2\pi ux - i \sin 2\pi ux]\, du$$

Einzelnes Rechteck & Sägezahn

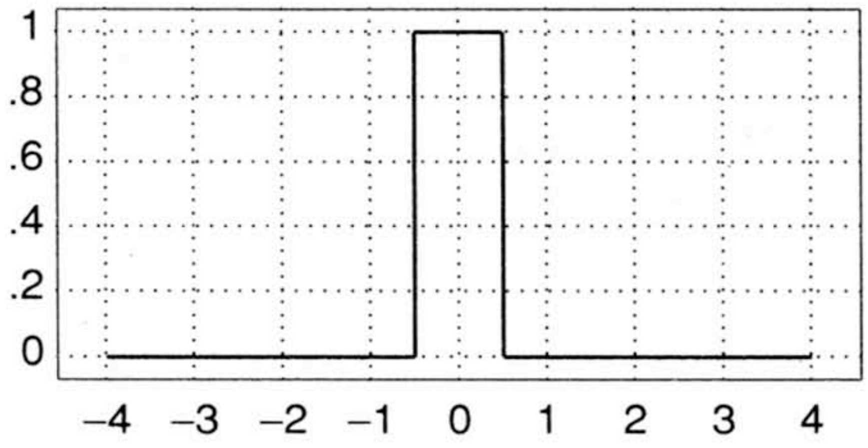


$f(x)$

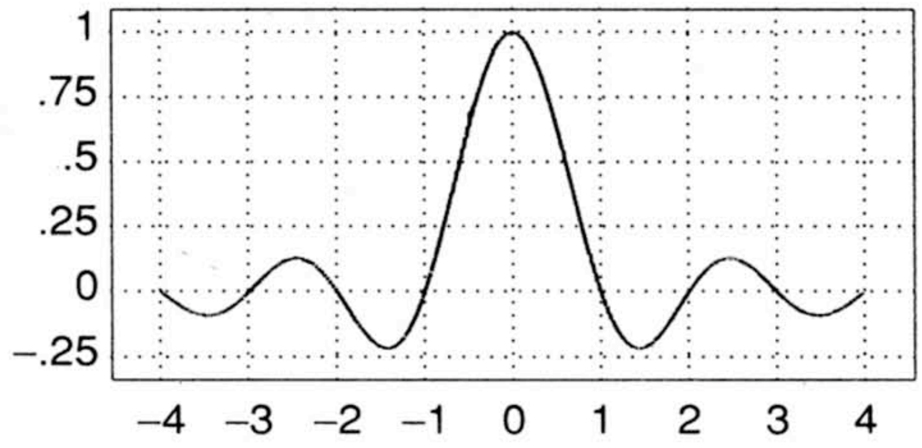
$F(u)$



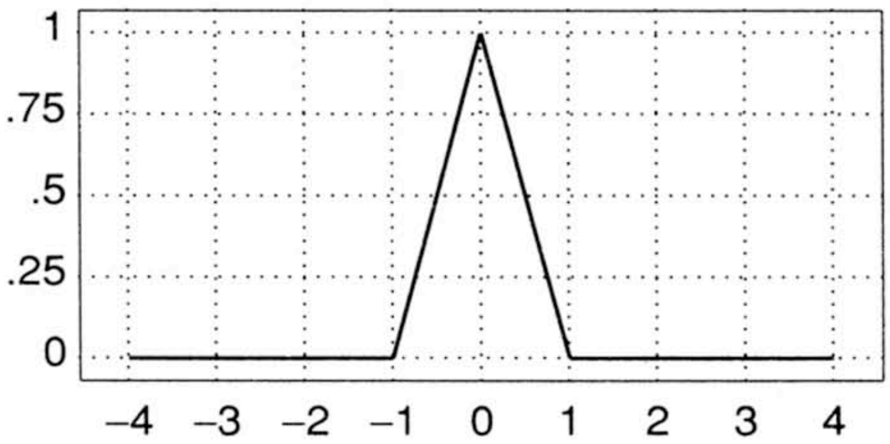
Einzelnes Rechteck & Sägezahn



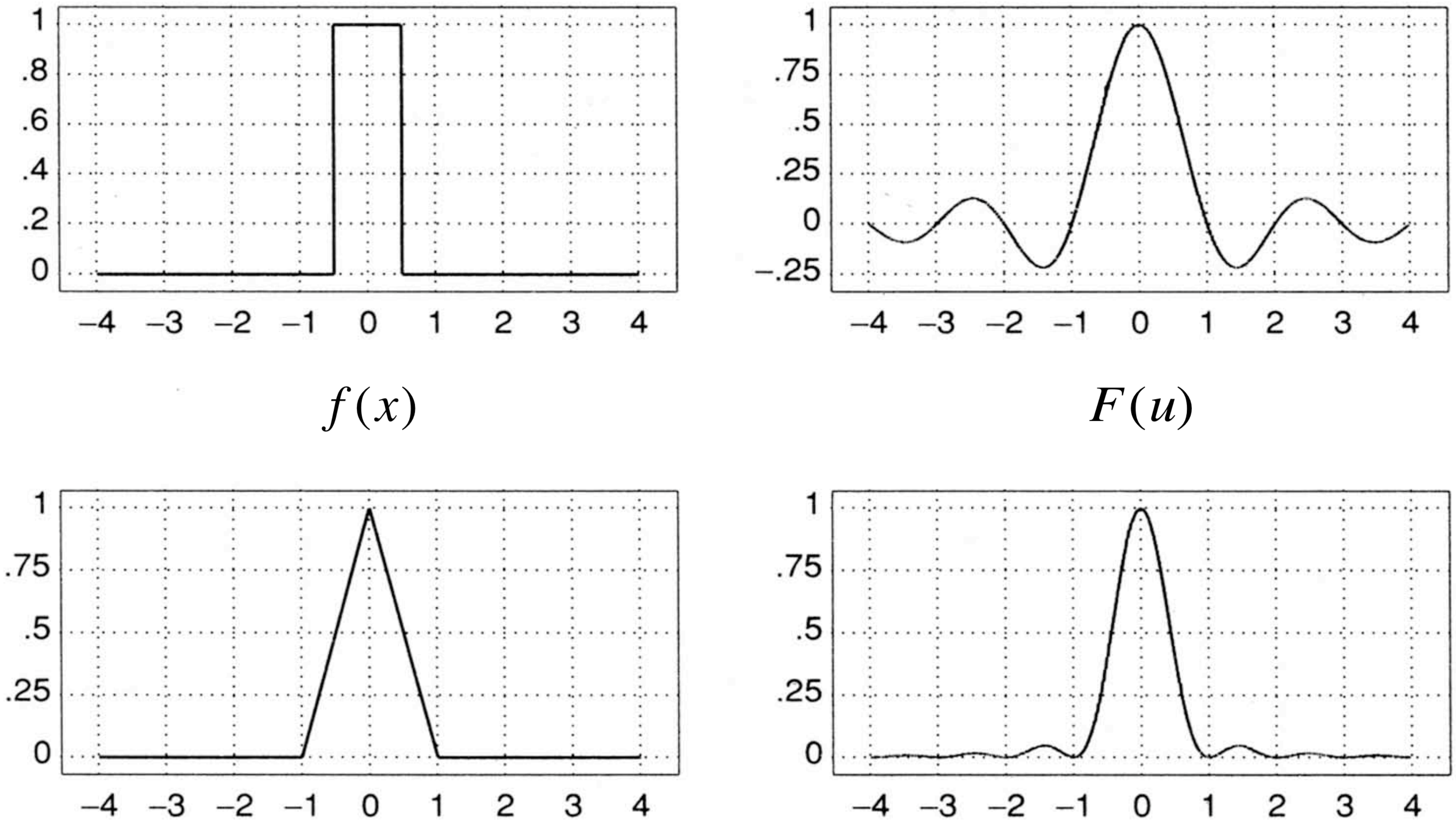
$f(x)$



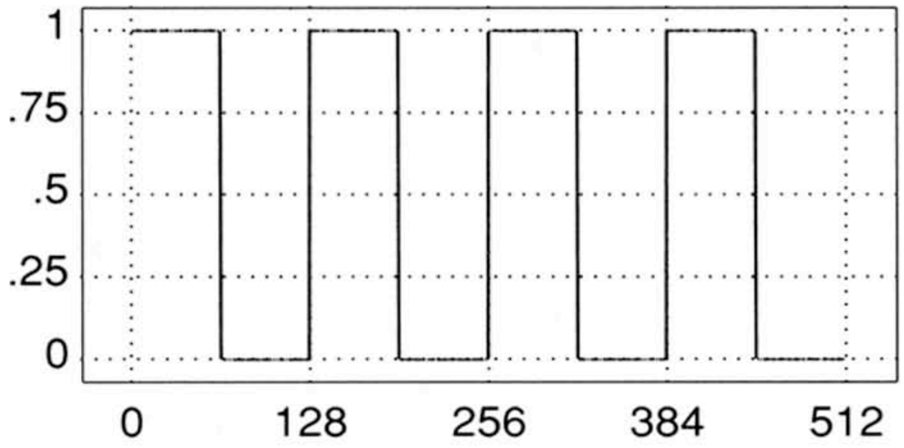
$F(u)$



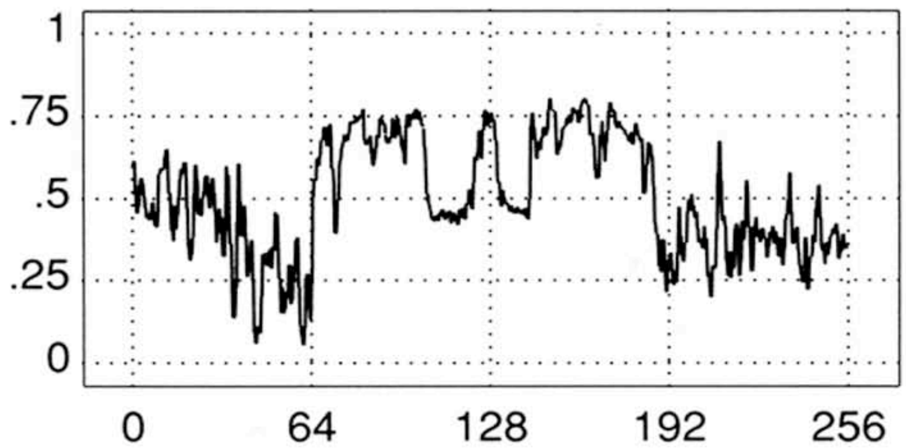
Einzelnes Rechteck & Sägezahn



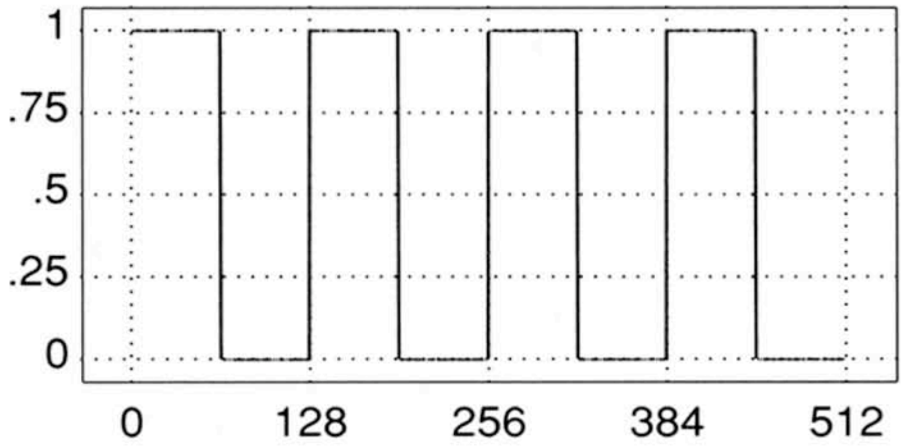
Rechteckschwingung & Scanline



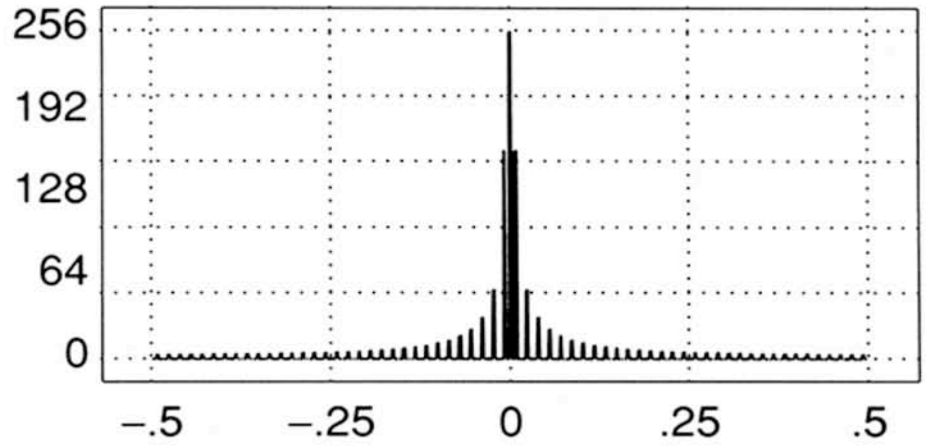
$f(x)$ $F(u)$



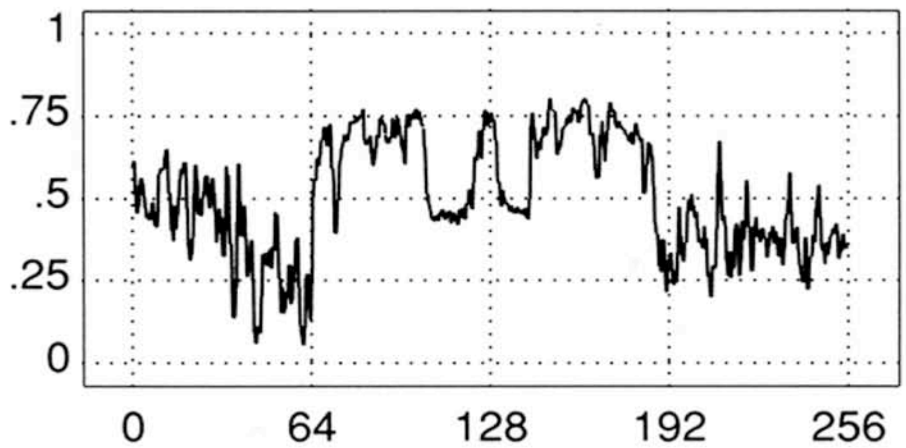
Rechteckschwingung & Scanline



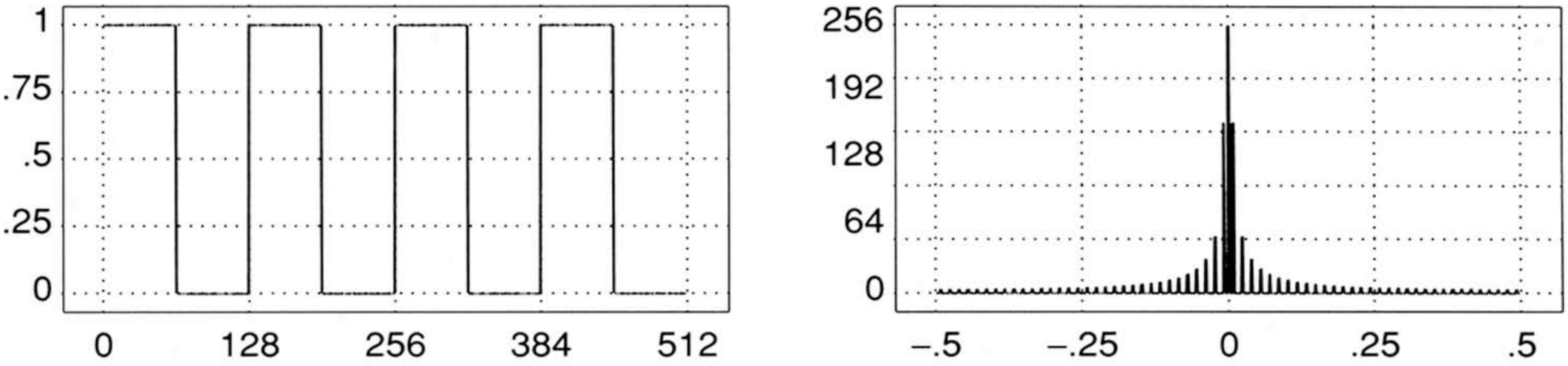
$f(x)$



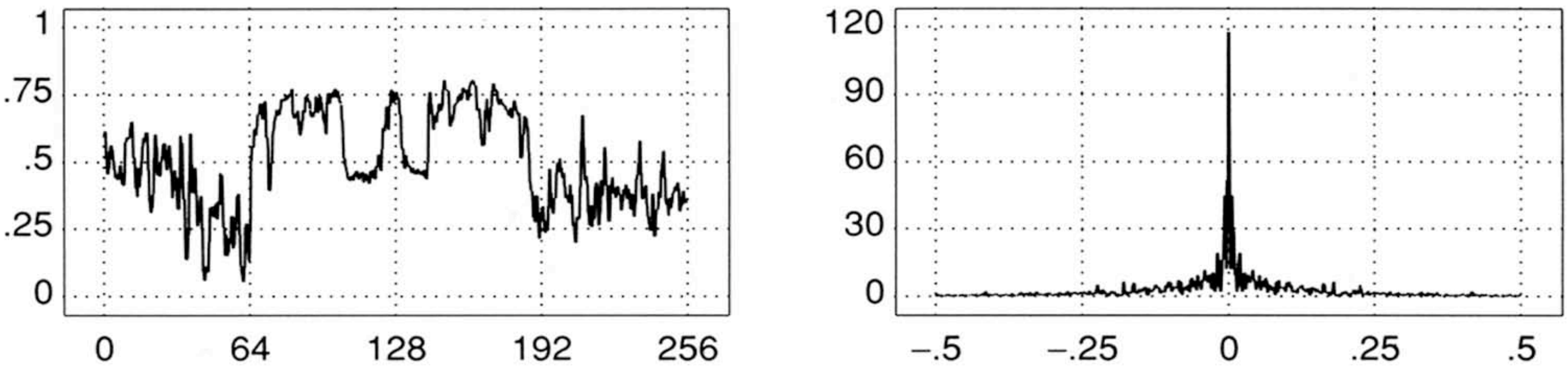
$F(u)$



Rechteckschwingung & Scanline



$f(x)$ $F(u)$



Fourier-Transformation

- Liefert im Frequenzraum komplexwertige Funktionen
  - Imaginärteil ist Phaseninformation - wird i.A. weggelassen
- Kann leicht auf höhere Dimensionen (2D,3D...) verallgemeinert werden
- Es gibt auch Alternativen: z.B. die Hartley-Transformation

Diskrete Fourier-Transformation

- Für diskrete Signale (z.B. Samples)

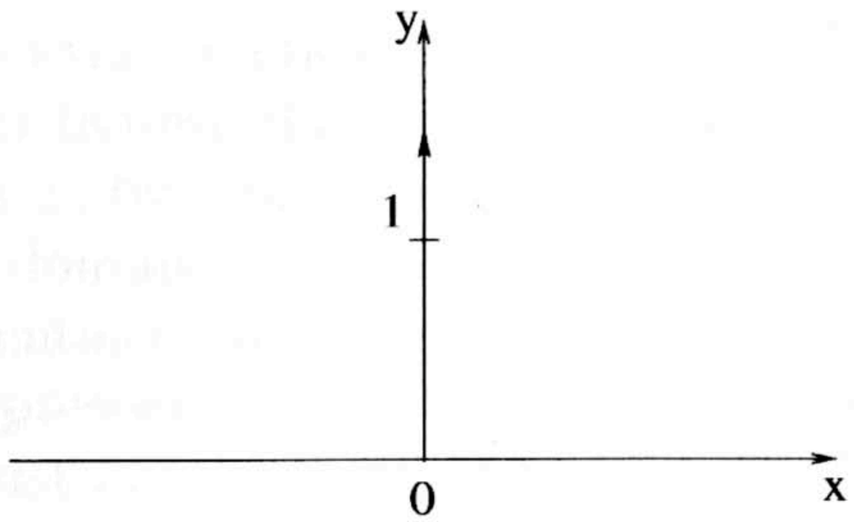
$$F(u) = \sum_{0}^{N-1} f(x)[\cos(2\pi ux/N) - i\sin(2\pi ux/N)], 0 \le u \le N-1$$

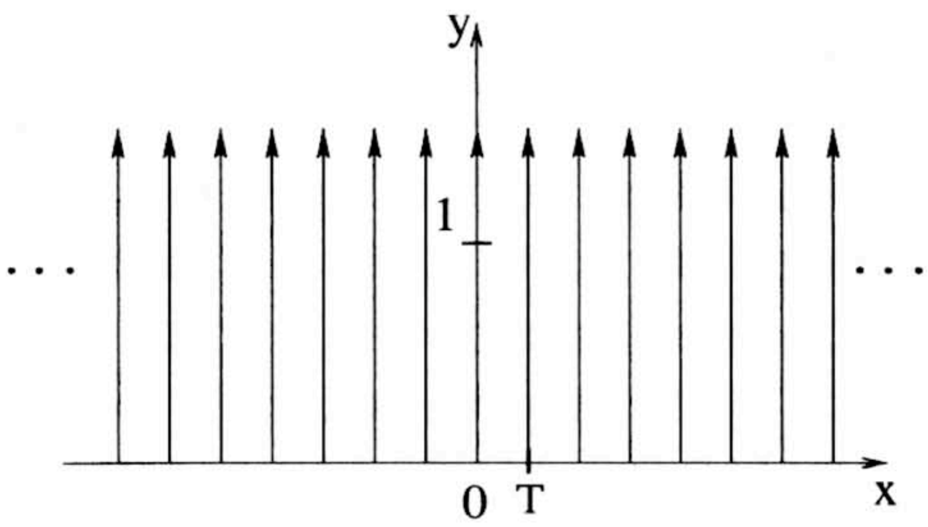
$$f(x) = \sum_{0}^{N-1} F(u)[\cos(2\pi ux/N) - i\sin(2\pi ux/N)], 0 \le x \le N-1$$

- N Samples: Komplexität O(N^2)
- Fast FT (FFT): O(N log N)

Abtastfunktion: Kamm-Funktion

- Ein einzelner Dirac-Puls entspricht einer Abtastung eines Signals an einer Stelle
- Eine regelmäßige Abtastung kann als Multiplikation der Funktion mit n Dirac-Pulsen (Kammfunktion) gesehen werden

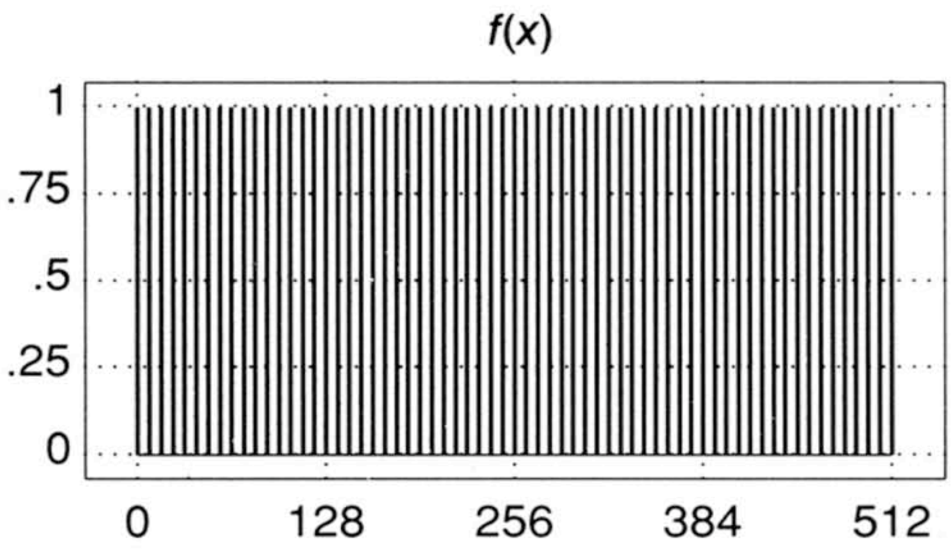


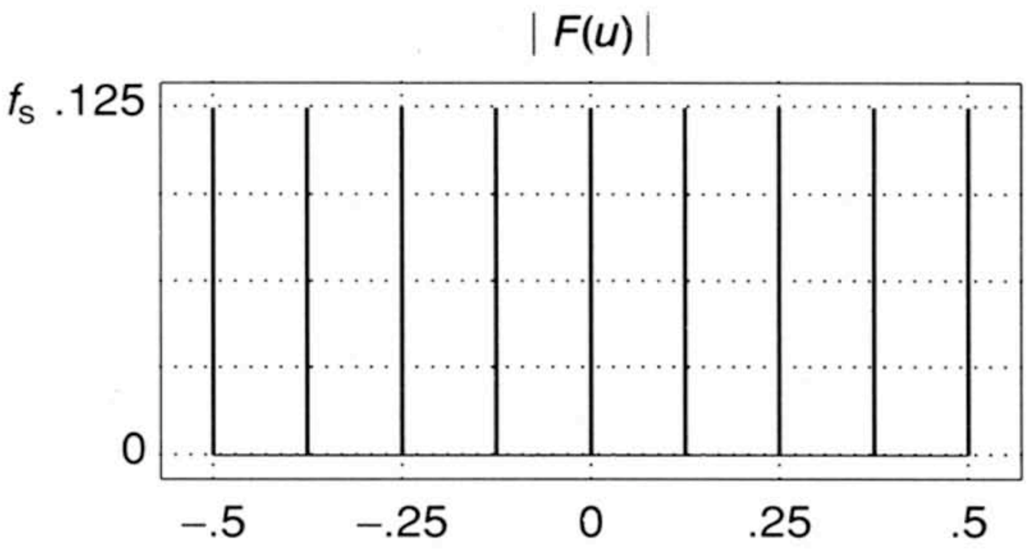


Fourier-Transformation eines Kamms

- Einem Kamm im Ortsraum entspricht ein Kamm mit inversem Zackenabstand

$$\mathrm{comb}_T(x) \equiv \mathrm{comb}_{1/T}(\omega)$$



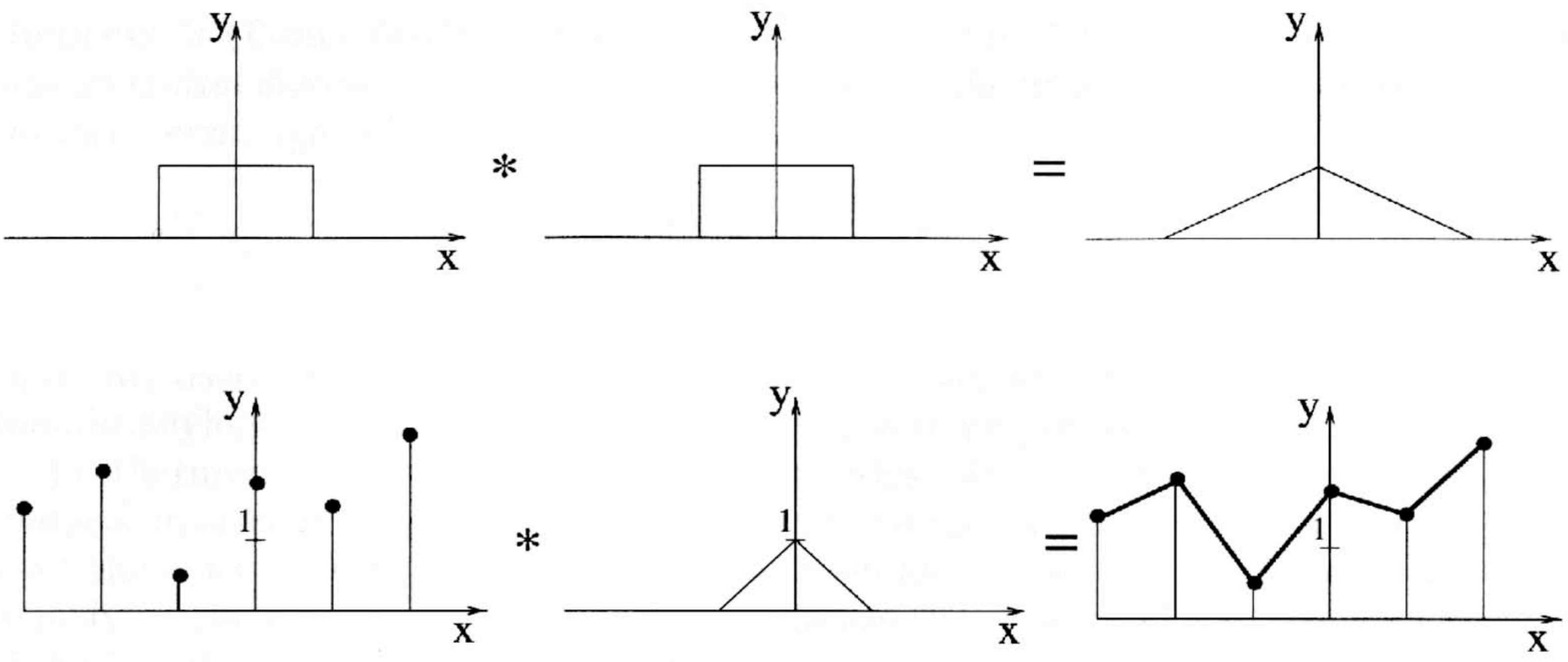


Faltung

- Mathematischer Operator:
  - Zwei Funktionen als Input
  - Neue Funktion als Output
- "Gewichtung der ersten Funktion mit der zweiten Funktion"

$$(f * g)(t) = \int_D f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Faltung - Beispiele



Faltungs-Theorem

- Das Spektrum der Faltung zweier Funktionen entspricht der Multiplikation ihrer Spektren
- Die Umkehrung gilt ebenfalls: Faltung im Frequenzraum entspricht Multiplikation im Ortsraum

$$f * g \equiv F \cdot G$$

$$f \cdot g \equiv F * G$$

Beispiel: Tiefpaßfilter

- Ziel: Tiefpaß-Filterung einer Scanline (1D-Signal)

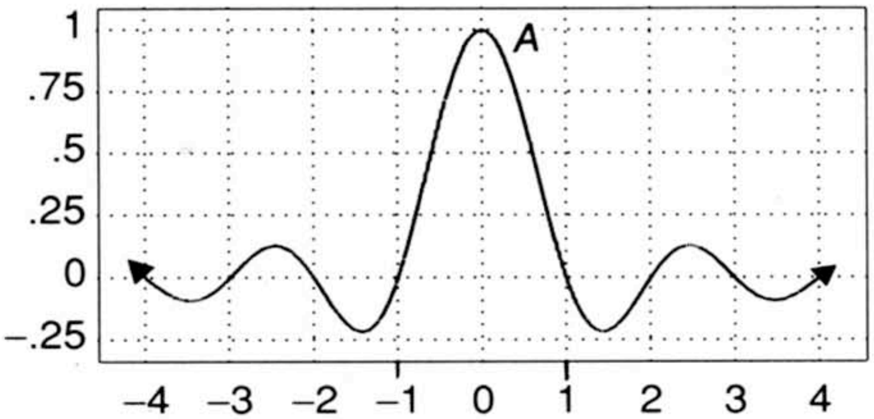
- Ortsraum: Faltung mit Sinc-Funktion
- Frequenzraum: Abschneiden der hohen Frequenzen = Multiplikation mit einem Rechteck

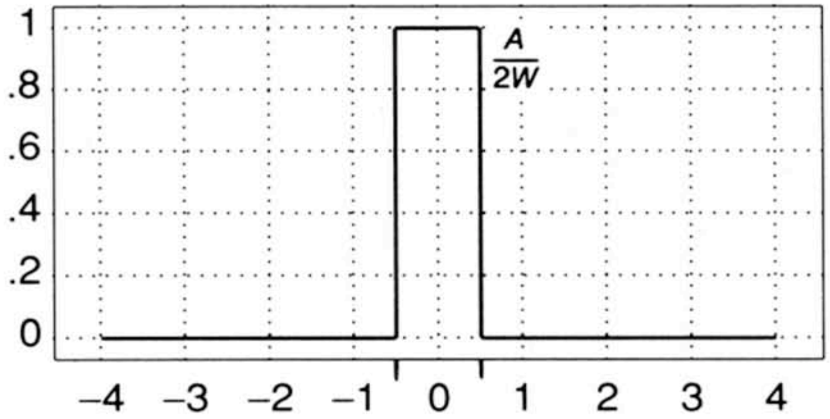
- Sinc im Ortsraum entspricht Rechteck im Frequenzraum

Sinc-Function

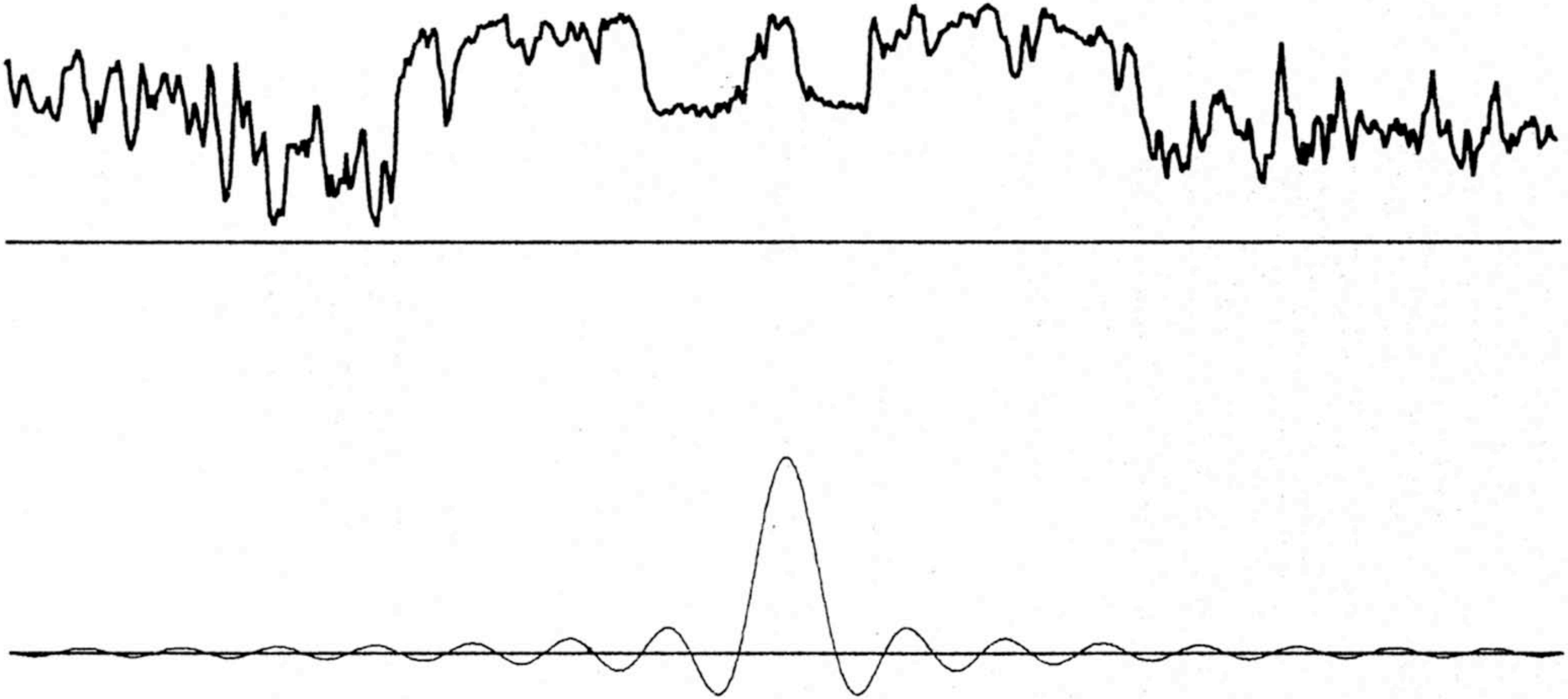
- Unbeschränkter Bereich
- Perfekter Rekonstruktionsfilter
- Fourier-Transformierte eines Rechtecks

$$\mathrm{Sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Sin}(x)}{x} & \textit{falls } x \neq 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0 \end{cases}$$

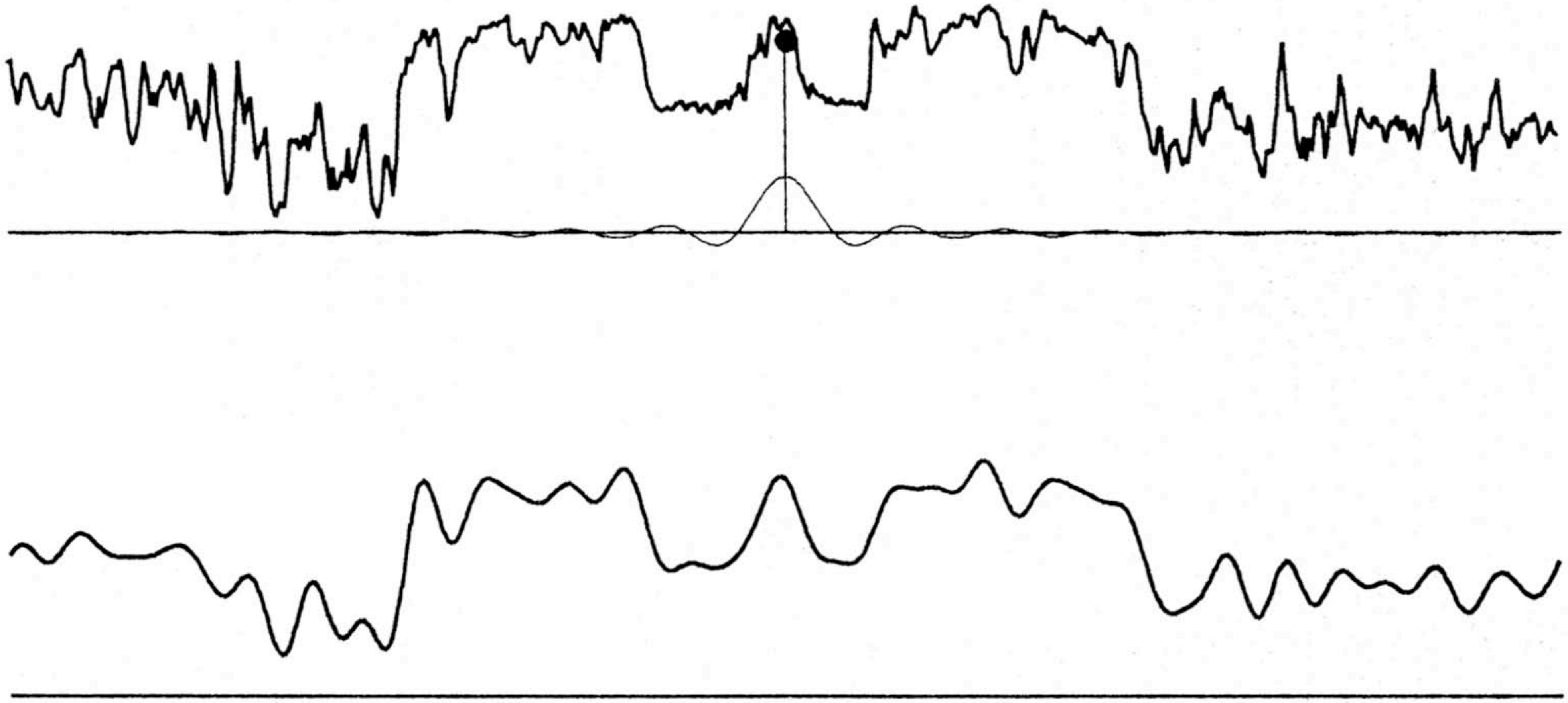




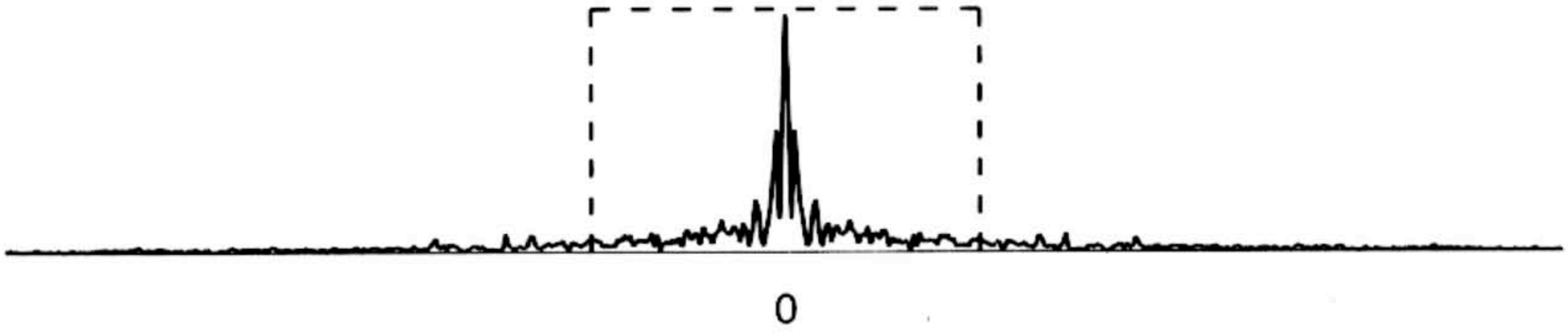
Tiefpaß im Ortsraum 1



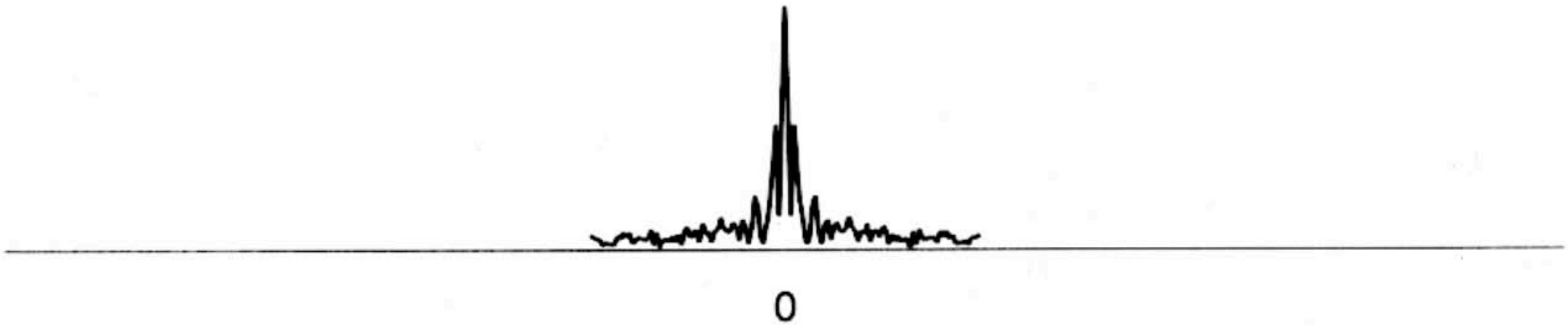
Tiefpaß im Ortsraum 2



Tiefpaß im Frequenzraum



(c)



(d)

Abtastung

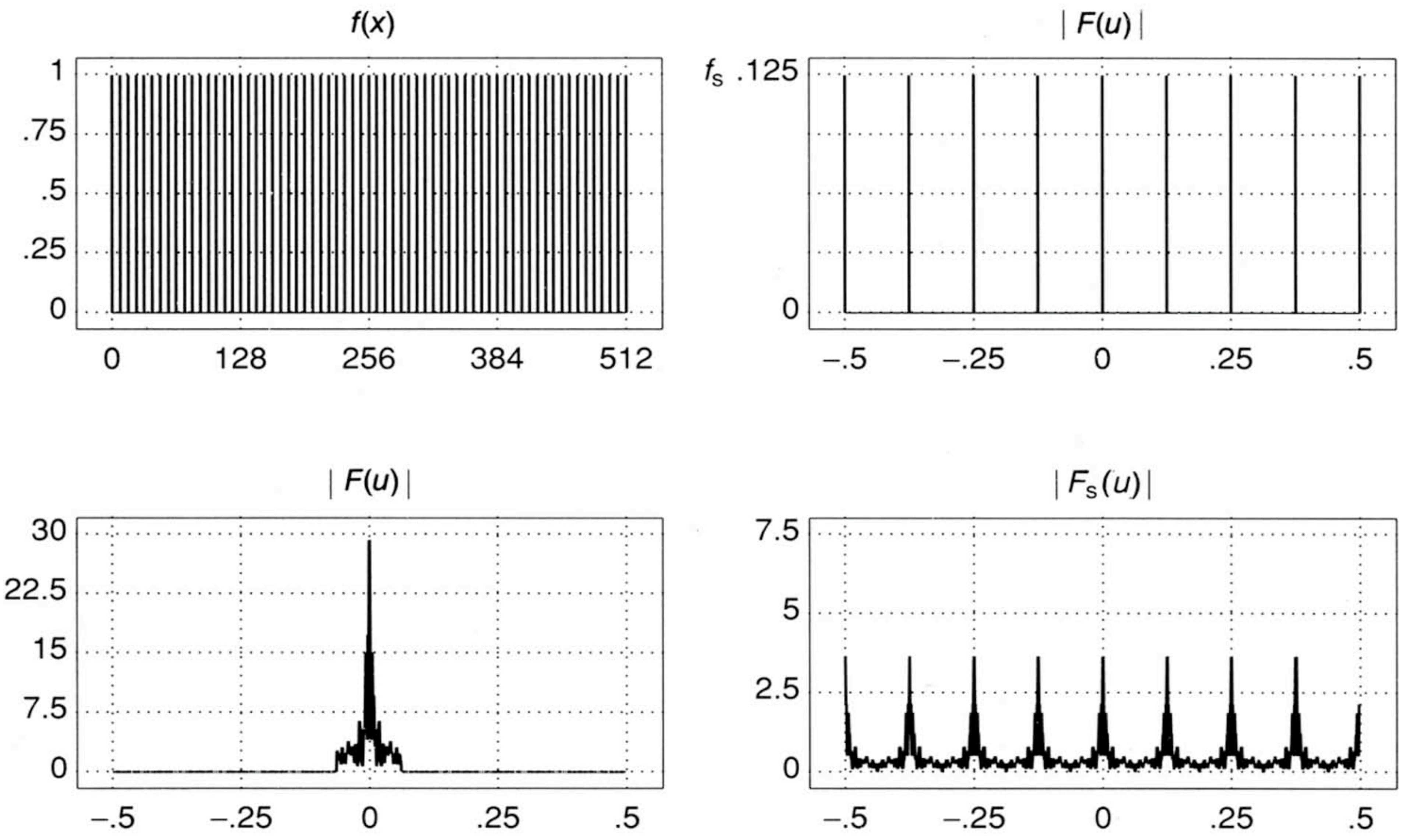
- Abtastung bedeutet Multiplikation des Ausgangssignals mit einer Kammfunktion:

$$f_s(x) = f(x) \cdot \mathrm{comb}_T(x)$$

- Im Frequenzraum entspricht das einer Faltung (!) mit der transformierten Kammfunktion:

$$F_s(\omega) = F(\omega) * \mathrm{comb}_{1/T}(\omega)$$

Spektrum eines abgetasteten Signals



Rekonstruktion

- Wiederherstellung des Originalsignals aus Abtastwerten

- Abtast-Theorem
- Perfekte Rekonstruktion
  - Sinc-Kernel
- Rekonstruktion in der Praxis

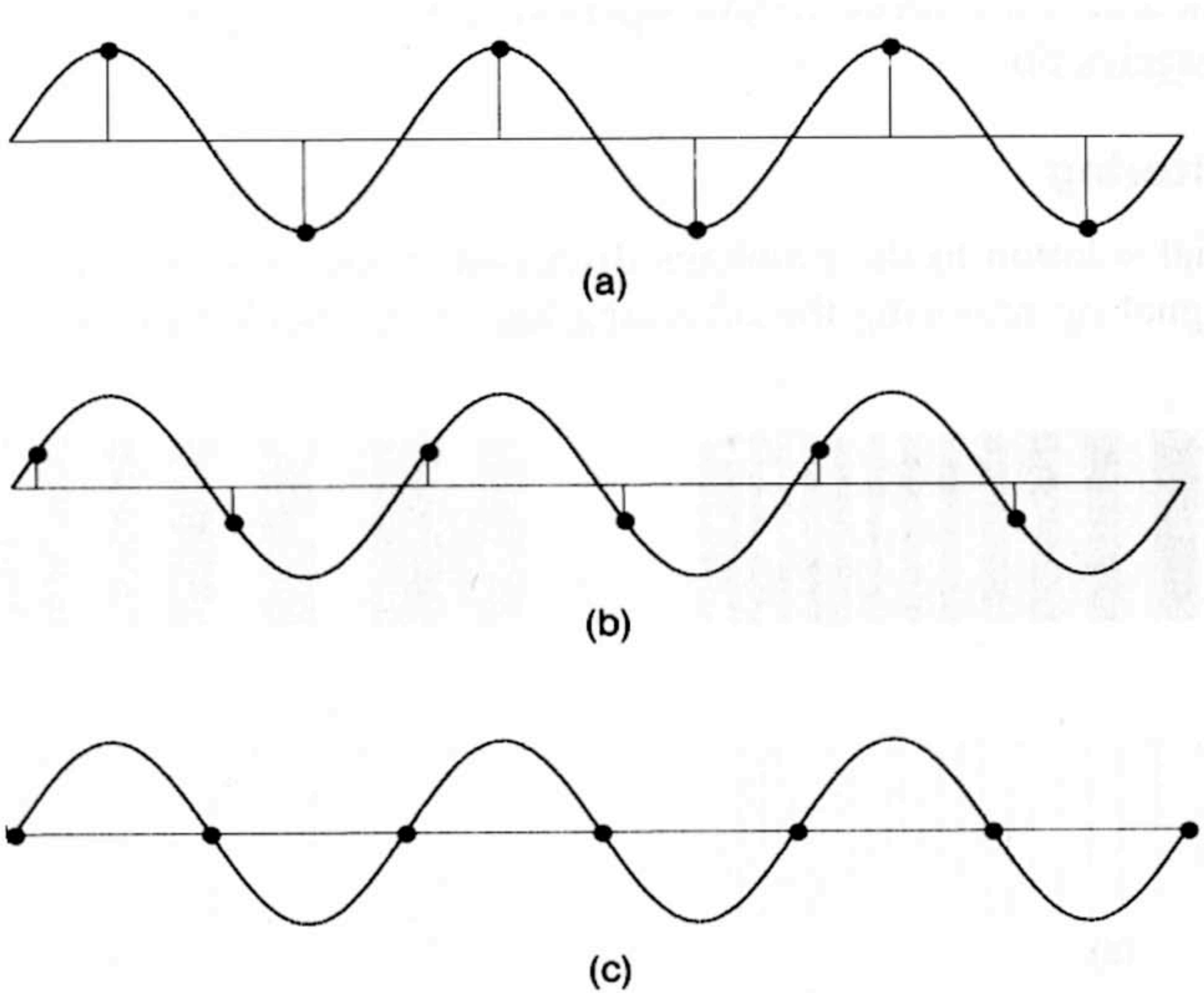
Definitionen

- Ein Signal ist **bandbegrenzt**, wenn es keine Frequenzen außerhalb des Bereiches **[-u,u]** enthält.
- Man bezeichnet **u** als die **Bandbreite** des Signals
- Die **Nyquist-Frequenz w** eines Signals ist seine doppelte Bandbreite, d.h. **w = 2u**

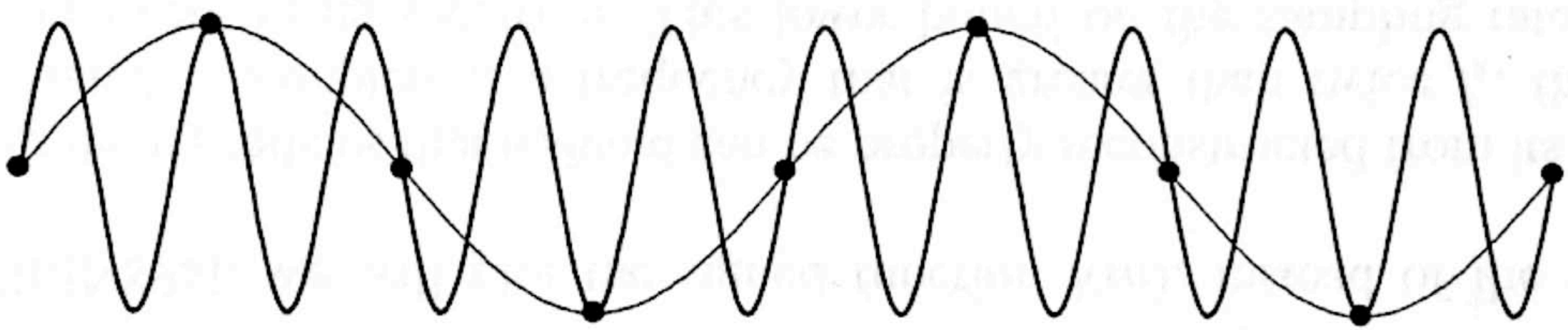
Abtast-Theorem

- Ein bandbegrenztes Signal f(x), das oberhalb seiner Nyquist-Frequenz w abgetastet wird, kann aus den Abtastwerten verlustfrei rekonstruiert werden.

Abtastung genau bei Nyquist-Frequenz



Abtastung unterhalb der Nyquist-Frequ.



Perfekte Rekonstruktion

- Kopien des ursprünglichen Frequenzspektrums dürfen sich im Frequenzraum nicht überlappen!
- Multiplikation des Spektrums mit einem Rechteck entspricht einer Wiederherstellung des Originals
- Das entspricht einer Faltung mit der Sinc-Funktion im Ortsraum

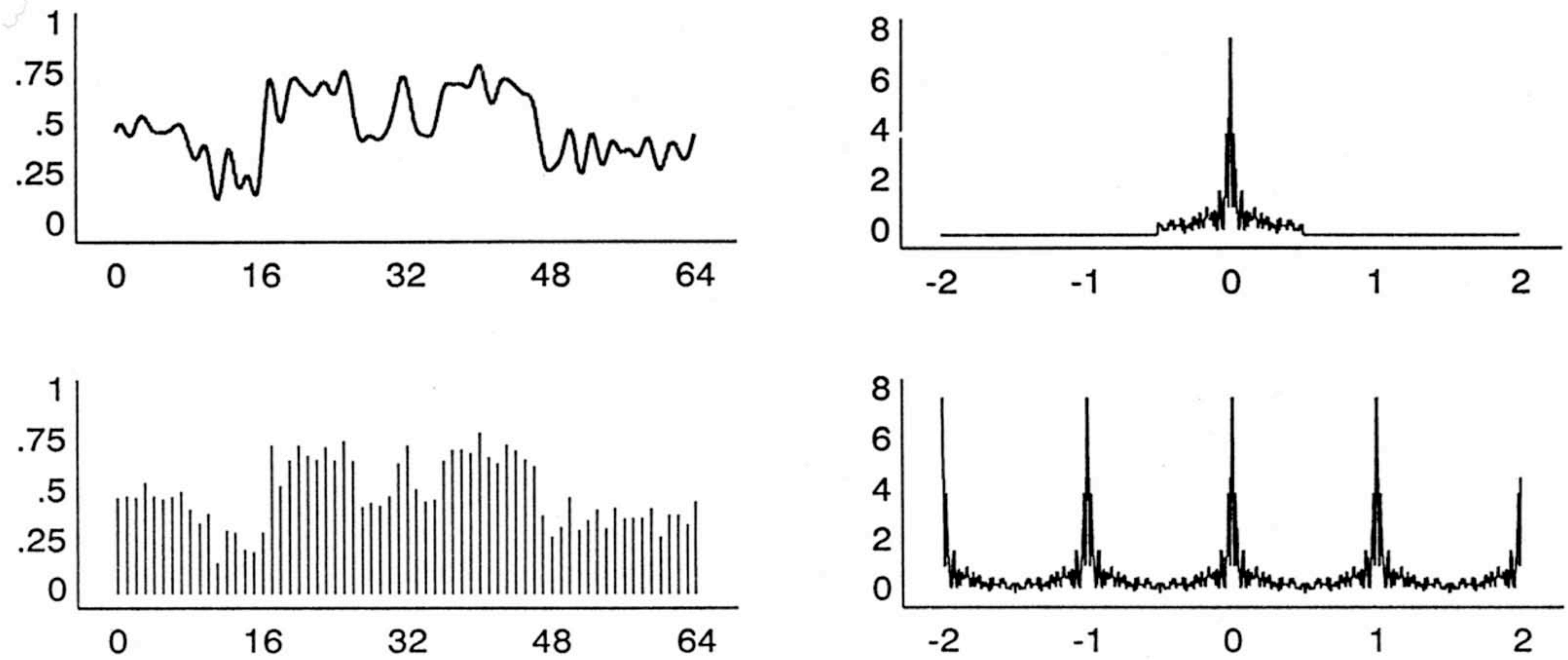
Rekonstruktion: Beispiele

- Abtastung und Rekonstruktion einer Bildzeile

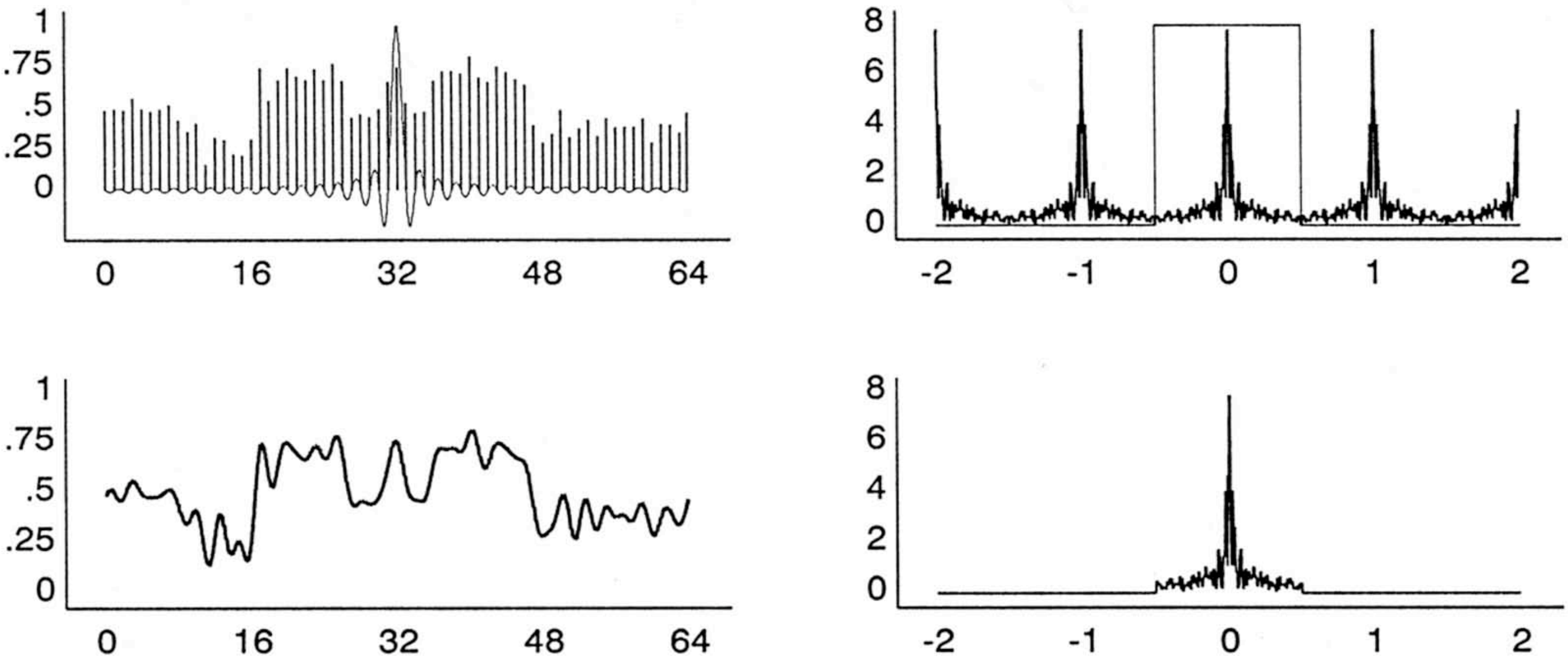
- Mit ausreichender Abtastrate
- Mit unzureichender Abtastrate
- Mit Bandbegrenzung

- Mit Sinc- und Dreiecks-Basis für die Rekonstruktion

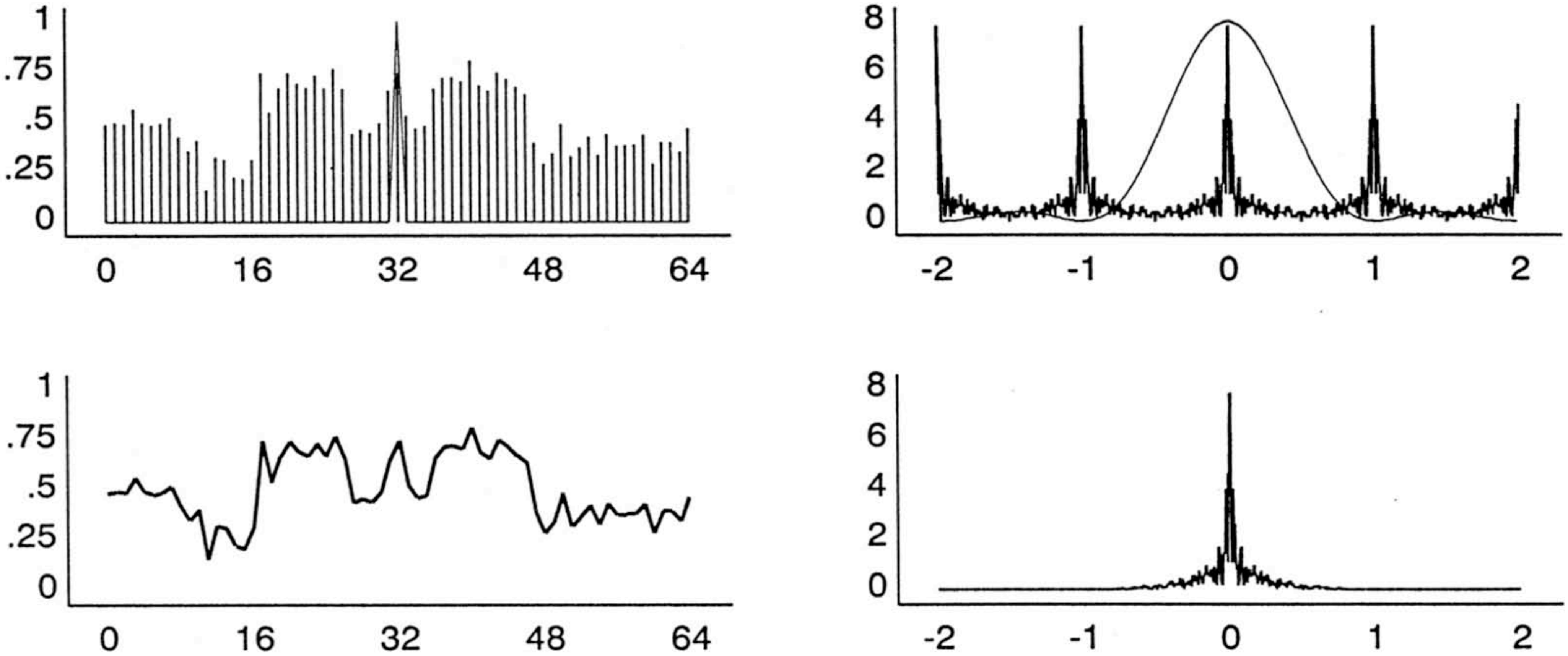
Abtastrate > w: Abtastung



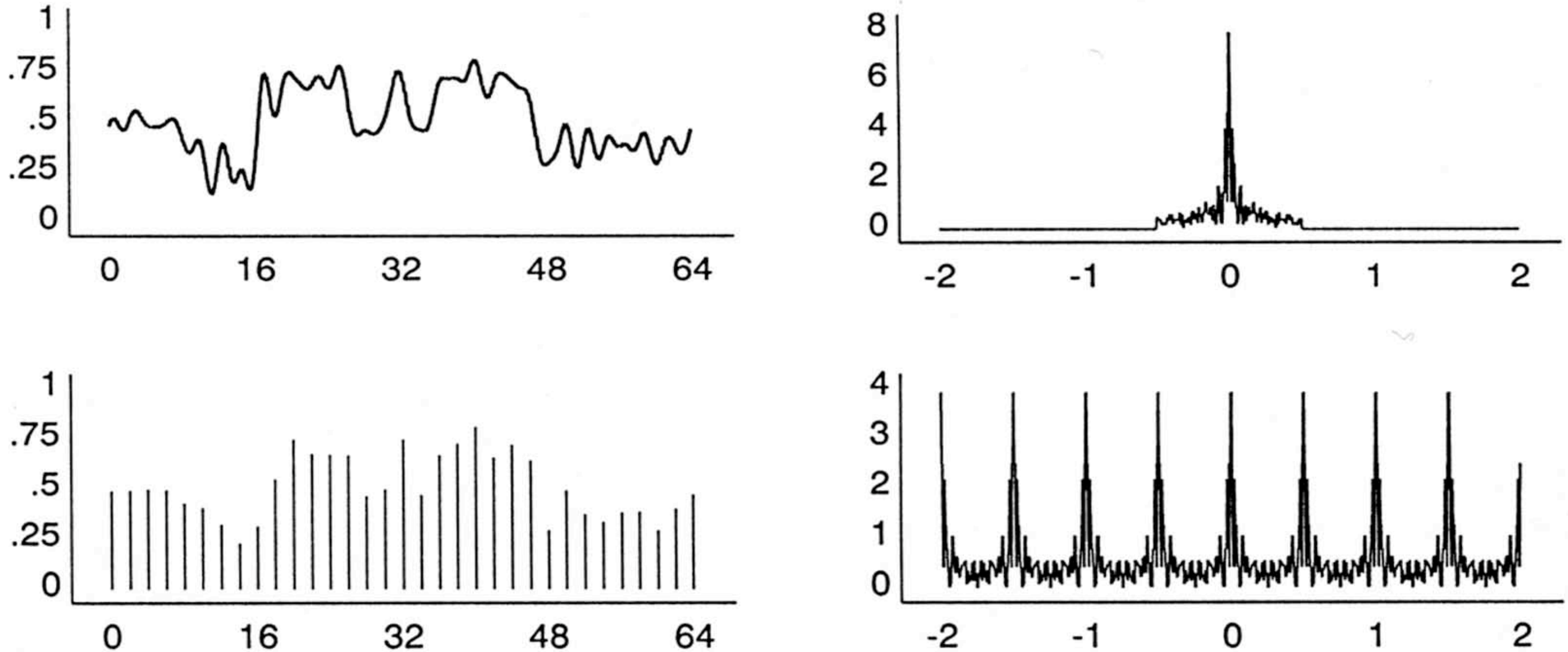
Abtastrate > w: Rekonstruktion mit Sinc



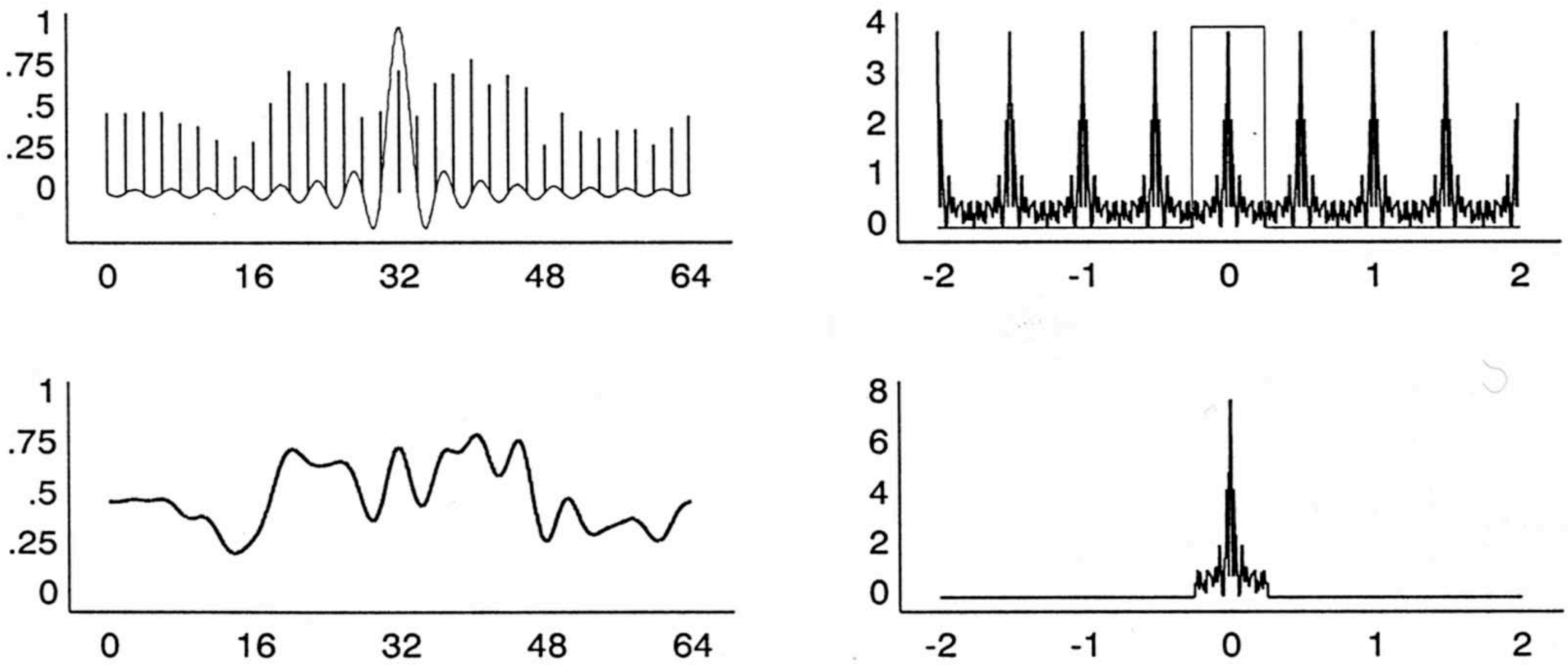
Abtastrate > w: Lineare Interpolation



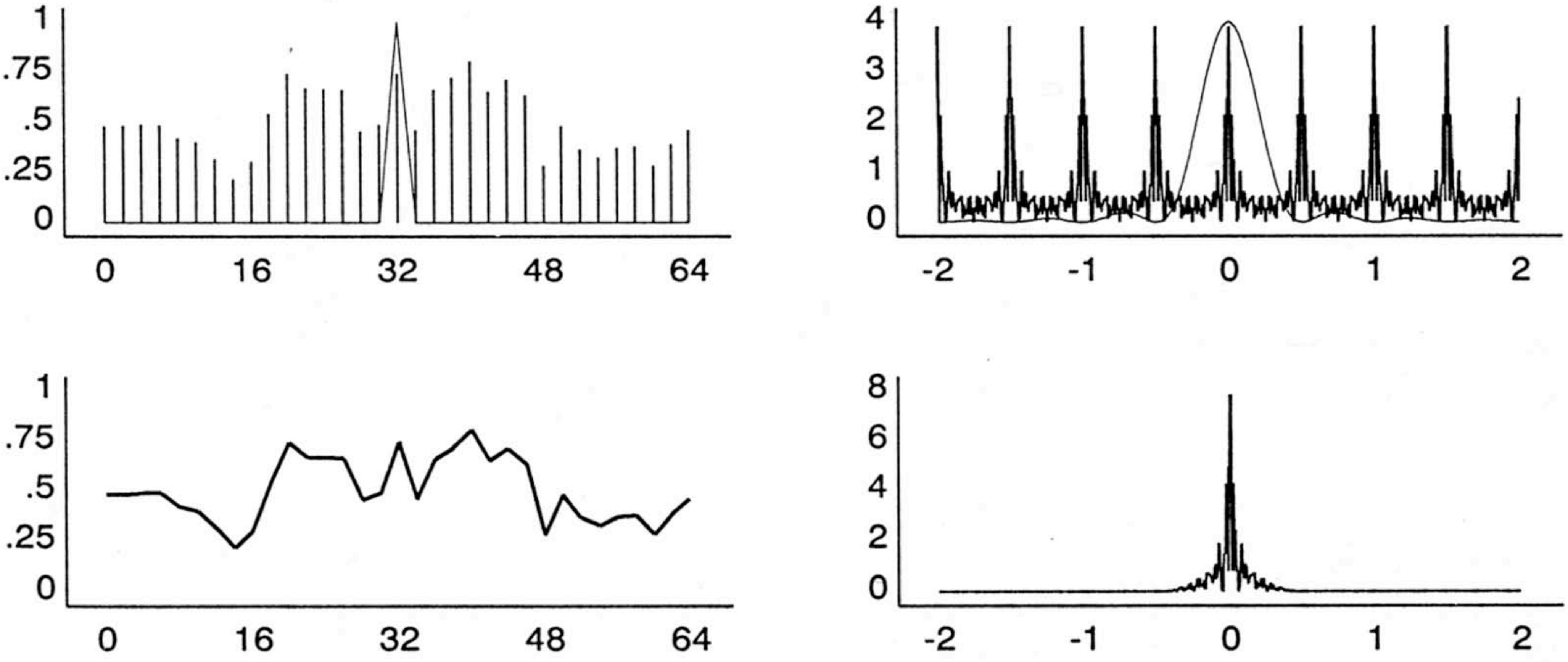
Abtastrate < w: Abtastung



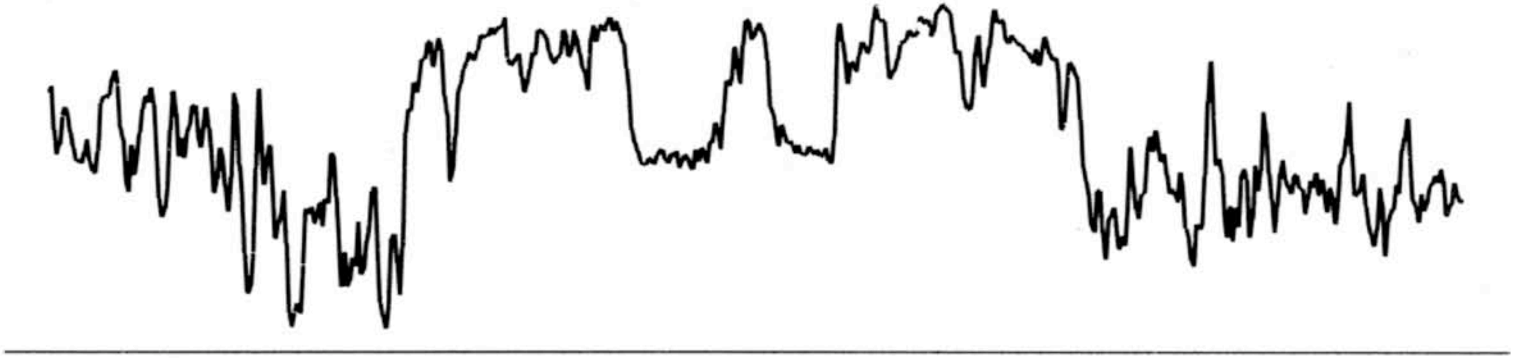
Abtastrate < w: Rekonstruktion mit Sinc

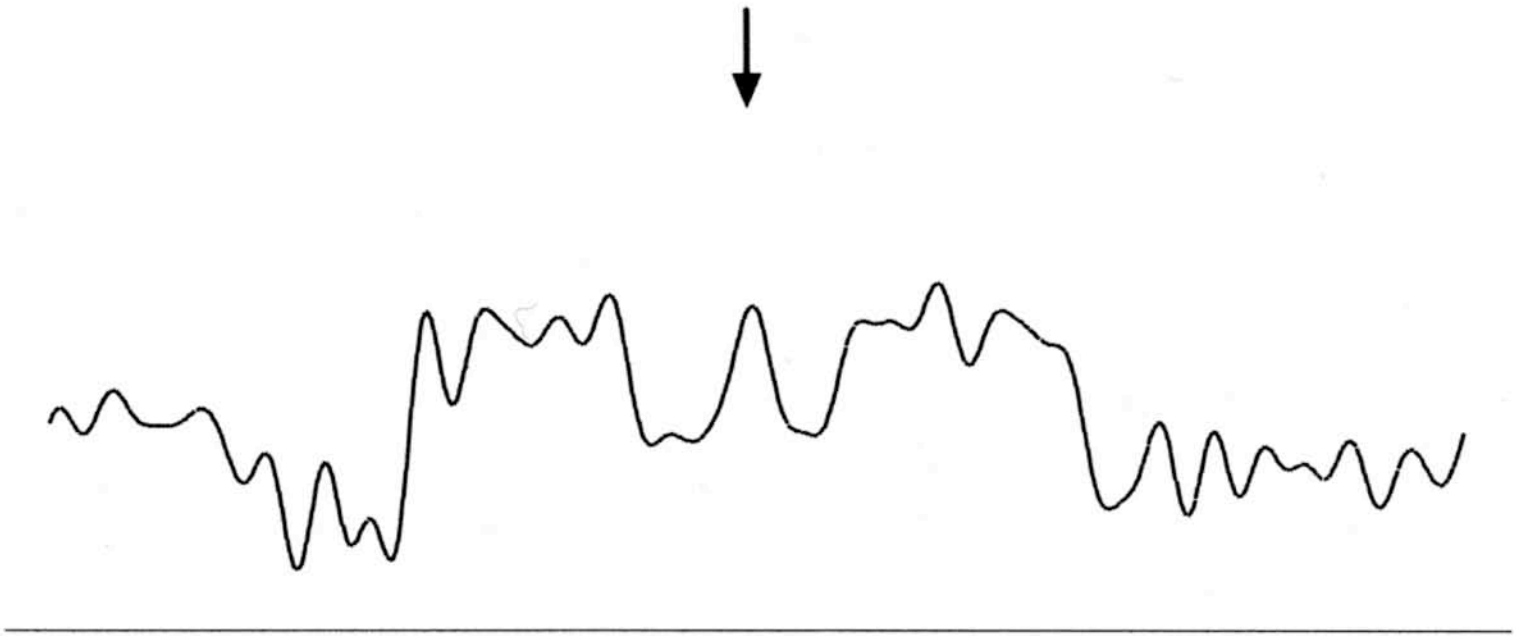


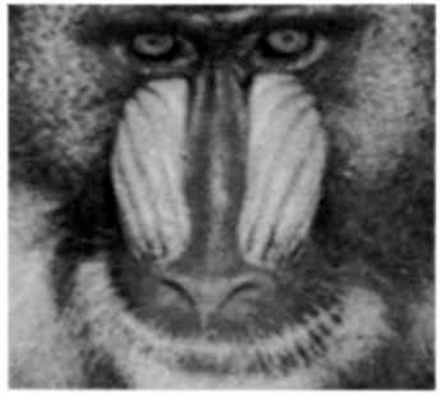
Abtastrate < w: Lineare Interpolation



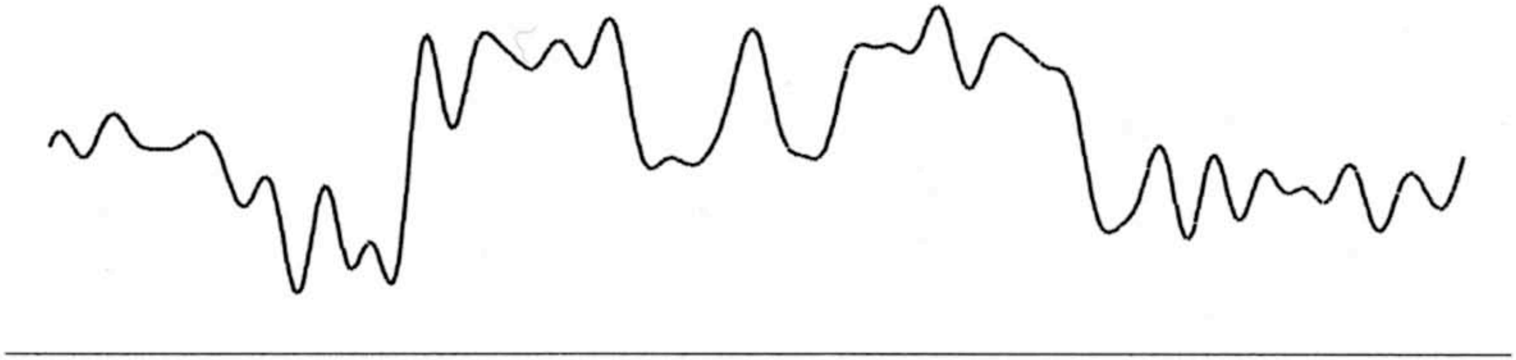
Bandbegrenzung des Signals

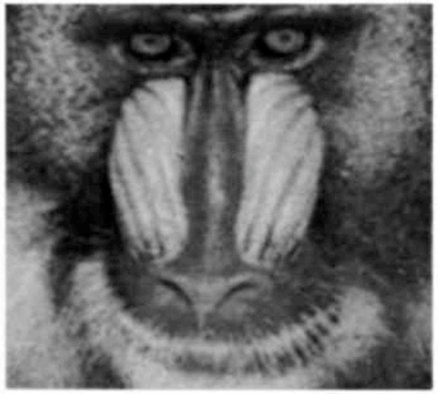


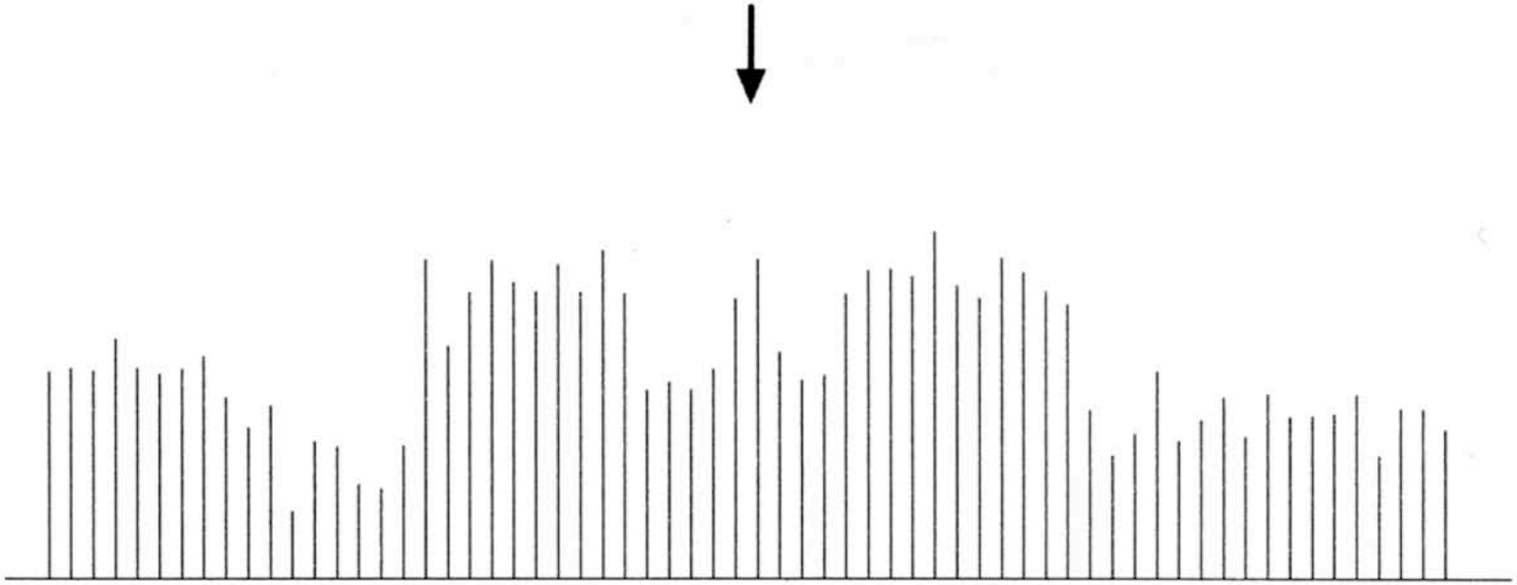


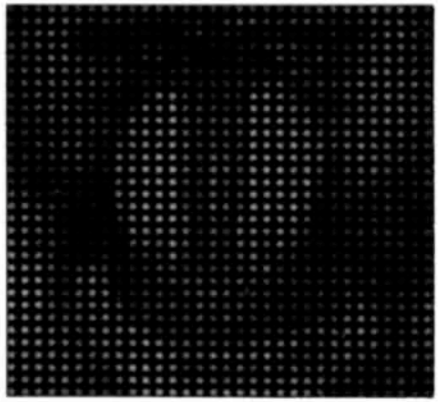


Bandbegrenzung des Signals

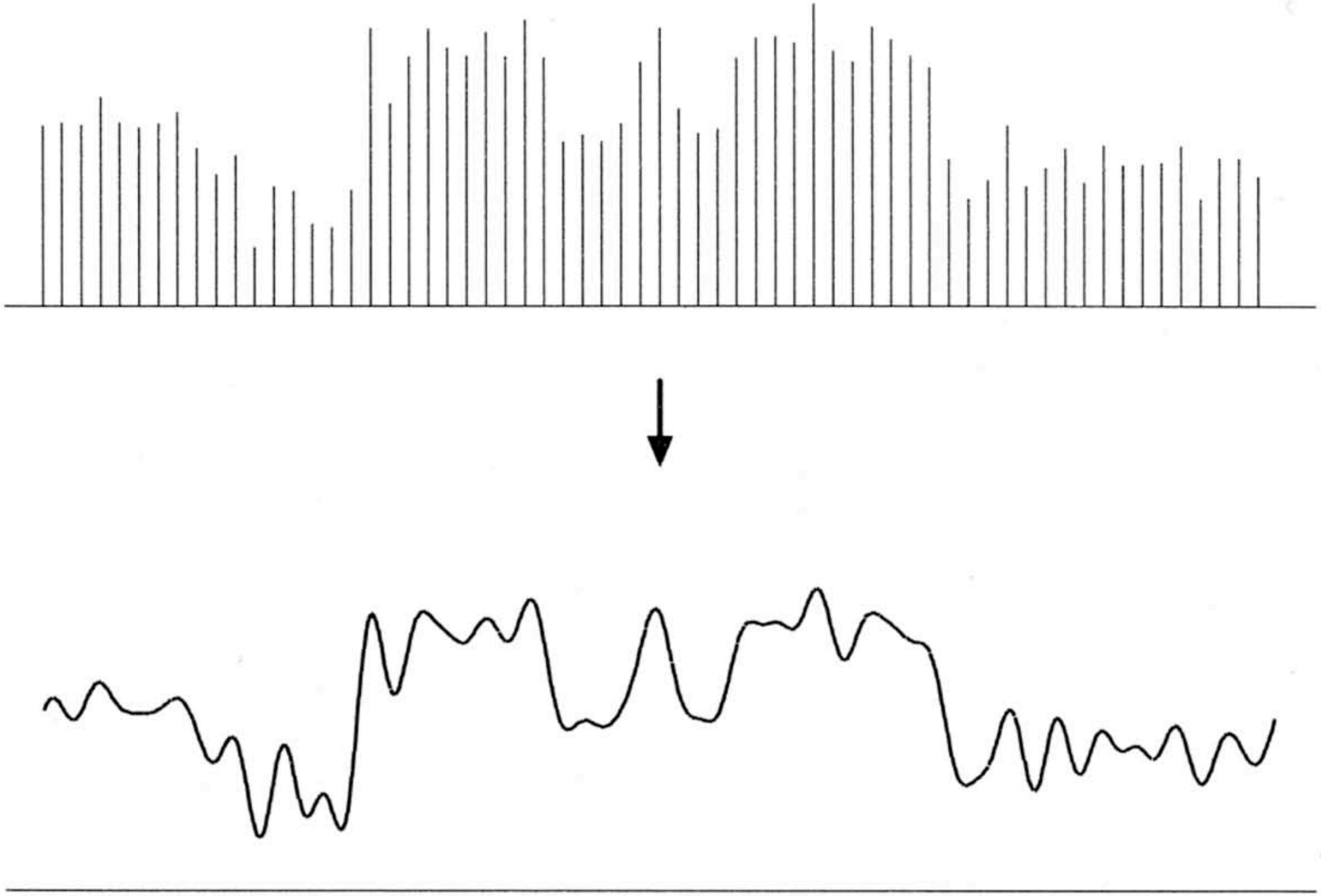


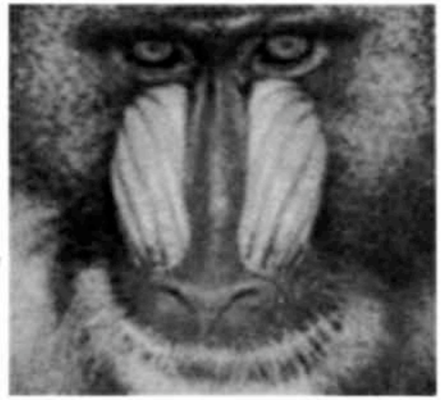




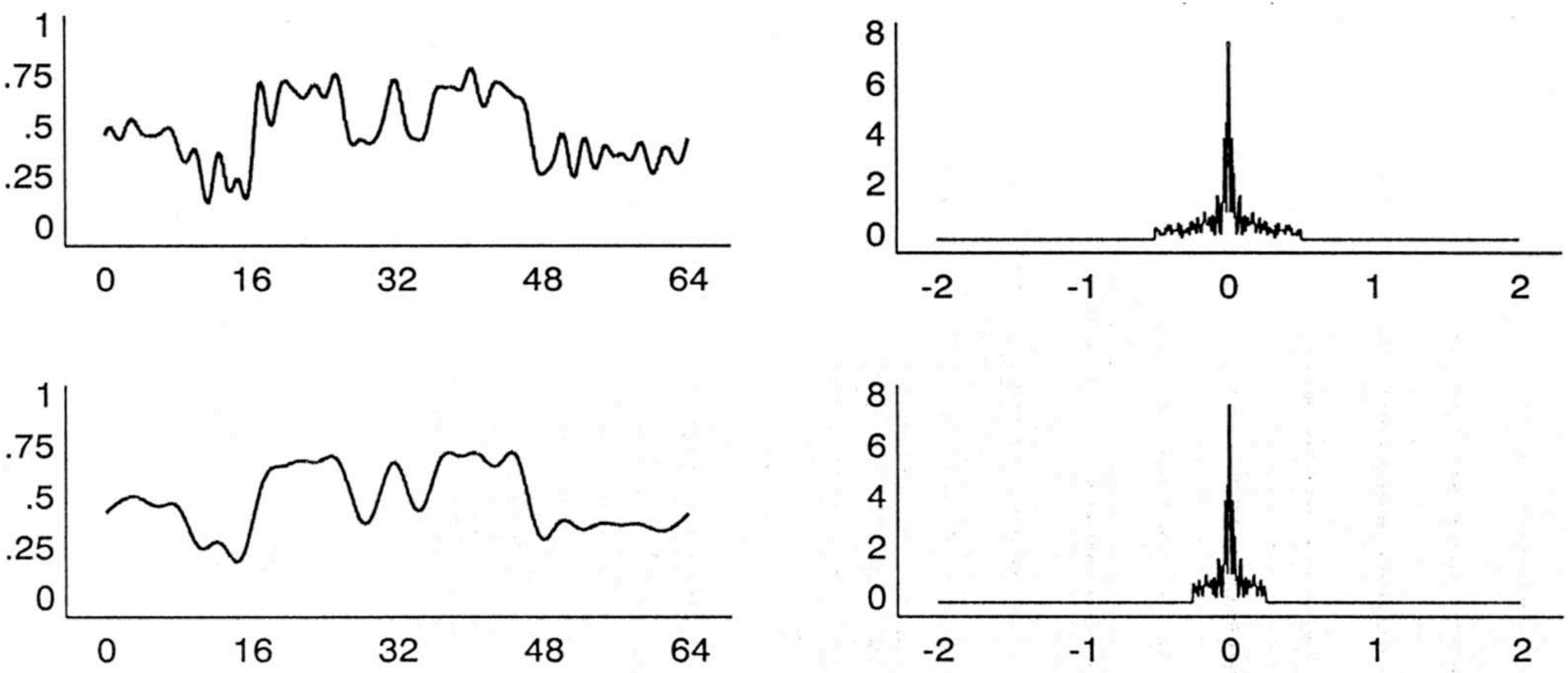


Bandbegrenzung des Signals

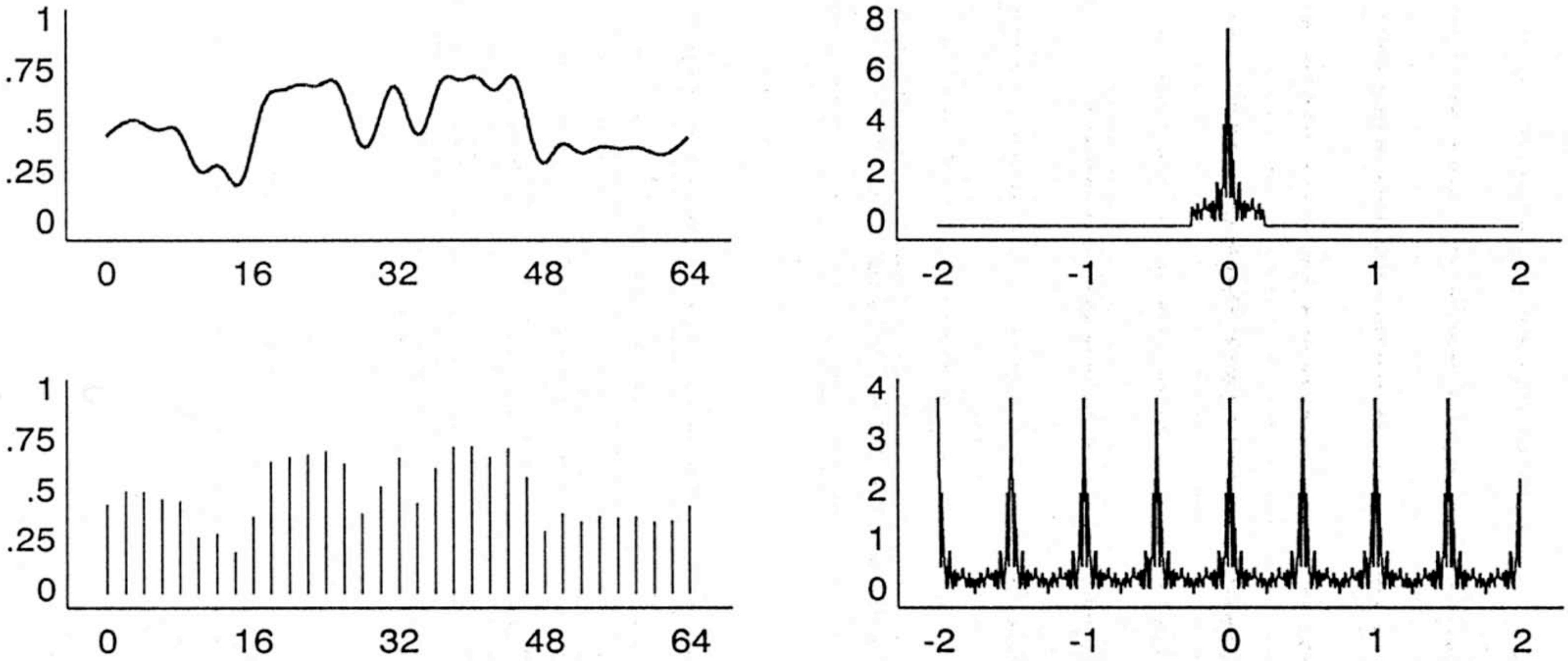




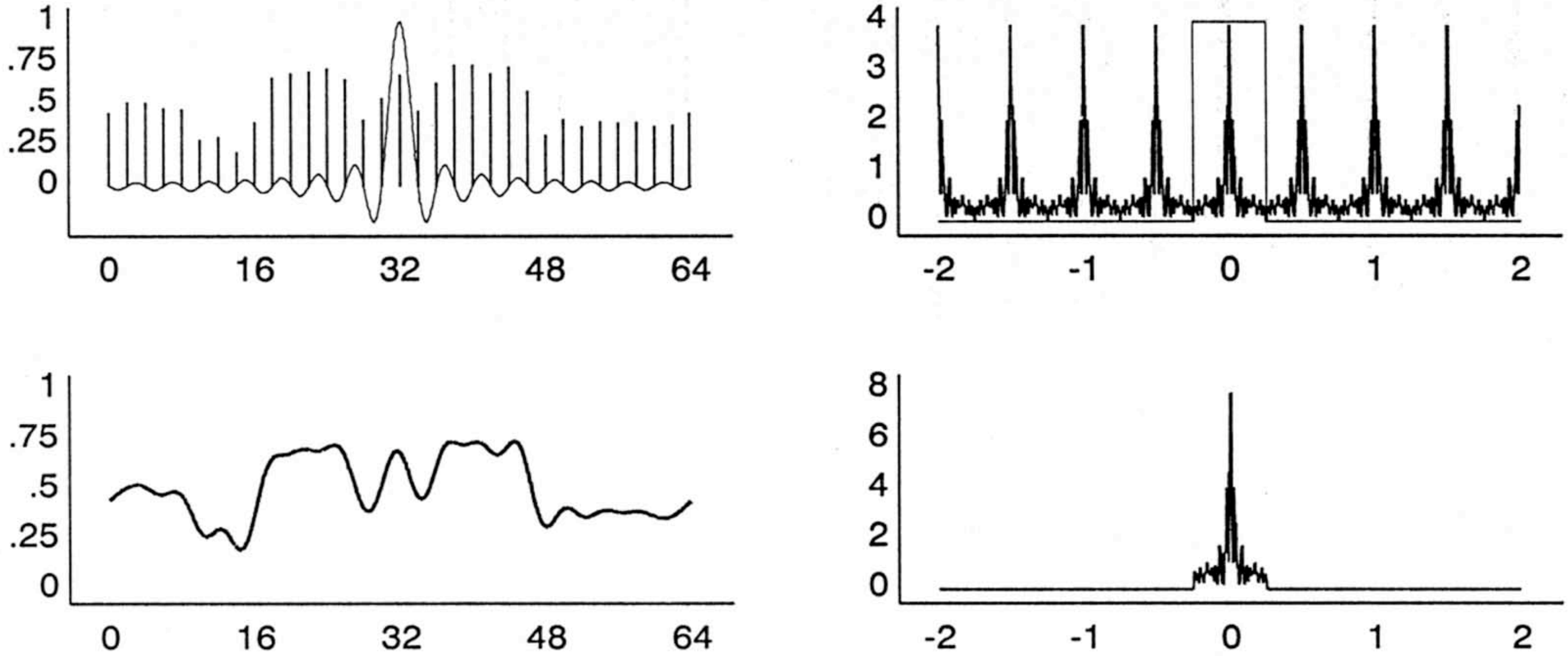
Bandbegrenzung des Signals



Abtastung nach Bandbegrenzung



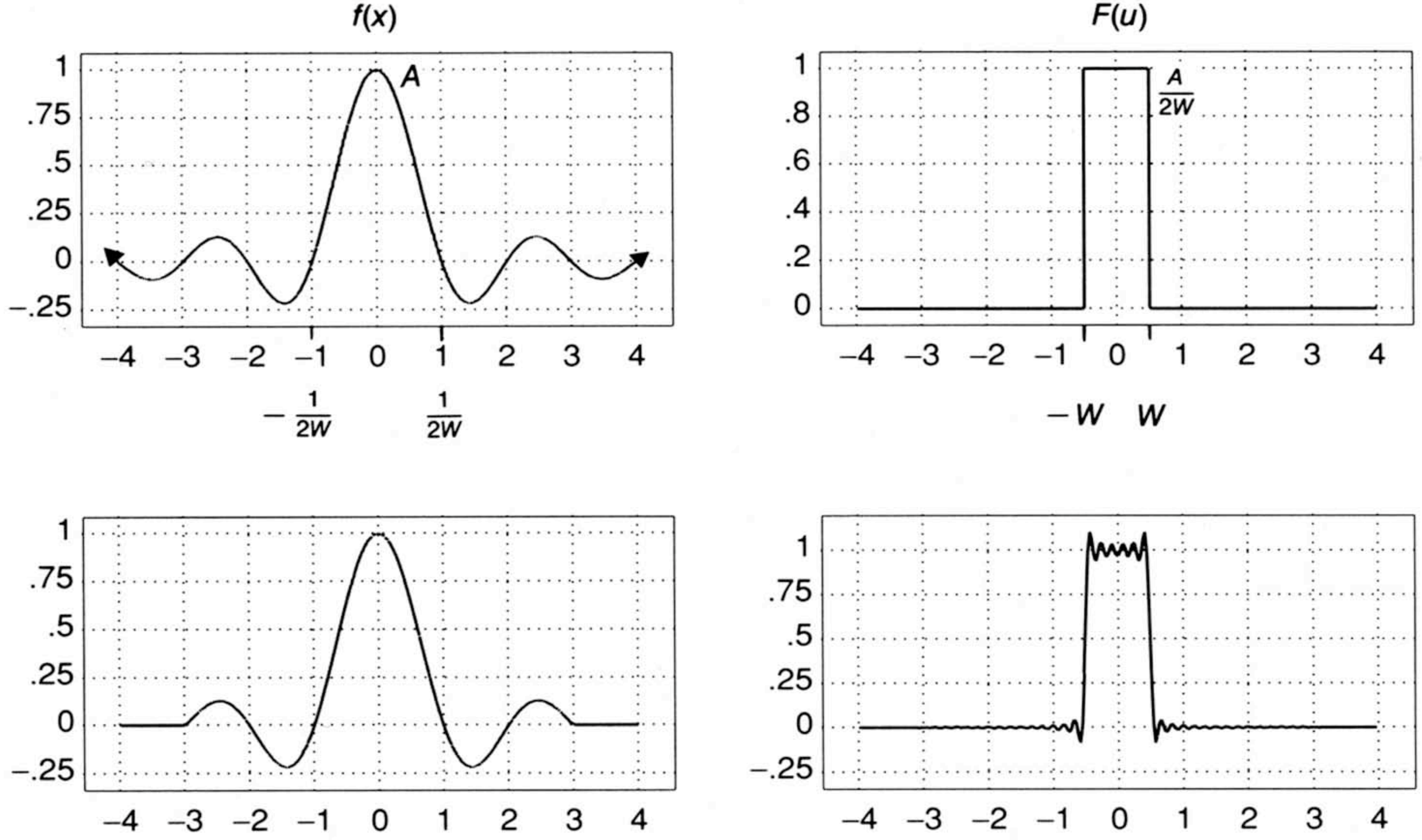
Rekonstruktion nach Bandbegrenzung



Rekonstruktion in der Praxis

- Es gibt einen idealen Rekonstruktions-Filter: Sinc(x)
- Problem: Sinc(x) ist in der Praxis nicht verwendbar, da unendlich ausgedehnt
- Aber: abgeschnittener Sinc ist oft wesentlich schlechter als Alternativen
- Verschiedene sub-optimale Filter werden je nach Anwendung benutzt

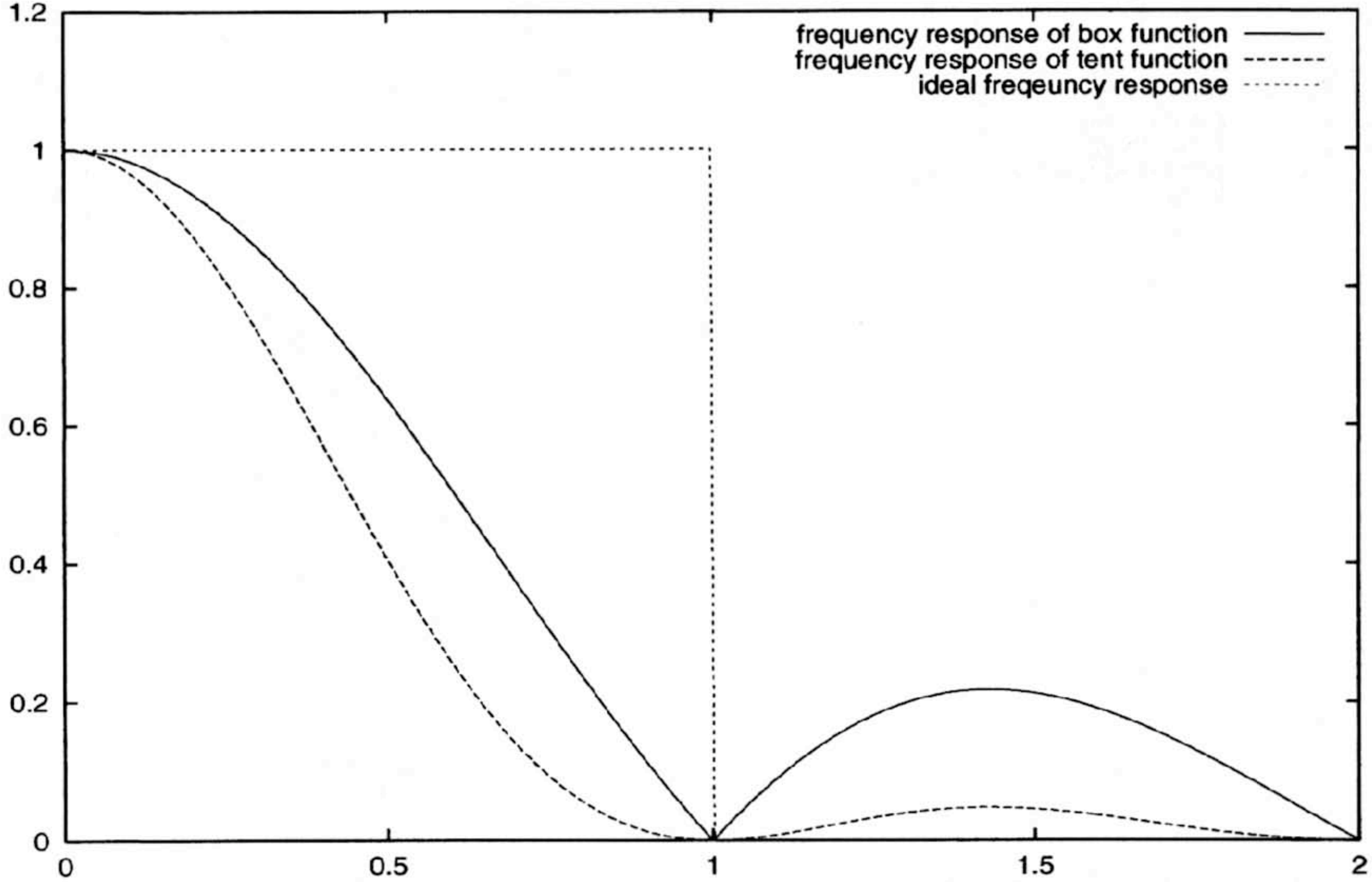
Sinc & Begrenzter Sinc



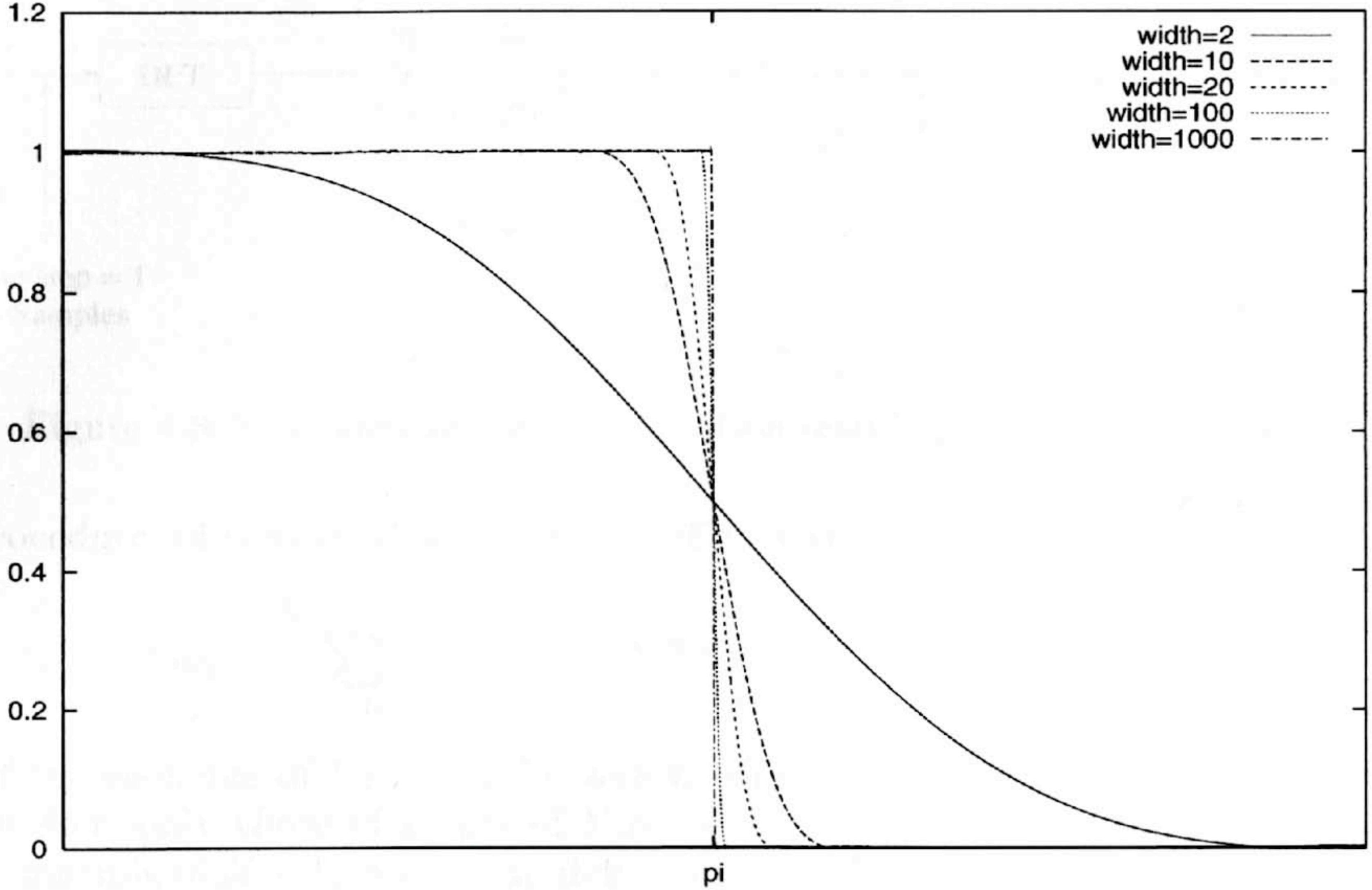
Aufgaben des Rekonstruktionsfilters

- Entfernen der unnötigen Kopien des ursprünglichen Frequenzspektrums
- Erhaltung der ursprünglichen Zusammensetzung des beibehaltenen Teils des Frequenzspektrums

Rechteck & Lineare Interpolation



Windowed Sinc

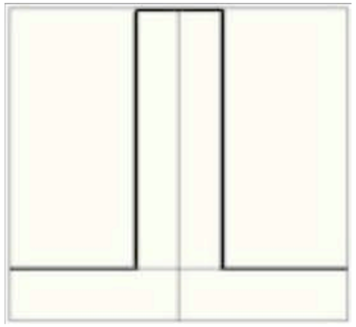


Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

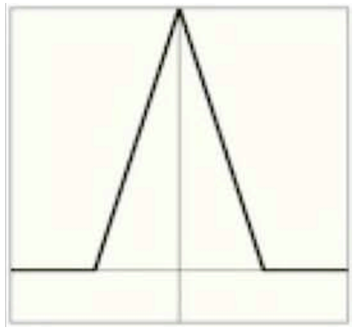


Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

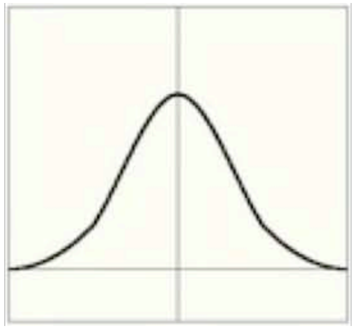


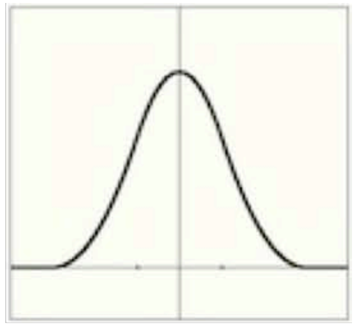
Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)



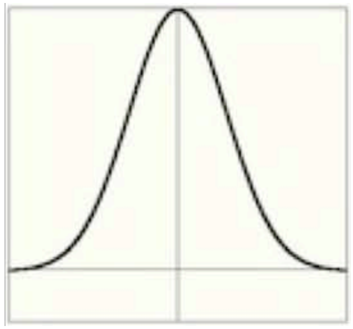


Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- **Gaussian**
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

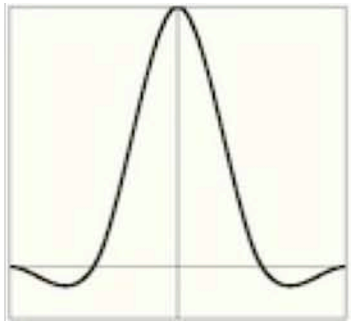


Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

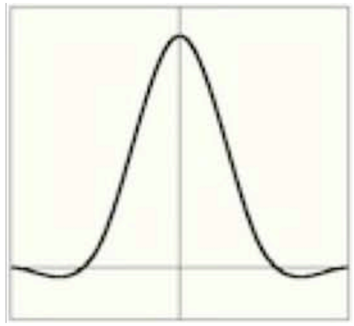


Gängige Filter in der Computergraphik

- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

Gängige Filter in der Computergraphik

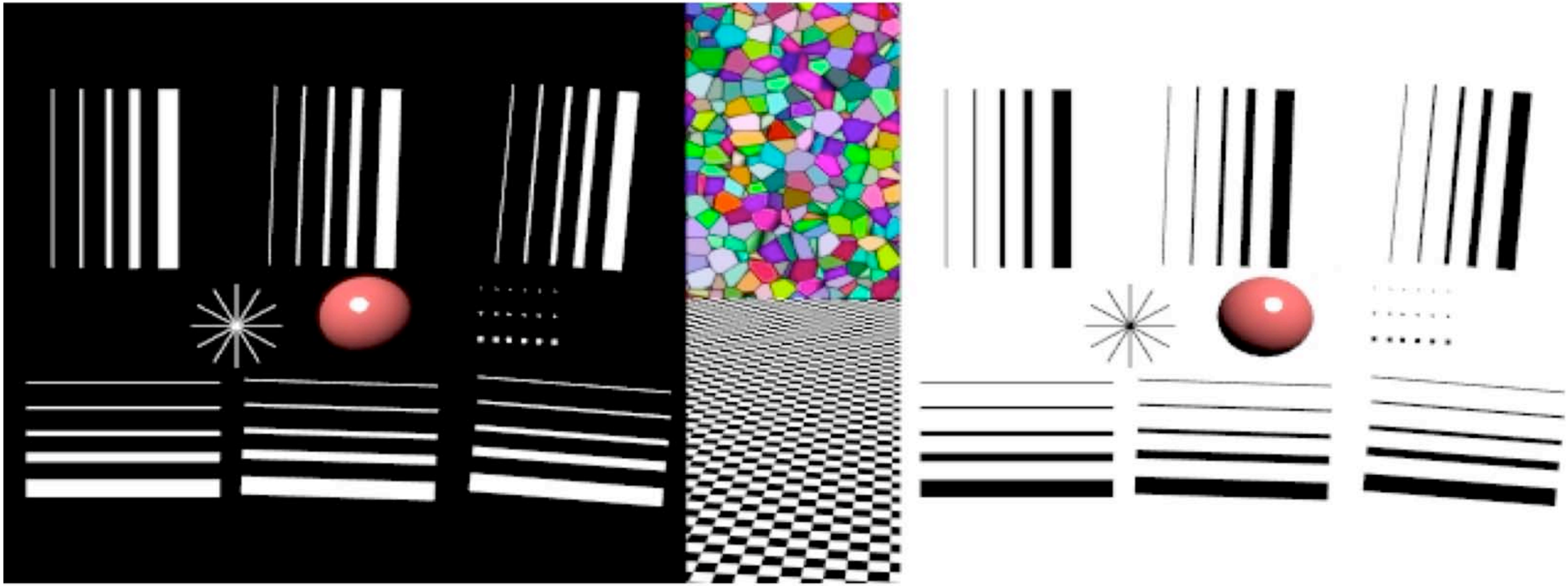
- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)



Gängige Filter in der Computergraphik

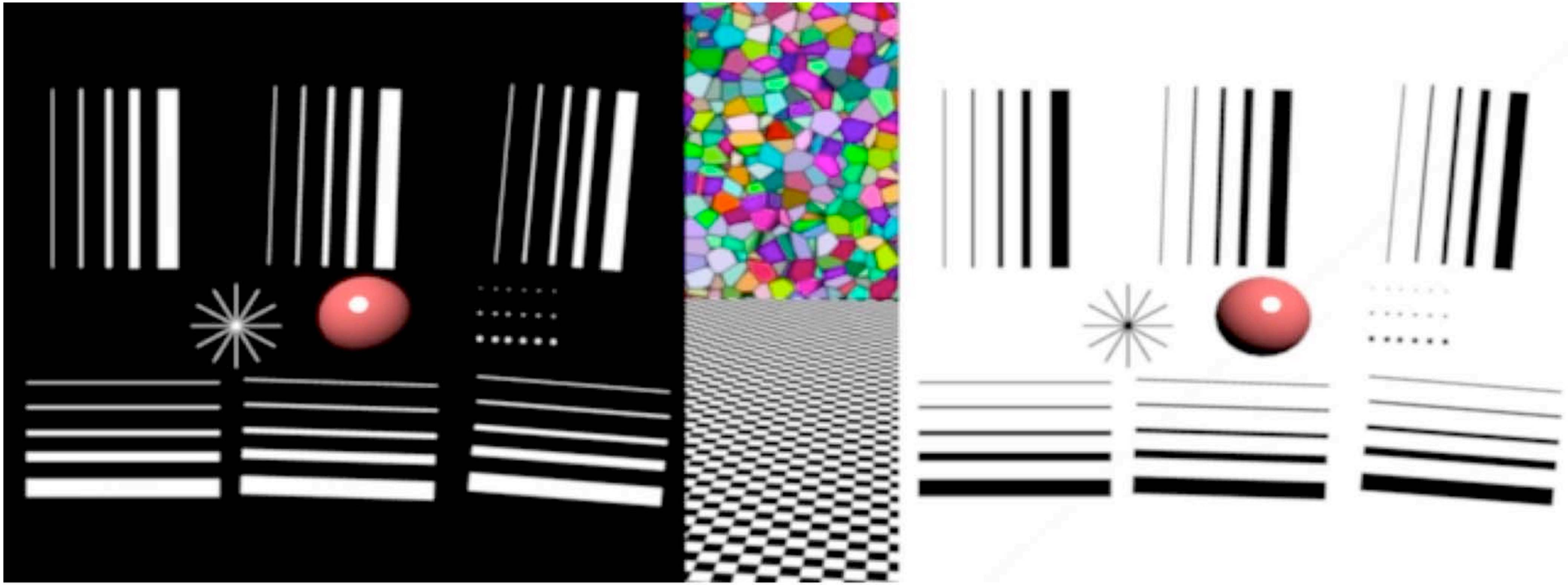
- Box (Rechteck)
- Tent (Lineare Interpolation)
- Quadratisch / Kubisch
- Gaussian
- Catmull-Rom
- Mitchell-Netravali
- (Windowed Sinc)

Beispiele (Blender)



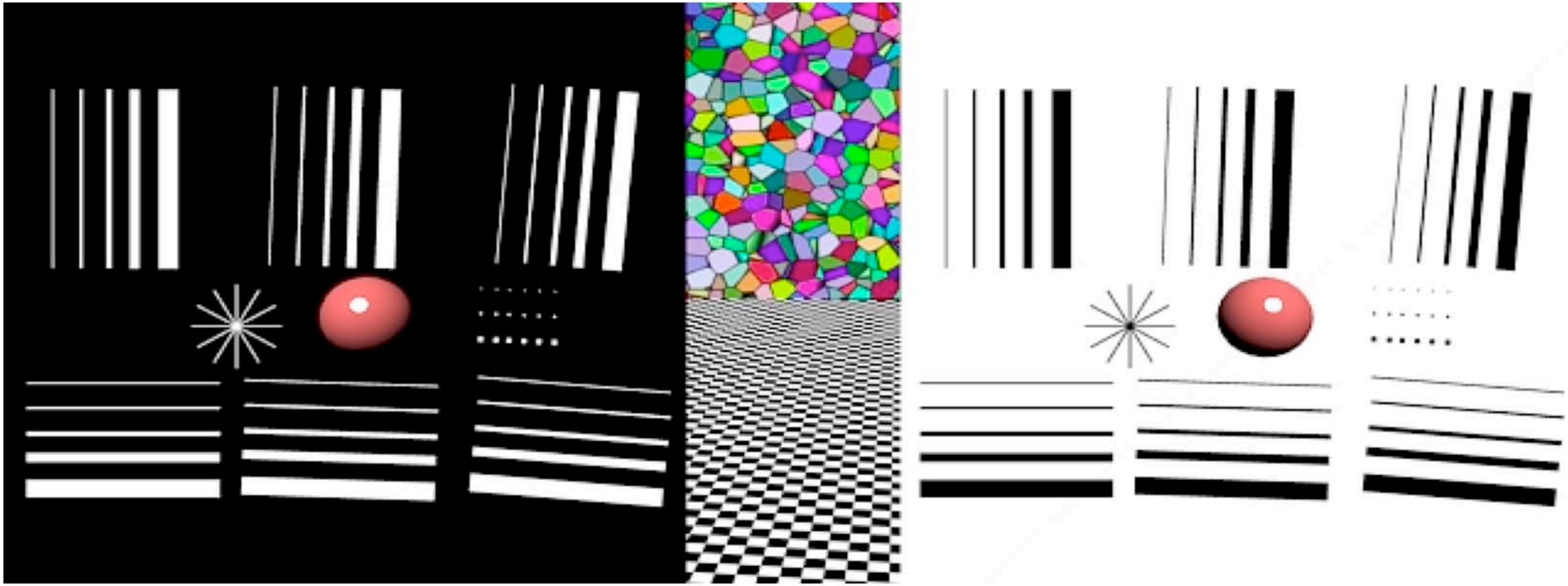
Box - Gaussian - Catmull-Rom

Beispiele (Blender)



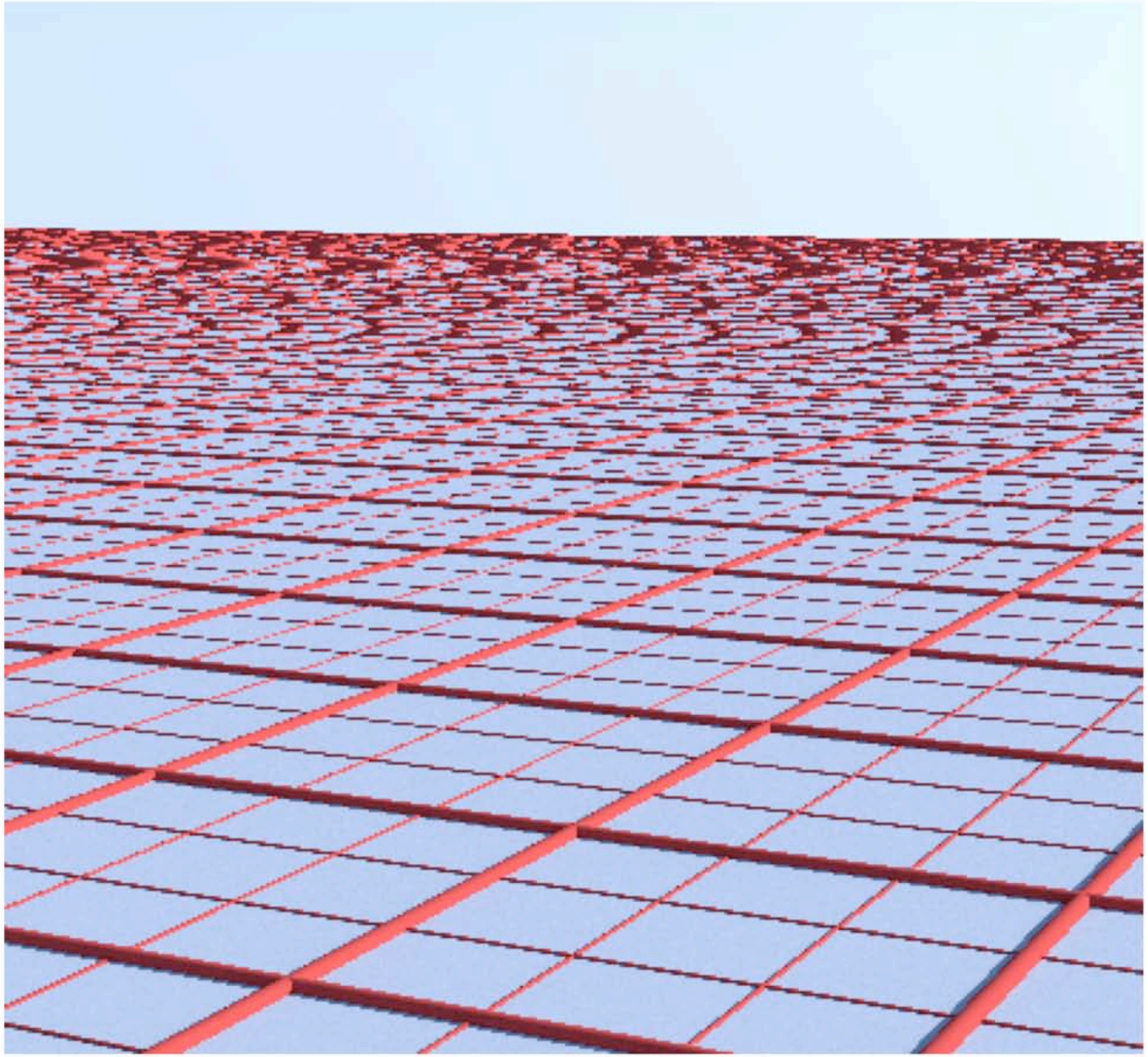
Box - Gaussian - Catmull-Rom

Beispiele (Blender)

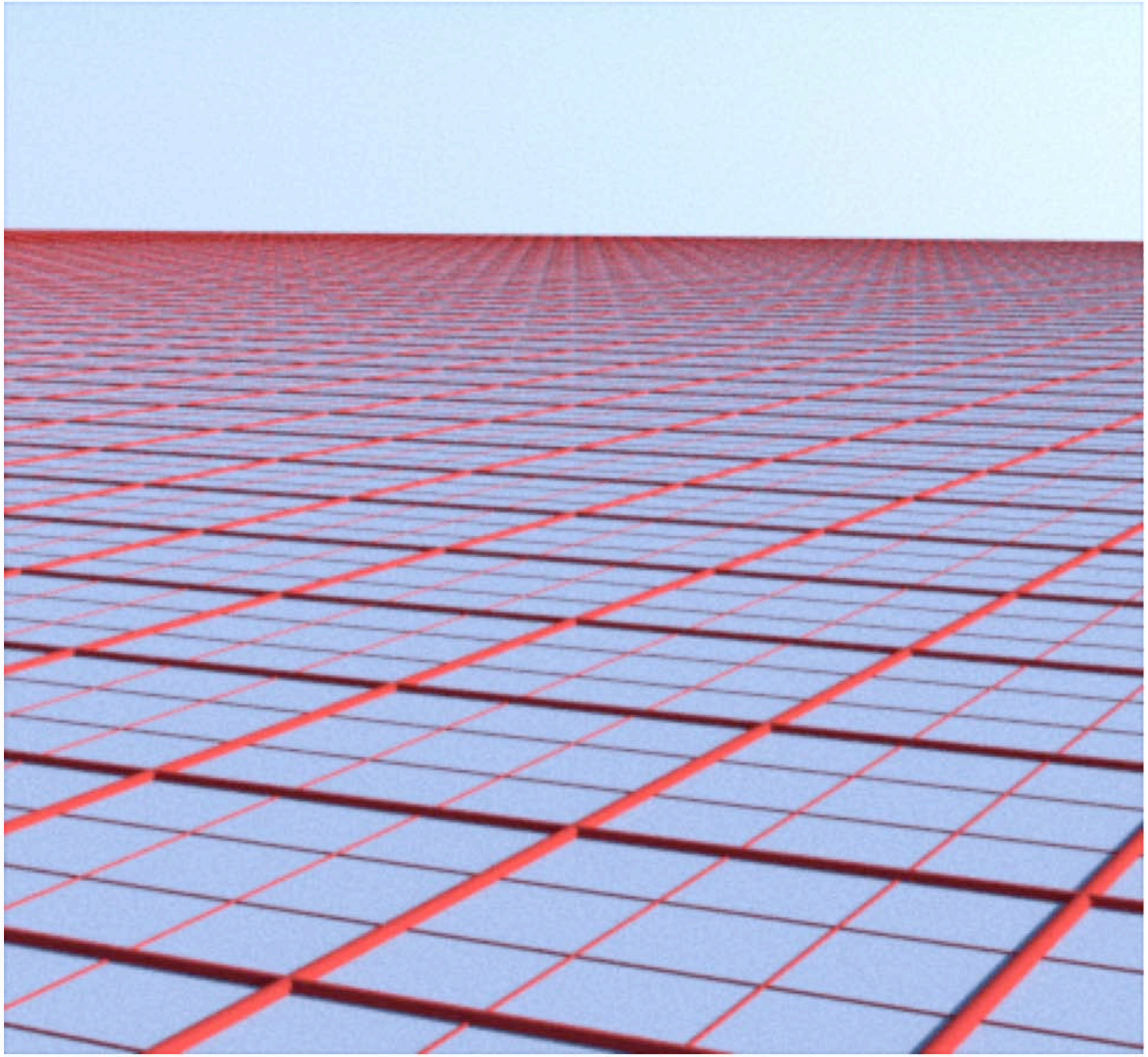


Box - Gaussian - Catmull-Rom

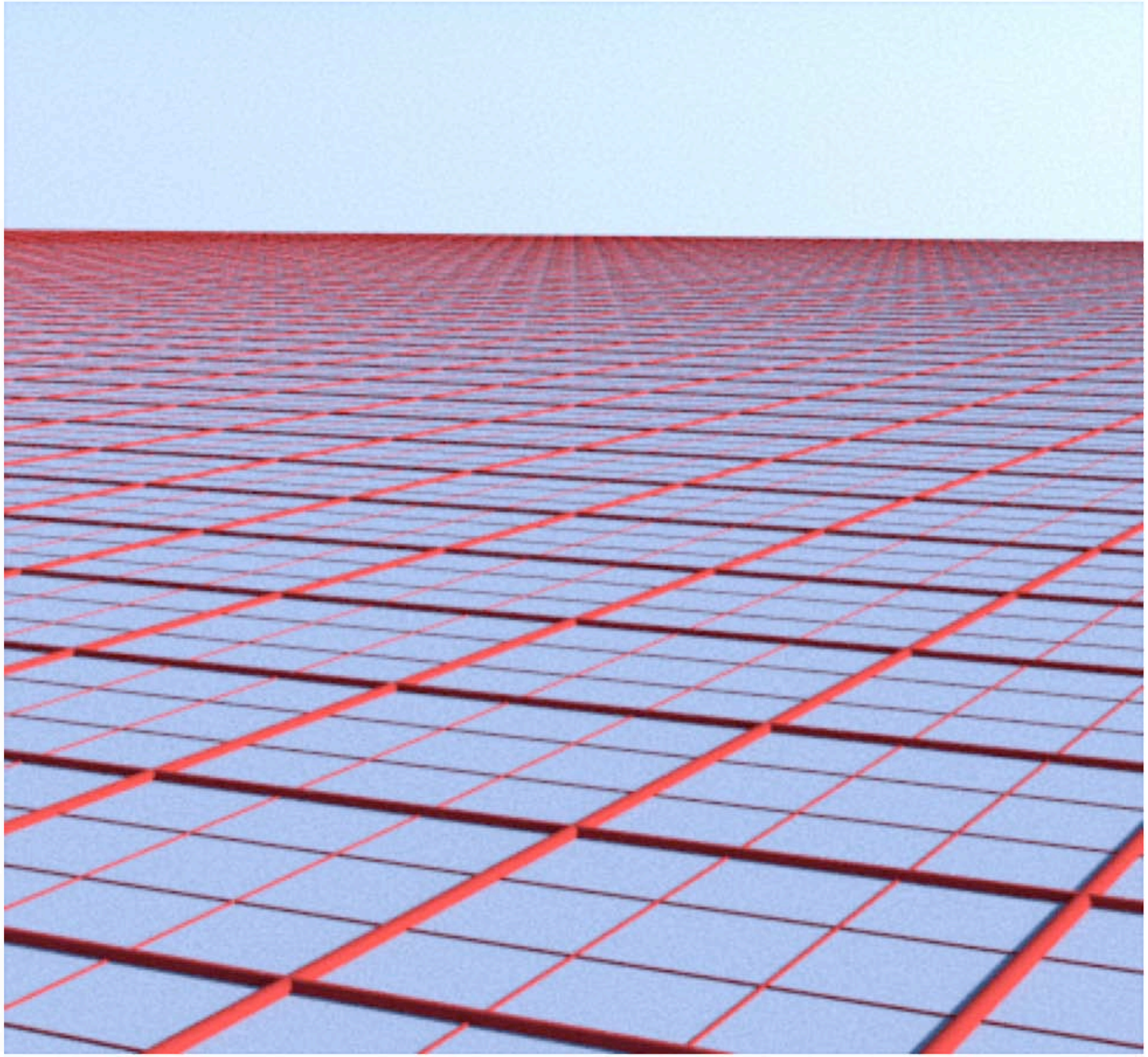
Beispiel (ART)



Beispiel (ART)



Beispiel (ART)



Fehlerquellen

- Aliasing: Überlappung der Frequenzspektren durch ungenügendes Sampling - nicht korrigierbarer Informationsverlust
- Abschneide-Fehler: durch Verwendung eines begrenzten Filters statt des unendlich ausgedehnten Sinc
- Sinc-Fehler: Fehler die durch Verwendung eines Filters mit anderer Form entstehen

Zusammenfassung

- Aliasing-Probleme in der Computergraphik haben einen gut verstandenen theoretischen Hintergrund
- Gegenmaßnahmen zu visuellen Artefakten sind im Bedarfsfall genau dosierbar
  - Erfordert aber Analyse der Situation
- In der Praxis wird dies wegen des damit verbundenen Aufwandes oft nicht getan

Sampling and Reconstruction

- Literatur:
  - Computer Graphics: Principles and Practice, 2nd Edition, Foley, vanDam, Feiner, Hughes, Addison-Wesley, 1990
  - What we need around here is more aliasing, Jim Blinn, IEEE Computer Graphics and Applications, January 1989
  - Return of the Jaggy, Jim Blinn, IEEE Computer Graphics and Applications, March 1989