

Infinitesimale Konstruktionen

Von

Peter HART, Innsbruck

Die Mathematik verwendet zur Lösung diverser Aufgaben Folgen und Reihen. Dieser Beitrag versucht in Analogie zur Mathematik bei gewissen geometrischen Problemen die Hilfe von geometrischen Konstruktionsfolgen anzubieten.

Aus den üblichen geometrischen Konstruktionsformen seien zwei hervorgehoben, weil sie hier eine besondere Rolle spielen werden.

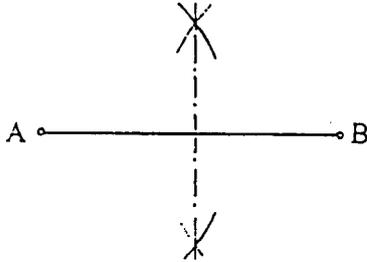


Abb.1: Streckensymmetrale

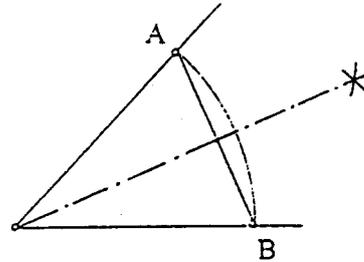


Abb.2: Winkelsymmetrale

Zu beobachten ist:

In Abb. 1 wird \overline{AB} halbiert.

In Abb. 2 wird \overline{AB} und \widehat{AB} halbiert.

Als Beispiel 1 soll eine bekannte geometrische Konstruktionsfolge für die Einheitsstrecke \overline{AB} betrachtet werden.

Abb.3 zeigt: $C_1 = \text{Mittelpunkt des Punktepaars } (A,B)$; Schreibung: $C_1 = \text{Mi}(A,B)$.

Weiters $C_2 = \text{Mi}(C_1,B)$, $C_3 = \text{Mi}(C_2,B)$, $C_4 = \text{Mi}(C_3,B)$, ...

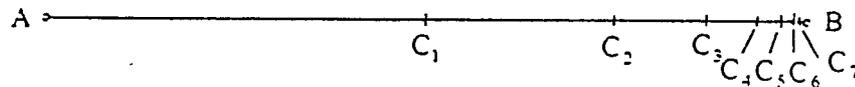


Abb. 3

Die Folge lautet von B aus gemessen: $a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

von A aus gemessen: $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Im arithmetischen Sinn ist die erste Folge eine geometrische. Die zweite Folge ist keine geometrische, aber jedes Glied ist eine geometrische Reihe die bei $n \rightarrow \infty$ in eine unendliche geometrische Reihe übergeht.

Folgendes läßt sich feststellen:

1. Arithmetisch gesehen ist jede der beiden Folgen konvergent und führt zu theoretisch exakten Werten.
2. Die Zahl der konstruierbaren Folgenglieder ist begrenzt durch die mögliche Zeichengenauigkeit.
3. Liegt das letzte konstruierbare Folgenglied innerhalb des Bereiches der möglichen Zeichengenauigkeit, dann werde das Ergebnis als praktisch exakt bezeichnet.

Als Beispiel 2 werde unter Zugrundelegung der Einheitsstrecke \overline{AB} sowie $M = \text{Mi}(A,B)$ gemäß Abb. 4 eine Punktfolge $C_i (i \in \mathbb{N})$ konstruiert nach der Vorschrift $C_1 = \text{Mi}(M,B)$, $C_2 = \text{Mi}(C_1,A)$, $C_3 = \text{Mi}(C_2,B)$, $C_4 = \text{Mi}(C_3,A)$, ... Anscheinend häufen sich dann die Punkte $C_1, C_3, C_5, C_7, \dots$ zwischen M und B.

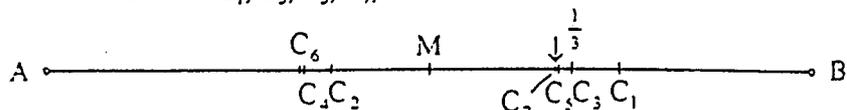


Abb.4

Es interessiert daher die Folge der Abstände $a_1 = \overline{C_1B}$, $a_2 = \overline{C_3B}$, $a_3 = \overline{C_5B}$, ..., $a_n = \overline{C_{2n-1}B}$. Für sie soll nachfolgend über vollständige Induktion die Streckenlänge a_n ermittelt werden:

Teilungspunkte C_i , $i \in \mathbb{N}$

Abstände gemessen von

 a_n , $n \in \mathbb{N}$

	A aus		B aus	
C_1	$1 - \frac{1}{4}$	←	$\frac{1}{4}$	$= a_1$
	$\downarrow \frac{1}{2}$			
C_2	$\frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$	→	$1 - \frac{3}{8}$	
			$\downarrow \frac{1}{2}$	
C_3	$1 - \frac{5}{16}$	←	$\frac{1 - \frac{3}{8}}{2} = \frac{5}{16}$	$= a_2 = \frac{1+4}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{4^i}$
	$\downarrow \frac{1}{2}$			
C_4	$\frac{1 - \frac{5}{16}}{2} = \frac{11}{32}$	→	$1 - \frac{11}{32}$	
			$\downarrow \frac{1}{2}$	
C_5	...	←	$\frac{1 - \frac{11}{32}}{2} = \frac{21}{64}$	$= a_3 = \frac{1+4+16}{64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4^i}$
\vdots	\vdots		\vdots	
\vdots	\vdots		\vdots	

Vermutung (=Induktionsannahme):

 C_{2n-1}

$$\frac{4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^{n-n}}{4^n} = a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i}$$

zu untersuchen ist, ob gilt $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{4^i}$.

$$C_{2n-1} \quad 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} \quad \leftarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} = a_n$$

$$\downarrow \frac{1}{2}$$

$$C_{2n} \quad \frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i}}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i}}{2}$$

$$\downarrow \frac{1}{2}$$

$$C_{2n+1} \quad \frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i}}{2} =: a_{n+1}$$

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 4^2} + \dots + \frac{1}{4 \cdot 4^n} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{4^i}, \text{ was obige Annahme bestätigt.}$$

Das „letzte“ Folgenglied ist eine geometrische Reihe mit $q < 1$;

$$\text{es gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Für die Folge der von

$$B \text{ aus gemessenen Strecken } a_n = \overline{C_{2n-1}B} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} \text{ ergibt sich damit das}$$

$$\text{Ergebnis } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}, \text{ d. h. } \overline{BC_\infty} = \frac{1}{3}.$$

In Abb. 4 führt damit die Konstruktion der Punkte C_1, C_3, C_5, \dots auf eine Teilung von \overline{AB} im Verhältnis 2 : 1.

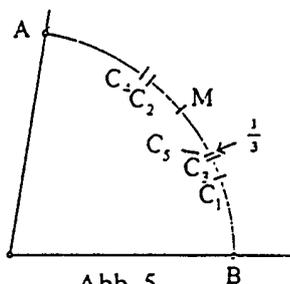


Abb. 5

Gemäß Abb.2 ist das vorgeführte, mit Halbierungskonstruktionen arbeitende Prinzip der Streckendrittung auch auf Winkel anwendbar und liefert damit eine (allerdings nicht den Erwartungen der antiken Geometer entsprechende) Lösung des klassischen Problems der Winkeldrittung. Aus heutiger Sicht stellt sich die Frage, bei welchem Konstruktionsschritt die praktische Exaktheit erreicht wird (Abb.5). Das Folgeglied a_5 hat den Wert 0,333007813. Nach 5 Folgengliedern liegt demnach das Ergebnis bereits im Bereich der möglichen Zeichengenauigkeit.

Beispiel 3: Ausgegangen werde von einem durch die Punkte D, E bereits in 3 gleiche Teile (Abb.6) geteilten Kreisbogen \widehat{AB} , also von einer Dreiteilung des zugehörigen Zentriwinkels $\angle AZB$. Ein beliebiger Innenpunkt des Bogens \widehat{AD} werde als Startpunkt C_1 für eine Punktfolge $C_i (i \in \mathbb{N})$ gewählt, für die die folgende Konstruktionsvorschrift gelte (Abb.7):

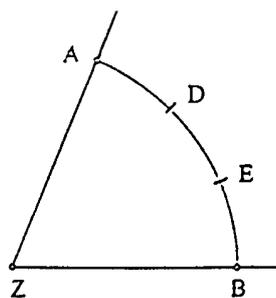


Abb.6

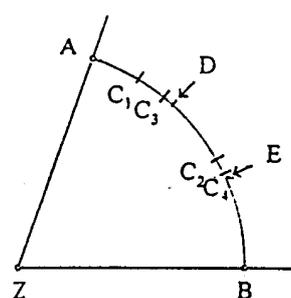


Abb.7

$C_2 = \text{Mi}(B, C_1), C_3 = \text{Mi}(A, C_2), C_4 = \text{Mi}(B, C_3), \dots$
Um arithmetisch arbeiten zu können, werde der Bogen \widehat{AB} rektifiziert, seine Bildstrecke \overline{AB} als Einheitsstrecke gewählt und der als Punktmenge aufgefaßte Bogen \widehat{AB} längentreu auf \overline{AB} abgebildet. Damit kann jedem Bogenstück die Länge seiner Bildstrecke zugeordnet werden. In diesem Sinne gilt dann $\widehat{AB} = 1, \widehat{AD} = \widehat{EB} = \frac{1}{3}, \widehat{AE} = \widehat{DB} = \frac{2}{3}$. Dabei entsteht die nachstehende Abstandsfolge

$$\widehat{C_1D}, \widehat{C_2E}, \widehat{C_3D}, \widehat{C_4E}, \dots,$$

deren Entwicklung die folgende Übersicht zeigt, wobei $d = \widehat{C_1D}$ die Abweichung des Punktes C_1 , vom $\frac{1}{3}$ -Teilungspunkt D bedeutet.

Teilungspunkte $C_i, i \in \mathbb{N}$	Abstände gemessen von		Abweichungen von D bzw. E
	A aus	B aus	
$C_1 \in AD$ beliebig, aber $C_1 \neq A, D$	$\widehat{AC}_1 = \frac{1}{3} - d$	$\rightarrow \widehat{BC}_1 = \frac{2}{3} + d$	$\widehat{C_1D} = d$
		$\downarrow \frac{1}{2}$	
$C_2 = \text{Mi}(B, C_1)$	$\widehat{AC}_2 = \frac{2}{3} - \frac{d}{2}$	$\leftarrow \widehat{BC}_2 = \frac{1}{3} + \frac{d}{2} = a_1$	$\widehat{C_2E} = \widehat{BC}_2 - \widehat{EB} = \frac{d}{2}$
	$\downarrow \frac{1}{2}$		
$C_3 = \text{Mi}(A, C_2)$	$\widehat{AC}_3 = \frac{1}{3} - \frac{d}{4}$	$\rightarrow \widehat{BC}_3 = \frac{2}{3} + \frac{d}{4}$	$\widehat{C_3D} = \widehat{AD} - \widehat{AC}_3 = \frac{d}{4}$
		$\downarrow \frac{1}{2}$	
$C_4 = \text{Mi}(B, C_3)$	$\widehat{AC}_4 = \frac{2}{3} - \frac{d}{8}$	$\leftarrow \widehat{BC}_4 = \frac{1}{3} + \frac{d}{8} = a_2$	$\widehat{C_4E} = \widehat{BC}_4 - \widehat{EB} = \frac{d}{8}$
	$\downarrow \frac{1}{2}$		

$$\begin{array}{l}
 C_5 = \text{Mi}(A, C_4) \quad \widehat{AC}_5 = \frac{1}{3} - \frac{d}{16} \quad \downarrow \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \widehat{BC}_5 = \frac{2}{3} + \frac{d}{16} \quad C_5D = \widehat{AD} - \widehat{AC}_5 = \frac{d}{16} \\
 C_6 = \text{Mi}(B, C_5) \quad \dots \dots \dots \quad \leftarrow \quad \widehat{BC}_6 = \frac{1}{3} + \frac{d}{32} = a_3 \quad C_6E = \widehat{BC}_6 - \widehat{EB} = \frac{d}{32} \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \text{Induktionsannahme:} \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 C_{2n} = \text{Mi}(B, C_{2n-1}) \quad \widehat{BC}_{2n} = \frac{1}{3} + \frac{d}{2^{2n-1}} = a_n \quad C_{2n}E = \frac{d}{2^{2n-1}}
 \end{array}$$

Die Vermutung, daß gilt $a_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{d}{2^{2n+1}}$, bestätigen folgende Zeilen:

$$\begin{array}{l}
 C_{2n} = \text{Mi}(B, C_{2n-1}) \quad \widehat{AC}_{2n} = \frac{2}{3} - \frac{d}{2^{2n-1}} \quad \leftarrow \quad \widehat{BC}_{2n} = \frac{1}{3} + \frac{d}{2^{2n-1}} = a_n \quad C_{2n}E = \frac{d}{2^{2n-1}} \\
 \downarrow \frac{1}{2} \\
 C_{2n+1} = \text{Mi}(A, C_{2n}) \quad \widehat{AC}_{2n+1} = \frac{1}{3} - \frac{d}{2 \cdot 2^{2n-1}} \quad \rightarrow \quad \widehat{BC}_{2n+1} = \frac{2}{3} + \frac{d}{2 \cdot 2^{2n-1}} \quad C_{2n+1}D = \widehat{AD} - \widehat{AC}_{2n+1} = \frac{d}{2^n} \\
 \downarrow \frac{1}{2} \\
 C_{2n+2} = \text{Mi}(A, C_{2n+1}) \quad \widehat{BC}_{2n+2} = \frac{1}{3} + \frac{d}{2^2 \cdot 2^{2n-1}} = a_{n+1} \quad C_{2n+2}E = \widehat{BC}_{2n+2} - \widehat{EB} = \frac{d}{2^{2n+1}}
 \end{array}$$

Demnach $a_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{d}{2^2 \cdot 2^{2n-1}} = \frac{1}{3} + \frac{d}{2^{2n+1}}$, was obiger Vermutung entspricht.

Damit gelangt man zum Ergebnis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim \left(\frac{1}{3} + \frac{d}{2^{2n-1}} \right) = \frac{1}{3}$.

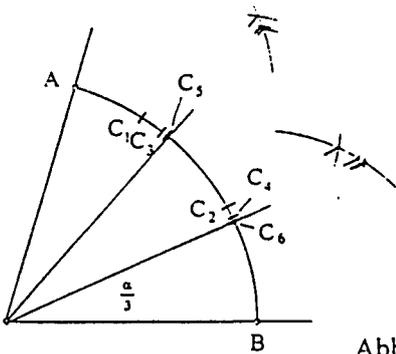


Abb.8

Wie die Herleitung zeigt, streben die Abweichungen der Punkte C_i von den Drittelungspunkten D, E gegen null. Der wesentliche Unterschied gegenüber Beispiel 2 liegt darin, daß man statt des Startpunktes $M = \text{Mi}(A, B)$ bereits mit einem in der Nähe des Drittelungspunktes D gelegenen Startpunkt C_1 beginnen und so die Anzahl der für die erforderliche Genauigkeit erforderlichen Konstruktionschritte (Abb.8) beeinflussen kann.

Wie die folgenden Beispiele zeigen sollen, ist die auf Grenzübergänge ausgerichtete Konstruktionsmethode keineswegs auf reine Teilungsaufgaben beschränkt.

Beispiel 4

Abb.9 zeigt 3 auf konzentrischen Kreisen mit den Radien $r_1, r_2 = 2r_1, r_3 = 4r_1$ liegende Kreisbögen b_1, b_2, b_3 . Da ihre zugehörigen Zentriwinkel der Reihe nach mit $\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}$ gewählt wurden, haben sie alle dieselbe Bogenlänge, d.h. es ist $b_1 = b_2 = b_3$. Mit zunehmendem Radius nimmt die Krümmung der Kreisbögen ab. Wünschenswert wäre eine gegen null konvergierende Krümmung, da diese auf die Bogenrektifikation führen würde.

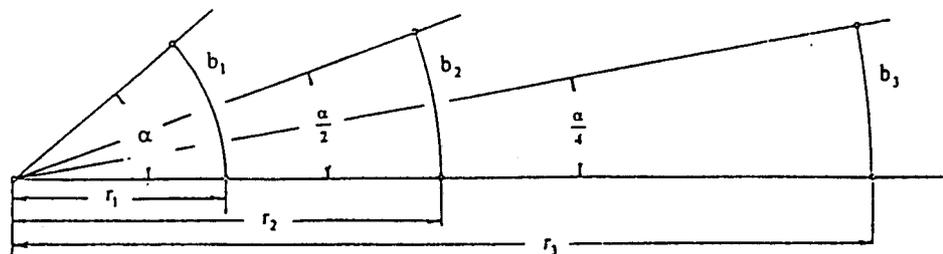


Abb.9

Da das dabei eintretende Divergieren von r in der Konstruktionsfolge der Abb. 9 nicht bewältigt werden kann, muß diese nachfolgend umgeformt werden.

Ausgegangen werde (Abb. 10) vom Bogenstück $b_1 = \widehat{AC}_1$ eines Kreises k_1 (Mittelpunkt B_1 , Radius r_1) mit Zentriwinkel $\alpha = \sphericalangle AB_1C_1 \leq 180^\circ$ und Sehne $s_1 = \overline{AC}_1$. Führt man die Winkelhalbierende w_1 von α (= Streckensymmetrale von \overline{AC}_1) ein, dann gilt

- a) der Bogen b_1 liegt zwischen s_1 und n ,
- b) $\sphericalangle s_1 n = \frac{\alpha}{2}$ wegen $s_1 \perp w_1$ und $n \perp AB_1$ (Normalwinkel).

Ziel des nächsten Schrittes ist es, bei gleichbleibender Bogenlänge die Bogenkrümmung zu reduzieren. Abweichend von Abb.9 werde nun in Abb.11 der Bogenendpunkt A samt Bogentangente n festgehalten und von k_1 zu einem Kreis k_2 (Mittelpunkt B_2 , Radius $r_2 = 2r_1$) übergegangen. Wegen des Außenwinkels α des gleichschenkligen Dreiecks $C_1B_2B_1$ gilt

$\sphericalangle AB_2C_1 = \frac{\alpha}{2}$, also $B_2C_1 \parallel w_1$ und $B_2C_1 \perp s_1$. Führt man die Winkelhalbierende s_2 von $\sphericalangle s_1 n = \frac{\alpha}{2}$ ein und schneidet sie mit B_2C_1 in einem Punkte C_2 , dann liest man aus dem Dreieck AC_1C_2 ab, daß

$$\sphericalangle C_1C_2A = 90^\circ - \frac{\alpha}{4} \text{ ist.}$$

Aus diesem Winkel und $\sphericalangle B_2AC_2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{4}$ folgt, daß das Dreieck C_2AB_2 gleichschenkelig, also $\overline{B_2A} = \overline{B_2C_2}$ ist. C_2 liegt daher auf dem Kreis k_2 . Da beim Übergang vom Bogen b_1 zum Bogen $b_2 = \widehat{AC}_2$ der Kreisradius verdoppelt, der Zentriwinkel aber halbiert wurde, besitzen b_1 und b_2 dieselbe Bogenlänge b . Wesentlich für den Übergang von b_1 zu b_2 ist, daß die Ermittlung des Punktes C_2 ohne Verwendung des Kreismittelpunktes B_2 gelingt. Man hat nämlich nur die im Punkt C_1 errichtete Normale zu AC_1 mit der Winkelhalbierenden s_2 von $\sphericalangle s_1 n$ zu schneiden, um C_2 zu gewinnen (Abb.12).

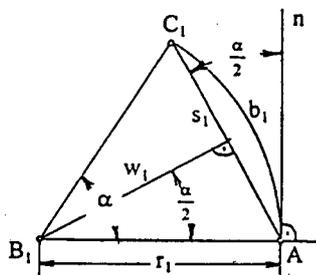


Abb.10

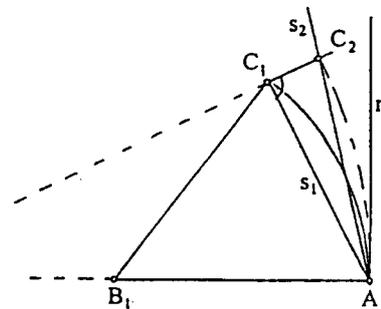


Abb.12

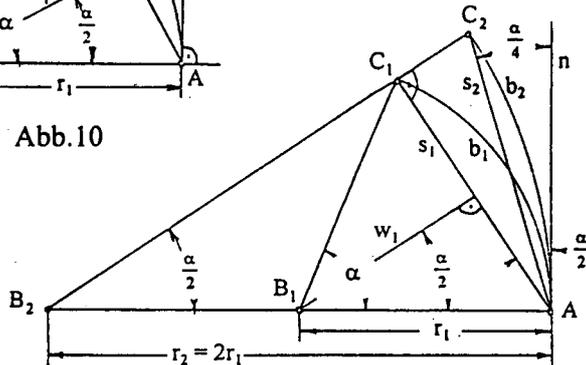


Abb.11

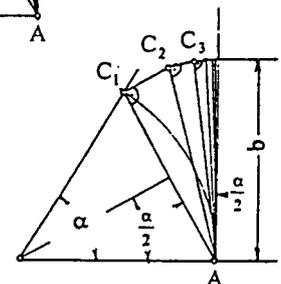


Abb.13

Der Bogen b_2 - dessen Entstehung auch durch ein Abrollen von k_1 mit b_1 auf k_2 erklärt werden könnte - wird dabei nicht benötigt. In analoger Weise läßt sich in der Konstruktionsfolge der nächste Punkt C_3 (Abb.13) als Schnittpunkt der in C_2 errichteten Normalen zu s_2 mit der Winkelhalbierenden von s_2 und n konstruieren. Es ergibt sich damit ein Verfahren, mit dem sich sehr einfach weitere Glieder der Konstruktionsfolge ermitteln lassen.

Für $n \rightarrow \infty$ streben in der Konstruktionsfolge

- 1) die Kreisradien r_n gegen ∞ ,
- 2) die Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2^n}$ gegen 0,

3) die Krümmungen der Kreisbögen \widehat{AC}_n gegen 0,

und damit 4) die Bögen b_n gegen ihre Rektifikation b . Aus 4) folgt

- 5), daß auch die Sehnenlängen s_n gegen b konvergieren.

Wie Abb.13 zeigt, läßt sich die theoretisch als $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ festgelegte Bogenlänge b der Kreisbögen b_n bereits nach wenigen Konstruktionsschritten mit praktisch ausreichender Genauigkeit gewinnen. Mit einem derartigen Abbruch der Konstruktionsfolge wird diese zu einem Näherungsverfahren für die Rektifikation von Kreisbögen, das als Gegenstück zu der seit Jahrhunderten gebräuchlichen graphischen Bogenrektifikation gesehen werden kann, die von manchen Autoren als Konstruktion von W. SNELLIUS (1621) bezeichnet, von anderen aber N. CUSANUS (1450) zugeschrieben wird.

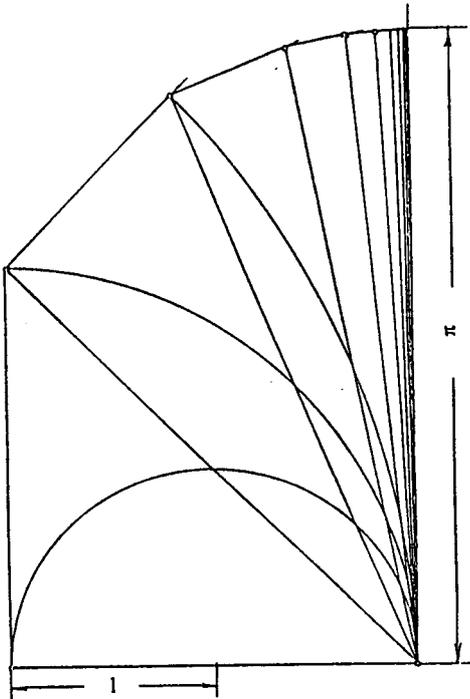


Abb.14

Als Anwendungsbeispiel zeigt Abb.14 die näherungsweise Rektifikation eines Einheitshalbkreises, bzw. mit anderen Worten, eine graphische Darstellung von π bei gegebener Einheitsstrecke.

Abb. 14 vermittelt den Eindruck, daß sich nach etwa 8 Konstruktionsschritten keine über die Zeichengenauigkeit hinausgehenden Änderungen des Resultats mehr erreichen lassen. Dies bestätigt auch die rechnerische Ermittlung der zu den

Sehnen	gehörigen Sehnenlängen
s_1	2,0000 ,
s_2	2,8284 ,
s_3	3,0614 ,
s_4	3,1214 ,
s_5	3,1365 ,
s_6	3,1403 ,
s_7	3,1412 ,
s_8	3,1415 ,
s_9	3,1415 .

In der Praxis spielt natürlich bei der Konstruktionsgenauigkeit die Maßstabswahl - mit anderen Worten, die Größe des gewählten Halbkreises - eine wesentliche Rolle. Für einen mit 100 mm gewählten Kreisradius würde sich s_8 mit 314,15 mm ergeben. Bei einer mit $\pm 0,1$ mm zu veranschlagenden Zeichengenauigkeit wäre es also tatsächlich nicht mehr sinnvoll, die Konstruktionsfolge fortzusetzen. Gleiches gilt sogar noch für $r = 1000$ mm, also für eine Konstruktionsgröße, die praktisch nicht mehr anzutreffen ist.