

Polyominos

Von Packungen in der Ebene zum SOMA-Würfel

Vorstellung der Diplomarbeit
ausgeführt am Institut für Geometrie an der TU Wien



Abbildung 1: **Water of life**, Guenter Albrecht-Buehler

Mag. Tanja Haider

21.Fortbildungstagung des ADG in Strobl, 8.November 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Polyominos – Spezielle diskrete Packungen	3
3	Bestimmung aller möglicher Polyominos aus n kongruenten Quadraten mit $n = 1, 2, \dots$	5
4	Packungen mit Polyominos	8
1	Beispiele für Packungen mit Dominos	8
2	Beispiele für Packungen mit Trominos	10
3	Beispiele für Packungen mit Tetrominos	12
4	Beispiele für Packungen mit Pentominos	13
5	Beispiele für Packungen mit Hexominos	14
5	Spezielle Fragestellungen	17
1	Das PATTON-Problem	17
2	Satz von GOMORY	20
3	Das Mauer-Problem	21
4	Verallgemeinerung des Mauer-Problems	25
5	Satz von DE BRUIJN	27
6	Erweiterung zum Torus	27
7	Verallgemeinerung des Satzes von DE BRUIJN	29
6	Verallgemeinerung der Polyominos	32
1	Pseudo- und Quasi- n -Ominos	32
2	Verwandte der Polyominos in der ebenen Geometrie	33
7	Polyominos im 3-dimensionalen Raum	35
1	Packungen mit räumlichen Polyominos	36
2	Packung mit den räumlichen Pentominos	36
3	SOMA-Würfel	37

Kapitel 1

Einleitung

Bei meiner Suche nach einem Thema für die Diplomarbeit bin ich sehr bald auf die Diskrete Geometrie gestoßen. Sie ist ein interessantes Teilgebiet der Geometrie und kann sehr gut im Unterricht verwendet werden, da bei sehr vielen Aufgaben kein mathematisches tiefliegendes Vorwissen vorausgesetzt, aber besonders das logische Denken trainiert wird.

Die Diskrete Geometrie beschäftigt sich mit Strukturen, bei denen gewisse Teile oder Eigenschaften räumlich oder zeitlich periodisch auftreten. Diese Symmetrien kann man oft in Mustern der Natur entdecken.

Jeder von uns kennt die schönen verschlungenen Frieze an den griechischen Tempeln, die Rosettenfenster in gotischen Kathedralen, die verschiedenen Muster bei Parkettböden und die beeindruckenden Bilder des M. C. Escher. Weiters treten solche Muster auch in Kristallstrukturen, in Bewegungsmustern und vor allem in der Mikrobiologie auf.

Schon früh vermuteten die Menschen hinter auffälligen Formen und Erscheinungen in der Natur Gesetzmäßigkeiten. Sie bemühten sich, diese Gesetzmäßigkeiten zu verstehen, sie zu theoretisieren, sie zu systematisieren, entsprechende Begriffe zu definieren und damit Grundannahmen und Sätze zu formulieren.

Die Aufgabe der Diskreten Geometrie ist es, die hinter den Mustern steckenden Ordnungen, die diskontinuierlichen oder diskreten Eigenschaften und Strukturen zu erkennen und diese auf ihre Brauchbarkeit bei Anwendungen in den Naturwissenschaften und in der Technik zu prüfen.

Die Diskrete Geometrie umfasst viele verschiedene Ansätze zur Beschreibung diskontinuierlicher Eigenschaften. Ein wichtiges Teilgebiet sind die diskreten Systeme von Punktmengen, welche Lagerungen, Überdeckungen, Packungen, Zerlegungen und Parkette umfassen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf spezielle Packungen namens Polyominos eingegangen, die das Interesse der Schüler wecken können und die auch in verschiedenster Art und Weise als Denkspiele Eingang in der Freizeit gefunden haben, man denke nur an den bekannten SOMA-Würfel.

Die Geometrie der Polyominos ist vorwiegend aus [3] und [8] entnommen. Weiters möchte ich noch auf die Internetadressen verweisen, die sich im Anhang dieser Arbeit befinden.

Kapitel 2

Polyominos – Spezielle diskrete Packungen

Ausgehend vom bekannten Dominospiel ergibt sich folgende Problemstellung: Kongruente Quadrate werden so aneinandergelegt, dass sie sich entlang einer Seite berühren. Durch Wiederholung dieses Vorgangs entsteht eine diskrete Packung in der Ebene mit kongruenten Quadraten. Solche Packungen nennt man Polyominos. Der Name setzt sich aus der griechischen Vorsilbe für die Anzahl der Quadrate und dem Wortstamm „-Omino“ zusammen. Der Sammelbegriff Polyominos stammt von Solomon W. Golomb. Er übernahm dabei den Wortstamm vom bekannten Wort „Domino“.

Definition 2.1 Ein **Polyomino** oder **n-Omino** ist eine Figur **P**, die aus n ($n \geq 1$) kongruenten Quadraten besteht, für die gilt:

- je zwei Quadrate haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine Seite gemeinsam,
- zu je zwei verschiedenen Quadraten Q_1 und Q^* aus **P** gibt es eine Folge $Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} Q^*$ von benachbarten Quadraten aus **P**.
- **P** bildet eine einfach zusammenhängende Punktmenge.

Dabei heißen zwei Quadrate **benachbart**, wenn die Menge ihrer gemeinsamen Punkte eine Seite ist.

Im Folgenden setzen wir o. B. d. A. stets Einheitsquadrate voraus.

Die einfachen Polyominos – das sind alle geometrischen Formen, die man mit weniger als fünf Quadraten bilden kann und die der obigen Definition genügen – werden in Abbildung 2.1 gezeigt. Sie werden nur bis auf Kongruenz unterschieden.

Bei vielen Problemstellungen ist es allerdings oft nötig, nur eigentliche (= orientierungserhaltende Bewegungen) für das Zur-Deckung-Bringen zuzulassen. Damit ergeben sich zum Beispiel für Tetrominos noch zwei weitere Klassen (siehe Abbildung 2.2), da sich diese nur durch eine uneigentliche Bewegung ineinander überführen lassen. Solche Polyominos werden auch fixierte Polyominos genannt.

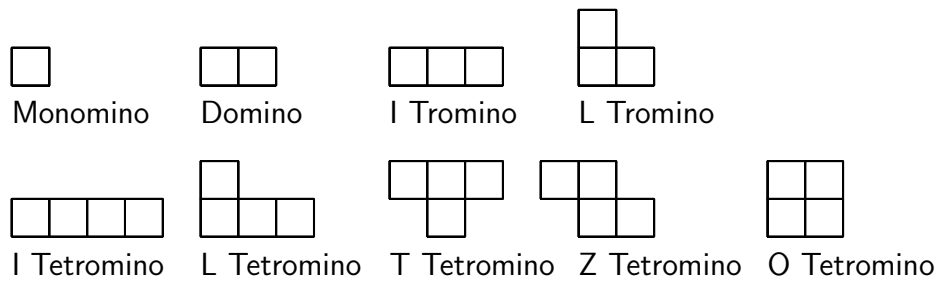


Abbildung 2.1: Die einfachen Polyminos

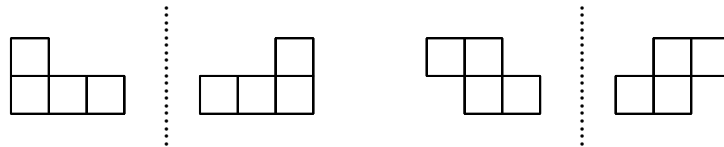


Abbildung 2.2: Die zwei weiteren Tetrominos

Jedem Polyomino läßt sich ein Zusammenhangsgraph zuordnen, indem man jedes Quadrat aus \mathbf{P} als „Knoten“ und das Benachbartsein zweier Quadrate aus \mathbf{P} durch eine „Kante“ wiedergibt (siehe Abbildung 2.3). Nach der Definition der Polyominos ist der Zusammenhangsgraph eines Polyominos ein zusammenhängender Graph, das heißt jeder Knoten ist durch wenigstens einen Kantenzug mit jedem anderen verbunden. Für $n \geq 7$ können n -Ominos auch Löcher besitzen.



Abbildung 2.3: Zusammenhangsgraphen einiger Polyominos

Kapitel 3

Bestimmung aller möglicher Polyominos aus n kongruenten Quadraten mit $n = 1, 2, \dots$

Im Folgenden bezeichnet $P(n)$ die Anzahl der Klassen kongruenter Polyominos, die sich aus n Quadraten bilden lassen, also auch Lcher enthalten können.

Für $n \geq 2$ wird nun ein rekursives Verfahren vorgestellt, das es ermöglicht, mit Kenntnis aller $(n - 1)$ -Ominos alle n -Ominos zu finden.

Es lässt sich zeigen, dass es zu jedem n -Omino \mathbf{P}_2 ($n \geq 2$) ein $(n - 1)$ -Omino \mathbf{P}_1 und ein Quadrat Q gibt, so dass gilt: $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \cup Q$.

Da der Zusammenhangsgraph von \mathbf{P}_2 ein endlicher zusammenhängender Graph ist, gibt es nach einem Satz der Graphentheorie stets einen Knoten so, dass durch Wegnahme dieses Knoten und aller mit ihm inzidierenden Kanten wieder ein zusammenhängender (Teil-)Graph entsteht.

Jedes n -Omino lässt sich also stets durch Hinzufügen eines Quadrats an ein geeignetes $(n - 1)$ -Omino bilden.

Geht man davon aus, dass man alle $(n - 1)$ -Ominos kennt, so hat man noch darauf zu achten, dass man in jedem Arbeitsschritt durch Hinzufügen eines Quadrats nur je ein zu den schon vorhandenen n -Ominos nicht kongruentes n -Omino erhält. Um das sicherzustellen, geht man folgenderweise vor:

Man zeichnet die Klassen der $(n - 1)$ -Ominos am besten auf kariertes Papier und nummeriert sie durch. Nun betrachtet man einen Vertreter \mathbf{P} der ersten Klasse und geht systematisch alle möglichen Lagen eines zusätzlichen Quadrats Q durch, die zu einem n -Omino $\mathbf{P} \cup Q$ führen. Diese Lagen werden dann mit \backslash oder \bullet markiert je nachdem, ob das entsprechende n -Omino zu den bisherigen kongruent ist oder nicht. Dieses Verfahren wendet man nun bei einem Vertreter der nächsten Klasse der $(n - 1)$ -Ominos erneut an.

Dabei kann natürlich auch ein n -Omino entstehen, das zu einem n -Omino kongruent ist, das man in der vorigen Arbeitsstufe bezüglich der i -ten Klasse der $(n - 1)$ -Ominos erhalten hat. Ist dies der Fall, so beschriftet man diese nicht mehr in Frage kommenden Lagen von Q in den dazugehörigen Kästchen mit i ($i = 1, 2, \dots$).

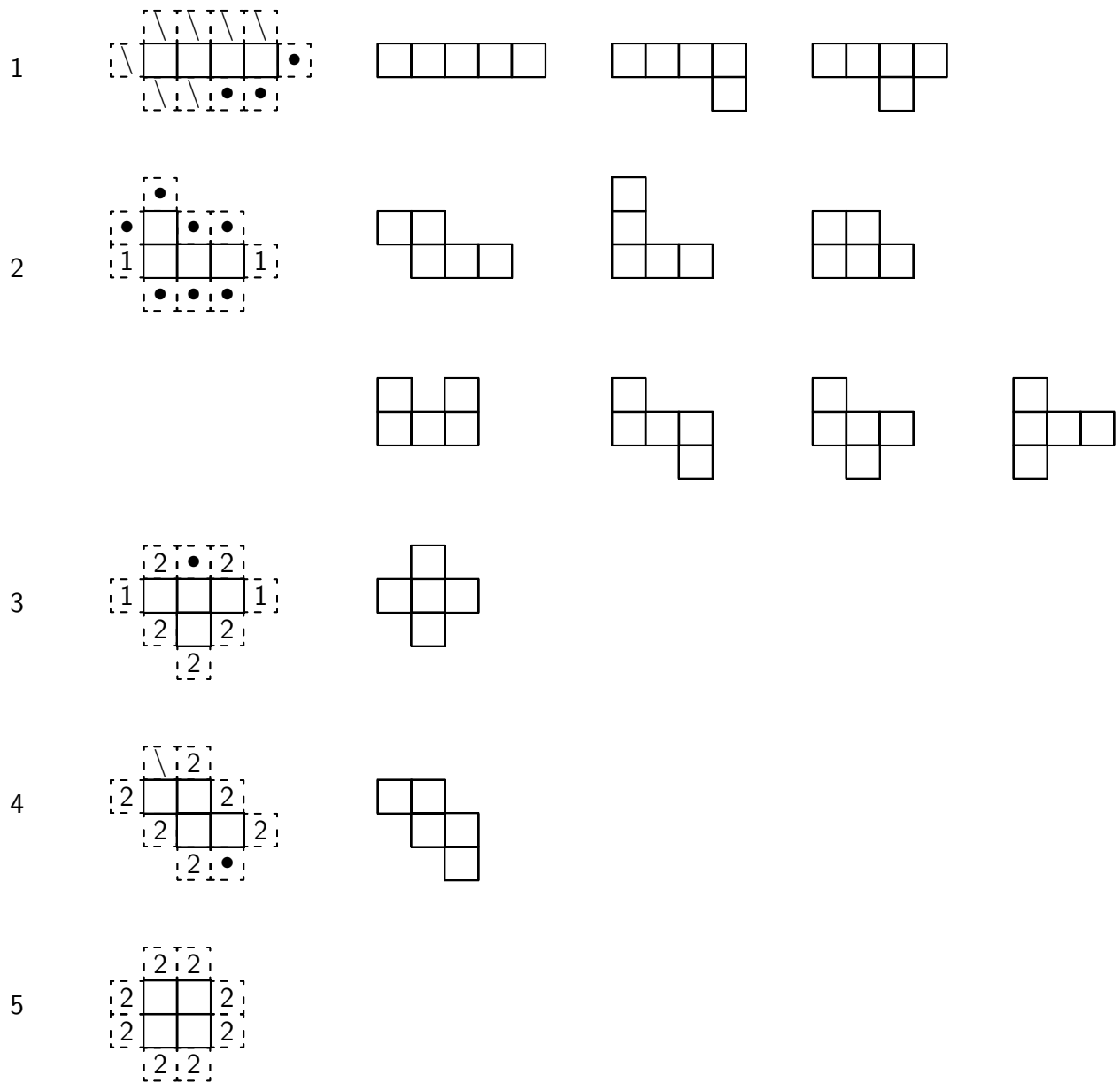


Abbildung 3.1: Bestimmung der Vertreter der Klassen der Pentominos aus den fünf Repräsentanten der Tetrominos

Dieses Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab und liefert für jede Klasse der n -Ominos einen Vertreter. Die Unterscheidung zwischen Kongruenz und Nichtkongruenz ist zwar prinzipiell immer möglich, aber mit wachsendem n wird sie immer aufwendiger.

$P(n)$ konnte bis heute erst bis zu $n = 28$ exakt berechnen.

In der Tabelle 3 bezeichnet $\tilde{P}(n)$ die Anzahl aller n -Ominos, die keine Löcher besitzen, diese konnte bis heute nur für $n \leq 26$ exakt berechnet werden.

n	$P(n)$	$\tilde{P}(n)$
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	5	5
5	12	12
6	35	35
7	108	107
8	369	363
9	1 285	1 248
10	4 655	4 460
11	17 073	16 094
12	63 600	58 937
13	238 591	217 117
14	901 971	805 475
15	3 426 576	3 001 127
16	13 079 255	11 230 003
17	50 107 909	42 161 529
18	192 622 052	158 781 106
19	742 624 232	599 563 893
20	2 870 671 950	2 269 506 062
21	11 123 060 678	8 609 442 688
22	43 191 857 688	32 725 637 373
23	168 047 007 728	124 621 833 354
24	654 999 700 403	475 368 834 568
25	2 557 227 044 764	1 816 103 345 752
26	9 999 088 822 075	6 948 228 104 703
27	39 153 010 938 487	?
28	153 511 100 594 603	?

Tabelle 3.1: Anzahl der Polyominos

Kapitel 4

Packungen mit Polyominos

Es gibt eine Unmenge von Beispielen über Packungen mit Polyominos, die das Erlernen von mathematischen Denk- und Arbeitsweisen und die Vorstellungskraft oft auf spielerische Weise unterstützen. Einige der interessantesten sollen im Folgenden vorgestellt werden.

1 Beispiele für Packungen mit Dominos

Bei Betrachtung eines Rechtecks R mit den (positiv) ganzzahligen Seitenlängen a und b ergibt sich die einfache Frage, welche notwendige und auch hinreichende Bedingungen für a und b gelten müssen, damit eine Packung von R mit Dominos möglich ist.

Wenn so eine Packung existiert, so muss die Maßzahl $a \cdot b$ des Flächeninhalts von R eine gerade Zahl sein und somit auch a oder b . Legt man die Dominos mit ihrer längeren Seite parallel zu einer Rechtecksseite mit einer geradzahligen Länge, so erkennt man, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Damit gilt der folgende Satz.

Satz 4.1 *Ein Rechteck R mit ganzzahligen Seitenlängen a und b besitzt dann und nur dann eine Packung mit Dominos, wenn a oder b eine gerade Zahl ist.*

Entfernt man nun zwei gegenüberliegende Eck-Einheitsquadrate von R , so erhält man eine neue Fläche \bar{R} . Welche notwendige und auch hinreichende Bedingungen für \bar{a} und \bar{b} müssen gelten, damit eine Packung von \bar{R} mit Dominos möglich ist?

Satz 4.2 *Die Figur \bar{R} besitzt genau dann eine Packung mit Dominos, wenn entweder \bar{a} oder \bar{b} eine gerade Zahl ist.*

Beweis: Eine notwendige Bedingung ist, dass $\bar{a} \cdot \bar{b} - 2$ eine gerade Zahl sein muss und somit auch \bar{a} oder \bar{b} .

Die Frage ist nun, ob diese Bedingung auch hinreichend ist. Es gilt zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Entweder \bar{a} oder \bar{b} ist gerade.

O. B. d. A. gelte: $\bar{a} = 2m$ und $\bar{b} = 2n + 1$ (mit $m, n \geq 1$, ganzzahlig). Zerlegt man \bar{R} entsprechend der Abbildung 4.1 in drei Rechtecke mit den Seitenlängen 1 und $\bar{b} - 1 = 2n$ bzw. $\bar{a} - 2 = 2(m - 1)$ und 1 bzw. $\bar{a} - 1 = 2m - 1$ und $\bar{b} - 1$, so erkennt man, dass es für jedes dieser Rechtecke eine Packung mit Dominos gibt.

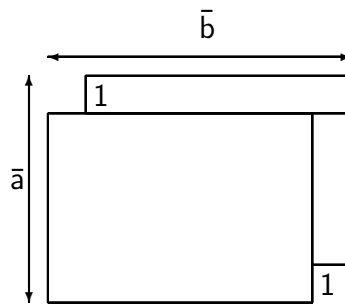


Abbildung 4.1: Beweisskizze für Satz 4.2

Fall 2: \bar{a} und \bar{b} sind gerade.

In diesem Fall gibt es keine Packung mit Dominos, wie folgende Überlegung zeigt: Man färbt \bar{R} schachbrettartig weiß und schwarz ein (siehe Abbildung 4.2). Die beiden Quadrate, die entfernt worden sind, würden sicher mit derselben Farbe gefärbt werden, o. B. d. A. mit weiß. Somit besitzt \bar{R} $\frac{\bar{a}\bar{b}}{2}$ schwarze und $\frac{\bar{a}\bar{b}}{2} - 2$ weiße Felder. Damit es aber eine Packung mit Dominos geben könnte, müsste jeweils die gleiche Anzahl von Feldern derselben Farbe vorhanden sein, da jedes Domino genau ein weißes und ein schwarzes Feld überdeckt. \square

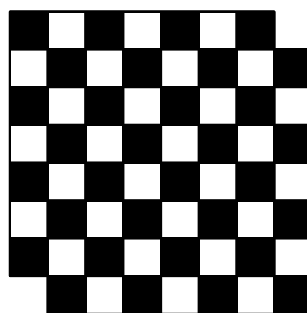


Abbildung 4.2: Schachbrett mit zwei abgeschnittenen Ecken

Die Methode des Einfärbens, die hier verwendet worden ist, ist oft bei Unmöglichkeitsbeweisen sehr nützlich, was sich im Laufe dieser Arbeit noch des öfters zeigen wird.

2 Beispiele für Packungen mit Trominos

Trominos sind Polyominos, die aus drei kongruenten Quadraten gebildet werden. Die beiden Formen werden nach ihrem Aussehen mit I und L bezeichnet.

Es ist klar, dass man ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b nur dann mit Trominos der Form I auslegen kann, wenn entweder a oder b und damit der Flächeninhalt $a \cdot b$ durch 3 teilbar ist.

Eine interessante Frage ist aber, ob es möglich ist, ein Quadrat mit Seitenlänge a bei dem ein beliebiges Einheitsquadrat aus der i -ten Zeile und k -ten Spalte ($1 \leq i, k \leq a$) freibleiben soll, mit Trominos der Form I auszulegen.

Satz 4.3 *Eine Packung eines Quadrats mit Seitenlänge a , bei dem ein beliebiges Einheitsquadrat aus der i -ten Zeile und k -ten Spalte ($1 \leq i, k \leq a$) freibleiben soll, mit Trominos der Form I ist nur dann möglich, wenn Folgendes gilt:*

- Wenn $a = 3n + 1$ mit $n = 1, 2, \dots$, dann muss $i \equiv k \equiv 1(3)$ gelten.
oder
- Wenn $a = 3n + 2$ mit $n = 1, 2, \dots$, dann muss $i \equiv k \equiv 0(3)$ gelten.

Beweis: In diesem Fall bedient man sich wieder der Methode des Einfärbens. Das quadratische Feld wird mit drei Farben, etwa schwarz (s), rot (r) und weiß (w) wie folgt zyklisch gefärbt: 1. Zeile: s r w s ..., 2. Zeile: w s r w ..., 3. Zeile: r w s r ..., usw. Es gibt drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $a = 3n + 1$ mit $n = 1, 2, \dots$

In diesem Fall gibt es laut Einfärbung gleichviele rote und weiße Felder, aber ein schwarzes Feld mehr. Da ein Tromino der Form I immer genau ein schwarzes, ein weißes und ein rotes Feld bei einer Packung belegt, so muss das freizubleibende Feld schwarz sein. Daraus folgt notwendigerweise $i \equiv k(3)$.

Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, da es zum Beispiel für $a = 4$ und $i = k = 2$ keine solche Packung gibt. Färbt man das Quadrat aber in einer anderen zyklischen Reihenfolge wie zuerst, nämlich mit 1. Zeile: s r w s ..., 2. Zeile: r w s r ..., 3. Zeile: w s r w ..., usw., so muss das freie Feld auch wieder schwarz ein. Daraus folgt aber $i + k \equiv 2(3)$. Fasst man beide Bedingungen zusammen, so ergeben sie die notwendige Bedingung $i \equiv k \equiv 1(3)$. Abbildung 4.3 zeigt, dass zu dieser Bedingung wirklich eine Packung existiert.

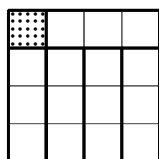


Abbildung 4.3: Beispiel einer Packung für $i \equiv k \equiv 1(3)$

Fall 2: $a = 3n + 2$ mit $n = 1, 2, \dots$

Färbt man das ganze Feld mit der ersten Einfärbung ein, so gibt es wieder ein schwarzes Feld mehr als rote und weiße. Daraus folgt wiederum $i \equiv k(3)$. Färbt man das Quadrat aber in einer anderen zyklischen Reihenfolge mit der 1. Zeile: w s r w ..., 2. Zeile: s r w s ..., 3. Zeile: r w s r ..., usw., so muss das freie Feld auch wieder schwarz ein. Daraus folgt aber $i + k \equiv 0(3)$. Fasst man beide Bedingungen zusammen, so ergeben sie die notwendige Bedingung $i \equiv k \equiv 0(3)$. Abbildung 4.4 zeigt, dass zu dieser Bedingung wiederum eine Packung existiert.

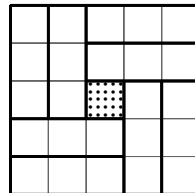


Abbildung 4.4: Beispiel einer Packung für $i \equiv k \equiv 0(3)$

Fall 3: $a = 3n$ mit $n = 1, 2, \dots$

In diesem Fall ist allgemein keine Packung möglich, da 3 kein Teiler von $a^2 - 1$ ist. \square

Eine speziellere Frage ist: Welches Feld ist in einem Quadrat mit der Seitenlänge $a = 2^n$ ($n \geq 1$) freizulassen, damit das Übrige eine Packung mit Trominos der Form L besitzt?

Betrachtet man zuerst den Flächeninhalt, so ergibt sich keine Einschränkung, da 3 stets $a^2 - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1)$ teilt.

Satz 4.4 Wird in einem Quadrat mit der Seitenlänge $a = 2^n$ ($n \geq 1$) irgendein Feld ausgespart, dann gibt es für die übrige Figur stets eine Packung mit Trominos der Form L.

Beweis: Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Für $n = 1$ stimmt der Satz offensichtlich. Vorausgesetzt, dass die Behauptung auch für eine natürliche Zahl $n = k$ (≥ 1) gilt, das heißt für ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 2^k$ gibt es zu jeder beliebigen Aussparung eines Feldes eine Packung mit Trominos der Form L, so kann man das Quadrat mit der Seitenlänge $a = 2^{k+1}$ in vier Teilquadrate mit der Seitenlänge $a = 2^k$ (siehe Abbildung 4.5) zerlegen.

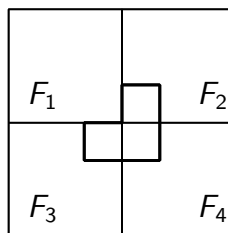


Abbildung 4.5: Beweisskizze für Satz 4.4

O. B. d. A. spart man im Teilquadrat F_1 ein beliebiges Einheitsquadrat aus. In den übrigen Teilquadraten F_2 , F_3 und F_4 bleibt jenes Einheitsquadrat nach Abbildung 4.5 frei. Laut Voraussetzung gibt es zu jedem übrig gebliebenen Teil von F_i ($i = 1, 2, 3, 4$) eine Packung mit Trominos der Form L. Auch können die drei ausgesparten Einheitsquadrate mit einem Tromino der Form L überdeckt werden. Damit gilt die Behauptung auch für $n = k + 1$ \square

3 Beispiele für Packungen mit Tetrominos

Tetrominos sind jene Polyominos, die aus vier Einheitsquadraten gebildet werden können. Auch sie werden nach ihren Formen mit I, L, T, Z und O bezeichnet.

Es ist leicht zu erkennen, dass ein Rechteck R mit ganzzahligen Seitenlängen a und b nur dann eine Packung mit Tetrominos der Form I besitzt, wenn $4|a$ oder $4|b$ gilt.

Welche Bedingungen müssen für eine Packung des Rechtecks mit Tetrominos der Form L gelten?

Satz 4.5 *Für ein Rechteck R mit ganzzahligen Seitenlängen a und b existiert genau dann eine Packung mit Tetrominos der Form L, wenn $a, b \geq 2$ und $8|ab$ gilt.*

Beweis: Notwendigerweise muss $4|ab$ und $a, b \geq 2$ gelten. O. B. d. A. kann man $2|b$ voraussetzen. Färbt man das Rechteck nach Abbildung 4.6 ein, so dass jede Zeile schwarzer Felder die Länge a hat, so erhält man $\frac{ab}{2}$ schwarze und $\frac{ab}{2}$ weiße Felder. Eine mögliche Packung muss aus $\frac{ab}{4}$ Tetrominos der Form L bestehen. Da jedes dieser Tetrominos 1 oder 3 schwarze Felder überdeckt, muss auch $2|\frac{ab}{4}$ und damit $8|ab$ gelten.

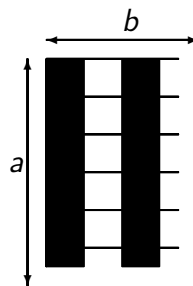


Abbildung 4.6: Beweisskizze für Satz 4.5

Diese Bedingung ist zusammen mit $a, b \geq 2$ auch hinreichend, da nun jedes Rechteck, das sie erfüllt, eine Packung mit den in Abbildung 4.7 abgebildeten Teilen besitzt. \square

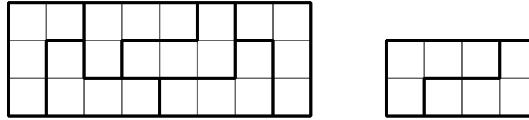


Abbildung 4.7: Packungen mit L Tetrominos

4 Beispiele für Packungen mit Pentominos

Pentominos sind jene Polyominos, die aus fünf Einheitsquadraten gebildet werden können. Die zwölf verschiedenen Formen sind in Abbildung 3.1 zu sehen. Sie werden wieder nach ihrer Form mit I, L, Y, N, V, P, U, Z, F, T, X und W bezeichnet.

Eine interessante Frage ist, ob man mit den zwölf verschiedenen Pentominos ein Rechteck bilden kann, wobei jede Form nur ein Mal vorkommen darf.

Wenn es so eine Packung gibt, so muss das Rechteck genau aus $5 \cdot 12 = 60$ Einheitsquadraten bestehen. Solche kleinstmöglichen Packungen aus einer bestimmten Menge von Objekten nennt man minimale Packungen. Es ist klar, dass nur folgende Rechtecke mit den Seitenlängen a und b prinzipiell in Frage kommen:

- $a = 1, b = 60$
- $a = 2, b = 30$
- $a = 3, b = 20$
- $a = 4, b = 15$
- $a = 5, b = 12$
- $a = 6, b = 10$

Offensichtlich können die zwölf Pentominos nicht zu Rechtecken mit den Seitenlängen $a = 1, b = 60$ oder $a = 2, b = 30$ zusammengesetzt werden. Die anderen vier Möglichkeiten sind die einzigen, bei denen es die gewünschte Packung gibt.

Abbildung 4.8 zeigt eine Lösung für ein Rechteck mit $a = 3, b = 20$, wobei diese bis auf Drehung des herausgehobenen Teils um 180° nach [3] auch die einzige ist.

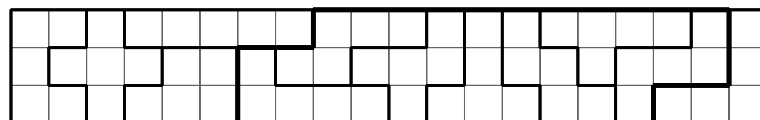


Abbildung 4.8: Eine minimale Packung der Größe $a = 3, b = 20$

Zwei nichtkongruente Möglichkeiten der Packung des Rechtecks mit $a = 4, b = 15$ zeigt die Abbildung 4.9. Beim Rechteck mit $a = 6, b = 10$ gibt es sogar über 2300 verschiedene Packungen.

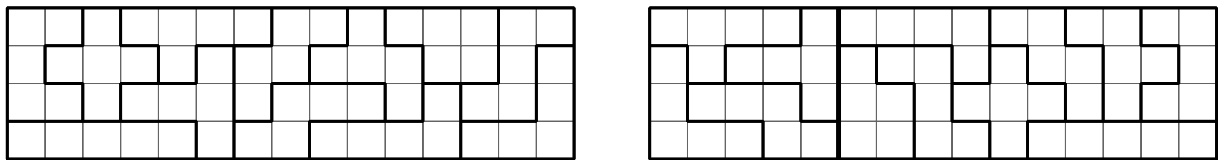


Abbildung 4.9: Zwei Möglichkeiten der minimalen Packung der Größe $a = 4$, $b = 15$

Damit gilt der folgende Satz:

Satz 4.6 *Die Rechtecke mit den Seitenlängen*

- $a = 3$, $b = 20$
- $a = 4$, $b = 15$
- $a = 5$, $b = 12$
- $a = 6$, $b = 10$

und nur diese gestatten eine minimale Packung mit Pentominos.

Es gibt sehr viele kreative Möglichkeiten, mit Pentominos zu spielen. Eine davon ist das Problem der Triplikation. Dabei soll eine bestimmte Form des Pentominos in verdreifachter Größe aus anderen Pentominos gebildet werden. Die neue Figur enthält $3^2 \cdot 5 = 45$ Einheitsquadrate und ist somit aus neun Pentominos zu bilden.

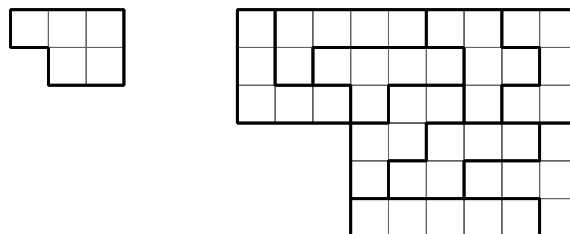


Abbildung 4.10: Triplikation des P Pentominos

5 Beispiele für Packungen mit Hexominos

Hexominos sind jene Polyominos, die aus sechs Einheitsquadraten gebildet werden können. Nach Tabelle 3.1 gibt es 35 verschiedene Hexominos, welche also insgesamt eine Fläche von $35 \times 6 = 210$ Einheitsquadraten bedecken.

Die minimale Packung aus 35 verschiedenen Hexominos kann nur aus einem Rechteck bestehen, dessen Seitenlängen Primfaktoren von 210 sind. Damit ergeben sich folgende theoretische Möglichkeiten: 3×70 , 5×42 , 6×35 , 7×30 , 10×21 , oder 14×15 . Es stellt sich heraus, dass es keine derartige Packung gibt.

Indirekt: Angenommen es gibt eine minimale Packung, so kann man alle 35 Hexominos schachbrettartig weiß und schwarz einfärben. Insgesamt ergeben sich somit 105 weiße und 105 schwarze Einheitsquadrate.

Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass es genau 24 Hexominos gibt, die jeweils 3 weiße und 3 schwarze Felder, also immer eine ungerade Anzahl, enthalten (siehe Abbildung 4.11). Sie werden auch „ungerade“ Hexominos genannt. Die restlichen 11 Hexominos bestehen jeweils o. B. d. A. aus 2 schwarzen und 4 weißen Feldern, also immer aus einer geraden Anzahl (siehe Abbildung 4.12) und heißen „gerade“ Hexominos. Somit gibt es eine gerade Anzahl von „ungeraden“ Hexominos und eine ungerade Anzahl von „geraden“ Hexominos. Damit ergibt sich aber jeweils eine gerade Gesamtanzahl der weißen bzw. schwarzen Felder. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

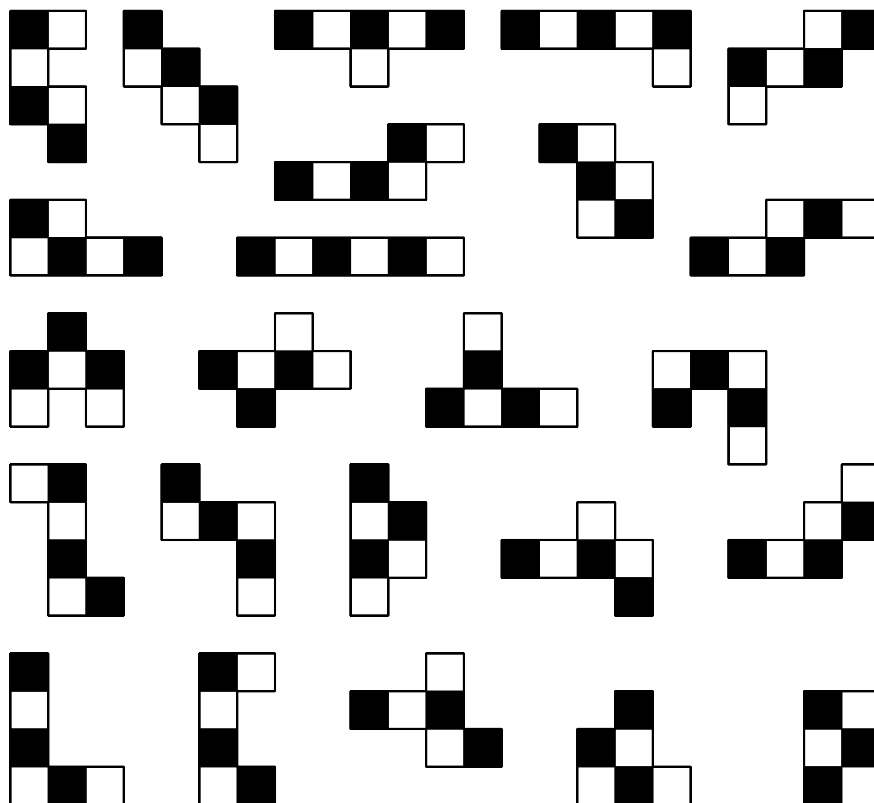


Abbildung 4.11: Die 24 „ungeraden“ Hexominos

Eine weitere interessante Fragestellung ergibt sich aus der Tatsache, dass ein Würfelnetz aus sechs Quadraten besteht und somit auch ein Hexomino ist. Die Frage ist nur, welche der 35 Hexominos als Würfelnetze interpretiert werden können.

Dieses scheinbar triviale Problem ist aufgrund der vielen Symmetrien im Würfel schwer zu lösen. Es gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, die Kanten eines Würfel zu trennen, die dennoch das gleiche Hexomino liefern.

Man muss also bei jedem der 35 Hexominos überprüfen, ob es sich entlang seiner Kanten zu einem Würfel zusammenfalten lässt. Eine Vereinfachung dieser Überprüfung ist die Kennzeichnung jener Quadrate jeweils mit einer Farbe, die sich

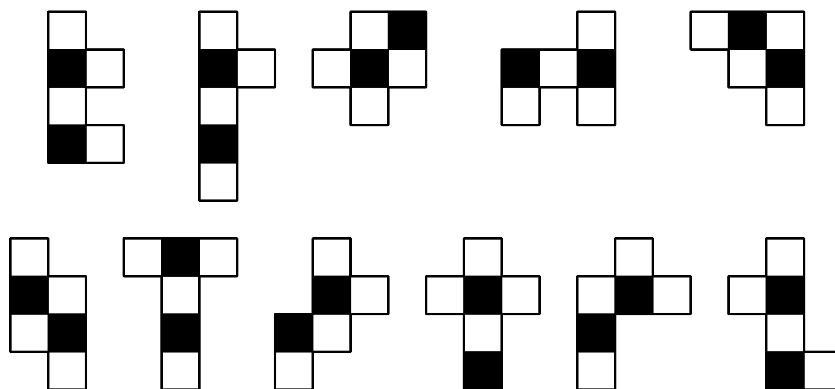


Abbildung 4.12: Die 11 „geraden“ Hexominos

im Raum gegenüberliegen. Es stellt sich heraus, dass genau 11 der 35 Hexominos Würfelnetze darstellen (siehe Abbildung 4.13).

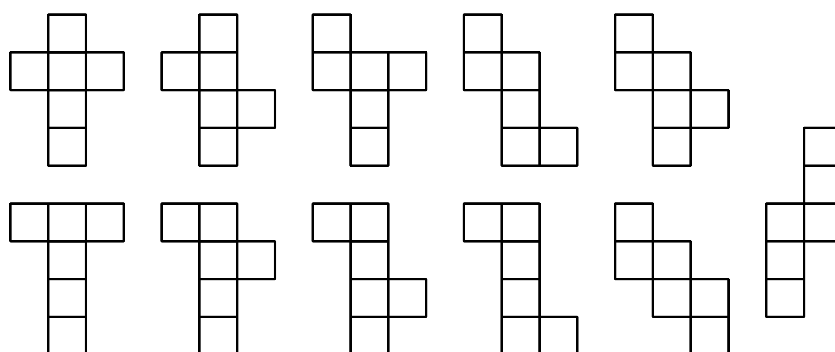


Abbildung 4.13: Die 11 möglichen Würfelnetze

Kapitel 5

Spezielle Fragestellungen

1 Das PATTON-Problem

Eine interessante Aufgabenstellung ist die Ermittlung der Anzahl von Möglichkeiten, wie eine gegebene Menge von Polyminos eine spezielle Fläche ausfüllen können. Diese Aufgabe ist generell zwar sehr schwer zu lösen, aber in einem speziellen Fall gibt es eine einfache Antwort.

Beim PATTON-Problem soll folgendes Problem gelöst werden: Ein $2 \times n$ großes Rechteck ist mit Dominos zu pflastern. Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?

Zwei Lösungen heißen dabei verschieden, wenn sie durch Anwendung einer involutorischen Bewegung nicht zur Deckung gebracht werden können.

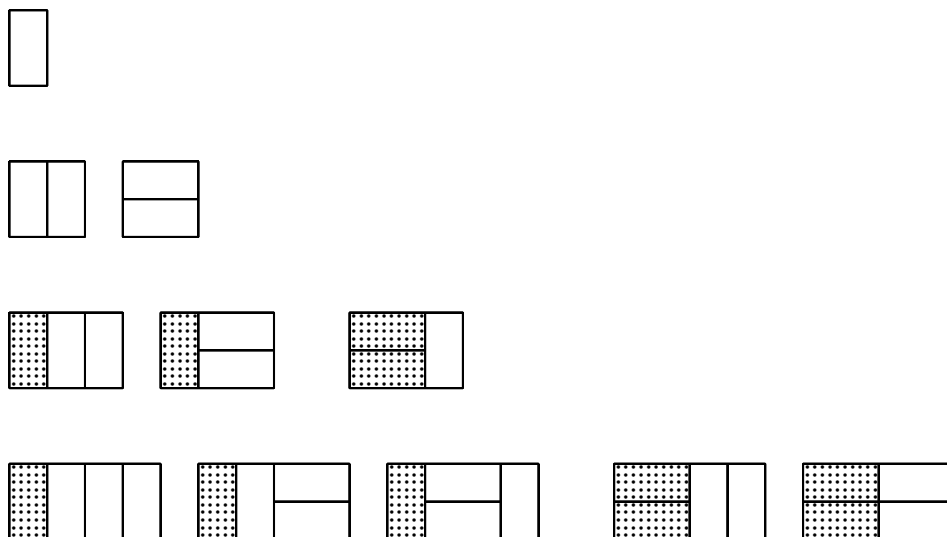


Abbildung 5.1: Das PATTON-Problem

Lösung: Zuerst werden alle $2 \times n$ großen Rechtecke, die aus Dominos gebildet werden, ohne Rücksicht auf gegenseitige Symmetrien aufgezählt. Dabei bezeichnet f_i die Anzahl der verschiedenen Rechtecke vor Anwendung von involutorischen Bewegungen:

- $n = 1 \implies f_1 = 1$
- $n = 2 \implies f_2 = 2$
- $n > 2$: Beginnt man an der linken Seite des $2 \times n$ großen Rechtecks, so kann man mit einem vertikalen Domino beginnen, so dass es dann f_{n-1} verschiedene Möglichkeiten gibt, das $2 \times n$ -Rechteck zu pflastern. Oder man beginnt mit zwei horizontalen Dominos, so dass es dann noch f_{n-2} verschiedene Möglichkeiten gibt (siehe Abbildung 5.1).

Insgesamt gilt also: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Die Folge mit den Gliedern $f_1 = 1, f_2 = 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 2$ ist die bekannte *Fibonacci-Folge*: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, ging im 13. Jahrhundert von den einfachsten ganzen Zahlen $f_0 = 0, f_1 = 1$ aus und konstruierte die unendliche Zahlenfolge $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ mittels des Bildungsgesetzes:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Somit lautet die *Fibonacci-Folge* im Original: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Nun betrachtet man nur jene Rechtecke, die nicht durch eine vertikale Spiegelung ineinander übergeführt werden können. C_m bezeichne die Anzahl dieser wirklich unterscheidbaren Lösungen für ein $2 \times m$ -Rechteck. s_m sei die Anzahl der Lösungen, die in sich selbst bezüglich dieser vertikalen Spiegelung symmetrisch sind, dann gilt:

$$C_m = \frac{1}{2}(f_m + s_m).$$

Um nun den Wert für s_m bestimmen zu können, unterscheidet man:

- Gilt $m = 2n + 1$, so muss eine zu einer vertikalen Spiegelachse symmetrische Lösung ein vertikales Domino in der mittleren Position und beidseitig davon ein $2 \times n$ -Rechteck besitzen. Eine dieser beiden Seiten kann auf f_n verschiedene Möglichkeiten mit Dominos gepflastert werden, wodurch die zweite Seite als Spiegelbild der ersten auch festgelegt ist. Somit gilt: $s_{2n+1} = f_n$.

$$\Rightarrow C_{2n+1} = \frac{1}{2}(f_{2n+1} + f_n).$$

- Gilt $m = 2n$ ($n \neq 1$), so schneidet eine vertikalen Spiegelachse entweder zwei horizontale Dominos oder geht genau zwischen zwei vertikalen Dominos hindurch. Im ersten Fall gibt es f_{n-1} verschiedene Möglichkeiten, um eines der $2 \times (n - 1)$ -Rechtecke zu pflastern, im zweiten Fall f_n für eines der $2 \times n$ -Rechtecke. Die zweite Hälfte ist jeweils wieder als Spiegelbild der ersten mitbestimmt.

Somit gilt: $s_{2n} = f_{n-1} + f_n = f_{n+1}$.

$$\Rightarrow C_{2n} = \frac{1}{2}(f_{2n} + f_{n+1}).$$

- $m = 2$ ist ein Sonderfall, da bei diesem Quadrat auch symmetrische Lösungen bezüglich einer 90° -Drehung auftreten. Dadurch reduziert sich $C_2 = 2$ auf $C'_2 = 1$, ohne sich aber auf andere Fälle auszuwirken.

n	Anzahl der verschiedenen $2 \times n$ großen Rechtecke
1	1
2	1
3	$\frac{1}{2}(f_3 + f_1) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2$
4	$\frac{1}{2}(f_4 + f_3) = \frac{1}{2}(5 + 3) = 4$
5	$\frac{1}{2}(f_5 + f_2) = \frac{1}{2}(8 + 2) = 5$
6	$\frac{1}{2}(f_6 + f_4) = \frac{1}{2}(13 + 5) = 9$
7	$\frac{1}{2}(f_7 + f_3) = \frac{1}{2}(21 + 3) = 12$
8	$\frac{1}{2}(f_8 + f_5) = \frac{1}{2}(34 + 8) = 21$
9	$\frac{1}{2}(f_9 + f_4) = \frac{1}{2}(55 + 5) = 30$
10	$\frac{1}{2}(f_{10} + f_6) = \frac{1}{2}(89 + 13) = 51$
11	$\frac{1}{2}(f_{11} + f_5) = \frac{1}{2}(144 + 8) = 76$
12	$\frac{1}{2}(f_{12} + f_7) = \frac{1}{2}(234 + 21) = 127$

Tabelle 5.1: Anzahl der verschiedenen möglichen Pflasterungen von $2 \times n$ großen Rechtecken mit Dominos

2 Satz von GOMORY

Satz 5.1 *Werden zwei beliebige Quadrate von verschiedener Farbe aus einem Schachbrett genommen, so kann die übriggebliebene Fläche immer vollständig mit Dominos ausgelegt werden.*

Beweis: Führt man zum Beispiel Barrieren nach Abbildung 5.2 auf dem Schachbrett ein, die von keinem Domino verdeckt werden dürfen, so werden die Dominos in gewisse Bahnen gezwungen, denen sie folgen müssen. Entfernt man nun zwei verschiedene Quadrate, so wird der 64 Quadrate lange Rundweg in zwei Stücke mit gerader Stückanzahl zerteilt. Sind die beiden entfernten Quadrate benachbart, so bleibt natürlich nur ein Stück der Länge 62 übrig. Jedes Stück aus einer geraden Anzahl von Quadraten kann nun eindeutig mit Dominos ausgelegt werden. \square

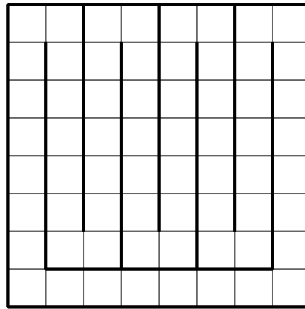


Abbildung 5.2: Barrieren nach GOMORY

Das hier verwendete Barrierenmuster ist nur ein Beispiel unter hunderten.

3 Das Mauer-Problem

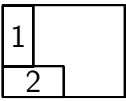
Das Mauer-Problem zeigt, dass die Polyominos nicht nur Gegenstand von Denkspielen, sondern auch für praktische Anwendungen wichtig sind. Überzieht man ein beliebig großes Rechteck mit einem orthogonalen Gitternetz mit der Einheitsstrecke als Gitterbreite, so ergibt sich folgende Frage: Ist es möglich, das Rechteck so mit Dominos zu belegen, dass jede Gitterlinie des Rechtecks mindestens ein Domino schneidet?

Interpretiert man nun die Dominos als Ziegelsteine, so stellt eine durchgehende Gitterlinie eine strukturelle Schwachstelle dar, die vermieden werden soll. Es gibt unendlich viele Mauerpackungen ohne „Bruchlinie“.

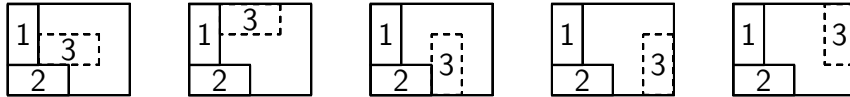
Satz 5.2 *Die minimale Packung des Mauer-Problems besteht aus 15 Dominos, die ein 5×6 großes Rechteck bilden.*

Beweis: Betrachtet man jeweils die Rechtecke mit den ganzzahligen Seitenlängen a und b , so ergeben sich folgende Ergebnisse, wobei a und b jeweils vertauschbar sind:

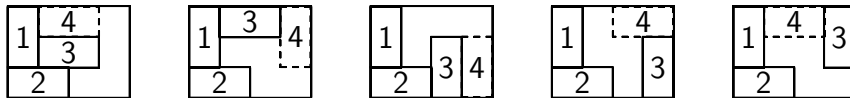
- $a = 1, b = 1$: keine Packung mit Dominos möglich
- $a = 1, b = 2$: genau ein Domino
- $a = 2, b = 2$: dieses Quadrat besitzt sicher eine Bruchlinie
- $a = 2, b = 3$: dieses Rechteck besitzt bei jeder Packung eine Bruchlinie
- $a = 3, b = 3$: dieses Quadrat besteht aus 9 Einheitsquadraten und kann somit nicht mit Dominos ausgelegt werden
- $a = 3, b = 4$:
Exemplarisch wird in Abbildung 5.3 für das 3×4 -Rechteck der kombinatorische Beweis geführt, wobei mögliche Lagen von Steinen strichliert und notwendige Lagen mit durchgezogener Linie eingezeichnet werden.
- $a = 4, b = 4$: die analog zum obigem Beweis angefertigten Pflasterungen werden in Abbildung 5.4 gezeigt
- $a = 4, b = 5$: die nach obigem Beweis angefertigten Pflasterungen werden in Abbildung 5.5 gezeigt
- $a = 5, b = 5$: dieses Quadrat besteht aus 25 Einheitsquadraten und kann somit nicht mit Dominos ausgelegt werden
- $a = 5, b = 6$: mit diesem Rechteck sind Packungen mit Dominos ohne Bruchlinien erstmals möglich (siehe Abbildung 5.6) \square

- a)  Setzt man Stein 1 , so ist Stein 2 in dieser Position notwendig.

Um keine Bruchlinie zu erhalten, kann der Stein 3 nur mehr wie folgt gesetzt werden:



Für Stein 4 bleiben nur folgende Positionen übrig:



Die Steine 5 und 6 können nur mehr so positioniert werden, dass eine Bruchlinie entsteht. \Rightarrow Widerspruch!

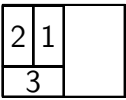
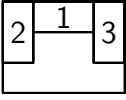
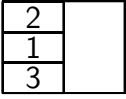
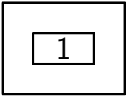
- b)  Setzt man Stein 1 , so sind die Positionen für Stein 2 und 3 notwendig.
 \Rightarrow Widerspruch!
- c)  Setzt man Stein 1 , so sind die Positionen für Stein 2 und 3 notwendig. Dadurch können die Steine 4, 5 und 6 nur mehr so positioniert werden, dass eine Bruchlinie entsteht. \Rightarrow Widerspruch!
- d)  Setzt man Stein 1 , so sind die Positionen für Stein 2 und 3 notwendig.
 \Rightarrow Widerspruch!
- e)  Setzt man Stein 1 , so können die restlichen Steine nur mehr so gesetzt werden, dass eine Bruchlinie entsteht. \Rightarrow Widerspruch!

Abbildung 5.3: Kombinatorischer Beweis des Mauer-Problems anhand eines 3×4 -Rechtecks

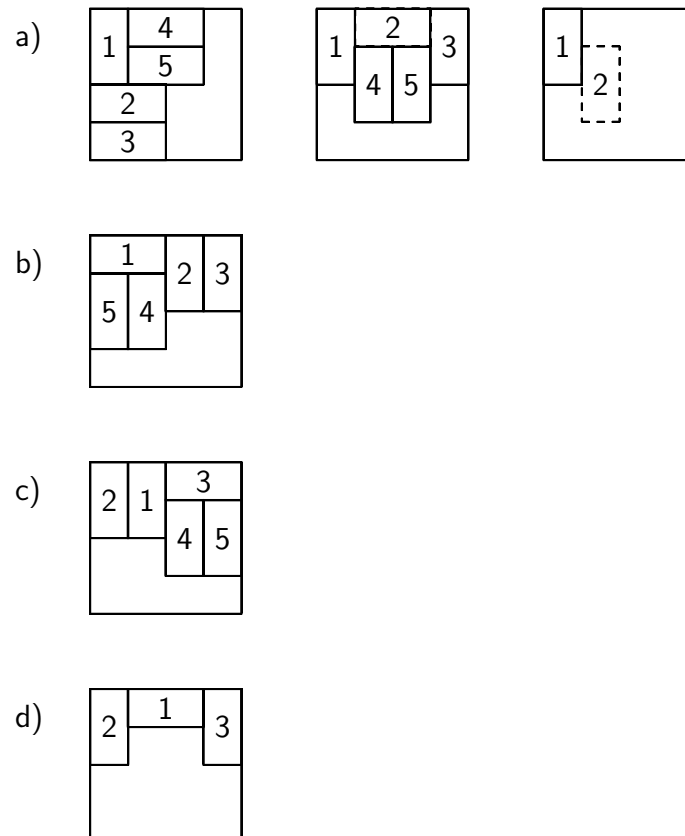


Abbildung 5.4: Schema für den Beweis des Mauer-Problems bei einem 4×4 -Quadrat

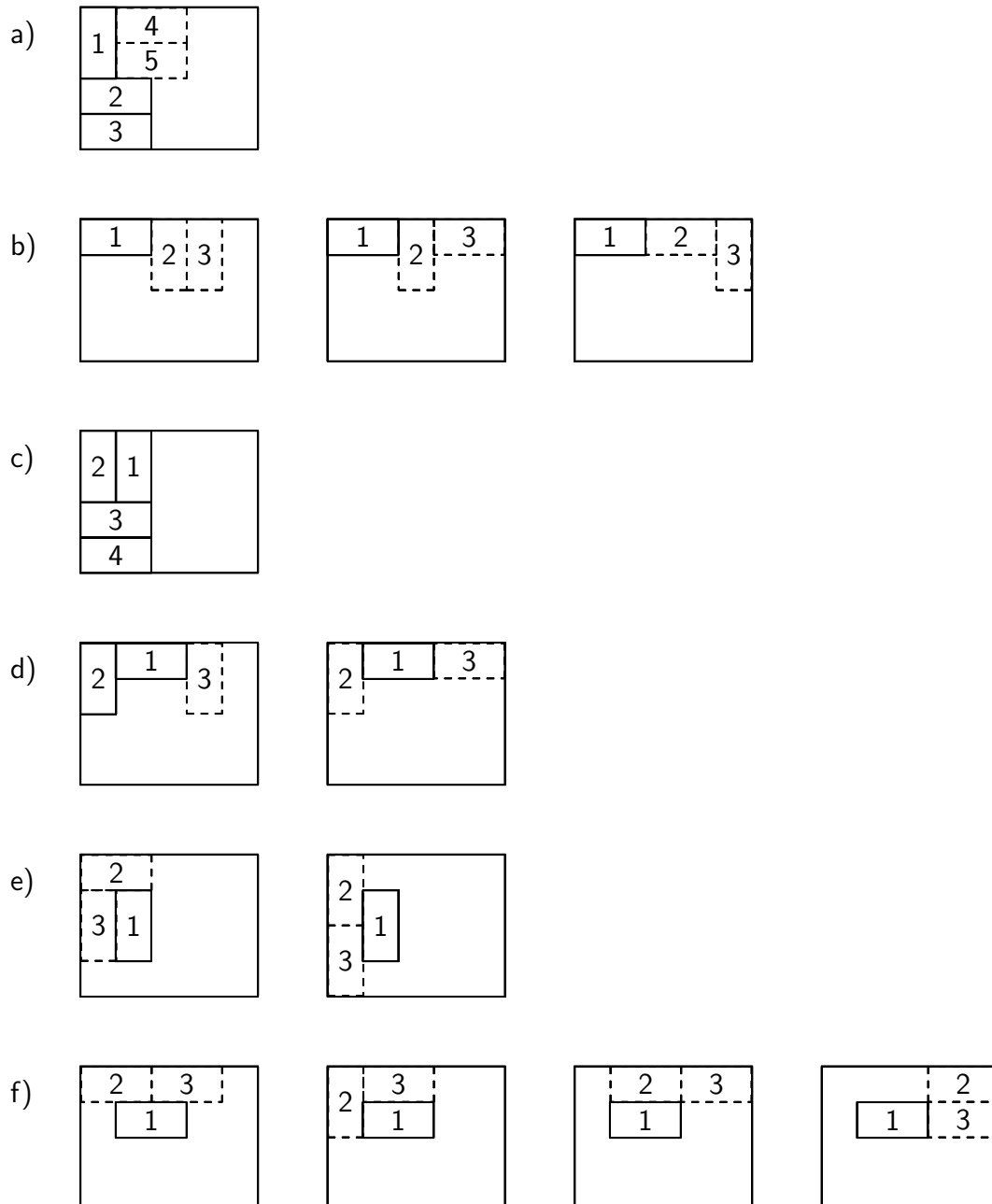


Abbildung 5.5: Schema für den Beweis des Mauer-Problems bei einem 4×5 -Rechteck

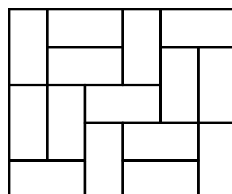


Abbildung 5.6: Eine minimale Lösung des Mauer-Problems

4 Verallgemeinerung des Mauer-Problems

Satz 5.3 Das kleinste Rechteck, das ohne Bruchlinie mit $1 \times n$ großen n -Ominos ($n > 1$) ausgelegt werden kann, ist ein $(2n + 1) \times (3n)$ -Rechteck.

Beweis: Man geht von einem beliebigen $h \times w$ -Rechteck aus, das man mit $1 \times n$ -Ominos auslegen will.

Es soll $h > n$ gelten, da sonst keine Packung ohne Bruchlinien existiert. Denn alle horizontal liegenden $1 \times n$ -Ominos, die am linken Rand des $h \times w$ -Rechtecks beginnen, würden eine solche erzeugen.

Fall 1: $h < 2n$

In diesem Fall können $1 \times n$ -Ominos sowohl vertikal als auch horizontal am linken Rand positioniert werden. Genauer gesagt, muss es genau ein $1 \times n$ -Omino geben, das vertikal liegt. Diese wird im Folgenden mit A bezeichnet. Nimmt man an, dass A in einer Ecke des $h \times w$ -Rechtecks liegt, so betrachtet man im Folgenden in Abbildung 5.7 nur jenen Teil des Rechtecks, der über dem unteren Pfeil liegt. Die anderen $1 \times n$ -Ominos, die den linken Rand berühren, müssen horizontal liegen und werden im Folgenden mit B bezeichnet. Rechts neben der Region A könnten einige vertikale $1 \times n$ -Ominos platziert werden, aber höchstens $n - 1$ Stück. Sie werden, falls sie existieren, mit C bezeichnet.

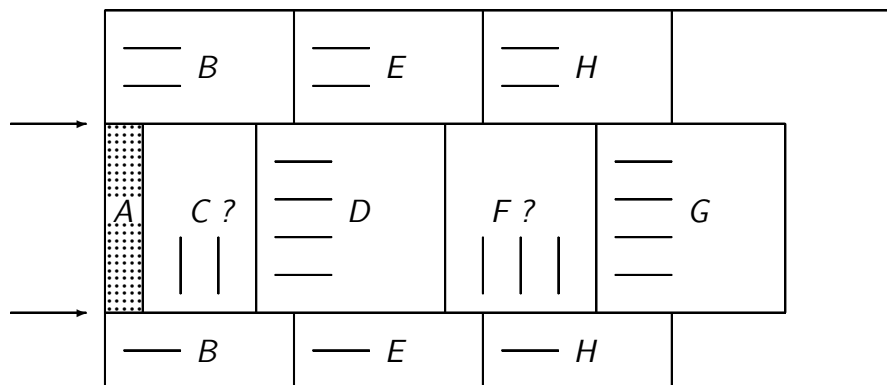


Abbildung 5.7: Beweisskizze für Satz 5.3, $h < 2n$

Die Region C kann aber nicht bis zum Rand von B reichen, da sonst eine vertikale Bruchlinie entstehen würde. Wird diese Packung bis an den rechten Rand fortgesetzt, so entsteht eine horizontale Bruchlinie genau in Höhe des oberen Pfeils in Abbildung 5.7.

Somit müssen rechts von C genau n horizontale $1 \times n$ -Ominos in einer Region D positioniert werden. Da diese Teile über den rechten Rand von B hinausgehen, benötigt man $h - n$ horizontale $1 \times n$ -Ominos, die im Folgenden mit E bezeichnet werden.

Nun könnten wiederum einige vertikale $1 \times n$ -Ominos rechts neben D in einer Region F platziert werden. Für F gilt das Gleiche wie für die Region C . Somit benötigt man n horizontale $1 \times n$ -Ominos der Region G rechts neben F .

Damit ist man aber am Anfang der Überlegungen angelangt. Wird dieser zyklischer Prozess in einem Rechteck am rechten Rand beendet, so erhält man eine horizontale Bruchlinie in Höhe des oberen Pfeils. Somit kann $h < 2n$ nicht gelten.

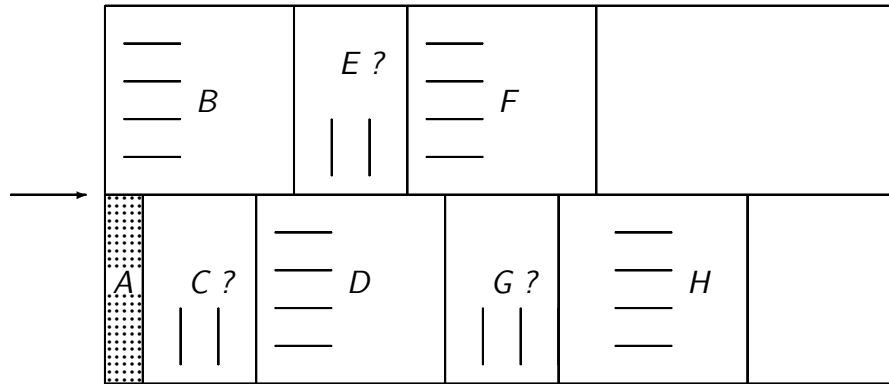


Abbildung 5.8: Beweisskizze für Satz 5.3, $h = 2n$

Fall 2: $h = 2n$

In diesem Fall gilt die gleiche Argumentation wie im ersten Fall, nur ist die Region A in einer linken Ecke angebracht. Die Überlegungen werden in Abbildung 5.8 grafisch dargestellt. Es können nun sowohl entlang des unteren als auch entlang des oberen Rand einige vertikale $1 \times n$ -Ominos rechts neben einer Region aus n horizontalen $1 \times n$ -Ominos platziert werden. Analog zum vorigen Fall können diese vertikalen Teile aber nicht bis zum Rand der zuvor horizontal gelegten $1 \times n$ -Ominos gehen, ohne eine Bruchlinie zu bilden.

Damit muss $h > 2n$ gelten.

Aus Symmetriegründen gilt weiters auch: $w > 2n$.

Im Satz von DE BRUIJN wird im nächsten Abschnitt gezeigt, dass ein $1 \times n$ -Omino nur dann ein $h \times w$ großes Rechteck auslegen kann, wenn $n|h$ oder $n|w$ gilt.

Das kleinste Vielfache von n , das für die weiteren Überlegungen in Frage kommt, ist $3n$ und die kleinste noch mögliche ganze Zahl ist $2n + 1$.

Somit besitzt die minimale Lösung des Problems die Seitenlängen $3n$ und $2n + 1$. \square

einen Zylinder. Wird nun noch die linke mit der gleichorientierten rechten Seitenkante verklebt (b), so entsteht ein Torus.

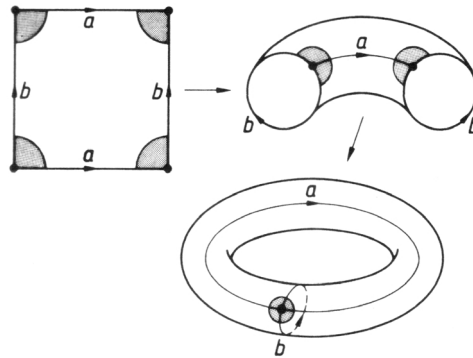


Abbildung 5.10: Topologische Entstehung eines Torus

Formt man zum Beispiel aus einem 10×10 -Quadrat einen Torus, so ist es unmöglich, ihn mit 1×4 großen Rechtecken auszulegen. Der Satz von DE BRUIJN gilt also weiterhin.

Beweis: Man färbt das Quadrat nach Abbildung 5.11, so sieht man, dass das 1×4 große Rechteck immer eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten der gleichen Farbe abdeckt, egal an welcher Stelle des Torusmantels es positioniert wird. Dabei ist zu bedenken, dass auch Null eine gerade Zahl ist. Da die Summe gerader Zahlen immer gerade ist, muss auch eine Menge aus 1×4 großen Rechtecken eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten jeder der vier Farben bedecken. Da aber jede Farbe auf dem 10×10 -Quadrat genau 25-mal vorkommt, ist die geforderte Pflasterung nicht möglich, selbst wenn das Quadrat als Torusmantel interpretiert wird.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

Abbildung 5.11: Satz von BRUIJN für einen Torus

Dieser Beweis gilt auch allgemein für Torusmäntel deren Seitenlängen a und b nicht durch 4 teilbar sind. Eine Pflasterung mit 1×4 großen Rechtecken ist weiterhin unmöglich.

Verallgemeinert man weiter, so kann ein $a \times b$ großen Torusmantel nicht mit $1 \times k^2$ großen Rechtecken ausgelegt werden, wenn a und b nicht durch k^2 teilbar sind. Für $k = 2$ wurde diese Behauptung schon bewiesen. Im allgemeinen Fall geht man analog vor: Man färbt das $a \times b$ -Rechteck mit k^2 Farben im gleichen Muster wie in Abbildung 5.11 ein.

Der Satz von DE BRUIJN gilt allerdings nicht für alle $1 \times n$ -Rechtecke, die eine Torusmantelfläche pflastern sollen. Solomon W. Golomb fand heraus, dass sich ein 10×15 großer Torusmantel mit 1×6 -Rechtecken auslegen lässt, obwohl weder 10 noch 15 durch 6 teilbar sind (siehe Abbildung 5.12). Er konnte sogar zeigen, dass dies ein Beispiel einer minimalen Packung eines $a \times b$ großen Torusmantels mit $1 \times n$ -Rechtecken ist.

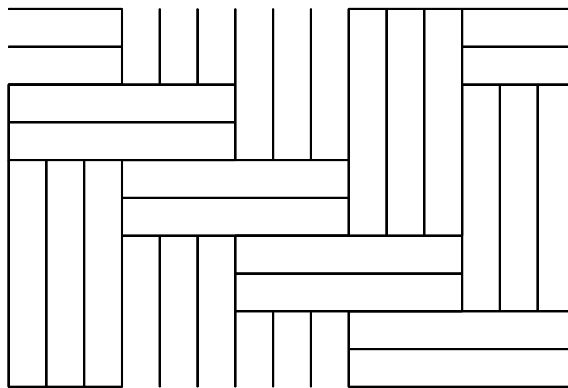


Abbildung 5.12: Ein mit 1×6 -Rechtecken gepflasterter 10×15 großer Torusmantel

7 Verallgemeinerung des Satzes von DE BRUIJN

Satz 5.5 *Ein $X \times Y$ großes Rechteck (mit $X, Y \in \mathbb{R}$) kann nur dann mit unterschiedlich großen Rechtecken ausgelegt werden, wenn zumindest eine der beiden Seitenlängen ganzzahlig (= ein Vielfaches der Einheitsstrecke e) ist. Jedes der unterschiedlich großen Rechtecke in dieser Packung muss zumindest eine Seite mit einer ganzzahligen Länge besitzen.*

Beweis: Im Folgenden bedeutet der Begriff „ganzzahlig“ immer ein Vielfaches der jeweiligen Einheitsstrecke.

Zu zeigen ist nun, dass diese neue Aussage den ursprünglichen Satz von DE BRUIJN impliziert. In die ursprüngliche Aussage des Satzes musste Folgendes gelten: a, b und $n \in \mathbb{Z}^+$.

Führt man nun eine neue Einheitsstrecke $\bar{e} = n \cdot e$ ein, so hat das auszufüllende Rechteck die Größe $\frac{a}{n} \times \frac{b}{n}$ und die n -Ominos die Größe $\frac{1}{n} \times 1$ (mit $1 = e$).

Insbesondere hat jedes n -Omino eine Seite mit ganzzahliger Länge. Die neue Formulierung garantiert jetzt, dass zumindest eine der Seitenlängen $\frac{a}{n}$ oder $\frac{b}{n}$ ganzzahlig ist. Somit muss aber a oder b (oder beide) ein Vielfaches von n sein. Dies ist aber die Aussage des Satzes von DE BRUIJN.

Der Beweis des obigen Satzes wird mittels schachbrettartiger Einfärbung geführt. Die Idee dazu stammt von Prof. Richard H. Rochberg von der Washington University und Shermann K. Stein von der University of Californien in Davis.

Beweis: Angenommen ein $X \times Y$ -Rechteck ist bereits vollständig mit unterschiedlich großen Rechtecken ausgelegt, wobei jedes dieser kleineren Rechteck eine Seite mit ganzzahliger Länge besitzt.

Man färbt nun das Rechteck in der linken unteren Ecke beginnend schachbrettartig ein, wobei die Quadrate die halbe Einheitslänge als Seitenlänge besitzen.

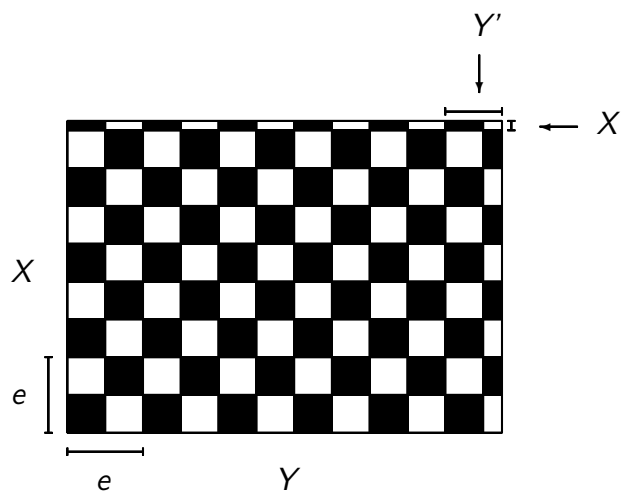


Abbildung 5.13: Schachbrettartige Einfärbung des $X \times Y$ -Rechtecks mit der halben Einheitslänge als Gitterbreite

Das führt dazu, dass genau die Hälfte der von einem dieser kleineren Rechtecken bedeckten Fläche weiß bzw. schwarz ist, da es zumindest eine Seite mit ganzzahliger Länge hat.

Da diese Aussage für jedes der kleinen Rechtecke gilt und das große $X \times Y$ -Rechteck vollständig mit ihnen ausgelegt ist, muss auch seine Fläche zur Hälfte weiß und schwarz eingefärbt sein.

Nun ist nur noch zu zeigen, dass dies die Aussage beinhaltet, dass zumindest eine Seite des $X \times Y$ -Rechtecks eine ganzzahlige Seitenlänge besitzt.

Indirekt: Angenommen keine der beiden Seitenlängen X und Y ist ganzzahlig, so kann man Folgendes sagen:

$$X' = X - [X] \quad \text{mit } [X] \text{ ist größtmögliche ganzzahlige Zahl mit } [X] \leq X$$

analog dazu

$$Y' = Y - [Y]$$

Wie aus Abbildung 5.13 klar erkennbar ist, besteht, wenn man das $X' \times Y'$ -Rechteck ausnimmt, die restliche Fläche des $X \times Y$ großen Rechtecks wieder zu gleichen Teilen aus weißer und schwarzer Fläche.

Angenommen es gilt $X' \neq 0$ und $Y' \neq 0$, so kann man nun zeigen, dass das $X' \times Y'$ -Rechteck niemals eine Fläche abdecken kann, die zu gleichen Teilen weiß und schwarz ist. Dabei sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden (siehe Abbildung 5.14).

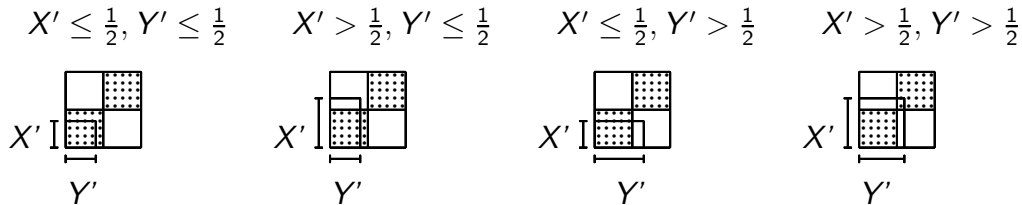


Abbildung 5.14: Die vier verschiedenen Fälle für das $X' \times Y'$ -Rechteck

Beweis: Es ist anschaulich klar, dass das $X' \times Y'$ -Rechteck in den ersten drei Fällen eine größere schwarze als weiße und im vierten Fall eine größere weiße als schwarze Fläche bedeckt. Dies kann folgenderweise überlegt werden (siehe Abbildung 5.15):

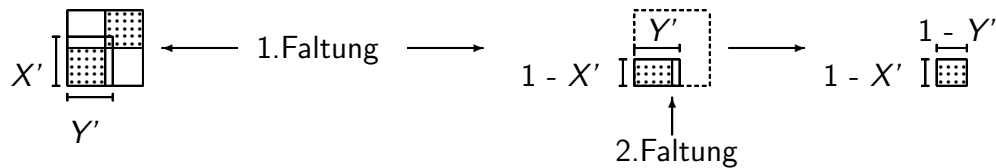


Abbildung 5.15: Beweis für den vierten Fall mittels Faltung

Zuerst faltet man das Einheitsquadrat entlang einer Gitterlinie in der halben Höhe und dann entlang der dazu orthogonalen Gitterlinie in der halben Breite. Bei dieser Faltung heben einander gleich große verschieden gefärbte Flächen auf. Es bleibt eine schwarz eingefärbte Fläche mit dem positiven Flächeninhalte $(1 - X')(1 - Y')$ übrig. \square

Kapitel 6

Verallgemeinerung der Polyominos

1 Pseudo- und Quasi-n-Ominos

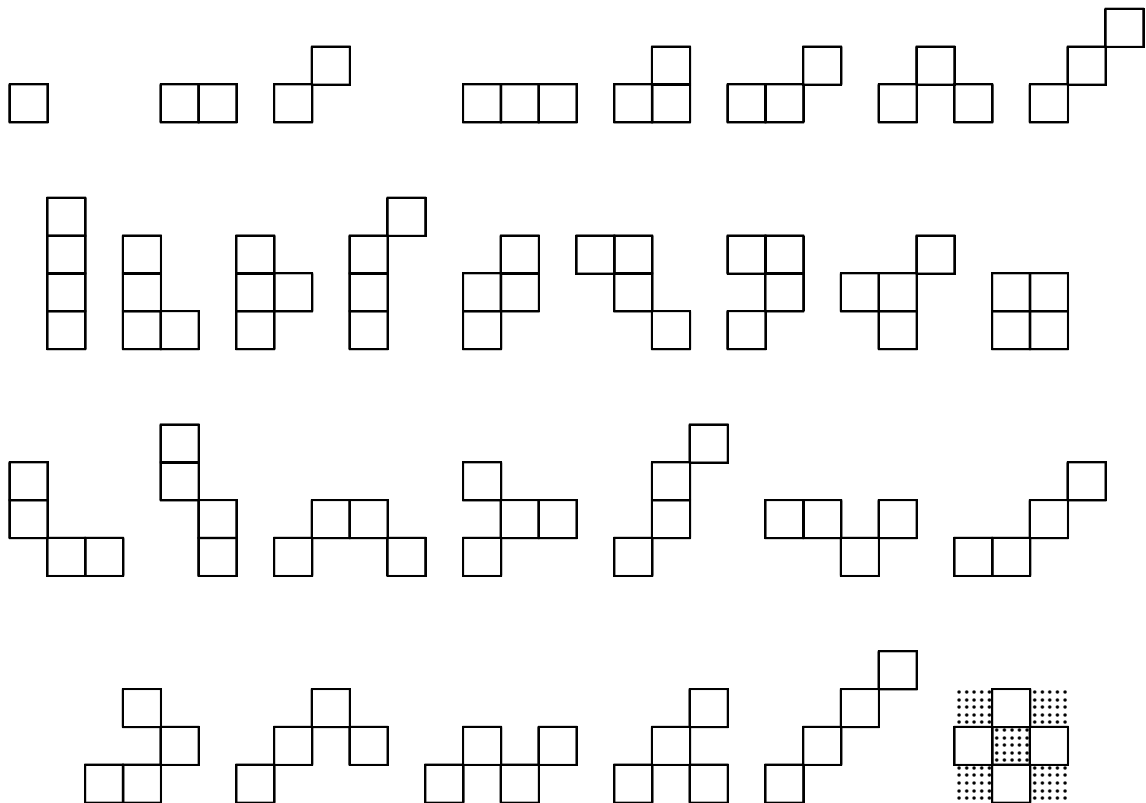


Abbildung 6.1: Pseudo-n-Ominos für $n = 1, 2, 3, 4$

Eine Möglichkeit den Begriff des Polyominos zu verallgemeinern, ist, die Forderungen über die Menge der gemeinsamen Punkte zweier Einheitquadrate zu lockern. Daraus ergeben sich zwei weitere Type von Polyominos.

Definition 6.1 Ein **Pseudo-Polyomino** oder **Pseudo-n-Omino** ist eine Figur **P**, die aus n ($n \geq 1$) kongruenten Quadraten besteht, für die gilt:

- je zwei Quadrate haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine Seite gemeinsam,
- zu je zwei verschiedenen Quadraten Q_1 und Q^* aus \mathbf{P} gibt es eine Folge $Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} Q^*$ von benachbarten Quadraten aus \mathbf{P} .

Dabei heißen zwei Quadrate **benachbart**, wenn die Menge ihrer gemeinsamen Punkte ein Punkt oder eine Seite ist.

Die Pseudo- n -Ominos für $n = 1, 2, 3, 4$ sind in Abbildung 6.1 dargestellt.

Definition 6.2 Ein **Quasi-Polyomino** oder **Quasi- n -Omino** ist eine Figur \mathbf{P} , die aus n ($n \geq 1$) kongruenten Quadraten einer ebenen Menge besteht, wobei es keine Einschränkung bezüglich des Zusammenhangs zweier Quadrate gibt.

2 Verwandte der Polyominos in der ebenen Geometrie

In den bisherigen Überlegungen bestanden die Polyominos immer aus Quadraten. Mit ihnen kann die Ebene im Sinne einer regulären Zerlegung vollständig ausgelegt werden, so dass man die Ebene selbst als ein Polyomino bestehend aus unendlich vielen Quadraten interpretieren kann.

Definition 6.3 Eine Zerlegung $\mathbf{P} = \{T_i\}$ in Polygone heißt **regulär**, wenn sie normal¹⁾ ist und wenn die Fliesen (konvex) regulär und kongruent sind. Wobei die Polygone T_i als Fliesen der Zerlegung \mathbf{P} bezeichnet werden.

Reguläre Zerlegungen der Ebene (in kongruente reguläre Polygone) gibt es nur für Drei-, Vier- und Sechsecke. Somit kann der Begriff des Polyominos folgenderweise erweitert werden:

Definition 6.4 Ein **r -reguläres Polyomino** ist eine Figur \mathbf{P} , die aus n ($n \geq 1$) kongruenten regulären r -Ecken (mit $r = 3, 4$ oder 6) besteht und für die die Bedingungen der Definition des n -Ominos gelten.

Analog zur Namensgebung der Polyominos von Solomon W. Golomb werden die 3-regulären Polyominos, die aus gleichseitigen Dreiecken gebildet werden, von Thomas H. O'Beirne als **Polydiamanten** bezeichnet. Es gibt Diamanten, Triamanten, Tetriamanten, Pentiamanten, Hexiamanten, ... allgemein **n -lamanten**.

¹⁾ Eine Zerlegung $\mathbf{P} = \{T_i\}$ in Polygone heißt **normal**, wenn je zwei verschiedene Fliesen entweder keinen Punkt oder genau eine Ecke oder eine Seite gemeinsam besitzen.

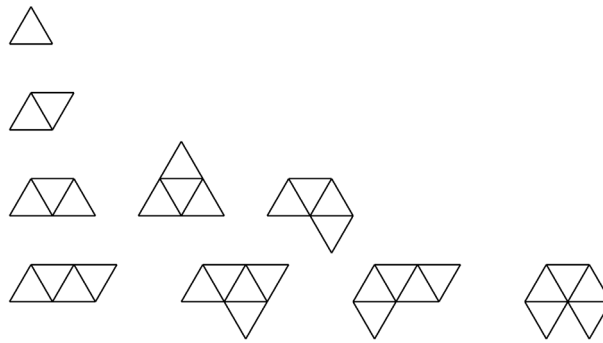


Abbildung 6.2: Übersicht über die n -lamanten bis $n = 4$

Polyominos, die aus n kongruenten gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecken gebildet werden, heißen in Anlehnung an das Diabolo **Polyabolos**. Dabei berühren sich zwei benachbarte Dreiecke immer entlang gleichlanger Seiten.

David Klarner bezeichnete die 6-regulären Polyominos als **Polyhex**.

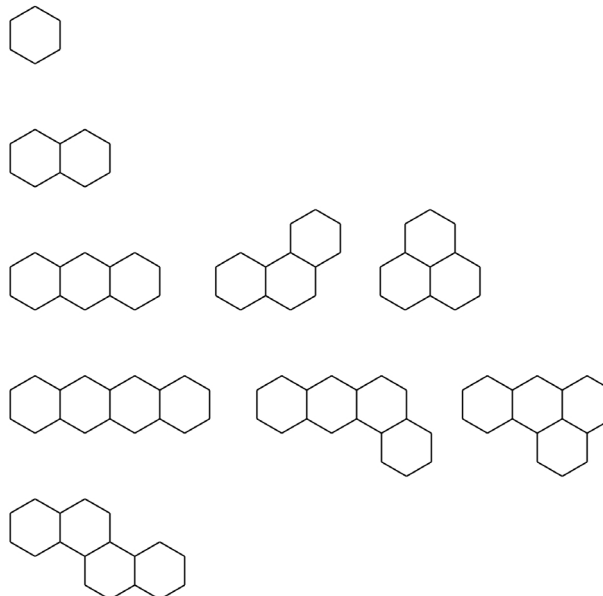


Abbildung 6.3: Übersicht über die Polyhex bis $n = 4$

Mit Polyamanten und Polyhex können analog zu Polyominos aus Quadraten wieder verschiedene Verpackungsaufgaben gestellt werden, auf die hier aber nicht mehr eingegangen wird.

Kapitel 7

Polyominoes im 3-dimensionalen Raum

Analog zur Ebene dienen im Raum Einheitswürfel als Grundbausteine für die räumlichen Polyominoes, die der Definition der ebenen Polyominoes entsprechen, wobei neben Ecken und Kanten noch Seitenflächen der Würfel entsprechend einzubeziehen sind. Zwei Würfel heißen demnach dann benachbart, wenn sie eine Seitenfläche als gemeinsame Punktmenge besitzen.

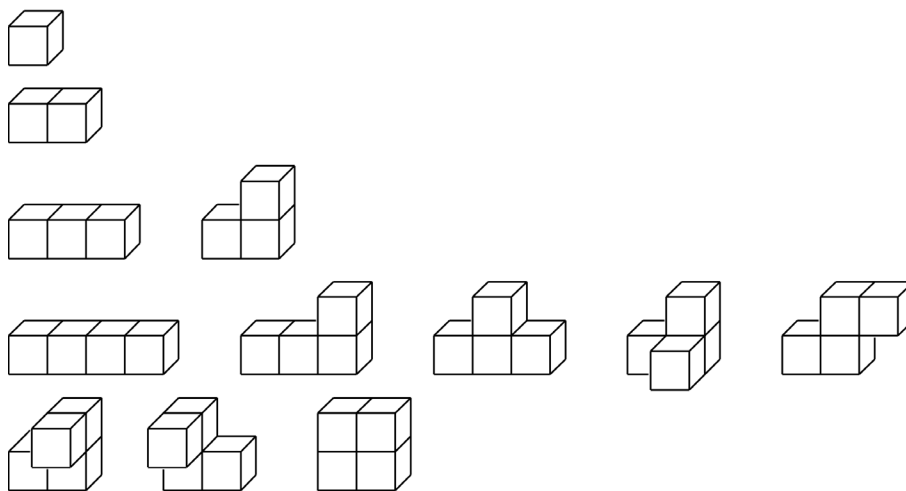


Abbildung 7.1: Übersicht über die räumlichen Polyominoes bis auf Kongruenz ($n \leq 4$)

Im Raum können analog zur Ebene zwei Figuren gleichsinnig oder ungleichsinnig kongruent sein. Eine Figur geht bei einer Spiegelung an einer Ebene in eine zu ihr ungleichsinnige Figur über.

Für viele Überlegungen ist dieses Faktum im Raum relevanter als in der Ebene, in der man eine ungleichsinnige Kongruenz durch Wenden des Polyominoes praktisch durchführen kann. Da dies im Raum aber nicht möglich ist, muss bei räumlichen Packungen auf Kongruenz und Nichtkongruenz geachtet werden. Betrachtet man nur gleichsinnig kongruente Polyominoes, so gibt es acht räumliche Tetrominoes, die in Abbildung 7.1 gemeinsam mit anderen Polyominoes gezeigt werden.

n	Anzahl der räumlichen Polyominos
1	1
2	1
3	2
4	8
5	29
6	166
7	1023
8	6922
9	48311
10	346543
11	2522522

Tabelle 7.1: Anzahl der räumlichen Polyominos bis $n = 11$

1 Packungen mit räumlichen Polyominos

Es gibt sehr viele Problemstellungen mit räumlichen Polyominos, die als Denkspiele auf unterhaltsame Weise die Schulung des räumlichen Wahrnehmungs-, Vorstellungs- und Darstellungsvermögens unterstützen können.

2 Packung mit den räumlichen Pentominos

Aufgabe: Aus den zwölf räumlichen Pentominos soll ein $3 \times 4 \times 5$ großer Quader zusammengestellt werden.

Am einfachsten lassen sich solche Aufgaben durch Zusammensetzen aus Holz oder Styropor gebastelten Polyominos lösen. Eine der vielen verschiedenen Lösungen wird in Abbildung 7.2 gezeigt.

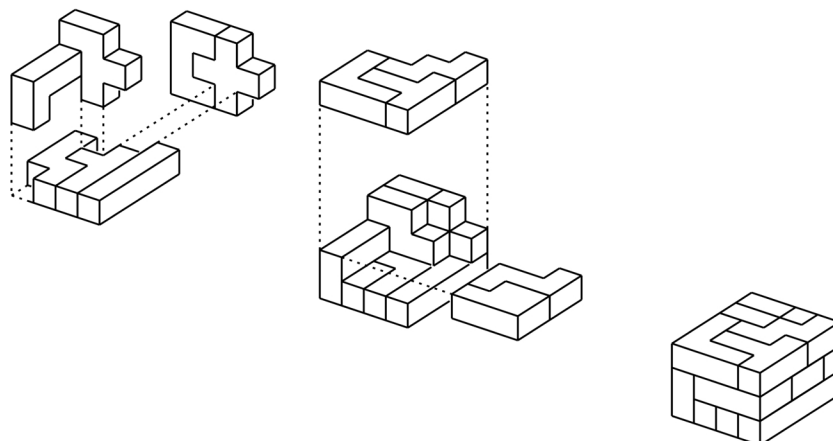


Abbildung 7.2: Konstruktion eines $3 \times 4 \times 5$ großen Quaders aus den 12 räumlichen Pentominos

3 SOMA-Würfel

Der SOMA-Würfel ist wohl die bekannteste Packungsaufgabe mit räumlichen Polyominos. Er wurde von Dänen Piet Hein während einer Vorlesung von Werner Heisenberg über Quantenphysik erfunden.

Aus [2]: „Während der bekannte deutsche Physiker über die Zerlegung eines Raumes in Würfel sprach, glitt durch Piet Heins rege Phantasie der blitzschnelle Einfall des folgenden eigenartigen geometrischen Satzes. Betrachtet man alle unregelmäßigen Körper, die aus nicht mehr als vier gleichgroßen und an den Seitenflächen verbundenen Würfeln bestehen, so lassen sich diese Figuren zu einem großen Würfel zusammensetzen.“

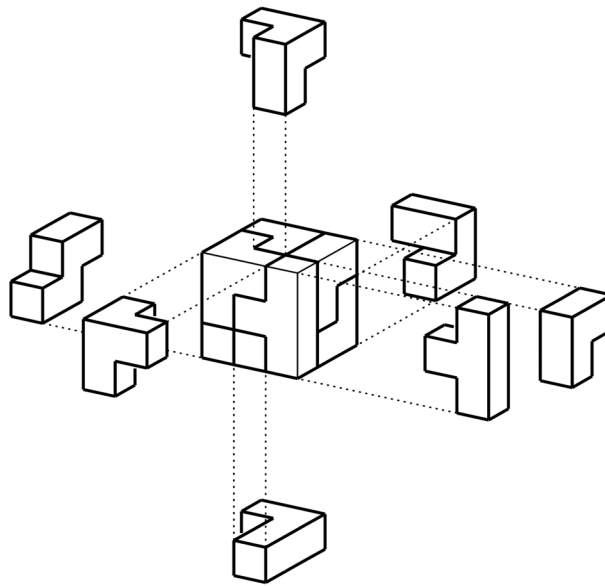


Abbildung 7.3: Der SOMA-Würfel

Eine Form heißt dabei unregelmäßig bzw. nichtregulär, wenn sie mindestens eine Ecke besitzt. Die einfachste nichtreguläre Form wird durch drei Würfel in der Formation G (siehe Abbildung 7.4) gebildet. Mit vier Würfeln stehen alle räumlichen Tetrominos ausser den Formen I und O zur Verfügung. Insgesamt besitzen diese Körper $3 + 6 \cdot 4 = 27$ Einheitswürfel und sie lassen sich zu einem $3 \times 3 \times 3$ großen Würfel zusammensetzen. Abbildung 7.3 zeigt eine von insgesamt 11520 verschiedenen Lösungen (siehe Satz 7.2).

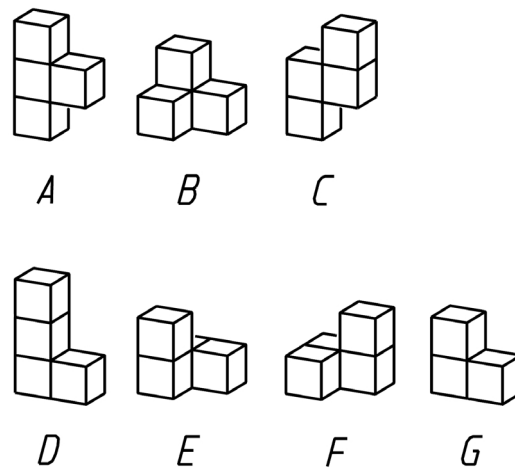


Abbildung 7.4: Die sieben Teile des SOMA-Würfels

Nach [4]:

Im Folgenden werden zwei Sätze zum SOMA-Würfel bewiesen:

Satz 7.1 *Es gibt genau 240 nichtisomorphe Lösungen des SOMA-Würfels.*

Satz 7.2 *Es gibt genau 11520 Lösungen des SOMA-Würfels.*

Dabei gilt:

Definition 7.1 Zwei Lösungen S_1 und S_2 heißen genau dann **isomorph**, wenn es ein Produkt von Transformationen (Drehungen und Spiegelungen) derart gibt, dass S_1 zum Bild von S_2 kongruent ist.

Um die Position eines einzelnen Polyominos fixieren zu können, nummeriert man die Einheitswürfel des $3 \times 3 \times 3$ -Würfel nach Abbildung 7.5 durch, wobei die mittlere und die unterste Ebene analog zur Deckebene nummeriert werden.

Die Bezeichnung $A(23, 25, 26, 27)$ bedeutet, dass der Teil A aus den Einheitswürfeln mit den Nummern 23, 25, 26, 27 besteht. Die Würfel 1, 3, 7, 9, 19, 21, 25 und 27 werden Ecken des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels genannt.

Angenommen man besitzt schon eine Lösung, so kann man folgende notwendigen Bedingungen für die Positionen einiger Polyominos herleiten.

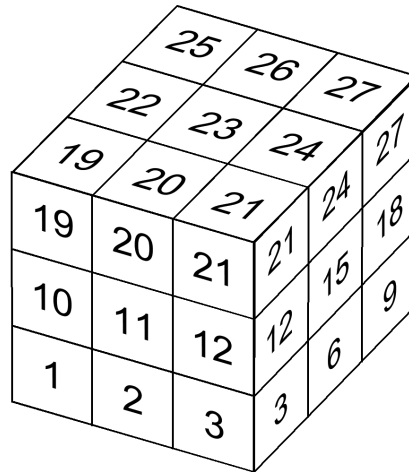


Abbildung 7.5: Die Nummerierung des SOMA-Würfels

Lemma 7.1 *Der Teil A beinhaltet 2 Ecken des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels.*

Beweis: Es ist klar ersichtlich, dass

- jedes der Teile B , C , E , F und G höchstens 1 Ecke enthält,
- D 0, 1 oder 2 Ecken beinhaltet,
- A 0 oder 2 Ecken enthält.

Da der $3 \times 3 \times 3$ -Würfel genau 8 Ecken besitzt, gilt die Behauptung. □

Jener Würfel von A bzw. B , der von drei Würfeln umgeben ist, wird auch zentraler Würfel von A bzw. B genannt.

Lemma 7.2 *Der zentrale Würfel von B besitzt eine ungerade Nummer.*

Beweis: Jedes Paar benachbarter Würfel im $3 \times 3 \times 3$ -Würfel besitzt eine gerade und eine ungerade Nummer. Damit

- hat jedes der Teile C , D , E und F 2 gerade und 2 ungerade Nummern,
- besitzt der Teil G 2 gerade und 1 ungerade oder 1 gerade und 2 ungerade Nummern,
- hat jedes der Teile A und B 3 gerade und 1 ungerade oder 1 gerade und 3 ungerade Nummern.

Da der $3 \times 3 \times 3$ -Würfel genau 14 ungerade und 13 gerade Nummern besitzt, hat der zentrale Würfel von A genau dann eine gerade Nummer, wenn der zentrale Würfel von B eine ungerade Nummer besitzt. Da aus Lemma 7.1 folgt, dass der zentrale Würfel von A eine gerade Nummer hat, gilt die Behauptung. □

Lemma 7.3 *Zwei verschiedene Lösungen S_1 und S_2 , in denen sich die Teile A und B jeweils an derselben Position befinden, sind nichtisomorph.*

Beweis: Indirekt: Angenommen es gibt Transformationen, die S_1 in S_2 transformieren, dann können diese als Produkt höchstens einer Spiegelung und mehrerer Drehungen dargestellt werden. Deshalb kann sich A nur dann in den Lösungen S_1 und S_2 in derselben Position befinden, wenn das Produkt dieser Drehungen die Identität ist. Da sich diese Argumentation auch analog für B anwenden lässt, kann in dem Produkt von Transformationen keine Spiegelung vorkommen. Damit ist das Produkt aber die Identität und die beiden Lösungen S_1 in S_2 stimmen im Widerspruch zur Annahme überein. \square

BEWEIS FÜR SATZ 7.2:

1. Jede der 240 nichtisomorphen Lösungen des SOMA-Würfels kann eindeutig in ihre Normalform (zum Beispiel $A(1, 2, 3, 11)$ und B enthält keinen der Würfel 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27) transformiert werden. $A(1, 2, 3, 11)$ kann man allein durch Drehungen erhalten. Erfüllt B die gestellte Forderung nicht, so spiegelt man die gedrehte Lösung an der Symmetrieebene von A . Nach Lemma 7.3 ist das Produkt dieser Drehungen und der eventuell erforderlichen Spiegelung eindeutig.
2. Ausgehend von einer Lösung des Würfels in Normalform kann man durch Drehung 24 verschiedene Lösungen erhalten. Für jede dieser Lösungen gibt es durch Spiegelung zwei mögliche Positionen für B , das heißt insgesamt gibt es 48 verschiedene Lösungen. Es ist klar, dass keine zwei dieser Lösungen diegleiche Herleitung besitzen. Da es nach Satz 7.1 genau 240 nichtisomorphe Lösungen des SOMA-Würfels gibt, ergeben sich insgesamt $240 \cdot 48 = 11520$ verschiedene Lösungen. \square

BEWEIS FÜR SATZ 7.1:

Bei den vorangegangenen Überlegungen ist man davon ausgegangen, dass $A(1, 2, 3, 11)$ und B keinen der Würfel 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 enthält. Die zwölf möglichen Positionen für B werden in Tabelle 7.2 aufgelistet. Nun kann man weiters bei jeder Kombination von A und B alle möglichen Positionen von C und D und den anderen Teilen bestimmen. Diese aufwendige Arbeit führte H.-H. Larisch 1979 in seiner Diplomarbeit auf fast 100 Seiten durch. Das Ergebnis für die Anzahl der nichtisomorphen Lösungen bei jeweiliger Position von B ist in Tabelle 7.2 angegeben. \square

Nr.	Position von B	Anzahl der Lösungen
1	4, 5, 8, 14	4
2	4, 7, 8, 16	53
3	4, 13, 14, 16	6
4	4, 10, 13, 14	11
5	10, 13, 14, 22	4
6	13, 14, 16, 22	2
7	8, 14, 16, 17	5
8	14, 16, 17, 26	0
9	10, 19, 20, 22	93
10	14, 20, 22, 23	3
11	14, 22, 23, 26	2
12	16, 22, 25, 26	57
		240

Tabelle 7.2: Anzahl der nichtisomorphen Lösungen

Literaturverzeichnis

- [1] Asperl, Andreas: *Kopfgeometrie und Schulung der Raumvorstellung* Skriptum, ARGE DG/GZ Wien, Mai 1998
- [2] Gardner, Martin: *Mathematische Rätsel und Probleme* – 3.Auflage – Braunschweig: Vieweg & Sohn GmbH, 1968
- [3] **Golomb, Solomon W.: Polyominoes: Puzzels, Patterns, Problems, and Packings. – Zweite Auflage. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1994**
- [4] Gronau, Hans-Dietrich and Hans-Herbert Larisch: *On the SOMA cube puzzle. – Beiträge zur Algebra und Geometrie* **12** (1982), S. 93 - 95.
- [5] Hanneforth, Dirk: *Spielen und Puzzeln mit Quadraten* – *Mathe-Welt* Heft 80, Erhard Friedrich Verlag, Velber 1997
- [6] **Martin, George E.: Polyominoes: A Guide to Puzzels and Problems in Tiling. – The Mathematical Association of America (Incorporated) – Library of Congress Catalog Card Number 91-61585, 1994**
- [7] Martin, George E.: *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry.* – 3. Auflage – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hangkong; London; Mailand; Paris; Santa Clara; Singapur; Tokio: Springer Verlag, 1994
- [8] **Quaisser, Erhard: Diskrete Geometrie: Einführung, Probleme, Übungen. – Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1994**
- [9] Redelmeier, D. H.: *Counting Polyominoes: Yet Another Attack.* – *Discrete Mathematics* vol. 36, no. 2, pp. 191-203, 1981

Interessante Internetadressen

ad Kapitel 2:

<http://www.gamepuzzles.com/polyintr.htm>

<http://www.math.rice.edu/~lanius/Lessons/Polys/poly1.html>

<http://www.mathworld.wolfram.com/Polyomino.html>

<http://pubweb.acns.nwu.edu/~gbuehler/index.html>

ad Kapitel 4:

<http://www.ma.utexas.edu/users/smmg/radin.html>

<http://www.ctaz.com/~dmn1/gardner.htm>

<http://commsci.usc.edu/faculty/golomb.html>

ad Kapitel 5:

<http://www.math.albany.edu:8000/math/pers/polyominos.html>

<http://diamond.idbsu.edu/~sulanke/PAPER1/PergolaSulanka/node1.html>

ad Kapitel 6:

<http://www.mathworld.wolfram.com/Polyabolo.html>

<http://www.mathworld.wolfram.com/Polyiamond.html>

ad Kapitel 7:

<http://home8.inet.tele.dk/bundgard/SOMA/SOMALINK.HTM>

<http://home8.inet.tele.dk/bundgard/SOMA/HISTORY.HTM>

<http://wwwcip.rus.uni-stuttgart.de/~mas21424/jufo.htm>