

Fassung vom 19.10.99, vorgetragen:

24. Kolloquium Diff-geom. Darmstadt (14.5.99) / Math.-didakt. Sem. U Karlsruhe (2.12.99) / Lehrer-Fortbildg. Strobl (9.11.00)/

3. Thüringer Geometrietag, Jena (1.12.00)

Geometrisches zum NEWTON-Verfahren

Gerhard Geise, Dresden

0 Motivationen

Ende der 70er Jahre hat der Autor vor Schülern ('Mathematik-Olympioniken') Vorträge zu Themen wie '*Geometrie und Rechnen*' gehalten. Manchmal wurden Betrachtungen angeregt, die über das Anliegen einer Schülerförderung hinaus ein eigenständiges Interesse zu verdienen schienen und gelegentlich Kollegen und Lehrern vorgetragen wurden. So der folgende Beitrag über *geometrische Interpretationen und (im weiten Sinne) Konstruktionen eines Iterationsschrittes nach dem NEWTON-Verfahren*¹⁾.

Motivationspunkte für die *Arbeit mit Schülern* waren: Die ebene Geometrie der Schule kennt (Punkt \rightarrow Punkt)-Abbildungen, aber nicht (Punkt \rightarrow Gerade)-Abbildungen. Eine solche Abbildung, die (interessierten) Schülern gut zugänglich gemacht werden kann, ist die Polarität am Kreis. Das führt auf die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Sie sind sogen. *exakte* Konstruktionen. Doch der Schnitt Gerade – Kreis ist, wie der Schnitt Kreis – Kreis, die *Konstruktion* einer *quadratischen Irrationalität*. Deren *Berechnung* kann nur *iterativ* erfolgen. Jeder Iterationsschritt kann in eine exakte Konstruktion übersetzt werden. Natürlich ist der Aspekt wichtig, daß keinesfalls Rechnung durch Konstruktion ersetzt werden soll, sondern daß geometrische Interpretation(en) die Einsicht in Funktionsweise und Verallgemeinerungsfähigkeit von Rechenschritten und -verfahren fördern kann.

Das *allgemeine Anliegen* betrifft das *NEWTONsche Iterationsverfahren*: Dieses behandelt ein System aus n Gleichungen für n Unbekannte originär als *Nullstellenaufgabe im \mathbf{R}^n* . In der bekannten geometrischen Deutung eines NEWTON-Iterationsschrittes ist sie eine *Schnittaufgabe im \mathbf{R}^{n+1}* . Sie wird hier für die Fälle $n = 1$ und $n > 1$ unterschieden, aber nur für $n = 1$ und $n = 2$ beschrieben. Für $n = 2$ ist sie im Sinne klassischer darstellender Geometrie die Lösung der Aufgabe "mittels räumlicher Deutung." Für $n = 1$ hat man analog das Lösen der Aufgabe "mittels Konstruktion in einer Ebene durch die Gerade".

¹⁾ Aus einer *Materialsammlung* "Geometrie des NEWTONschen Iterationsverfahrens ..." mit Datum Juli 1980. Die dort angeführte Literatur ist bis auf Ausnahmen nicht weiter ergänzt worden! – "NEWTON-Verfahren" der Kürze wegen, genauer wohl NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Vgl. etwa STRUBECKER, K.: *Einf. in die höhere Mathematik*, Bd. II: *Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen*. München Wien¹1967, S.646 ff.

Ist $n > 1$, so ist die im \mathbf{R}^n gestellte Nullstellenaufgabe unmittelbar auch *Schnittaufgabe im \mathbf{R}^n* (Schnitt von n Hyperflächen im \mathbf{R}^n). Bei dieser Schnittaufgabe kann für *algebraische Gleichungssysteme* einem NEWTON-Iterationsschritt eine neue geometrische Interpretation gegeben werden; sie ist (natürlich) mit der bekannten verträglich. Dies geschieht nach folgendem *Programm*: Zwei bekannte Sachverhalte sind geeignet, dem NEWTON-Verfahren geometrisch-konstruktive Aspekte abzugewinnen. Der eine betrifft Nullstellenaufgaben im \mathbf{R}^n als Schnittaufgaben im \mathbf{R}^{n+1} (Teilabschnitt **0.1**) und der andere, als "Anwendung" für $n = 1$, die iterative Quadratwurzelberechnung, also das Lösen der speziellen algebraischen Gleichung $x^2 - a = 0$ (Teilabschnitt **0.2**). Für sie kann *unmittelbar in \mathbf{R} die Zerlegung eines NEWTON-Schritts in zwei geometrische Teil- oder NEWTON-Halbschritte* abgelesen werden. Nach Einbetten in den \mathbf{R}^2 bieten sich neben der Konstruktion für den Ganzschritt aufgrund der bekannten Deutung konstruktive Realisierungen für die Halbschritte an, die "im Schnitt" mit \mathbf{R} eine geometrische Interpretation "schon" in \mathbf{R} besitzen. Diese lassen vermuten, daß auch zu $n > 1$ für im \mathbf{R}^n gegebene algebraische Gleichungssysteme eine gleichartige analytische Zerlegung und geometrische Deutung "gleich" im \mathbf{R}^n möglich ist.

Dazu bringt Abschnitt **1** das NEWTON-Verfahren in Erinnerung. Abschnitt **2** zeigt, wie für algebraische Gleichungssysteme im \mathbf{R}^n ein NEWTON-Schritt in zwei NEWTON-Halbschritte in \mathbf{R}^n zerlegt werden kann. Diese Zerlegung erlaubt gewisse Einblicke in die *Geometrie* des NEWTON-Verfahrens für diese Gleichungssysteme ²⁾. Dazu vermittelt Abschnitt **3** für die Aufgabenklasse Schnitt zweier Kegelschnitte erste Eindrücke. Dabei liefert das Schnittverhalten des von den beiden Kegelschnitten aufgespannten Büschels mit der uneigentlichen Geraden eine (erste) Klasseneinteilung. Hier wird nur die Teilklasse "Das Büschel enthält zwei Parabeln" betrachtet. Speziell erweist es sich als reizvoll, das NEWTON-Verfahren im Unendlichen – das die numerische Mathematik naturgemäß nicht interessiert – und jene Punkte, die als 'verbotene' Startpunkte bekannt sind, zu untersuchen.

0.1 Nullstellen- und Schnittaufgaben

Zum Einbetten einer im \mathbf{R}^n gestellten Nullstellenaufgabe in den \mathbf{R}^{n+1} werden die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ betrachtet.

²⁾ Es ist "*Geometrie* eines Iterationsverfahrens" kein scharf umrissener Begriff. Hier ist gemeint: Was kann dem Verfahren bzw. seinen Schritten an 'geometrischer Interpretation' gegeben werden? Die numerische Mathematik kennt die Forderung der Invarianz der Iterationsfolge gegenüber affinen Transformationen und verlangt von Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung, daß sie diese oder die Invarianz gegenüber einer anderen Gruppe aus

Eine Gleichung mit einer Unbekannten:

Die Nullstellenaufgabe:

(1) Zu $f = f(x)$ ermittle x^* mit $f(x^*) = 0$

wird durch die äquivalente *Schnittaufgabe*

(2)
$$\begin{cases} y = s \cdot f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

mit freiem Skalierungsfaktor $s (\neq 0)$ bzw. die äquivalenten *Schnittaufgaben*:

(3)
$$\begin{cases} y = s \cdot f(x) + g(x, y) \cdot y \\ y = 0 \end{cases}$$

mit i. w. frei wählbarer Funktion $g(x, y)$ ersetzt.Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

Die Nullstellenaufgabe

(1)
$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

wird durch die äquivalente *Schnittaufgabe*

(2)
$$\begin{cases} z = s_1 \cdot f_1(x, y) \\ z = s_2 \cdot f_2(x, y) \\ z = 0 \end{cases}$$

mit freien Skalierungsfaktoren $s_1, s_2 (\neq 0)$ bzw. die äquivalenten *Schnittaufgaben*:

(3)
$$\begin{cases} z = s_1 \cdot f_1(x, y) + g_1(x, y, z) \cdot z \\ z = s_2 \cdot f_2(x, y) + g_2(x, y, z) \cdot z \\ z = 0 \end{cases}$$

mit i. w. frei wählbaren Funktionen $g_1(x, y, z)$ und $g_2(x, y, z)$, ersetzt.

Auf (2) basiert die geläufige geometrische Deutung eines Iterationsschrittes des NEWTON-Verfahrens. Sie liefert für $n = 1$ das bekannte Bild ³⁾, das die *Geometrie* des NEWTON-Verfahrens zu erschöpfen scheint. Eine analoge Darstellung für $n = 2$ ist nicht bekannt; Bild 1. Jedes der Bilder liefert das Motiv für die *Linearisierung*, d. i. das Ersetzen der nichtlinearen Aufgabe (1)/(2) durch eine Folge aus linearen Aufgaben. Die Deutung ist allgemeingültig, da die Funktionen zwar gewisse analytische Eigenschaften besitzen müssen, aber Forderungen an ihre Natur (algebraisch – transzendent) nicht gestellt werden.

Durch (3) als "Verallgemeinerung" von (2) wird die geometrische Ausbeute gefördert. Dies kann folgendes *Beispiel* deutlich machen: Es sei (1) [Fall $n = 1$] die spezielle Nullstellenaufgabe $x^2 - a = 0$ ($a > 0$). Dann bedeutet (2), die Parabel

(4₁) $p: y = s \cdot (x^2 - a)$

mit der x -Achse zu schneiden. Nicht nur in der Schule wird die Parabel als konstruktiv weniger handlich angesehen werden (um den Platzbedarf einschränken zu können, ist i. a. eine Skalierung nötig). Daher wird zu (3) mit der frei verfügbaren Funktion $g(x, y)$ gewechselt! Sie werde so gewählt, daß die erste Gleichung quadratisch bleibt. Das leistet der Ansatz

affin-linearen Transformationen bewahrt. Vgl. etwa DEUFLHARD, P.; HEINDL, G.: *Affine invariant convergence theorems for Newton's method and extensions to related methods*. SIAM J. Numer. Anal. 16(1979)1, 1-10.

³⁾ Vgl. etwa STRUBECKER, K.: *Einf. i. d. höhere Mathematik*, Bd. II: *Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen*. München Wien ¹1967, S. 647.

$g(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$ mit frei wählbaren a_0, a_1, a_2 (in die s einbezogen ist),

und (3) wird zu

$$\begin{cases} x^2 + a_1 \cdot xy + a_2 \cdot y^2 + (a_0 - 1) \cdot y - a = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Die erste Gleichung gibt ein durch die a_0, a_1, a_2 inhomogen parametrisiertes *Bündel aus Kegelschnitten* durch die *Lösungspunkte* $u_{li} = (-\sqrt{a} \ 0)^\top$ und $u_{re} = (\sqrt{a} \ 0)^\top$ der Schnittaufgabe an. Dieses wird einen Lehrer zu einer ganzen Reihe von Betrachtungen veranlassen können. Insbesondere führt die Wahl $a_1 = 0, a_2 = 1$ auf das *Kreisbüschel* mit a_0 als Parameter durch die Lösungspunkte. Es enthält für $a_0 = 1$ den Kreis

$$(4_2) \quad k: \quad x^2 + y^2 = a.$$

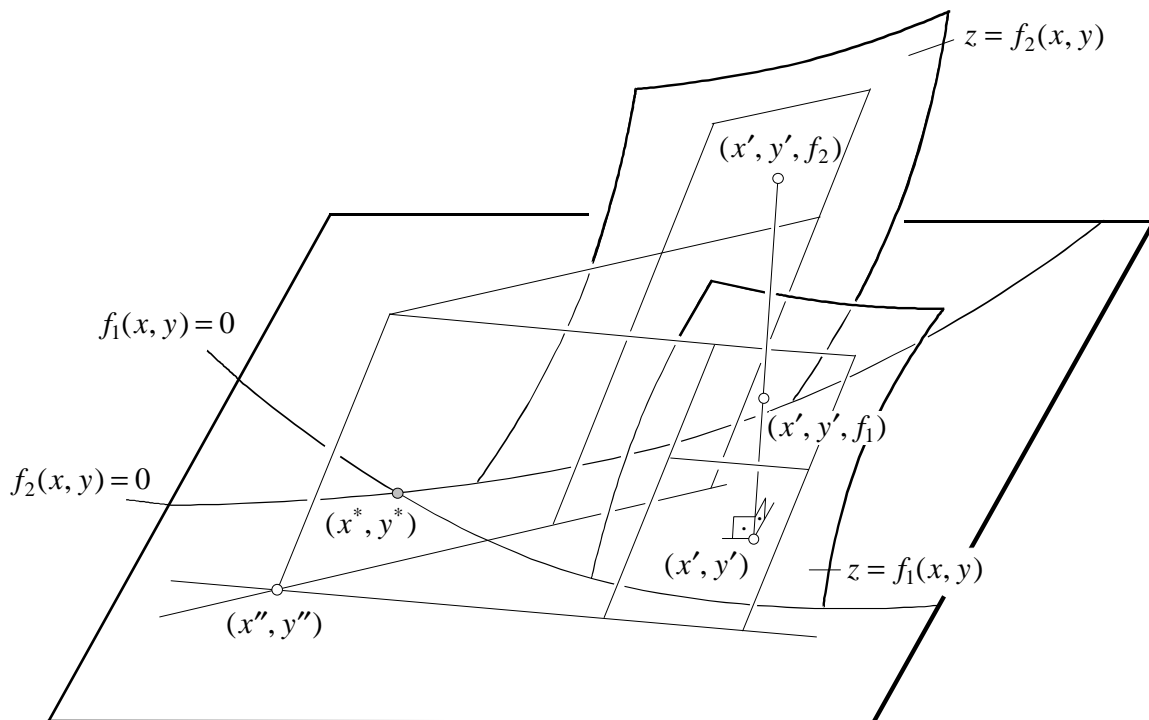


Bild 1. Geometrische Deutung eines NEWTONschen Iterationsschrittes bei 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten: Über dem Iterationspunkt (x', y') wird die Fläche $z = f_1(x, y)$ im Punkt $(x', y', f_1(x', y'))$ und die Fläche $z = f_2(x, y)$ im Punkt $(x', y', f_2(x', y'))$ je durch ihre Tangentialebene ersetzt. Der Schnitt ihrer Spuren in $z = 0$ ist der neue Iterationspunkt (x'', y'') .

Im folgenden Teilabschnitt treten die Parabel p (4₁) und der Kreis k (4₂) (wie jeder Kegelschnitt aus dem Bündel) als für das Lösen der Aufgabe dem Prinzip nach gleichwertig in Erscheinung. Die Polarität am Kreis k kann durch Konstruktion mit (hier unterdrücktem) THALESkreis und "Rechtwinkel-Haken" beherrscht werden, von der Polarität an der Parabel p wird vor allem verwendet, daß die Mittellinie von Pol und Polare Tangente an die Parabel ist.

0.2 Zur Geometrie des NEWTON-Verfahrens I: Iterative Quadratwurzelberechnung

Die Vorgehensweise ist bekannt: Ist $x^i \in \mathbf{R}$ eine Näherung für $(\pm)\sqrt{a}$ und Δx^i der Fehler, dann ist dessen Berechnung aus $(x^i + \Delta x^i)^2 = a$ eine quadratische Aufgabe. Die Vernachlässigung von $(\Delta x^i)^2$ linearisiert das Problem, liefert einen fehlerhaften Fehler δx^i und mit diesem die gleiche bessere Näherung wie das NEWTON-Verfahren in Gestalt der Vorschrift ⁴⁾

$$(5) \quad x^i \rightarrow x^{i+1} = \frac{x^i + \frac{a}{x^i}}{2} \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Mit einem $x^0 \in \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{a}, 0, \sqrt{a}\}$ beginnend, berechnet sie x^{i+1} aus x^i durch *einen NEWTON-Schritt*. Der Schritt kann in die *zwei Halbschritte* gemäß

$$(5_1) \quad x^i \rightarrow x^{i,5} := \frac{a}{x^i} \quad \text{und} \quad (5_2) \quad x^{i,5} \rightarrow x^{i+1} := \frac{x^i + x^{i,5}}{2}$$

zerlegt werden.

Der *erste Halbschritt* (5₁) bildet den Punkt x^i der x -Achse $y = 0$ auf den Schnitt(punkt) der Polaren von x^i bezüglich der Parabel p bzw. des Kreises k mit der x -Achse ab; Bild 2.

Die Polarität in bezug auf die Parabel p bzw. den Kreis k ist auf die x -Achse eingeschränkt. Das Bild (d. i. für k das zur y -Achse parallele Geradenbüschel) wird mit der x -Achse geschnitten und induziert auf ihr die Abbildung *Spur des Polarsystems der Parabel p bzw. des Kreises k auf der x -Achse*, die sog. *Spurpolarität*; sie ist eine *Involution*, deren Fixpunkte die Lösungspunkte der Aufgabe sind.

Das Ausüben der Polarität verlangt, die Ebene E^2 durch ihre uneigentliche Gerade \hat{u} projektiv abzuschließen: $E^2 \rightarrow \mathbf{E}^2 = E^2 \cup \hat{u}$. Fallenlassen der Auszeichnung von \hat{u} als uneigentliche Gerade macht \mathbf{E}^2 zur projektiven Ebene \mathbf{P}^2 . Es stehe \hat{x} für die projektiv abgeschlossene wie für die projektive x -Achse. Der erste Halbschritt (5₁) ist projektiv-invariant.

Der *zweite Halbschritt* (5₂) ist eine *Mittelpunktbildung*. In der projektiven Ebene \mathbf{P}^2 beruht sie auf der als uneigentlich ausgezeichneten Geraden \hat{u} . Durch Wahl einer Geraden, die nicht durch u_o geht, aber nicht notwendig von \hat{u} verschieden ist und sogleich wieder mit \hat{u} bezeichnet werde, als uneigentliche Gerade des projektiven Abschlusses einer (anderen) affinen Ebene durch die x -Achse, wird eine 'andere' Mittelpunktbildung festgelegt. Sie ist aber nur eine Modifikation des zweiten Halbschritts. Mit $u = \hat{u} \cap \hat{x}$ als uneigentlichem Punkt der

⁴⁾ Vgl. etwa STRUBECKER, K.: *Einf. i. d. höhere Mathematik*, Bd. I: *Grundlagen*. München ¹1956, S. 37 f.

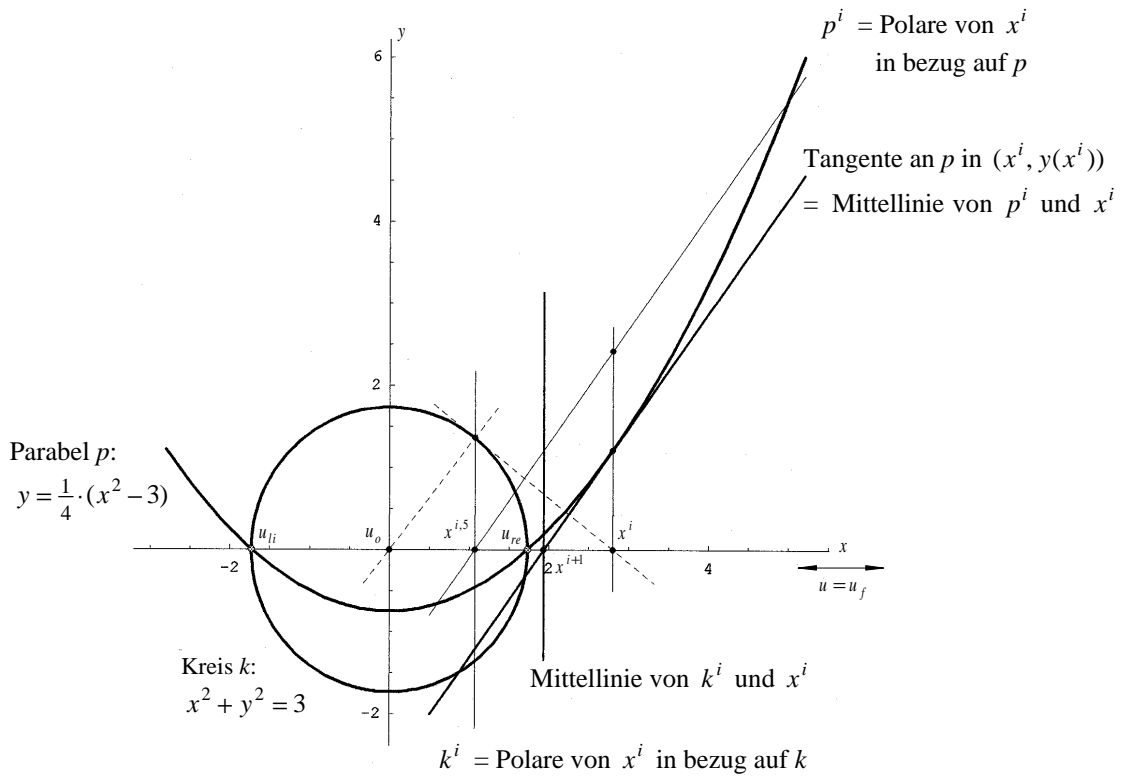


Bild 2. Die in bezug auf Parabel p oder Kreis k auf den Iterationspunkt x^i ausgeübten Polaritäten realisieren im Schnitt mit der x -Achse den 1. Halbschritt und liefern je den Punkt $x^{i,5}$. Der 2. Halbschritt erfolgt je durch den Schnitt der Mittelgeraden von x^i und den Polaren von x^i in bezug auf die Parabel p oder den Kreis k mit der x -Achse und ergibt den nächsten Iterationspunkt x^{i+1} .

(projektiven) x -Achse ist für die vier Punkte $\{x^i, x^{i,5}, x^{i+1}, u\}$ kennzeichnend, daß sie ein harmonisches Punktequadrupel bilden, daß also ihr Doppelverhältnis den Wert

$$Dv(x^i, x^{i,5}; x^{i+1}, u) = -1$$

hat. Durch Rechnung in homogenen Koordinaten auf der x -Achse folgt:

Ist $u = (u_0 \ u_1)^T$ der (alte oder neue) uneigentliche Punkt von \hat{x} und $x^i = (x_0^i \ x_1^i)^T$, so stellen sich der 1. Halbschritt und 2. Halbschritt sowie der Ganzschritt dar gemäß

$$x^i = \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \end{pmatrix} \longrightarrow x^{i,5} = \begin{pmatrix} x_0^{i,5} \\ x_1^{i,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^i \\ a \cdot x_0^i \end{pmatrix},$$

$$(6) \quad x^{i,5} = \begin{pmatrix} x_0^{i,5} \\ x_1^{i,5} \end{pmatrix} \longrightarrow x^{i+1} = \begin{pmatrix} x_0^{i+1} \\ x_1^{i+1} \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} a(x_0^{i,5})^2 + (x_1^{i,5})^2 \\ 2ax_0^{i,5}x_1^{i,5} \end{pmatrix} - u_1 \begin{pmatrix} 2x_0^{i,5}x_1^{i,5} \\ a(x_0^{i,5})^2 + (x_1^{i,5})^2 \end{pmatrix}$$

und

$$(7) \quad x^i = \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \end{pmatrix} \longrightarrow x^{i+1} = \begin{pmatrix} x_0^{i+1} \\ x_1^{i+1} \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} a(x_0^i)^2 + (x_1^i)^2 \\ 2ax_0^ix_1^i \end{pmatrix} - u_1 \begin{pmatrix} 2x_0^ix_1^i \\ a(x_0^i)^2 + (x_1^i)^2 \end{pmatrix}.$$

Aus (6) und (7) ist abzulesen, daß x^{i+1} sowohl in x^i als auch in $x^{i,5}$ ein Urbild hat. Das Berechnen der Urbilder von x^{i+1} ist in der Tat eine quadratische Aufgabe, und wie diese zwei Lösungen konstruktiv zu erhalten sind, wird sich in Abschnitt 3.2 beiläufig ergeben.

Für den originalen uneigentlichen Punkt $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T =: u_f$ der x Achse folgt aus (7) mit

$$(8) \quad x^i = \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \end{pmatrix} \longrightarrow x^{i,5} = \begin{pmatrix} x_1^i \\ a \cdot x_0^i \end{pmatrix} \longrightarrow x^{i+1} = \begin{pmatrix} 2x_0^i x_1^i \\ a(x_0^i)^2 + (x_1^i)^2 \end{pmatrix}$$

die vertraute Iterationsvorschrift. Für sie ist der Mittelpunkt $u_o := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ von k , das ist der in bezug auf k [wie in bezug auf p] zu u_f konjugierte Punkt, als 'verbotener' Startpunkt bekannt: Das Bild von u_o ist 'schon' im 1. Halbschritt der uneigentliche Punkt u_f , und der bleibt im 2. Halbschritt erhalten. Es folgt, daß die Abbildung "NEWTON-Schritt" $x^i \rightarrow x^{i+1}$ den Fixpunkt u_f hat, der sich aber als *abstoßender Fixpunkt* erweist. Die Punkte u_f und u_o liegen in bezug auf k [wie in bezug auf p] konjugiert. Die Lösungspunkte u_{li} und u_{re} sind Fixpunkte, und zwar *anziehende Fixpunkte*, und *reguläre Nullstellen* der Aufgabe.

Für $u = u_f$ gilt spätestens ab $i = 1$: Entweder liegen die x^i links von u_{li} und die $x^{i,5}$ zwischen u_{li} und u_o oder die x^i liegen rechts von u_{re} und die $x^{i,5}$ zwischen u_o und u_{re} . In der ersten Situation ist u_{li} für die x^i "nach rechts" *anziehender* und für die $x^{i,5}$ "nach links" *anziehender Fixpunkt*, in der zweiten Situation ist u_{re} für die x^i "nach links" *anziehender* und für die $x^{i,5}$ "nach rechts" *anziehender Fixpunkt*; Bild 3. Für Startpunkte x^0 mit u_{li} als Zielpunkt ist $x^0 < 0$, für die mit u_{re} als Ziel ist $x^0 > 0$ kennzeichnend – nur hier ist die Situation so einfach!

Vertauschen der Rollen von u_f und u_o , also die Wahl von $u = u_o$ als uneigentlichen Punkt der x -Achse, ist einem Ausüben der Spurinvolutions auf die Punkte von \hat{x} gleichwertig, vertauscht somit die Rollen der x^i und $x^{i,5}$.

Diese Betrachtungen lassen sich wortwörtlich wiederholen, wenn ein von u_f oder u_o (und u_{li} , u_{re}) verschiedener Punkt u als uneigentlicher Punkt gewählt wird. Die Lösungspunkte u_{li} und u_{re} bleiben erhalten. Die Wahl hat zufolge (7) die Wirkung einer *projektiven Transformation* auf die originalen 2. Iterationshalbschritte nach (8). Das werde unter Verwendung der Indizes u und u_f so notiert:

$$\begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} -u_1 & u_0 \\ au_0 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \end{pmatrix}_{u_f}.$$

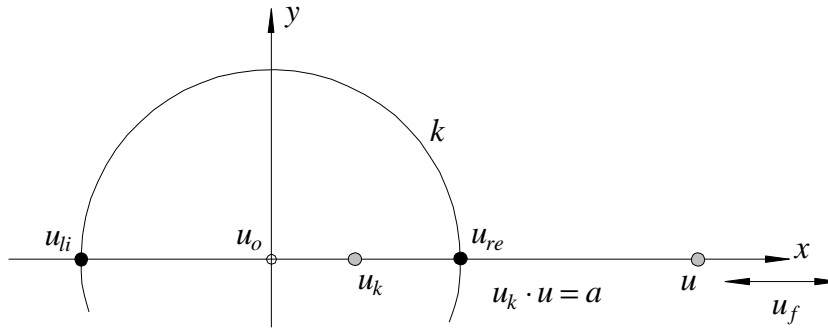


Bild 3. Uneigentlicher Punkt u und der in bezug auf den Kreis k konjugierte Punkt u_k von u .
Die 'einseitig' anziehenden Fixpunkte u_{li} und u_{re} und der 'beidseitig' abstoßende Fixpunkt u .

Die projektive Version der iterativen Quadratwurzelberechnung ist hier nur angedeutet worden. Sie erweist sich als so material- und beziehungsreich, daß sie an einer anderen Stelle weiter ausgeführt werden soll!

Die für das Beispiel in \mathbf{R} durchgeführte Zerlegung eines NEWTON-Schritts $x^i \rightarrow x^{i+1}$ in Teilschritte $x^i \rightarrow x^{i,5} \rightarrow x^{i+1}$ soll nun allgemein für algebraische Gleichungssysteme in \mathbf{R}^n mit entsprechend verallgemeinerter geometrischer Deutung vollzogen werden.

1 Das NEWTON-Verfahren

Für ein Gleichungssystem aus n Gleichungen $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$ in n Unbekannten x_1, \dots, x_n (über \mathbf{R} [oder über \mathbb{C}]), das mit geläufigen Verabredungen in der Form

$$(9) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad : \text{ Nullstellenaufgabe im } \mathbf{R}^n$$

notiert wird, kann mit dem NEWTON-schen Verfahren unter gewissen hinreichenden Voraussetzungen, die i. a. nicht geprüft werden können, näherungsweise eine Lösung iterativ ermittelt werden. Es beruht auf folgendem

Satz ⁵⁾: Ist \mathbf{x}_0 eine reguläre Nullstelle von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und \mathbf{x}^0 ein zugehöriger Startpunkt, dann strebt die Folge

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - \mathbf{f}_x^{-1}(\mathbf{x}^i) \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

gegen \mathbf{x}_0 .

Die Folge $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots\}$ heißt eine NEWTON-Folge, \mathbf{x}^i der i -te Iterationspunkt, und die Zuordnung

$$\mathbf{x}^i \longrightarrow \mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - \mathbf{f}_x^{-1}(\mathbf{x}^i) \mathbf{f}(\mathbf{x}^i)$$

werde ein NEWTON-Schritt, gegebenenfalls der i -te NEWTON-Schritt, genannt.

⁵⁾ Vgl. etwa SCHWETLICK, H.: *Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen*. Berlin 1979, S. 96 f., S. 281 f.

Für diesen n -dimensionalen Fall ist die *geometrische Deutung* des NEWTON-Schritts bekannt: Der \mathbf{R}^n wird als Hyperebene $x_{n+1} = 0$ in den \mathbf{R}^{n+1} eingebettet. Im i -ten NEWTON-Schritt wird für $j = 1, \dots, n$ an die Hyperfläche $x_{n+1} = f_j(\mathbf{x})$ im Punkt $(\mathbf{x}^i, f_j(\mathbf{x}^i))$ [= der mit $f_j(\mathbf{x}^i)$ ko-tierte i -te Iterationspunkt \mathbf{x}^i] die Tangentialhyperebene gelegt. Diese n Hyperebenen treffen die Hyperebene $x_{n+1} = 0$ im $(i+1)$ -ten Iterationspunkt \mathbf{x}^{i+1} .

2 Projektive Version des NEWTON-Verfahrens für algebraische Gleichungssysteme

2.0 Allgemeine Vorgehensweise. Sei nun (9) ein *algebraisches Gleichungssystem*. Dann gibt es nach dem in **0.2** für $n = 1$ gelieferten Muster eine Zerlegung jedes NEWTON-Schritts in zwei *Halbschritte*. Die geometrischen Konstruktionen, denen sie entsprechen, werden an den Anfang gestellt.

Zunächst wird der durch einen \mathbf{R}^n dargestellte Raum E^n durch seine uneigentliche Hyperebene \hat{u} zu $\mathbf{E}^n = E^n \cup \hat{u}$ projektiv abgeschlossen und zum projektiven Raum \mathbf{P}^n erweitert. Dann denke man sich die Gleichungen $f_i = 0$ des Gleichungssystems (auf eine gewisse Weise, s. u.) homogenisiert, so daß jede (unter Beibehaltung der Bezeichnung) eine algebraische Fläche f_i im projektiven Raum \mathbf{P}^n beschreibt. Jede dieser Flächen f_i besitzt ein Polarsystem p_i , das einem Punkt x im allgemeinen eindeutig eine Polarhyperebene $p_i(x) =: \hat{x}_i$ zuordnet. Der allgemeine Fall ist, daß die Polarhyperebenen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ unabhängig liegen, so daß ihr eindeutig bestimmter gemeinsamer Punkt in bezug auf jede der Flächen zu x konjugiert ist. Die so beschriebene simultane Wirkung der n Polarsysteme auf die Punkte des \mathbf{P}^n definiert eine (Punkt \rightarrow Punkt)-Abbildung im \mathbf{P}^n . Sie ist, BRAUNER ⁶⁾ folgend, *die Abbildung n -fach konjugierter Punkte in bezug auf die algebraischen Flächen f_1, \dots, f_n* . Man könnte sie aber auch, um auf eine kurze Bezeichnung zu kommen und im Anschluß an **0.2**, als *den Schnitt oder die Spur der n Polarsysteme p_i im \mathbf{P}^n* , etwa als *die n -fache Polarenspur in bezug auf die f_i* bezeichnen. Jedenfalls dient sie als Übertragung des 1. Halbschritts in den zu \mathbf{P}^n erweiterten, durch \mathbf{R}^n beschriebenen E^n . Der 2. Halbschritt wird durch Wählen einer Hyperebene \hat{u} als uneigentliche Hyperebene und Vorschreiben eines gewissen Doppelverhältnisses (s. u.) geleistet. In dem Maße, wie Kenntnisse insbesondere über Abbildungen n -fach konjugierter Punkte zur Verfügung stehen, können für diese Gleichungssysteme Aussagen über globale Eigenschaften des NEWTON-Verfahrens nicht nur hinsichtlich des 1. Halbschritts gewonnen werden. – Es wird wie folgt vorgegangen:

⁶⁾ BRAUNER, W.: *Geometrie projektiver Räume I*, Mannheim ...¹1976, S. 204.

Für $i = 1, \dots, n$ ist jetzt f_i ein (inhomogenes) Polynom in x_1, \dots, x_n vom Grad $m_i (> 0)$. Die Gleichungen $f_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) beschreiben *algebraische Flächen* f_i mit den angegebenen Graden als Ordnungen im Raum \mathbf{R}^n , der – wie üblich – mit einem affinen oder euklidischen Raum identifiziert wird ⁷⁾. Die *Nullstellen-Aufgabe* wird gewissermaßen ausdrücklich zu einer *Schnitt-Aufgabe*. Durch Einführen homogener Koordinaten werden die Flächen im projektiv-erweiterten Raum \mathbf{E}^n des \mathbf{E}^n dargestellt ⁸⁾. Sie erhalten alle den gleichen Grad M , indem eine natürliche Zahl M mit $M \geq M_0 = \max \{m_1, \dots, m_n\}$ gewählt wird und die Fläche f_i vom Grad m_i um die uneigentliche Hyperebene $x_0 = 0$ mit der Vielfachheit $M - m_i$ ergänzt wird ⁹⁾. So bekommt jede Fläche f_i ein *Polarsystem*, das den Grad M hat ¹⁰⁾. Für einen Punkt x ist die $(M - 1)$ -te Polarhyperfläche bezüglich der Fläche f_i eine Hyperebene. Sie heißt *die Polarhyperebene* von x bezüglich der Fläche f_i . Formal kann sie aus der 1. Polarhyperfläche von x in bezug auf f_i , welche vom Grad $M - 1$ ist, durch Vertauschen der Variablenreihen hergestellt werden. Hierin und in der EULER-Identität drückt sich *die Eigenschaft* von f_i aus, *Polynom zu sein*. Im einzelnen geht das so:

2.1 Polarformen. Je nach Situation werde das $(n + 1)$ -Tupel (y_0, \dots, y_n) mit y oder mit (y_0, \mathbf{y}) abgekürzt, analog für (x_0, \dots, x_n) . Sei nun $f(\mathbf{x})$ ein beliebiges der Polynome $f_i(\mathbf{x})$, sein Grad gleich m und M eine natürliche Zahl mit $M \geq m$, dann ist

$$(10) \quad \Phi(x) = \Phi(x_0, \mathbf{x}) := \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n) := x_0^M \cdot f\left(\frac{\mathbf{x}}{x_0}\right)$$

die *homogene Form* von $f(\mathbf{x})$ zum Grad M ($\geq m$) ¹¹⁾. Sie liefert für $x_0 = 1$ das Polynom f zurück. Es ist

$$p(x, \mathbf{y}) = p(x_0, \mathbf{x}; y_0, \mathbf{y}) := \sum_{j=0}^n \Phi_{,x_j}(x_0, \mathbf{x}) \cdot y_j$$

die *Polarform* ('schlechthin') der homogenen Form Φ sowie die *homogene Polarform* der inhomogenen Form f zum Grad M .

⁷⁾ Eine im \mathbf{R}^n gestellte Schnittaufgabe ist ihrer Natur nach keine metrische Aufgabe. Für die Beurteilung der Güte einer Näherung ist eine 'aufgabenfremde' Metrik notwendig.

⁸⁾ Für einen eigentlichen Punkt X ist \mathbf{x} der Vektor aus inhomogenen, x der aus homogenen Koordinaten. Eine Hyperebene ist an einem \wedge zu erkennen, z. B. \hat{u} für die uneigentliche Hyperebene.

⁹⁾ In der Ebene wird bei $M = 2$ eine Geraden zum zerfallenden Kegelschnitt aus dieser und der uneigentlichen Geraden.

¹⁰⁾ Ein anderes Verfahren resultiert, wenn jede Fläche f_i mit einem 'individuellen Grad' $M_i \geq m_i$ versehen wird.

¹¹⁾ Diese Vorgehensweise ist 'kanonisiert', tatsächlich aber kann in der Substitution $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/x_0$ statt x_0 eine Linearform $l_0 = \sum \lambda_i x_i$ in x_0, x_1, \dots, x_n mit $\lambda_0 \neq 0$ (o. B. d. A. gleich 1) genommen werden, so daß $l_0 = 0$ die gewählte uneigentliche Hyperebene ist. Das kann, wie hier, auch auf andere, ebenfalls übliche Weise erfolgen.

Es ist $p(x, y)$ eine *Linearform* in y und eine *homogene Form* in x vom Grad $M - 1$. Die Hyperebene $p(x^*, y) = 0$ heißt sowohl die $(M - 1)$ -te Polarfläche als auch (und hier nur so) die *Polarhyperebene* des Punktes x^* in bezug auf die Fläche $\Phi = 0$ oder Φ bzw. $f = 0$ oder f . Die (algebraische) Fläche $(M - 1)$ -ten Grades $p(x, y^*) = 0$ heißt die 1. Polarfläche des Punktes y^* in bezug auf (die Fläche) Φ bzw. f .

2.2 Konstruktion zweier Halbschritte. Es werden zu einem Punkt x^i in zwei (Halb-)Schritten Punkte $x^{i,5}$ und x^{i+1} konstruiert, von denen gezeigt wird, daß sie die Folge aus 1. und 2. Halbschritt eines NEWTON-Schritts für das algebraische Gleichungssystem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ sind. Dabei ist ein auf das klassische NEWTON-Verfahren zielender *allgemeiner Fall* zu charakterisieren. Es wird ein projektives Kalkül resultieren, das weitere Fälle einzubeziehen gestatten wird.

2.2.1 Ein Polarformensystem und der 1. Halbschritt. Für das System $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ aus n inhomogenen Polynomen in x_1, \dots, x_n mit den Graden m_1, \dots, m_n beziehentlich kann Homogenisieren auf zwei Arten durchgeführt werden:

- Für alle Polynome mit einem 'simultanen' Grad M mit $M \geq M_0 = \max \{m_1, \dots, m_n\}$ oder
- für jedes Polynom mit einem 'individuellen' Grad: Für das j -te Polynom f_j mit einem Grad M_j mit $M_j \geq m_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Hier wird allein die erste Möglichkeit • verfolgt. Dann resultieren mit (10) zu den (inhomogenen) Polynomen f_1, \dots, f_n die homogenen Polarformen zum festen Grad M

$$(11_k) \quad p_k(x, y) = p_k(x_0, \mathbf{x}; y_0, \mathbf{y}) := \sum_{j=0}^n \Phi_{k,x_j} \{x_0, \mathbf{x}\} \cdot y_j \quad (k = 1, \dots, n).$$

Sei $\hat{f}_k := \hat{f}_k(x^i)$ die Polarhyperebene des Punktes x^i bezüglich der Fläche f_k :

$$(12) \quad \hat{f}_k: p_k(x^i, y) = \sum_{j=0}^n \Phi_{k,x_j} \{x_0^i, \mathbf{x}^i\} \cdot y_j = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Von dem Punkt x^i werde vorausgesetzt, daß seine Polarhyperebenen $\hat{f}_1(x^i), \dots, \hat{f}_n(x^i)$ *unabhängig* liegen, und das gehöre zum *allgemeinen Fall*. Ihr (durch Lösen eines linearen Gleichungssystems zu erhaltender) Schnittpunkt wird mit $x^{i,5}$ bezeichnet und zum Ergebnis des *ersten Halbschritts* deklariert:

$$(13) \quad x^{i,5} = \hat{f}_1(x^i) \cap \dots \cap \hat{f}_n(x^i).$$

Ist x^i ein Lösungspunkt des originalen Gleichungssystems, dann stimmen die Punkte x^i und $x^{i,5}$ überein, und dann wird als Ergebnis des 2. Konstruktionsschritts $x^{i+1} = x^i$ festgelegt. Im *allge-*

meinen Fall aber seien die Punkte $x^{i,5}$ und x^i verschieden, und auf ihrer Verbindungsgeraden wird wie folgt ein Punkt x^{i+1} konstruiert.

2.4 Die uneigentliche Hyperebene und der 2. Halbschritt. Im \mathbf{F}^n werde eine Hyperebene \hat{u} , die nicht durch $o = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top$ geht, ausgezeichnet, um in \mathbf{F}^n einen affinen Raum E^n zu installieren, für den \hat{u} der projektive Abschluß ist, also \hat{u} als uneigentliche Hyperebene hat.

Für den Punkt x^i ist zu unterscheiden,

ob die Hyperebene \hat{u} dem n -Bündel seiner Polarhyperebenen $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$ angehört oder nicht,

ob also $x^{i,5} = x^i \in \hat{u}$ oder $x^{i,5} \notin \hat{u}$ ist, entsprechend

ob $x^{i,5}$ und x^i keine oder eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade \hat{v}^i haben.

Ist $x^i \notin \hat{u}$, dann ist für ihre Verbindungsgerade \hat{v}^i zu unterscheiden, ob sie uneigentlich ist oder nicht: $\hat{v}^i \in \hat{u}$ oder $\hat{v}^i \notin \hat{u}$.

Damit soll endlich eine *Charakterisierung des allgemeinen Falls* gegeben werden:

Im *allgemeinen Fall* wird x^i als eigentlicher Punkt gewählt, existiert der Punkt $x^{i,5}$ eindeutig, ist eigentlich und von x^i verschieden. Die Verbindungsgerade \hat{v}^i von x^i und $x^{i,5}$ trifft die uneigentliche Hyperebene \hat{u} in einem Punkt u , und der ergibt sich zu

$$(14) \quad u = \hat{u}^\top x^{i,5} \cdot x^i - \hat{u}^\top x^i \cdot x^{i,5}.$$

Auf der Geraden durch x^i und $x^{i,5}$ wird durch das Doppelverhältnis

$$Dv(x^i, x^{i,5}; x^{i+1}, u) = \frac{1}{1-M}$$

ein mit x^{i+1} bezeichneter Punkt eindeutig festgelegt. Er wird als Ergebnis des *zweiten Halbschritts* definiert und zu dem auf x^i folgenden Iterationspunkt erklärt. Er berechnet sich zu

$$(15) \quad x^{i+1} = (M-1) \cdot \hat{u}^\top x^{i,5} \cdot x^i + \hat{u}^\top x^i \cdot x^{i,5}. \quad ^{12)}$$

Nun wird gezeigt, daß aus den so definierten Halbschritten ein NEWTON-Schritt zusammensetzen ist.

¹²⁾ Der Grad $M = 2$ ist sichtlich besonders interessant: Aus (14) ist abzulesen, daß die Punktepaare aus x^i und $x^{i,5}$ und aus u und x^{i+1} einander harmonisch trennen.

2.3 Für algebraische Gleichungssysteme ergeben die zwei Konstruktionsschritte einen NEWTON-Schritt. Es wird die Standard-Situation angenommen, daß die uneigentliche Hyperebene durch $x_0 = 0$, also durch $\tilde{u} = (1 \ 0 \dots 0)^\top$ beschrieben wird. Für das Polynom $f_k(\mathbf{x})$ ist

$$\Phi_k(x) = \Phi_k(x_0, \mathbf{x}) := \Phi_k(x_0, x_1, \dots, x_n) := x_0^M f_k\left(\frac{\mathbf{x}}{x_0}\right) \quad (k = 1, \dots, n)$$

seine homogene Form zum Grad M . Die Polarform (vergl. (11_k)) werde so geschrieben:

$$(11_k) \quad p_k(x, y) = p_k(x_0, \mathbf{x}; y_0, \mathbf{y}) = \Phi_{k, x_0}(x_0, \mathbf{x}) \cdot y_0 + \sum_{j=1}^n \Phi_{k, x_j}(x_0, \mathbf{x}) \cdot y_j.$$

Die EULERSche Identität, die die Eigenschaft " $\Phi_k(x)$ ist homogenes Polynom" ausdrückt, ist:

$$(E) \quad M \cdot \Phi_k(x_0, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^n \Phi_{k, x_j}(x_0, \mathbf{x}) \cdot x_j = \Phi_{k, x_0}(x_0, \mathbf{x}) \cdot x_0 + \sum_{j=1}^n \Phi_{k, x_j}(x_0, \mathbf{x}) \cdot x_j.$$

Sie erlaubt, für eigentliche Punkte x und y (d. h. bei $x_0 \cdot y_0 \neq 0$) aus der Polarformdarstellung

(11_k) den Term mit Φ_{k, x_0} zu eliminieren:

$$(16) \quad x_0 \cdot p_k(x_0, \mathbf{x}; y_0, \mathbf{y}) = y_0 \cdot M \cdot \Phi_k(x_0, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n \Phi_{k, x_j}(x_0, \mathbf{x}) \cdot (y_j \cdot x_0 - y_0 \cdot x_j).$$

Für eigentliche Punkte x und y kann weiter $x_0 = y_0 = 1$ erreicht werden, und so erhält man in

$$(17) \quad p_k(1, \mathbf{x}; 1, \mathbf{y}) = M \cdot f_k(\mathbf{x}) + f_{k, \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (k = 1, \dots, n)$$

eine inhomogene Darstellung der n Polarformen. Bei algebraischen Gleichungssystemen kann mittels der EULERSchen Identität für eigentliche Punkte die partielle Differentiation nach x_0 jeweils 'kaschiert' werden (ist x ein uneigentlicher Punkt: $x_0 = 0$, so sind notwendig die (11_k) weiter zu verwenden). Mit $p_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}) := p_k(1, \mathbf{x}; 1, \mathbf{y})$ wird (17) besser geschrieben als

$$(18) \quad p_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = M \cdot f_k(\mathbf{x}) + f_{k, \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (k = 1, \dots, n)$$

Die eigentlichen Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} sind in bezug auf die (Hyper-)Flächen f_k zueinander konjugiert, wenn sie alle durch Nullsetzen der inhomogenen Polarformen (18) zu erhaltenden inhomogenen Polargleichungen $p_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 0$ erfüllen und wie üblich zusammengefaßt werden:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} - f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + M \cdot f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}.$$

Ist nun $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ regulär, so liegen die Polarhyperebenen $p_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ von \mathbf{x} in bezug auf die Flächen $f_k = 0$ unabhängig, und zwar solcherart, daß der Punkt

$$(19) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} - M \cdot f_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$$

der eindeutig bestimmte eigentliche Schnittpunkt in \mathbf{E}^n , also ein Punkt von E^n ist und seine Darstellung in \mathbf{R}^n hat. Das ist die 'Realisierung' von (16) für den Fall, daß x und y eigentliche Punkte sind. Ist nun y uneigentlicher Punkt, so ist $f_x(x)$ singular (der Rang des hom. Gleichungssystems für y unverändert gleich n).

Für den Augenblick werde wieder x statt x^i , y statt $x^{i,5}$ und z statt x^{i+1} geschrieben. Man sieht:

Es ist y gemäß (19) der aus x durch den ersten Halbschritt sich ergebende Punkt.

Im Falle x mit $f(x) = \mathbf{o}$ (d. h. x ist Lösungspunkt der Aufgabe) ist $y = x$. Im anderen Fall haben x und y eine Verbindungsgerade, auf der im Ergebnis des zweiten Halbschritts der Punkt

$$z = x + \frac{1}{M}(y - x) = \frac{1}{M}((M-1)x + y) = x - f_x^{-1}(x) \cdot f(x),$$

erhalten wird: Im Sinne des festgelegten allgemeinen Falles wird also zu x , das den Punkt x^i angibt, durch y der Punkt $x^{i,5}$ und durch z der Punkt x^{i+1} beschrieben.

2.6 Zur Geometrie des Newton-Verfahrens II. Für algebraische Gleichungssysteme erweisen sich (12), ..., (15) als ein *Kalkül*, das 1) auf das bekannte 'inhomogene' NEWTON-Verfahren führt, 2) das dem originalen NEWTON-Verfahren nicht eigen ist und 3) auf weitere Eigenschaften des Verfahrens jedenfalls für diese Gleichungssysteme führen kann.

Zu 1): Beiläufig folgt: Ist x_0 eine Lösung des algebraischen Gleichungssystems $f(x) = \mathbf{o}$ und geht die durch den Startpunkt x^0 definierte Folge $x^{i+1} := x^i - f_x^{-1}(x^i) \cdot f(x^i)$ gegen x_0 , so auch die Folge $x^{i,5} := x^i - M \cdot f_x^{-1}(x^i) \cdot f(x^i)$. Für $n = 1$ hat man so zwei, die Lösung x_0 einschachtelnde Folgen $\{x^{i+1}\}$ und $\{x^{i,5}\}$ ¹³⁾.

Zu 2): Die NEWTONsche Iterationsvorschrift ist (unter den für das NEWTONsche Iterationsverfahren charakteristischen Voraussetzungen) für algebraische Gleichungssysteme anders als gewohnt hergeleitet worden. Indem beim NEWTON-Verfahren die beiden Halbschritte nicht in Erscheinung treten, kann gesagt werden, daß das Verfahren für diese Gleichungssysteme unbemerkt oder automatisch alle Polynome zu gleichem, aber unbekanntem, daher frei wählbarem Grad M mit $M \geq M_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$ homogenisiert. Darin drückt sich der universelle Charakter des NEWTON-Verfahrens aus. Es kann über M frei verfügt gedacht werden, wenn nur $M \geq M_0$ eingehalten wird.

¹³⁾ Eine universelle Konstruktion solcher Folgen findet man z. B. in v. MANGOLDT, H.; KNOPP, K.: *Einf. i. d. höhere Mathematik*, 2. Bd. Leipzig ⁹1950, Nr. 38 (S. 97 ff.).

Zu 3): Indem (15) die Ermittlung des uneigentlichen Punktes u [nach (14)] ignoriert oder umgeht, ergeben sich folgende Aussagen:

- Ist x^i eigentlicher, $x^{i,5}$ uneigentlicher Punkt, so ist $x^{i+1} = x^{i,5}$.
- Ist umgekehrt x^i Punkt von \hat{u} , aber nicht $x^{i,5}$, so ist $x^{i+1} = x^i$. Demnach ist für Punkte x^i der uneigentlichen Hyperebene \hat{u} , deren Halbschritt-Punkte $x^{i,5}$ eigentlich sind, die NEWTON-Abbildung $x^i \rightarrow x^{i+1}$ erklärt, und diese Punkt sind *Fixpunkte*, aber *nicht Lösungspunkte* der Aufgabe.
- Sind x^i und $x^{i,5}$ beide in \hat{u} , so ist die Abbildung nicht erklärt (es ist das Bild x^{i+1} von x^i der *Unpunkt*). Das ist insbesondere der Fall, wenn $x^i = x^{i,5}$, d. h. wenn x^i ein Lösungspunkt, also eine nichtreguläre Nullstelle der Aufgabe ist!
- *Zu den geometrischen Interpretationen:* Mit einer algebraischen Hyperfläche sind deren Tangentialhyperebenen und die Polarhyperebenen projektiv-invariant ('erst recht' affin-invariant) verknüpft. Die beiden auf ihnen gegründeten geometrischen Deutungen hängen nach Konstruktion wie folgt miteinander zusammen:

1) Man denke sich die im \mathbf{R}^n gestellte Nullstellenaufgabe $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ wieder in den \mathbf{R}^{n+1} eingebettet, in dem \mathbf{R}^n die Hyperebene \hat{x}_0 sei. Der zu \mathbf{x}^i durch den NEWTON-Ganzschritt konstruierte Punkt \mathbf{x}^{i+1} ergibt sich im Schnitt der Tangentialebenen \hat{t}_k , die in den Punkten $(\mathbf{x}^i, f_k(\mathbf{x}^i))$ an die Flächen $x_{n+1} = f_k(\mathbf{x})$ im \mathbf{R}^{n+1} gelegt werden, mit $x_{n+1} = 0$, also $\mathbf{x}^{i+1} = \hat{t}_1 \cap \dots \cap \hat{t}_n \cap \hat{x}_0$.

2) Im \mathbf{R}^n werden im 1. NEWTON-Halbschritt die Polarhyperebenen \hat{x}_k von \mathbf{x}^i in bezug auf die Flächen $\Phi_k(x) = 0$ konstruiert, deren Schnitt der Punkt $\mathbf{x}^{i,5}$ ist. Die drei Punkte \mathbf{x}^i , $\mathbf{x}^{i,5}$ und \mathbf{x}^{i+1} liegen auf einer Geraden und sind durch das Teilverhältnis $T_V(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i,5}; \mathbf{x}^{i+1}) = 1/(1-M)$ miteinander verknüpft. Für jedes k ist

$$\mathbf{x}^{i+1} \in \hat{t}_k \cap \hat{x}_0, \mathbf{x}^{i,5} \in \hat{x}_k \text{ und } \hat{t}_k \cap \hat{x}_0 \parallel \hat{x}_k.$$

Weiter kann festgestellt werden:

- Liegt ein lineares Gleichungssystem vor, so ist $M_0 = 1$ und die Wahl $M = M_0 = 1$ schließt sich zunächst aus. Wird auf $M = 2$ erhöht, so kann das Verfahren angewendet werden. Es resultiert ein weiteres lineares Gleichungssystem. Dessen Lösungspunkt und der Startpunkt haben als Mittelpunkt die Lösung des Ausgangssystems!
- Zu $M_0 = 2$ gehören die "bevorzugten" Aufgaben: Kegelschnitte, Quadriken untereinander und mit Geraden, Ebenen schneiden, und mit $M = 2$ macht sich, wie schon bemerkt, das Doppelverhältnis -1 interessant! Diese Aufgabenklasse "Schneiden von Kegelschnitten mit Hilfe

des NEWTON-Verfahrens" soll als Experimentiergebiet in Abschnitt **3** dienen und das Verfahren im Unendlichfernen und hinsichtlich der verbotenen Startpunkte untersuchen. Es ergeben sich allem Anschein nach unbekannte Ergebnisse:

- Für das NEWTON-Verfahren sind die uneigentlichen Punkte, die nicht Schnittpunkte sind, *Fixpunkte*, und ein uneigentlicher Schnitt- oder also Lösungspunkt ist ein *abstoßender Punkt*, ohne Fixpunkt der Abbildung zu sein: Die Abbildung ist in einem solchen Punkt nicht erklärt (sie liefert den Unpunkt).
- Die durch $\det[f_x(x)] = 0$ charakterisierten "verbotenen" Startpunkte haben Urbilder, die zwar zulässige, aber nicht zuzulassende Startpunkte sind; qualitative Betrachtungen für ein anderes Beispiel sind von COLLATZ bekannt ¹⁴⁾.

3 Zur Geometrie des NEWTON-Verfahrens III: Schnitt zweier Kegelschnitte

3.0 *Die Aufgabe.* Das zweischrittige NEWTON-Verfahren verhilft zu gewissen globalen Einsichten in die Aufgabe 'Schnitt zweier Kegelschnitte'. An sich verlangt diese Schnittaufgabe, so viele Fälle zu unterscheiden, wie es Schnittkonfigurationen gibt. Das soll hier nicht geleistet werden ¹⁵⁾. Einschränkend werde angenommen:

◆ Das von den beiden Kegelschnitten c_1 und c_2 (über \mathbf{R}) aufgespannte Büschel enthält zwei Parabeln mit verschiedenen uneigentlichen Punkten. – Über eine Schnittpunktfigur wird im konkreten Fall eine Voraussetzung getroffen.

Diese Parabeln treten an die Stelle der originären Kegelschnitte c_1 und c_2 . Sie sind geeignet, qualitativ richtige Skizzen oder Freihandzeichnungen anfertigen zu können, indem man die schon genannte, eine Parabel auszeichnende affine Eigenschaft nutzt: *Die Mittellinie von Punkt und Polare des Punkts in bezug auf die Parabel ist Tangente an die Parabel.*

Auf drei Dinge dieser Aufgabe soll kurz eingegangen werden: In **3.1** die Konstruktion des NEWTON-Schritts aus zwei Halbschritten, in **3.2** die Umkehrung dieser Konstruktion und in **3.3** über zulässige Startpunkte, die auf verbotene Startpunkte führen, d. i. die Frage nach Urbildern von verbotenen Startpunkten.

¹⁴⁾ COLLATZ, L.: *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*. Berlin Göttingen Heidelberg 1964. S. 225 f.: *Beispiel für die Kompliziertheit im großen*.

¹⁵⁾ So aber in SCHERRER, D. N.: *Die 2-polare Abbildung κ und Klassen κ -invarianter Kurven*. Diss. TU München 1998, 123 S. – Aachen [Shaker Verlag] 1998. – S. auch KELLER, O.-H.: *Analytische Geometrie und lineare Algebra*. Berlin ³1968, insbes. S. 360 – 372.

3.1 Die konstruktive Ausführung der zwei Halbschritte zu einem Newton-Schritt. Sei \hat{u} jene gemeinsame Tangente der Kegelschnitte c_1 und c_2 , bezüglich der sie Parabeln sind. Die längs \hat{u} geschlitzte projektive Ebene ist eine affine Ebene mit \hat{u} als projektivem Abschluß, für die sie als uneigentliche Gerade verwendet wird.

Aufgrund der Erkenntnisse des Abschnitts **0.2** über iterative Quadratwurzelberechnung wird ein Start- oder Iterationspunkt gleich außerhalb von c_1 und c_2 gewählt, es kann gleich $i \geq 1$ gedacht werden. Zugleich ist klar, daß eine konvergente NEWTON-Punktfolge in den angedeuteten Winkelräumen auf ihre Zielpunkte streben wird (Bild 7).

Sei c eine der beiden Parabeln und u_c ihr uneigentlicher Punkt, und es sei x^i ein schon ermittelter Iterationspunkt. Der 1. Halbschritt ist: Zum Punkt x^i in bezug auf c die Polare \hat{x}^i konstruieren (Bild 4), und der 2. Halbschritt verlangt: Von Punkt x^i und Polare \hat{x}^i in bezug auf \hat{u} als uneigentlicher Geraden die Mittellinie \hat{m}^i konstruieren (Bild 5).

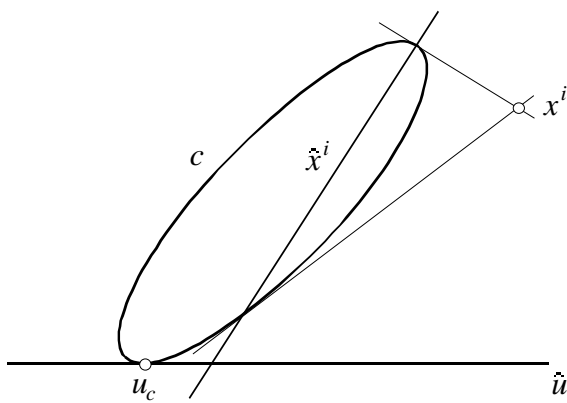


Bild 4. Die Polare \hat{x}^i des Punktes x^i in bezug auf die Parabel c .

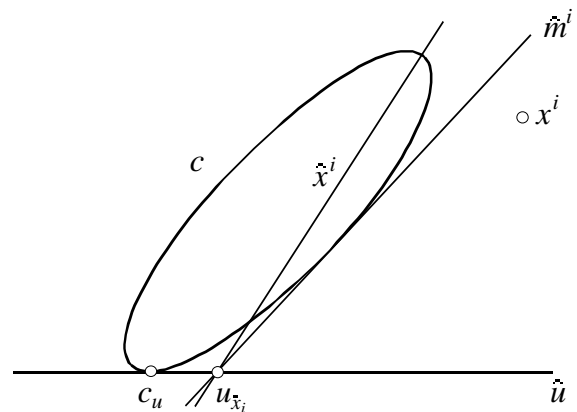


Bild 5. Die Mittellinie \hat{m}^i von Pol x^i und Polare \hat{x}^i

Beim 1. Halbschritt spielt die Gerade \hat{u} keine Rolle, wohl aber beim 2. Halbschritt. Hier gibt es folgende Situationen:

- 1) $x^i \notin \hat{u}$: Das ist der allgemeine Fall. Die Polare \hat{x}^i hat in $u_{\hat{x}^i} = \hat{x}^i \cap \hat{u}$ einen uneigentlichen Punkt, der von u_c verschieden ist, und die von \hat{u} verschiedene Tangente aus $u_{\hat{x}^i}$ an die Parabel c ist die Mittellinie \hat{m}^i .
- 2) $x^i \in \hat{u}$: a) Ist $x^i = u_c$, (genau) dann ist $\hat{x}^i = \hat{u}$, und $u_{\hat{x}^i}$ ist nicht erklärt. b) Ist $x^i \neq u_c$, (genau) dann ist $u_{\hat{x}^i} = \hat{x}^i \cap \hat{u}$ wohl definiert, aber $u_{\hat{x}^i} = u_c$. Beide Male ist der Begriff 'Mittellinie' leer.

Von einem $x^i \notin \hat{u}$ ausgehend und den allgemeinen Fall setzend, sind nun in bezug auf jede der Parabeln c_1 und c_2 die beiden Konstruktionen 1. Halbschritt und 2. Halbschritt auszuführen, und man hat (Bild 6):

$$\begin{array}{l}
 \text{in bezug auf } c_1: \quad x^i \longrightarrow \hat{x}_1^i \longrightarrow \hat{m}_1^i \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \searrow \\
 \text{insgesamt:} \quad x^i \longrightarrow x^{i,5} := \hat{x}_1^i \cap \hat{x}_2^i \longrightarrow x^{i+1} := \hat{m}_1^i \cap \hat{m}_2^i \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \nearrow \\
 \text{in bezug auf } c_2: \quad x^i \longrightarrow \hat{x}_2^i \longrightarrow \hat{m}_2^i
 \end{array}$$

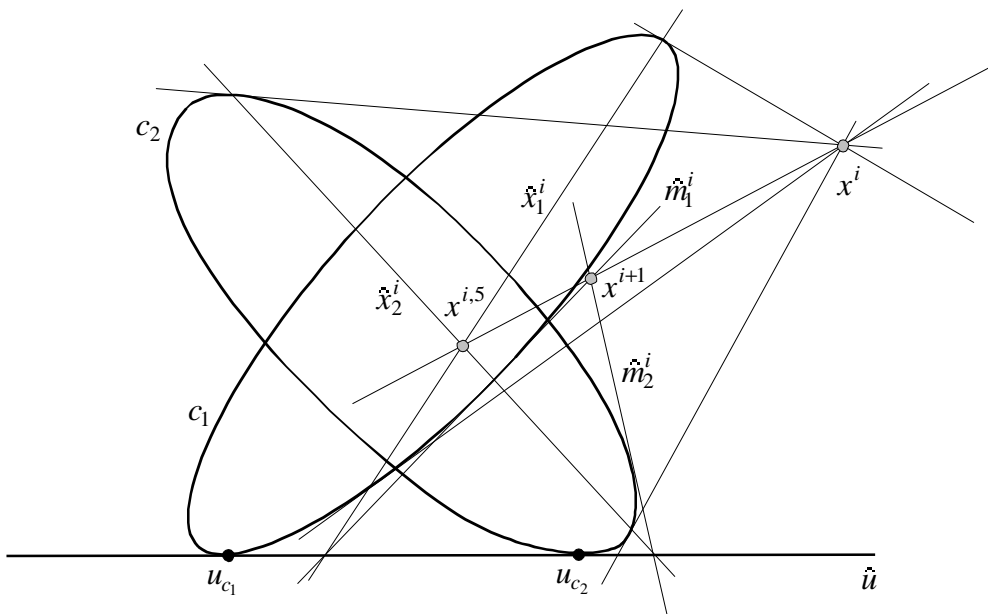


Bild 6. Zu einem Punkt x^i die 1. und 2. Halbschritt-Punkte $x^{i,5}$ und x^{i+1} konstruieren.

Im Falle, daß für einen Punkt x^i gilt: $x^i \notin \hat{u}$ und $x^{i,5} = \hat{x}_1^i \cap \hat{x}_2^i \in \hat{u}$, wirkt die oben begründete Festlegung $x^{i+1} = x^{i,5}$, und das Verfahren bricht nach dem 1. Halbschritt ab. Die Punkte x^i mit dieser Eigenschaft liegen bekanntlich auf der sog. Mittelpunktkurve des Büschels aus den Parabeln c_1 und c_2 ; in der affinen/euklidischen Ebene besteht sie aus den Mitten der Mittelpunktskegelschnitte des Büschels, m. a. W.: Die Mittelpunktkurve besteht aus den zu den Punkten der uneigentlichen Geraden \hat{u} in bezug auf c_1 und c_2 doppelt konjugiert liegenden Punkten jener Kegelschnitte des Büschels, die \hat{u} nicht reell treffen, und im projektiven Abschluß werden die uneigentlichen Punkte u_{c_1} , u_{c_2} der beiden Parabeln c_1 und c_2 hinzugenommen (Bild 7).

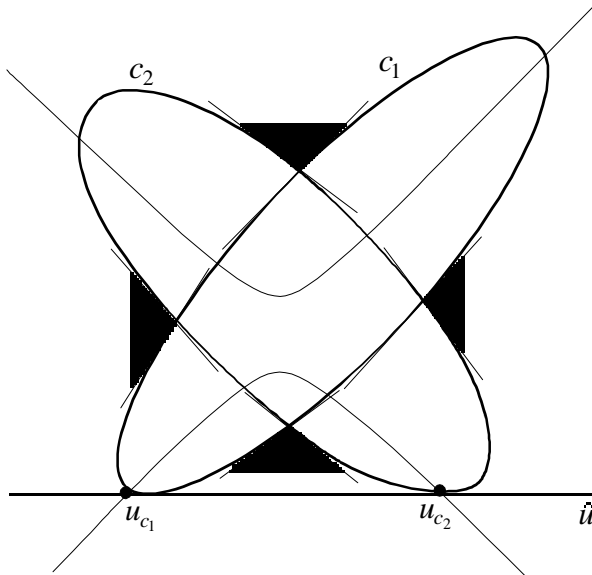


Bild 7. Die Mittelpunktkurve des Büschels aus den Parabeln c_1 und c_2 ist eine Hyperbel durch u_{c_1} und u_{c_2} .

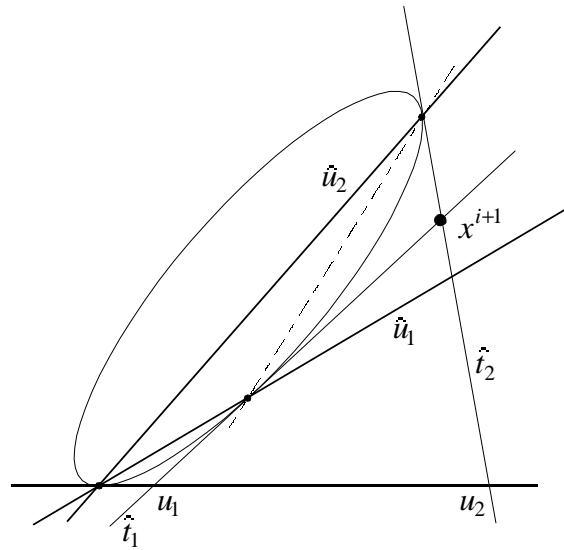


Bild 8. Die Urbilder von x^{i+1} in bezug auf c liegen auf den Geraden \hat{u}_1 und \hat{u}_2 .

Es steht jetzt alles zur Verfügung, um für dieses Beispiel 'Schnitt zweier Kegelschnitte' das Verhalten der NEWTON-Abbildung $x^i \rightarrow x^{i+1}$ aufgrund ihrer Zerlegung $x^i \rightarrow x^{i,5} \rightarrow x^{i+1}$ in zwei Schritte anhand von Grafiken demonstrieren zu können, insbesondere was anziehende Fixpunkte und im Unendlichen abstoßende Fixpunkte und sowie abstoßende Punkte mit dem Unpunkt als Bild angeht. Das werde hier jedoch nicht weiter ausgeführt. Es werde noch ein Blick geworfen auf

3.2 Die Umkehr der zwei Halbschritte. Sei $x^{i+1} \notin \hat{u}$ und außerhalb beider Parabeln c_1 und c_2 gelegen. Sei c einer der beiden Kegelschnitte. Die Bilder 4 und 5 lassen erkennen, wie die Urbilder dieses Punktes x^{i+1} in bezug auf c zu konstruieren sind; **Bild 8**. In bezug auf c sind die Mittellinien, auf denen x^{i+1} liegt, die Tangenten \hat{t}_1 und \hat{t}_2 aus x^{i+1} an c . Deren uneigentlichen Punkte seien u_1 und u_2 , und sichtlich tragen deren Polaren \hat{u}_1 und \hat{u}_2 in bezug auf c die Urbilder x^i von x^{i+1} . Die Konstruktion der beiden Tangenten ist eine quadratische Aufgabe (Schnitt Polare mit Kegelschnitt). Die Konstruktion der Polaren eines uneigentlichen Punktes reduziert sich zu einem linearen Problem. Die Aufgabe, zu x^{i+1} in bezug auf beide Parabeln c_1 und c_2 die Urbilder zu konstruieren, ist vom Grad 4. Hier zerfällt sie aber in zwei quadratische und vier lineare Aufgaben. Es resultieren vier Urbildpunkte; **Bild 9**.

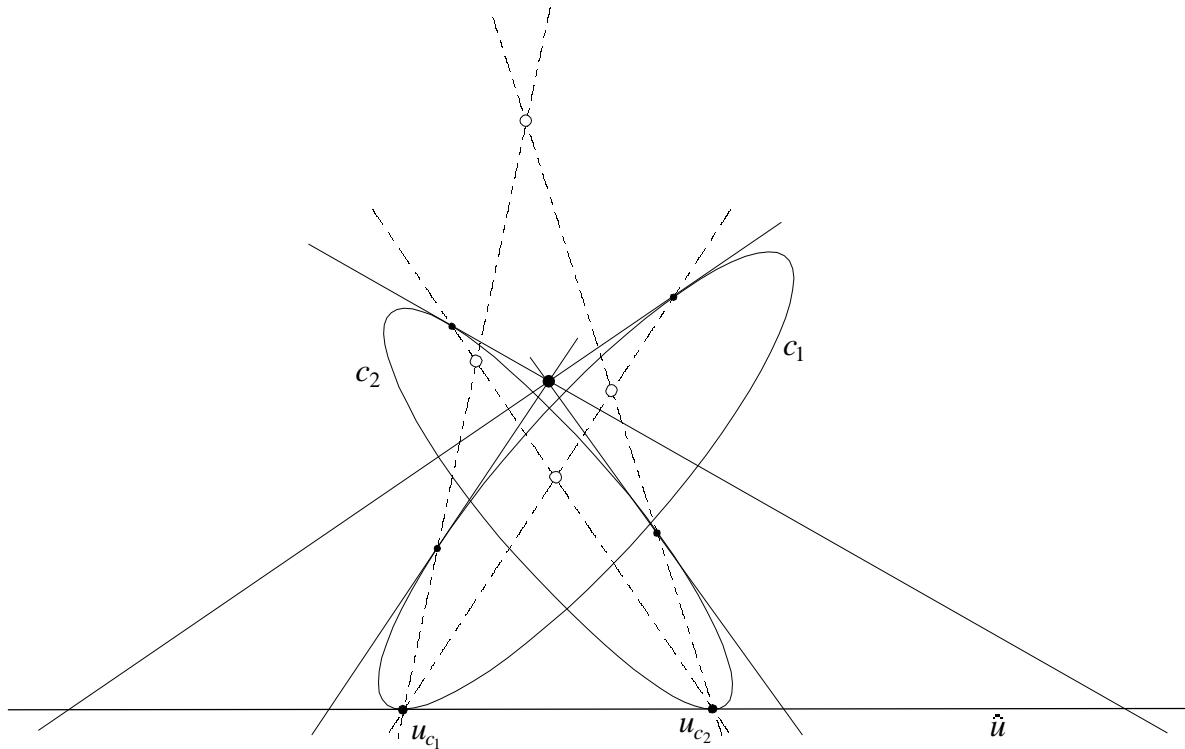


Bild 9. Zu einem eigentlichen Punkt x^{i+1} , der außerhalb beider Parabeln c_1 und c_2 liegt: fetter Punkt, die vier Urbilder x^i_1, x^i_2, x^i_3 und x^i_4 konstruieren: hohle Punkte. Tangenten aus x^{i+1} an die Parabeln: ausgezogene Linien, Polaren der uneigentlichen Punkte dieser Tangenten in bezug auf die Parabeln: gestrichelte Linien.

Ergänzung zum Abschnitt Geometrie des Newton-Verfahrens I: Iterative Quadratwurzelberechnung. Die Ermittlung der Urbilder von x^{i+1} ist eine quadratische Aufgabe, deren konstruktive Lösung in Bild 2 auf zwei Weisen nachgetragen werden kann:

Verwenden der Parabel p : Die Polare von x^{i+1} in bezug auf die Parabel p trifft p in Punkten, deren Projektion aus dem Fernpunkt der Parabel auf die x -Achse die Urbilder sind.

Verwenden des Kreises k : Eine der zur x -Achse parallelen Tangenten an den Kreis k wird zur uneigentlichen Geraden \hat{u} erklärt; sie berühre den Kreis in u_p ('Süd-' oder 'Nordpol') Die Polare von x^{i+1} in bezug auf den Kreis k trifft den Kreis in Punkten, deren Projektion aus dem uneigentlichen Punkt u_p auf die x -Achse die Urbilder sind.

3.3 Über zulässige und auszuschließende Startpunkte. Die Wahl eines Punktes x^i außerhalb von c_1 und c_2 bzw. außerhalb von p resp. k , um entweder den nachfolgenden Iterationspunkt x^{i+1} oder um alle vier resp. zwei Iterationsurbilder x^{i-1}_j ($j \in \{1, 2, 3, 4\}$ bzw. $j \in \{1, 2\}$) zu ermitteln, ist verschiedenen Umständen geschuldet. Diese Wahl ist Teil einer hier nicht angestellten Realitätsuntersuchung. Sie wird auch getroffen, da nur Konstruktionen gefragt sind, die ganz im Reellen verlaufen – um sie durch das Komplexe zu führen, sind die Metho-

den zu fern und der Aufwand zu groß. Und die numerische Mathematik hat ihre Verfahren im wesentlichen über \mathbb{R} entwickelt. Allerdings scheint es nun ausgesprochen paradox zu sein, bei der Aufgabe 'Schnitt zweier Kegelschnitte' zu einer Näherungslösung x^{i+1} nach *schlechteren* Näherungen $x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4, \dots$ gefragt zu haben. Aber ein Blick auf Bild 7 lehrt: Jeder der reellen 'verbotenen Startpunkte' (sie liegen alle auf der Mittelpunktkurve des Büschels aus den Parabeln c_1 und c_2), der außerhalb beider Parabeln liegt, besitzt eine (höchstens abzählbare) Folge aus reellen Urbildern, und von denen ist jeder aus eben diesem Grunde als Startpunkt ebenfalls auszuschließen. Das ist unabhängig von der Schnittpunktkonfiguration. Sind aber alle vier Schnittpunkte reell und verschieden, so gilt: Die iterierten Urbilder der beschriebenen Teile der Mittelpunktkurve, für die bei jedem Schritt die im Inneren der beiden Parabeln liegenden Stücke weggelassen werden, zerlegen die Ebene in komplizierter Weise in Teile. Jeder Punkt solch eines Teils ist Startpunkte zu einem bestimmten Lösungspunkt als Zielpunkt. Nur weil konkrete Rechnung nicht in \mathbb{R} , sondern immer näherungsweise, in der Regel in einer Computer-Arithmetik stattfindet, sind die Startpunkte, welche nicht zugelassen sind, weil sie auf einen verbotenen Iterationspunkt führen, nicht zu bemerken. Für algebraische Gleichungssysteme mit ausschließlich reellen Nullstellen hat jeder Punkt, als Startpunkt genommen, auch einen Zielpunkt, nur ist der nicht notwendig ein Lösungspunkt der Aufgabe. Die Verhältnisse sind nicht einfacher als in dem von COLLATZ (s. Fußnote 14) beschriebenen Beispiel 'Startpunkte des NEWTON-Verfahrens für die Nullstellen einer Kubik mit drei reellen Nullstellen!' Hat eine quadratische Gleichungen komplexe Nullstellen, so wird dies durch das Verhalten weniger Iterationsschritte signalisiert – eine der weiteren interessanten Aufgaben.

Die hier im Erzählerstil gebotenen und sehr unvollständigen Betrachtungen bringen für das NEWTON-Verfahren aus der Sicht der numerischen Mathematik zwar keinen Gewinn, sie decken aber auf, daß zwischen geometrischen Abbildungen und Schritten von Iterationsverfahren sogar aufschlußreiche Beziehungen bestehen können.